DISEÑO DE MÁQUINAS

Un enfoque integrado

Cuarta edición



PEARSON

Robert L. Norton

A = área

C = ubicación del centroide

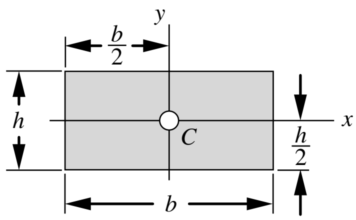
I_x = segundo momento de área con respecto al eje x

I_y = segundo momento de área con respecto al eje y

k_x = radio de giro con respecto al eje x

k_y = radio de giro con respecto al eje y

J_z = segundo momento polar de área con respecto al eje z pasando por C

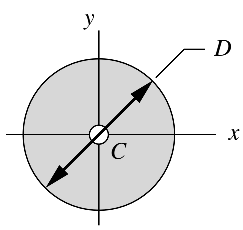


$$A = bh \qquad J_z = I_x + I_y$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{b^3h}{12}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

(a) Rectángulo

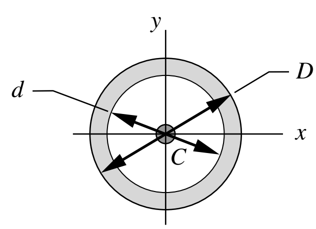


$$A = \frac{\pi D^2}{4} \qquad J_z = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_x = \frac{\pi D^4}{64} \qquad I_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

(b) Círculo

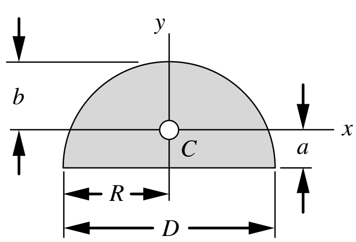


$$A = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) \qquad J_z = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right)$$

$$I_x = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) \qquad I_y = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

(c) Círculo hueco



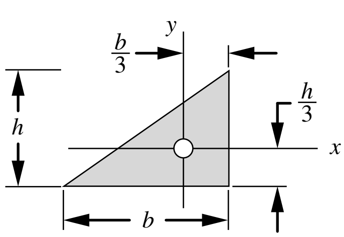
$$A = \frac{\pi D^2}{8} \qquad J_z = I_x + I_y$$

$$I_x = 0.109\,8\,R^4 \qquad I_y = \frac{\pi}{8}R^4$$

$$a = 0.424\,4\,R \qquad b = 0.575\,6\,R$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

(d) Semicírculo sólido



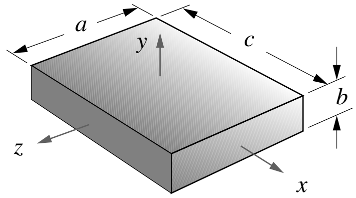
$$A = \frac{bh}{2} \qquad J_z = I_x + I_y$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{b^3h}{36}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

(e) Triángulo rectángulo

V = volumen
m = masa
C_g = ubicación del centro de masa
I_x = segundo momento de masa con respecto al eje x
I_y = segundo momento de masa con respecto al eje y
I_z = segundo momento de masa con respecto al eje z
k_x = radio de giro con respecto al eje x
k_y = radio de giro con respecto al eje y
k_z = radio de giro con respecto al eje z



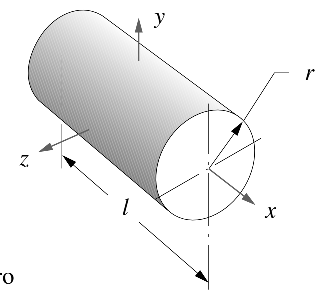
(a) Prisma rectangular

$V = abc$ $\quad m = V \cdot$ densidad de masa

$x_{Cg} @ \dfrac{c}{2}$ $\quad y_{Cg} @ \dfrac{b}{2}$ $\quad z_{Cg} @ \dfrac{a}{2}$

$$I_x = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{12} \qquad I_y = \frac{m\left(a^2 + c^2\right)}{12} \qquad I_z = \frac{m\left(b^2 + c^2\right)}{12}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}} \qquad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}}$$



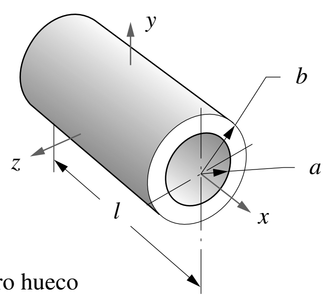
(b) Cilindro

$V = \pi r^2 l$ $\quad m = V \cdot$ densidad de masa

$x_{Cg} @ \dfrac{l}{2}$ $\quad$ sobre el eje y_{Cg} $\quad$ sobre el eje z_{Cg}

$$I_x = \frac{mr^2}{2} \qquad I_y = I_z = \frac{m\left(3r^2 + l^2\right)}{12}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \qquad k_y = k_z = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$



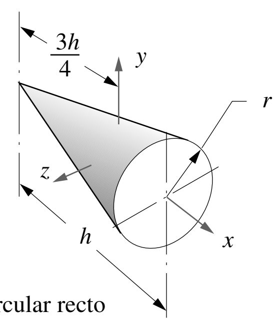
(c) Cilindro hueco

$V = \pi\left(b^2 - a^2\right)l$ $\quad m = V \cdot$ densidad de masa

$x_{Cg} @ \dfrac{l}{2}$ $\quad$ sobre el eje y_{Cg} $\quad$ sobre el eje z_{Cg}

$$I_x = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{2} \qquad I_y = I_z = \frac{m\left(3a^2 + 3b^2 + l^2\right)}{12}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \qquad k_y = k_z = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$



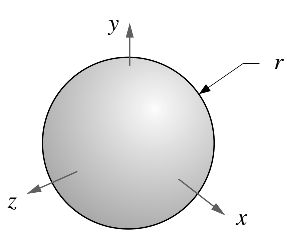
(d) Cono circular recto

$V = \pi \dfrac{r^2 h}{3}$ $\quad m = V \cdot$ densidad de masa

$x_{Cg} @ \dfrac{3h}{4}$ $\quad$ sobre el eje y_{Cg} $\quad$ sobre el eje z_{Cg}

$$I_x = \frac{3}{10} mr^2 \qquad I_y = I_z = \frac{m\left(12r^2 + 3h^2\right)}{80}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \qquad k_y = k_z = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$



(e) Esfera

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\quad m = V \cdot$ densidad de masa

x_{Cg} en el centro $\quad y_{Cg}$ en el centro $\quad z_{Cg}$ en el centro

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} mr^2$$

$$k_x = k_y = k_z = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$

DISEÑO DE MÁQUINAS

Un enfoque integrado

Cuarta edición

Robert L. Norton

Traducción:
Antonio Enríquez Brito
Traductor especialista en Ingeniería Mecánica

Revisión técnica:
Sergio Saldaña Sánchez
Ángel Hernández Fernández
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
(ESIME), Zacatenco
Instituto Politécnico Nacional

Mario Acevedo Alvarado
Universidad Panamericana

Prentice Hall

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

NORTON, ROBERT L.

DISEÑO DE MÁQUINAS
Un enfoque integrado

Cuarta edición

Pearson Educación, México, 2011

ISBN: 978-607-32-0589-4

Área: Ingeniería

Formato 21 × 27 cm Páginas: 888

ISBN 9780136123705

Edición en español

Editor:	Luis Miguel Cruz Castillo e-mail: luis.cruz@pearsoned.com
Editor de desarrollo:	Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción:	Rodrigo Romero Villalobos

CUARTA EDICIÓN, 2011

D.R. © 2011 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5o. piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-0589-4
ISBN VERSIÓN E-BOOK: 978-607-32-0590-0
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-0591-7

PRIMERA IMPRESIÓN
Impreso en México. Printed in Mexico.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 14 13 12 11

Prentice Hall
es una marca de

PEARSON

www.pearsoneducacion.net

ACERCA DEL AUTOR

Robert L. Norton obtuvo las licenciaturas en ingeniería mecánica y tecnología industrial en la Northeastern University, así como una maestría en diseño de ingeniería en la Tufts University. Está registrado como ingeniero profesional en Massachusetts. Tiene amplia experiencia en diseño y manufactura de ingeniería industrial, y muchos años de experiencia como docente de ingeniería mecánica, diseño de ingeniería, ciencias de la computación, y materias afines en la Northeastern University, la Tufts University y el Worcester Polytechnic Institute.

Trabajó 10 años en la corporación Polaroid, diseñando cámaras, mecanismos afines y maquinaria automática de alta velocidad. Pasó tres años en Spray Cooler Inc., diseñando maquinaria y productos para el manejo de alimentos. Participó durante cinco años en el desarrollo de un corazón artificial y de dispositivos no invasivos de circulación asistida (sincronía cardiaca) en el Tufts New England Medical Center y en el Boston City Hospital. Desde que dejó la industria para unirse a la academia, continuó como consultor independiente en proyectos de ingeniería que van desde productos médicos desechables hasta maquinaria de producción de alta velocidad. Tiene 13 patentes en Estados Unidos.

Desde 1981 Norton ha estado en la facultad del Worcester Polytechnic Institute y actualmente es Profesor Distinguido Milton P. Higgins II de ingeniería mecánica, Instructor Distinguido Rusell P. Searle, jefe del grupo de diseño en ese departamento, y director del Centro de Proyectos Gillette en el Worcester Polytechnic Institute. Da clases en la licenciatura y posgrado de ingeniería mecánica con énfasis en diseño, cinemática, vibraciones, y dinámica de maquinaria.

Es autor de diversos artículos técnicos y periodísticos que cubren cinemática, dinámica de maquinaria, diseño de levas y manufactura, computadoras en la educación, y educación en ingeniería, así como de los libros de texto *Design of Machinery* y *Cam Design and Manufacturing Handbook*. Es miembro de la junta de gobierno en la American Society of Mechanical Engineers y es integrante de la Society of Automotive Engineers. Pero, como su principal interés es la enseñanza, está más orgulloso del hecho de que, en 2007, fue seleccionado como *Profesor del Año en Estados Unidos*, por el estado de Massachussetts, por el *Council for the Advancement and Support of Education (CASE)* y la *Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching*, quienes otorgaron conjuntamente por primera vez el premio nacional de excelencia en la enseñanza que se otorga en Estados Unidos de América.

Este libro está dedicado a:

Donald N. Zwiep

Rector, Jefe de Departamento, y Profesor Emérito
Worcester Polytechnic Institute

Un caballero y un líder,
sin cuya fe y previsión,
este libro nunca se habría escrito.

Contenido

CAPÍTULO 10 DISEÑO DE RESORTES 647

CAPÍTULO 11 TORNILLOS Y SUJETADORES 721

El siguiente material se encuentra en español en el sitio Web del libro:

Prefacio

Introducción

Este libro está dirigido a los cursos de *Diseño de elementos de máquinas* que generalmente se imparten en los primeros semestres de la mayoría de los programas de ingeniería mecánica. Los prerrequisitos comunes son un curso introductorio de *Estática y dinámica* y otro de *Resistencia de materiales*. El propósito de esta obra es presentar la materia de forma actualizada, con gran énfasis en el diseño. El nivel es adecuado para estudiantes tanto principiantes como avanzados de ingeniería mecánica. La meta principal fue escribir un texto que fuera muy fácil de leer y que también los usuarios disfrutaran su estudio, no obstante la aridez intrínseca del tema.

Este material fue diseñado para mejorar los libros que actualmente existen, así como para ofrecer métodos y técnicas que aprovechen totalmente el análisis asistido por computadora. El texto enfatiza tanto el análisis como el diseño y la síntesis. Los problemas resueltos, los estudios de caso y las técnicas de solución se explican con todo detalle y son relativamente independientes. En cada capítulo hay problemas cortos y, donde resulte adecuado, se incluyen tareas de diseño más significativas de proyectos no estructurados.

El libro es independiente de cualquier programa específico de computadora. En el CD-ROM contiene los archivos con las soluciones de todos los ejemplos y estudios de caso, escritos en varios lenguajes diferentes (Mathcad, MATLAB, Excel y TK Solver). También se proporcionan como archivos ejecutables varios programas escritos por el autor. Éstos incluyen un generador del círculo de Mohr (MOHR.exe), un calculador de esfuerzo dinámico superficial (CONTACT.exe), un solucionador de matrices (MATRIX.exe) y varios programas de diseño de eslabones y levas. En el disco se encuentra también la tabla de contenido del CD-ROM.

Si bien el libro intenta ser integral en los temas de ingeniería mecánica relacionados con el análisis y la teoría de fallas, también destaca los aspectos de diseño y síntesis de la materia, en mayor grado que la mayoría de los demás textos existentes sobre el tema. Señala los enfoques analíticos comunes necesarios para diseñar una gran variedad de elementos y resalta la aplicación de la ingeniería asistida por computadora, como un enfoque para el diseño y análisis de este tipo de problemas. El enfoque del autor para este curso se basa en 50 años de experiencia práctica en el diseño de ingeniería mecánica, tanto en la industria como en la consultoría. También ha enseñado el diseño en ingeniería mecánica a nivel universitario durante 30 de esos 50 años.

¿Qué hay de nuevo en la cuarta edición?

- Un capítulo nuevo acerca del diseño de soldaduras presenta los datos y métodos más recientes sobre el tema.
- El apéndice sobre análisis de elementos finitos (FEA) se amplió con soluciones de FEA adicionales para los estudios de caso que se desarrollan en los primeros capítulos.
- En el CD-ROM se incluyen las soluciones de FEA de modelos espaciales para varios estudios de caso.
- El CD-ROM contiene modelos espaciales de muchos problemas asignados de geometría, con la finalidad de acelerar las soluciones de FEA de esos problemas a juicio del instructor.
- En el capítulo 11 sobre sujetadores se presenta una nueva técnica de cálculo de rigidez de juntas atornilladas.
- Se agregaron o se revisaron aproximadamente 150 problemas para enfatizar las unidades del SI.

Filosofía

A menudo éste es el primer curso que los estudiantes de ingeniería mecánica ven que les presenta retos de diseño, en vez de problemas de elaboración de piezas. Sin embargo, el tipo de diseño que se estudia en este curso es de *diseño detallado*, el cual tan sólo es una parte del espectro total del proceso de diseño. En el diseño detallado, el concepto general, la aplicación e incluso la forma general del dispositivo requerido, generalmente se conocen desde el principio. No se trata de inventar un nuevo dispositivo, sino que se intenta definir la forma, el tamaño y el material del elemento de una máquina específica, de manera que no falle en las condiciones de carga y ambientales que se esperan durante el servicio.

El enfoque tradicional en la enseñanza del curso de *Elementos* ha sido enfatizar el diseño de piezas o elementos de una máquina individual, como engranes, resortes, ejes, etcétera. La crítica que algunas veces se hace al curso de *Elementos* (o al libro de texto) es que se convierte fácilmente en un "libro de cocina", con temas inconexos que no preparan al estudiante para resolver otro tipo de problemas que no sean los de las recetas. Existe un riesgo en este hecho. Es relativamente fácil para el instructor (o autor) permitir que el curso (o texto) degenere al modo: "Bueno, es martes, diseñemos resortes; el viernes diseñaremos engranes". Si esto sucede, se causaría un perjuicio al estudiante, ya que de esa manera no necesariamente desarrolla una comprensión fundamental de la aplicación práctica de las teorías subyacentes en los problemas de diseño.

Sin embargo, muchos de los elementos de máquinas que por lo general se abordan en este curso brindan ejemplos magníficos acerca de la teoría subyacente. Si se ven desde esa óptica y se presentan en un contexto general, pueden ser un vehículo excelente para que el estudiante desarrolle una comprensión integral de las teorías relevantes y complejas de la ingeniería. Por ejemplo, el tema de tornillos precargados es perfecto para introducir el concepto de preesfuerzo, utilizado como un remedio contra cargas de fatiga. Quizás en la práctica el estudiante nunca vaya a diseñar un tornillo precargado, no obstante, él o ella utilizarán bien el conocimiento de preesfuerzo obtenido de esta manera. El diseño de engranes helicoidales para soportar cargas variables en el tiempo brinda un excelente vehículo para desarrollar en el estudiante la comprensión de los esfuerzos combinados, los esfuerzos hertzianos y la falla por fatiga. De modo que el enfoque en los *elementos* es válido y defendible en la medida en que el enfoque adoptado en el texto sea lo suficientemente global. Es decir, no se debería permitir que degenere en un conjunto de ejercicios sin relación aparente; por el contrario, se tiene que proporcionar un enfoque integral.

Otra área donde el autor ha encontrado que textos (y cursos de *Elementos de máquinas*) presentan deficiencias es en la falta de conexión entre la dinámica de un sistema y el análisis de esfuerzo de ese sistema. Generalmente, esos textos exponen los elementos de máquinas con fuerzas (mágicamente) predefinidas sobre ellos. Luego, se muestra al estudiante cómo determinar los esfuerzos y las deflexiones causadas por dichas fuerzas. En el diseño de máquinas reales, las fuerzas no siempre están predefinidas y pueden deberse, en gran parte, a las aceleraciones de las masas de las piezas en movimiento. Sin embargo, las masas no se pueden determinar exactamente hasta que se define la geometría y se realiza un análisis de esfuerzos, para determinar la resistencia de la pieza supuesta. Entonces, hay un punto muerto que sólo se resuelve con iteración, es decir, se supone una geometría de la pieza y se definen sus propiedades geométricas y de masa, se calculan las cargas dinámicas debidas en parte al material y a la geometría de la pieza. Luego se calculan los esfuerzos y las deflexiones resultantes a partir de estas fuerzas, se averigua si falla, se rediseña y se vuelve a empezar.

El enfoque integral

El texto se divide en dos partes. La primera parte presenta los fundamentos de esfuerzos, deformación unitaria, deflexión, propiedades de los materiales, teorías de falla, fenómenos de fatiga, mecánica de fractura, FEA, etcétera. Estos aspectos teóricos se presentan de manera similar a la de otros textos. La segunda parte presenta los tratamientos de los elementos de diseño específicos comunes, utilizados como ejemplos de aplicaciones de la teoría, pero también intenta evitar la presentación de un conjunto de temas dispares, en favor de un enfoque integral que vincule los diferentes temas mediante los *estudios de caso*.

La mayoría de los textos de *Elementos* contienen mucho más temas y más contenido del que se puede cubrir en un curso semestral. Antes de escribir la primera edición de este libro, se envió un cuestionario a 200 catedráticos estadounidenses del curso de *Elementos*, con la finalidad de solicitarles sus opiniones sobre la importancia y la conveniencia de los temas recurrentes en un texto de *Elementos*. En cada revisión a la segunda, tercera y cuarta ediciones, los usuarios fueron consultados de nueva cuenta, para determinar qué debería cambiarse o agregarse. Se analizaron y usaron las respuestas para modificar la estructura y el contenido de este libro en todas las ediciones. Una de las solicitudes más fuertemente expresada originalmente por los consultados fue que los *estudios de caso* trataran problemas de diseño reales.

Hemos intentado cumplir con esta petición, estructurando el texto en torno a una serie de diez estudios de caso, los cuales presentan diferentes aspectos del mismo problema de diseño en capítulos sucesivos; por ejemplo, la definición de cargas estáticas o dinámicas en el capítulo 1, el cálculo de esfuerzos debidos a cargas estáticas en el capítulo 2, y la aplicación de la teoría de falla adecuada para determinar su factor de seguridad en el capítulo 3. Los capítulos posteriores presentan estudios de caso más complejos, con mayor contenido de diseño. El estudio de caso del capítulo 4 sobre diseño contra la fatiga es un ejemplo de un problema real tomado de la práctica del autor como consultor. El apéndice C presenta el análisis de elementos finitos de varios de estos estudios de caso, y compara tales resultados con las soluciones clásicas obtenidas en capítulos anteriores.

A lo largo del libro, los estudios de casos brindan una serie de proyectos de diseño de máquinas, que contienen diversas combinaciones de los elementos generalmente tratados en este tipo de textos. Los ensambles contienen un conjunto de elementos como eslabones sujetos a cargas axiales y de flexión combinadas, miembros de columnas, ejes que combinan flexión y torsión, engranajes bajo cargas alternantes, resortes de regreso, sujetadores bajo cargas de fatiga, cojinetes de rodamiento, etcétera. Este enfoque integral tiene varias ventajas. Presenta al estudiante un problema de diseño general en el contexto adecuado, en vez de un grupo de entidades dispares y sin relación. Entonces, el estudiante observa las interrelaciones y los fundamentos lógicos de las decisiones de diseño que afectan los elementos individuales. Estos estudios de casos más integrales se encuentran en la parte II del texto. Los estudios de caso de la parte I están más limitados en alcance y están orientados a los temas de ingeniería mecánica del capítulo. Además de los estudios de caso, cada capítulo incluye una selección de ejemplos resueltos para reforzar temas específicos.

El apéndice D, Estudios de caso de diseño, está dedicado a la organización de tres estudios de caso sobre diseño, los cuales se usan en los últimos capítulos para reforzar los conceptos detrás del diseño y el análisis de ejes, resortes, engranes, sujetadores, etcétera. No todos los aspectos de estos estudios de caso de diseño se tratan como ejemplos resueltos, ya que otro objetivo consiste en ofrecer material para la asignación de tareas de proyecto al estudiante. El autor utilizó con mucho éxito estos temas de estudio de caso, como tareas de proyecto para varias semanas, o de largo plazo, para grupos de estudiantes o algún estudiante en particular. La asignación de tareas de proyecto abierto-cerrado sirve para reforzar mucho mejor los aspectos de análisis y diseño del curso, que partes de tarea para realizar en casa.

Grupos de problemas

La mayoría de los 790 problemas (590 o 75%) son independientes dentro del capítulo, en respuesta a las solicitudes de los usuarios de la primera edición para independizarlos. El otro 25% de los problemas aún están construidos sobre capítulos sucesivos. Estos problemas relacionados tienen el mismo número en cada capítulo y su número de problema está en **negritas** para indicar su continuidad entre capítulos. Por ejemplo, el problema 1-4 requiere el análisis de fuerza estática sobre el gancho de un remolque; el problema 2-4, un análisis de esfuerzo del mismo gancho con base en las fuerzas calculadas en el problema 1-4; el problema 3-4, el factor de seguridad estático para el gancho usando los esfuerzos calculados en el problema 2-4; el problema 4-4, un análisis de falla por fatiga del mismo gancho; y el problema 5-4, un análisis de esfuerzo superficial. El mismo gancho del remolque se usa como un estudio de caso para FEA en el apéndice C. De modo que, la complejidad subyacente del problema de diseño

se extiende conforme se introduce un nuevo tema. Un profesor que desee usar este enfoque puede asignar problemas con el mismo número identificador en capítulos subsiguientes. Si uno no quiere asignar un problema anterior sobre el cual se basa uno posterior, se puede dar al estudiante los datos de la solución del problema anterior. Los profesores a quienes no les gusta vincular problemas tienen la opción de descartarlos completamente y elegir de entre los 590 problemas con números de problema sin negritas que son independientes de otros capítulos.

Organización del texto

El capítulo 1 presenta un repaso del análisis de cargas estáticas y dinámicas, incluyendo vigas, vibración y cargas de impacto; asimismo, establece una serie de estudios de caso que se utilizan en capítulos posteriores, con la finalidad de ilustrar los temas del análisis de esfuerzo y deflexión con cierta continuidad.

El curso *Diseño de elementos de máquinas*, en esencia, es realmente un curso de análisis de esfuerzo aplicado de nivel intermedio. Por lo tanto, en el capítulo 2 se ofrece un repaso de los fundamentos del análisis de esfuerzo y deflexión. Las teorías de falla estática se presentan con detalle en el capítulo 3, ya que el estudiante generalmente no cuenta todavía con conocimientos sólidos acerca de tales conceptos, a partir de su curso introductorio de análisis de esfuerzo. También se introduce el análisis de la mecánica de la fractura para cargas estáticas.

El curso de *Elementos* suele ser el primer contacto del estudiante con el análisis de fatiga, ya que la mayoría de los cursos de introducción al análisis de esfuerzos únicamente tratan con problemas de carga estática. Por lo tanto, se presenta con todo detalle la teoría de falla por fatiga en el capítulo 4, con énfasis en los enfoques de esfuerzo-vida para el diseño contra fatiga de alto-ciclo, el cual por lo general se utiliza en el diseño de maquinaria giratoria. Además, la teoría de la mecánica de la fractura se analiza en relación con la propagación de una grieta en condiciones de carga cíclica. No se presentan los métodos de análisis con base en la deformación por fatiga de bajo ciclo; sin embargo, se introduce al lector en su aplicación y objetivos, junto con referencias bibliográficas para un estudio más detallado. También se abordan los esfuerzos residuales. El capítulo 5 presenta una discusión completa sobre los mecanismos de los fenómenos de desgaste, esfuerzos de contacto superficiales y fatiga superficial.

La parte II del texto presenta el diseño de elementos de máquinas en el contexto de las piezas como una máquina completa. Los capítulos de la parte II son básicamente independientes entre sí y se pueden estudiar (o saltar) en cualquier orden que el instructor desee (excepto el capítulo 8 sobre engranes rectos, que debe estudiarse antes del capítulo 9 sobre engranes helicoidales cónicos y tornillos sin fin). Es improbable que todos los temas del libro se cubran en un curso de un semestre. Los capítulos no cubiertos servirán como una referencia para los ingenieros durante su vida profesional.

El capítulo 6 investiga el diseño de ejes usando las técnicas de análisis de fatiga desarrolladas en el capítulo 4. En el capítulo 7 se analiza la teoría de la película de fluido y de cojinetes de rodamiento y su aplicación, usando la teoría desarrollada en el capítulo 5. El capítulo 8 ofrece una introducción meticulosa a la cinemática, y al análisis de diseño y esfuerzos en engranes rectos, mediante los procedimientos más recientes recomendados por la AGMA. El capítulo 9 amplía el diseño de engranes a engranajes helicoidales cónicos y tornillos sin fin. El capítulo 10 cubre el diseño de resortes incluyendo los resortes helicoidales de compresión, de extensión y de torsión, así como un tratamiento meticuloso de los resortes Belleville. El capítulo 11 trata de tornillos y sujetadores, incluyendo tornillos de potencia y sujetadores precargados. El capítulo 12 es un tratamiento actualizado del diseño de ensambles soldados para cargas tanto estáticas como dinámicas. El capítulo 13 introduce al diseño y a la especificación de embragues de disco y tambor, y de frenos.

Con la finalidad de hacer que este libro fuera más accesible, los apéndices se incluyen sólo en su página Web (pearsoneducacion.net/norton). El apéndice A ofrece una introducción al proceso de diseño, la formulación de problemas, los factores de seguridad y las unidades. En el apéndice B se revisan las propiedades de los materiales, en vista de que incluso el

estudiante que ha tenido un primer contacto con la ciencia de los materiales, o la metalurgia, suele tener un conocimiento superficial del amplio espectro de las propiedades de materiales en ingeniería, que son necesarios para el diseño de máquinas.

El apéndice C es una introducción al análisis de elementos finitos (FEA). Muchos profesores usan el curso de elementos de máquinas para introducir a los estudiantes al FEA, así como para instruirlos en las técnicas de diseño de máquinas. El material del capítulo 8 no intenta sustituir la enseñanza de la teoría del FEA. Ese material está disponible en muchos otros libros de texto dedicados a la materia y se sugiere que el estudiante se familiarice con la teoría del FEA mediante un taller o estudiándola por su cuenta. En cambio, el apéndice C presenta las técnicas adecuadas para la aplicación del FEA para resolver problemas prácticos de diseño de máquinas. Los temas de selección de elementos, afinación de engranaje y definición de condiciones limitantes adecuadas se desarrollan con cierto detalle. Estos asuntos por lo general no se tratan en los libros de teoría del FEA. En la actualidad, muchos ingenieros en activo usarán en la práctica de su vida profesional, el software de modelado espacial CAD y el código comercial del análisis de elementos finitos. Es importante que tengan algún conocimiento de las limitaciones y la aplicación adecuada de tales herramientas. Si se desea, este apéndice se puede tomar con anticipación en el curso, sobre todo cuando los estudiantes esperan usar el FEA para resolver las tareas asignadas. Es relativamente independiente de los otros capítulos. En varios capítulos, muchos de los problemas asignados como tareas tienen modelos en Solidworks de su geometría, incluidos en el CD-ROM. El apéndice D presenta un conjunto de estudios de caso de diseño que se usan como tareas y como estudios de caso de ejemplo en los últimos capítulos del libro y, también, proporciona un conjunto de proyectos de diseño sugeridos como tarea, junto con los estudios de caso detallados, como se describió anteriormente. Los demás apéndices contienen datos de resistencia de materiales, tablas de vigas y factores de concentración de esfuerzos, así como las respuestas de problemas seleccionados.

Complementos (en inglés)

En el sitio Web del libro, está disponible un **manual de soluciones** para los profesores y, además, se encuentran **diapositivas en PowerPoint** de todas las figuras y tablas del texto (protegidas con *password*) en:

www.pearsoneducacion.net/norton

Para la descarga de estos recursos, seleccione **Instructor Support** para registrarse como un profesor y siga las instrucciones en el sitio para obtener los recursos que se ofrecen. Los archivos Mathcad de soluciones a todos los problemas tienen la solución en el manual. Este enfoque computarizado de las soluciones a problemas tiene ventajas significativas para el profesor, ya que cambia con facilidad los datos de cualquier problema y lo resuelve instantáneamente. De modo que se dispone de un suministro infinito de problemas, mucho más allá de los definidos en el texto. El instructor también puede preparar y resolver fácilmente problemas, cambiando únicamente los datos en los archivos proporcionados.

Cualquiera puede descargar información complementaria acerca de la organización y operación del curso del autor (planes de estudios, proyectos de tarea, etcétera) del sitio Web en la universidad del autor en:

http://www.me.wpi.edu/People/Norton/design.html

Las erratas que se descubran se colocarán en el sitio de Web personal del autor en:

http://www.designofmachinery.com/MD/errata.html

Los profesores que adopten el libro pueden registrarse en el Website personal del autor para obtener información adicional relevante acerca de la materia y el texto, y descargar software actualizado (protegido con *password*). Vaya a:

http://www.designofmachinery.com/registered/professor.html

Cualquiera que compre el libro puede registrarse en el Website personal del autor para solicitar software actualizado de la edición actual (protegido con *password*). Vaya a:

http://www.designofmachinery.com/registered/student.html

Reconocimientos

El autor desea expresar su aprecio sincero a todos quienes revisaron la primera edición del texto en las diferentes etapas de su desarrollo, incluyendo a los profesores J. E. Beard, Michigan Tech; J. M. Henderson, U. de California, Davis; L. R. Koval, U. de Missouri, Rolla; S. N. Kramer, U. de Toledo; L. D. Mitchell, Virginia Polytechnic; G. R. Pennock, Purdue; D. A. Wilson, Tennessee Tech; Sr. John Lothrop; y al profesor J. Ari-Gur, Western Michigan University, quien también enseño a partir de una versión de prueba del texto. Robert Herrmann (WPI-ME '94) proporcionó algunos problemas y Charles Gillis (WPI-ME '96) resolvió la mayoría de los conjuntos de problemas de la primera edición.

Los profesores John R. Steffen de la Valparaíso University, R. Jay Conant de Montana State, Norman E. Dowling del Virginia Polytechnic, y Francis E. Kennedy de Dartmouth, hicieron muchas sugerencias útiles para mejorar y detectar muchos errores. Una gratitud especial al profesor Hartley T. Grandin de WPI, quien brindó mucho aliento y muchas buenas sugerencias e ideas meticulosas durante la gestación del libro, y también dio clases a partir de varias versiones de prueba.

Los tres editores anteriores y actuales de Prentice Hall merecen una mención especial por su esfuerzo en el desarrollo de este libro: Doug Humphrey, quien nunca aceptó un no por respuesta al persuadirme para escribirlo; Bill Stenquist, quien usualmente dijo que sí a mis peticiones y condujo sabiamente el libro para completar la primera edición; y Eric Svendsen, quien ayudó a llevar a impresión la tercera edición y agregó valor al libro. La asesoría de Tacy Quinn ayudó a poner en orden la impresión de la cuarta edición.

Como desde la primera impresión del libro en 1995, varios usuarios han reportado amablemente errores y sugerido mejoras. Mi agradecimiento a los profesores R. Boudreau de U. Moncton, Canadá, V. Glozman de Cal Poly Pomona, John Steele de Colorado School of Mines, Burford J. Furman de San José State University, y Michael Ward de California State University, Chico.

Muchos otros catedráticos han sido lo suficientemente amables para señalar errores y ofrecer críticas constructivas, así como sugerencias para mejorar las ediciones más recientes. Entre éstos destacan los profesores Cosme Furlong del Worcester Polytechnic Institute, Joseph Rencis de la University of Arkansas, Annie Ross de la Universite de Moncton, Andrew Ruina de la Cornell University, Douglas Walcerz del York College, y Thomas Dresner de Mountain City, CA.

El Dr. Duane Miller de la Lincoln Electric Company brindó ayuda invaluable con el capítulo 12 sobre ensambles soldados y revisó varios borradores. El profesor Stephen Covey de la St. Cloud State University, y los ingenieros Gregory Aviza y Charles Gillis de Gillette de P&G también dieron retroalimentación valiosa sobre el capítulo de ensambles soldados. El profesor Robert Cornwell de la Seattle University revisó el estudio del capítulo 11 acerca de su nuevo método para el cálculo de rigidez en juntas atornilladas, así como de su método de cálculo de concentración de esfuerzos en resortes de alambre rectangular, estudiados en el capítulo 10.

Los profesores Fabio Marcelo Peña Bustos de la Universidad Autónoma de Manizales, Caldas, Colombia, y Juan L. Balsevich-Prieto de la Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción, Asunción, Paraguay, fueron lo suficientemente amables para señalar erratas en la traducción al español.

Debo agradecer especialmente a William Jolley de la compañía Gillette que creó los modelos de FEA en los ejemplos y revisó el apéndice C, y a Edwin Ryan, vicepresidente retirado de ingeniería en Gillette, quien brindó asesoría invaluable. Donald A. Jacques de la división UTC Fuel Cells de la United Technologies Company también revisó el apéndice C sobre el análisis de elementos finitos e hizo muchas sugerencias útiles. El profesor Eben C. Cobb del Worcester Polytechnic Institute y su estudiante Thomas Watson crearon los modelos Solidworks de muchos problemas de tarea y estudios de caso, y resolvieron con el FEA los estudios de caso que se encuentran en el CD-ROM.

Le debo gratitud a varias personas que respondieron encuestas de la cuarta edición e hicieron muy buenas sugerencias: Kenneth R. Halliday de la Ohio State University, Mohamed B. Trabia de la University of Nevada Las Vegas, H.J. Summer III de Penn State University, Rajeev Madhavan Nair de Iowa State University, Ali P. Gordon de la University of Central Florida, Robert Jackson de Auburn University, Cara Coad de Colorado School of Mines, Burford J. Furman de la San José State University, Steven J. Covey de la St. Cloud State University, Nathan Crane de University of Central Florida, César Augusto Álvarez Vargas de la Universidad Autónoma de Manizales, Caldas, Colombia, Naser Nawayseh de Dhofar University, Oman, Hodge E. Jenkins de Mercer University, John Lee de San José State University, Mahmoud Kadkhodaei de Isfahan University of Technology, Steve Searcy de Texas A&M University, Yesh P. Singh de University of Texas en San Antonio, y Osornio C. Cuitláhuac de la Universidad Iberoamericana en Santa Fe, México.

El autor tiene una gran deuda con Thomas A. Cook, profesor emérito, de la Mercer University, quien elaboró el manual de soluciones de este libro, los ejemplos actualizados de Mathcad y contribuyó en la mayoría de los problemas de esta edición. Gracias también a la Dra. Adriana Hera del Worcester Polytechnic Institute, quien actualizó los modelos de MATLAB y Excel de todos los ejemplos y estudios de casos, y también examinó exhaustivamente sus correcciones.

Finalmente, Nancy Norton, mi infinitamente paciente esposa por los pasados 50 años, se merece elogios renovados por su apoyo y aliento infalibles durante sus muchos veranos de “viudez por el libro”. No lo pude haber logrado sin ella.

Se ha realizado mucho trabajo para eliminar errores de este texto. Cualquier remanente es responsabilidad del autor. Él apreciará enormemente que se le informe sobre cualquier error que aún permanezca, de modo que se corrija en futuras impresiones. Un correo electrónico será suficiente: norton@wpi.edu.

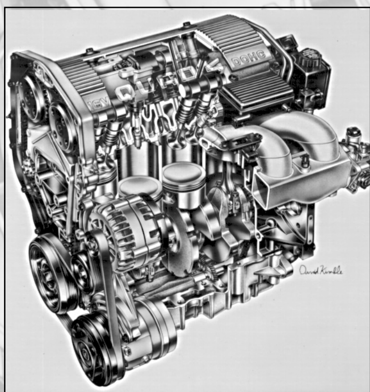
Robert L. Norton,
Mattapoisett, Mass.
1 de agosto de 2009

DISEÑO DE MÁQUINAS

Un enfoque integrado

1

DETERMINACIÓN DE CARGAS



Si un constructor edifica una casa para una persona, su trabajo no es resistente, la casa colapsa y mata a su propietario, el constructor deberá ser ejecutado.

Código de Hammurabi, 2150 a.C.

1.0 INTRODUCCIÓN

Este capítulo ofrece un repaso de los fundamentos del análisis de fuerzas estáticas y dinámicas, fuerzas de impacto y vigas de carga. Se supone que el lector ya tomó cursos sobre estática y dinámica. Por consiguiente, el capítulo sólo presenta un repaso general breve acerca de tales temas, aunque también contiene técnicas de solución poderosas, como el uso de funciones de singularidad para el cálculo de vigas. Se revisa el método de solución newtoniano de análisis de fuerzas y se agregan varios ejemplos de estudio de casos, para reforzar la comprensión de esta materia. El estudio de casos también sienta las bases para el análisis de estos sistemas de esfuerzo, deflexión y modos de falla en los capítulos posteriores.

La tabla 1-0 muestra las variables que se utilizan en este capítulo y da las referencias de ecuaciones, secciones o estudios de caso donde se mencionan. Al final se incluye una sección de resumen, que agrupa las ecuaciones más significativas para facilitar su consulta e identificar la sección del capítulo donde se estudian.

1.1 CLASES DE CARGA

Los tipos de cargas se dividen en varias clases, con base en el carácter de las cargas aplicadas, y la presencia o ausencia de movimiento en el sistema. Una vez que se define la configuración general de un sistema mecánico y se calculan sus movimientos cinemáticos, el siguiente paso consiste en determinar las magnitudes, así como direcciones de todas las fuerzas y los pares que hay en los diferentes elementos. Estas cargas pueden ser constantes o variables con el tiempo. Los elementos en el sistema pueden ser estacionarios o estar en movimiento. La clase más general es un sistema en movimiento con cargas que varían con el tiempo. Las demás combinaciones son variaciones de la clase general.

1

Tabla 1-0 Variables que se usan en este capítulo

Símbolo	Variable	unidades ips	unidades SI	Véase
a	distancia de la carga	in	m	Secc. 1.9
b	distancia de la carga	in	m	Secc. 1.9
d	amortiguamiento	lb-seg/in	N-seg/m	Ec. 1.6
E	energía	in-lb	joules	Ec. 1.9, 1.10
F	fuerza o carga	lb	N	Secc. 1.3
f_d	frecuencia natural amortiguada	Hz	Hz	Ec. 1.7
f_n	frecuencia natural	Hz	Hz	Ec. 1.4
g	aceleración gravitacional	in/seg^2	m/seg^2	Ec. 1.12
I_x	momento de inercia de la masa alrededor del eje *x*	lb-in-seg^2	kg-m^2	Secc. 1.3
I_y	momento de inercia de la masa alrededor del eje *y*	lb-in-seg^2	kg-m^2	Secc. 1.3
I_z	momento de inercia de la masa alrededor del eje *z*	lb-in-seg^2	kg-m^2	Secc. 1.3
k	razón o constante del resorte	lb/in	N/m	Ec. 1.5
l	longitud	in	m	Secc. 1.9
m	masa	lb-seg^2/in	kg	Secc. 1.3
N	fuerza normal	in	m	Caso 4A
M	momento, función de momento	lb-in	N-m	Secc. 1.3, 1.9
q	función de carga de la viga	lb	N	Secc. 1.9
$\mathbf{R}$	vector de posición	in	m	Secc. 1.4
R	fuerza de reacción	lb	N	Secc. 1.9
v	velocidad lineal	in/seg	m/seg	Ec. 1.10
V	función cortante de la viga	lb	N	Secc. 1.9
W	peso	lb	N	Ec. 1.14
x	variable de longitud generalizada	in	m	Secc. 1.9
y	desplazamiento	in	m	Ec. 1.5, 1.8
δ	deflexión	in	m	Ec. 1.5
η	factor de corrección	ninguna	ninguna	Ec. 1.10
μ	coeficiente de fricción	ninguna	ninguna	Caso 4A
ω	velocidad angular o rotacional	rad/seg	rad/seg	Caso 5A
ω_d	frecuencia natural amortiguada	rad/seg	rad/seg	Ec. 1.7
ω_n	frecuencia natural	rad/seg	rad/seg	Ec. 1.4

La tabla 1-1 muestra las cuatro clases posibles. La clase 1 es un sistema estacionario con cargas constantes. Un ejemplo de sistema de clase 1 es la base de una prensa de husillo utilizada en un taller mecánico. Se necesita el bastidor base para soportar el peso muerto de la prensa, el cual, en esencia, es constante en el tiempo y el bastidor base no se mueve. Las piezas que se manejan en la prensa de husillo (al efectuar presión sobre ellas) agregan temporalmente su peso a la carga que actúa sobre la base, pero, en general, se trata de un porcentaje pequeño del peso muerto. El análisis de cargas estáticas es todo lo que se requiere para un sistema de clase 1.

La fotografía de inicio de capítulo es cortesía de la División Chevrolet de la General Motors Co., Detroit, Mich.

Tabla 1-1 Clases de carga

	Cargas constantes	Cargas variables con el tiempo
Elementos estacionarios	Clase 1	Clase 2
Elementos móviles	Clase 3	Clase 4

La clase 2 describe un sistema estacionario con cargas variables en el tiempo. Por ejemplo, aunque es esencialmente estacionario, un puente está sujeto tanto a las cargas variables de los vehículos que circulan sobre él como a la afectación del viento en su estructura. La clase 3 define un sistema en movimiento con cargas constantes. Aun cuando las cargas externas aplicadas sean constantes, cualquier aceleración significativa de los miembros que se mueven puede crear fuerzas de reacción que varían con el tiempo. Un ejemplo sería una cortadora de césped giratoria. Excepto en el caso de cortar por accidente una piedra, cuando se usa las aspas experimentan una carga externa casi constante. No obstante, las aceleraciones de las aspas giratorias pueden crear grandes cargas en sus uniones. El análisis de cargas dinámicas es necesario en las clases 2 y 3.

Observe que si los movimientos en un sistema de clase 3 son tan lentos como para generar aceleraciones insignificantes sobre sus miembros, calificaría como un sistema de clase 1 y, por ende, recibiría el nombre de *casi-estático*. Un gato de tijera para automóvil (véase la figura 1-5, p. 18) se considera un sistema de clase 1, puesto que la carga externa (cuando se utiliza) es en esencia constante y los movimientos de los elementos son lentos con aceleración insignificante. La única complejidad introducida por los movimientos de los elementos en este ejemplo es la determinación de la ubicación, donde las cargas internas sobre los elementos del gato serán máximas, pues varían conforme el gato se eleva, a pesar de que la carga externa es esencialmente constante.

La clase 4 describe el caso general de un sistema que, sujeto a cargas variables en el tiempo, se mueve muy rápido. Observe que incluso si las cargas externas son esencialmente constantes en un caso específico, las cargas dinámicas desarrolladas sobre los elementos, debido a sus aceleraciones, simplemente variarán con el tiempo. La mayoría de las máquinas, sobre todo si se mueven con un motor eléctrico o de gasolina, son de clase 4. Un ejemplo del sistema es el motor de su automóvil. Las piezas internas (cigüeñal, bielas y pistones, entre otros) están sujetas a cargas que varían con el tiempo, por las explosiones de gasolina, pero también experimentan cargas inerciales variables, como consecuencia de sus aceleraciones. Un análisis de carga dinámica es necesario en la clase 4.

1.2 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

Para identificar correctamente todas las fuerzas y los momentos potenciales sobre un sistema, se requiere dibujar con precisión diagramas de cuerpo libre (DCL) para cada miembro del sistema. Estos DCL deben mostrar la forma general de la parte, así como identificar todas las fuerzas y los momentos que actúan sobre ella. Quizás haya fuerzas y momentos externos aplicados a la pieza desde afuera del sistema, así como fuerzas y/o momentos de interconexión ahí donde cada pieza se une o hace contacto con partes adyacentes del montaje o sistema.

Además de las fuerzas, así como de los pares conocidos y desconocidos mostrados en el DCL, se definen las dimensiones y los ángulos de los elementos del sistema con respecto a un sistema de coordenadas local ubicado en los **centros de gravedad** (CG) de cada elemento.* Para el análisis de carga dinámica, las aceleraciones cinemáticas, tanto angular como lineal (en el CG), necesitan conocerse o calcularse para cada elemento, antes de efectuar el análisis de carga.

* Aun cuando no es un requisito que el sistema de coordenadas local esté ubicado en el centro de gravedad, dicho enfoque proporciona consistencia y facilita los cálculos dinámicos. Además, la mayoría de los sistemas de modelado de CAD/CAE calcularán automáticamente las propiedades de la masa de las piezas con respecto a sus centros de gravedad. El enfoque utilizado aquí consiste en aplicar un método consistente que funcione, tanto para problemas estáticos como dinámicos, pero que también sea susceptible de resolverse por computadora.

1.3 ANÁLISIS DE CARGAS

Esta sección presenta un breve repaso de las leyes de Newton y las ecuaciones de Euler, aplicadas a sistemas cargados estática y dinámicamente en tres y dos dimensiones. El método de solución presentado aquí podría ser algo diferente del utilizado en los anteriores cursos de estática y dinámica que el lector haya tomado. El enfoque utilizado aquí, en la aplicación de las ecuaciones en el análisis de fuerzas y momentos, fue diseñado para facilitar la programación de la solución por computadora.

Dicho enfoque supone que todas las fuerzas momentos *desconocidos* en el sistema son de signo positivo, sin importar lo que la intuición personal o una revisión del diagrama de cuerpo libre digan sobre sus direcciones probables. No obstante, se indican los signos de todos los componentes de fuerza *conocidos* con el propósito de definir sus direcciones. La solución simultánea del conjunto de ecuaciones resultante provocará que todos los componentes desconocidos tengan los signos adecuados cuando se llegue a la solución. Se trata, en última instancia, de un enfoque más sencillo que el que se enseña en los cursos de estática y dinámica, los cuales requieren que el estudiante suponga direcciones para todas las fuerzas y los momentos desconocidos (no obstante, ésta es una práctica que le ayuda a desarrollar su intuición). Aun con el enfoque tradicional, un supuesto de dirección incorrecto dará como resultado un signo invertido sobre el componente en la solución. Suponer que todas las fuerzas y los momentos desconocidos son positivos, permite que el programa de computadora resultante sea más sencillo que en cualquier otro caso. El método que se emplea en la solución de ecuaciones simultáneas es bastante sencillo en concepto; sin embargo, se requiere la ayuda de una computadora para resolverlo. Junto con el texto, se proporciona un software para resolver las ecuaciones simultáneas. Véase el programa MATRIX del CD-ROM.

Los sistemas dinámicos reales son tridimensionales; por lo tanto, deben analizarse como tales. Sin embargo, muchos sistemas tridimensionales se analizan con métodos bidimensionales más sencillos. Por consiguiente, se investigarán ambos enfoques.

Análisis tridimensional

Puesto que tres de los cuatro casos requieren potencialmente análisis de carga dinámica, mientras el análisis de fuerza estática es justamente una variante del análisis dinámico, tiene sentido iniciar con el caso dinámico. El análisis de carga dinámica se puede efectuar con cualquiera de varios métodos; no obstante, el que brinda la mayor información acerca de las fuerzas internas es el enfoque newtoniano, que se basa en las leyes de Newton.

PRIMERA LEY DE NEWTON *Un cuerpo en reposo tiende a permanecer en reposo, mientras un cuerpo en movimiento a velocidad constante y en línea recta tenderá a mantener esa velocidad, a menos que actúe sobre él una fuerza externa.*

SEGUNDA LEY DE NEWTON *La razón temporal del momento de un cuerpo es igual a la magnitud de la fuerza aplicada, y actúa en dirección de la fuerza.*

La segunda ley de Newton para un cuerpo sólido se escribe de dos formas, una para fuerzas lineales y otra para momentos o torques:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad\qquad \sum \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{1.1a}$$

donde $\mathbf{F}$ = fuerza, m = masa, $\mathbf{a}$ = aceleración, $\mathbf{M}_G$ = momento con respecto al centro de gravedad y $\dot{\mathbf{H}}_G$ = la razón de tiempo del cambio del momento (*momentum*) o el momento

angular con respecto al CG. Los primeros miembros respectivos de tales ecuaciones suman todas las fuerzas y todos los momentos que actúan sobre el cuerpo, ya sean fuerzas conocidas aplicadas o de interconexiones con cuerpos adyacentes en el sistema.

Para un sistema tridimensional de cuerpos rígidos conectados, la ecuación vectorial de las fuerzas lineales se puede escribir como tres ecuaciones escalares, que incluyen componentes ortogonales a lo largo de un sistema local de ejes coordenados x, y, z con origen en el CG del cuerpo:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \tag{1.1b}$$

Si se eligen coincidentes los ejes x, y, z con los principales ejes de inercia del cuerpo,* el momento angular del cuerpo se define como

$$\mathbf{H}_G = I_x\omega_x\hat{\mathbf{i}} + I_y\omega_y\hat{\mathbf{j}} + I_z\omega_z\hat{\mathbf{k}} \tag{1.1c}$$

donde I_x, I_y e I_z son los principales momentos de inercia centroidales de la masa (segundos momentos de masa) alrededor de los ejes principales. Dicha ecuación vectorial se sustituye en la ecuación 1.1*a* para obtener las tres ecuaciones escalares conocidas como **ecuaciones de Euler**.

$$\begin{aligned}\sum M_x &= I_x\alpha_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\ \sum M_y &= I_y\alpha_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x \\ \sum M_z &= I_z\alpha_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y\end{aligned} \tag{1.1d}$$

donde M_x, M_y, M_z son los momentos alrededor de esos ejes, mientras que α_x, α_y y α_z representan las aceleraciones angulares alrededor de los mismos ejes. Lo anterior supone que los términos de la inercia permanecen constantes en el tiempo, es decir, la distribución de la masa alrededor de los ejes es constante.

TERCERA LEY DE NEWTON *Establece que cuando dos partículas interactúan, en el punto de contacto habrá dos fuerzas de reacción. Estas dos fuerzas tendrán la misma magnitud y actuarán a lo largo de la misma línea de dirección, pero con sentidos opuestos.*

Se requiere aplicar esta relación y la de la segunda ley para determinar las fuerzas sobre los montajes de elementos que actúan uno sobre otro. Las seis ecuaciones 1.1*b* y 1.1*d* se aplican para un cuerpo rígido en un sistema tridimensional. Adicionalmente, se escribirán tantas ecuaciones de fuerzas de reacción (tercera ley) como sean necesarias; como consecuencia, el conjunto de ecuaciones resultantes de fuerzas y momentos se resolverá en forma simultánea. El número de ecuaciones de la segunda ley será hasta seis veces el número de piezas individuales en un sistema tridimensional (más las ecuaciones de reacción), lo cual significa que incluso los sistemas simples dan como resultado grandes conjuntos de ecuaciones simultáneas. Se necesita una computadora para resolver tales ecuaciones; sin embargo, calculadoras de bolsillo de alta calidad resuelven también conjuntos grandes de ecuaciones simultáneas. Las ecuaciones de las fuerzas de reacción (tercera ley) se sustituyen con frecuencia por las ecuaciones de la segunda ley, para reducir el número total de ecuaciones a resolver en forma simultánea.

Análisis bidimensional

Todas las máquinas reales existen en tres dimensiones; por otro lado, muchos sistemas tridimensionales se analizan de manera bidimensional, cuando sus movimientos sólo se dan en un plano o en planos paralelos.

* Ésta es una buena selección para cuerpos simétricos, aunque sería una elección menos conveniente para otras formas. Véase F. P. Beer y E. R. Johnson, *Vector Mechanics for Engineers*, 3a. ed., 1977, McGraw-Hill, Nueva York, cap. 18, "Kinetic of Rigid Bodies in Three Dimensions".

Las **ecuaciones de Euler** 1.1*d* muestran que si los movimientos de rotación (ω, α) y los momentos o pares de fuerzas aplicados existen tan sólo alrededor de un eje (por decir el eje z), por lo tanto, el conjunto de esas tres ecuaciones se reduce a una ecuación,

$$\sum M_z = I_z \alpha_z \tag{1.2a}$$

porque los términos de ω y α alrededor de los ejes x y y ahora son iguales a cero. La ecuación 1.1*b* se reduce a

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \tag{1.2b}$$

Las ecuaciones 1.2 se pueden aplicar a todos los cuerpos interconectados en un sistema bidimensional, así como a la solución simultánea del conjunto completo de fuerzas y momentos. El número de ecuaciones de la segunda ley será ahora hasta tres veces el número de elementos en el sistema, más las ecuaciones de reacción necesarias de todos los puntos conectados, lo cual resulta otra vez en un sistema de ecuaciones grande, incluso para sistemas simples. Observe que aun cuando todo el movimiento se da únicamente alrededor del eje z, en un sistema de dos dimensiones pueden existir componentes de carga en la dirección z debido a fuerzas o pares externos.

Análisis de cargas estáticas

La diferencia entre un escenario de carga dinámica y uno de estática es la presencia, o ausencia de aceleraciones. Si todas las aceleraciones en las ecuaciones 1.1 y 1.2 son iguales a cero; entonces, para el caso tridimensional, estas ecuaciones se reducen a

$$\begin{array}{lll} \sum F_x = 0 & \sum F_y = 0 & \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 & \sum M_y = 0 & \sum M_z = 0 \end{array} \tag{1.3a}$$

y para el caso bidimensional

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_z = 0 \tag{1.3b}$$

Se observa que el escenario de carga estática es justamente un caso especial de un escenario de carga dinámica, donde las aceleraciones son cero. La solución con un enfoque basado en el caso dinámico también funcionará para un caso estático, si se sustituyen adecuadamente los valores iguales a cero de las aceleraciones.

1.4 ESTUDIOS DE CASO DE CARGA ESTÁTICA BIDIMENSIONAL

Esta sección presenta tres estudios de caso de complejidad creciente, todos acotados a escenarios de carga estática en dos dimensiones. La palanca del freno manual de una bicicleta, una pinza de presión y un gato de tijera son los sistemas a analizar. Tales casos presentan los ejemplos de la forma más sencilla del análisis de fuerzas que no tienen aceleraciones significativas, y que tienen fuerzas que actúan tan sólo en dos dimensiones.

ESTUDIO DE CASO 1A

Análisis de carga de la palanca de freno manual de una bicicleta

Problema **Determine las fuerzas, durante el frenado, sobre los elementos del sistema de freno de palanca de una bicicleta, cuyo montaje se ilustra en la figura 1-1.**

Se proporciona **La geometría de cada elemento. La mano humana promedio puede desarrollar una fuerza de presión de alrededor de 267 N (60 lb) en la posición de palanca mostrada.**

Suposiciones **La aceleración es despreciable. Todas las fuerzas son coplanares y bidimensionales. El modelo adecuado es de clase 1 y es aceptable un análisis estático.**

Solución **Véase las figuras 1-1, 1-2 y la tabla 1-2, piezas 1 y 2.**

1. La figura 1-1 ilustra el montaje de la palanca del freno manual, que consiste en tres subensambles: el manubrio (1), la palanca (2) y el cable o chicote (3). La palanca se pivota hacia el manubrio y el cable está conectado a la palanca. El cable corre dentro de una funda de plástico (de baja fricción) hacia el montaje calibrador de frenos que se encuentra en el aro (rin) de la bicicleta. La funda brinda una fuerza de compresión para equilibrar la tensión en el cable ($F_{funda} = -F_{cable}$). La mano del ciclista aplica fuerzas iguales y opuestas en algunos puntos sobre la palanca y el mango del manubrio. Dichas fuerzas se transforman en fuerzas más grandes en el cable, por la razón de palanca de la pieza 2.

   La figura 1-1 es un diagrama de cuerpo libre del montaje completo, ya que ilustra todas las fuerzas y los momentos potenciales que actúan sobre él, excepto su peso, el cual es pequeño, si se compara con las fuerzas aplicadas y, por lo tanto, se desprecia en este análisis. La porción "separada" del manubrio proporciona las componentes de fuerza x y y, así como el momento requerido para efectos de equilibrio. A las fuerzas y los momentos de reacción se les asigna arbitrariamente un signo positivo. Sus signos reales "saldrán" a partir de los cálculos. Las fuerzas aplicadas conocidas se presentan actuando en sus direcciones y sentidos reales.

2. La figura 1-2 muestra por separado los elementos de los tres subensambles, así como sus diagramas de cuerpo libre con todas las fuerzas y los momentos importantes para cada elemento, otra vez, despreciando los pesos de las piezas. La palanca (pieza 2) tiene tres fuerzas sobre ella, $\mathbf{F}_{b2}$, $\mathbf{F}_{32}$ y $\mathbf{F}_{12}$. La notación de los subíndices

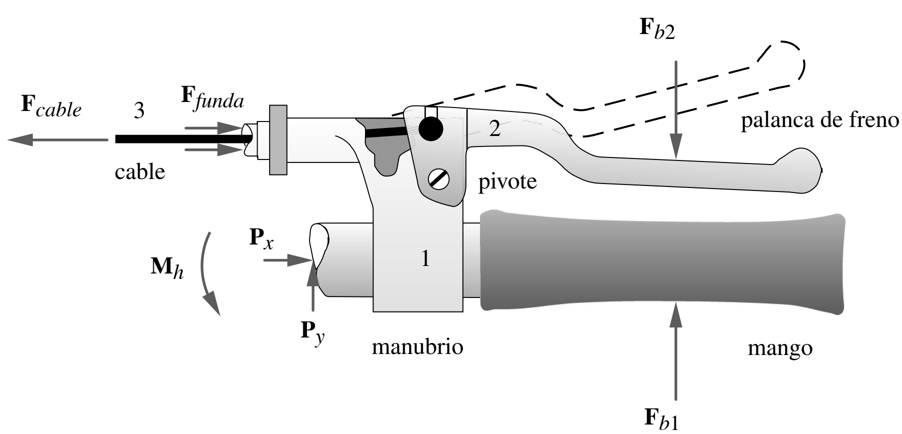


FIGURA 1-1

Montaje de la palanca de frenos de una bicicleta

1

Tabla 1-2 - parte 1
Estudio de caso 1A
Datos conocidos

Variable	Valor	Unidad
F_{13x}	0.0	N
F_{b2x}	0.0	N
F_{b2y}	–267.0	N
θ	184.0	grad
ϕ	180.0	grad
R_{b2x}	39.39	mm
R_{b2y}	2.07	mm
R_{32x}	–50.91	mm
R_{32y}	4.66	mm
R_{12x}	–47.91	mm
R_{12y}	–7.34	mm
R_{21x}	7.0	mm
R_{21y}	19.0	mm
R_{b1x}	47.5	mm
R_{b1y}	–14.0	mm
R_{31x}	–27.0	mm
R_{31y}	30.0	mm
R_{px}	–27.0	mm
R_{py}	0.0	mm
R_{dx}	–41.0	mm
R_{dy}	27.0	mm

de los dos caracteres utilizados aquí se deben leer como fuerza del elemento 1 **sobre** 2 ($\mathbf{F}_{12}$) o fuerza **en** *B* sobre 2 ($\mathbf{F}_{b2}$), etcétera. Lo anterior define el origen de la fuerza (primer subíndice) y el elemento sobre el cual actúa (segundo subíndice).

Dicha notación se utilizará consistentemente a lo largo del libro, tanto para fuerzas como para vectores de posición, como $\mathbf{R}_{b2}$, $\mathbf{R}_{32}$ y $\mathbf{R}_{12}$ de la figura 1-2, los cuales sirven para localizar las tres fuerzas mencionadas anteriormente, en un sistema de coordenadas local no rotacional, cuyo origen está en el centro de gravedad (CG) del elemento o subensamble que se analiza.*

Sobre la palanca del freno, $\mathbf{F}_{b2}$ es una fuerza aplicada cuya magnitud y dirección se conocen. $\mathbf{F}_{32}$ es la fuerza en el cable. Se conoce su dirección, pero no su magnitud. La fuerza $\mathbf{F}_{12}$ es ejercida por la pieza 1 sobre la pieza 2 en el perno del pivote. Tanto su magnitud como su dirección son desconocidas. Se pueden escribir las ecuaciones 1.3*b* de este elemento para sumar las fuerzas en las direcciones *x* y *y*, así como sumar los momentos con respecto del CG. Observe que en las ecuaciones las fuerzas y los momentos desconocidos se suponen inicialmente como positivos. Sus signos verdaderos se obtendrán con el cálculo.† No obstante, todas las fuerzas conocidas o proporcionadas deben tener su propio signo.

$$\begin{gathered}\sum F_x = F_{12x} + F_{b2x} + F_{32x} = 0\\ \sum F_y = F_{12y} + F_{b2y} + F_{32y} = 0\\ \sum \mathbf{M}_z = \left(\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{F}_{12}\right) + \left(\mathbf{R}_{b2} \times \mathbf{F}_{b2}\right) + \left(\mathbf{R}_{32} \times \mathbf{F}_{32}\right) = 0\end{gathered} \tag{a}$$

Los productos cruz en la ecuación de momento representan las "fuerzas decisivas" o los momentos creados por la aplicación de tales fuerzas en puntos alejados del CG del elemento. Recuerde que dichos productos cruzados se pueden expandir a

$$\begin{aligned}\sum M_z = &\left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{b2x}F_{b2y} - R_{b2y}F_{b2x}\right)\\ &+\left(R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}\right) = 0\end{aligned} \tag{b}$$

En este punto, hay tres ecuaciones y cuatro incógnitas (F_{12x}, F_{12y}, F_{32x} y F_{32y}), de modo que se necesita otra ecuación, la cual se obtendrá conociendo la dirección de $\mathbf{F}_{32}$. (El cable sólo puede jalar a lo largo de su eje.) Se expresa una componente de la fuerza $\mathbf{F}_{32}$ del cable, en términos de su otra componente y el ángulo θ conocido del cable.

$$F_{32y} = F_{32x} \tan\theta \tag{c}$$

Ahora es posible resolver las cuatro incógnitas del elemento, aunque se esperará para hacerlo hasta que estén definidas las ecuaciones de los otros dos eslabones.

3. En la figura 1-2, la pieza 3 es el cable que pasa por el orificio de la parte 1. Este orificio está revestido con un material de baja fricción, el cual permite suponer que no hay fricción en la junta entre la pieza 1 y la pieza 3. Se supone, asimismo, que las tres fuerzas $\mathbf{F}_{13}$, $\mathbf{F}_{23}$ y $\mathbf{F}_{cable}$ forman un sistema concurrente de fuerzas que pasan por el CG sin crear, de este modo, un momento. Con tal suposición, para este elemento sólo se requiere una suma de fuerzas.

$$\begin{gathered}\sum F_x = F_{cable_x} + F_{13x} + F_{23x} = 0\\ \sum F_y = F_{cable_y} + F_{13y} + F_{23y} = 0\end{gathered} \tag{d}$$

4. El montaje de elementos de la pieza 1, en la figura 1-2, puede tener tanto fuerzas como momentos sobre él (es decir, no es un sistema concurrente), por lo que son necesarias las tres ecuaciones 1.3*b*.

* En la actualidad, para un análisis estático simple tal como el de este ejemplo, se puede tomar cualquier punto (dentro o fuera del elemento) como el origen del sistema de coordenadas local. Sin embargo, en un análisis de fuerzas dinámicas, el análisis se simplifica si el sistema de coordenadas se coloca en el CG. Entonces, en beneficio de la consistencia, y como preparación para el análisis dinámico más complicado de los problemas posteriores, se usará aquí el CG como el origen, incluso para los casos estáticos.

† Quizás el lector no haya hecho esto en sus clases de estática, pero el enfoque hace el problema más susceptible de solucionarse por computadora. Observe que, sin importar la dirección mostrada de cualquier fuerza desconocida sobre el DCL, en las ecuaciones se supondrá que sus componentes son positivos. Sin embargo, los ángulos de las fuerzas conocidas (o los signos de sus componentes) deben introducirse correctamente en las ecuaciones.

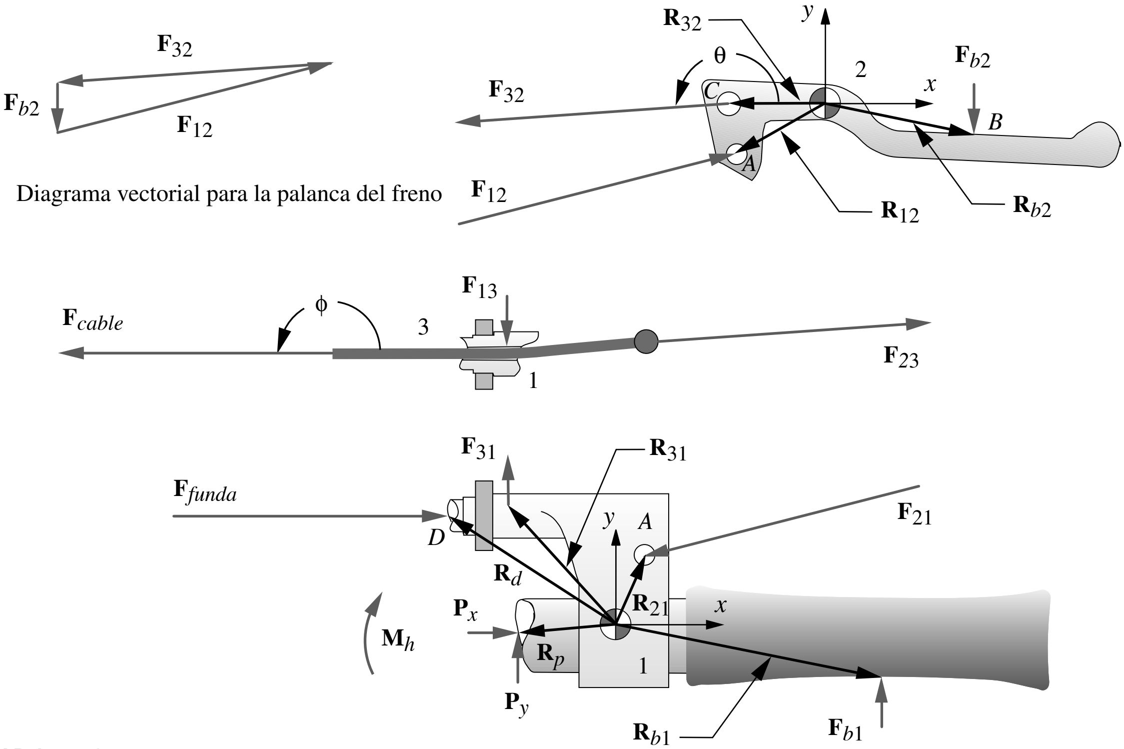


FIGURA 1-2

Diagramas de cuerpo libre de la palanca del freno de una bicicleta

$$
\begin{aligned}
F_x &= F_{21x} + F_{b1x} + F_{31x} + P_x + F_{funda_x} = 0 \\
F_y &= F_{21y} + F_{b1y} + F_{31y} + P_y = 0 \qquad (e) \\
\mathbf{M}_z &= \mathbf{M}_h + \left(\mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}_{21}\right) + \left(\mathbf{R}_{b1} \times \mathbf{F}_{b1}\right) + \left(\mathbf{R}_{31} \times \mathbf{F}_{31}\right) + \left(\mathbf{R}_p \times \mathbf{P}\right) + \left(\mathbf{R}_d \times \mathbf{F}_{funda}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Si se expanden los productos cruz en la ecuación del momento, se obtiene la magnitud del momento como

$$
\begin{aligned}
M_z = M_h &+ \left(R_{21x}F_{21y} - R_{21y}F_{21x}\right) + \left(R_{b1x}F_{b1y} - R_{b1y}F_{b1x}\right) + \left(R_{31x}F_{31y} - R_{31y}F_{31x}\right) \\
&+ \left(R_{Px}P_y - R_{Py}P_x\right) + \left(R_{dx}F_{funda_y} - R_{dy}F_{funda_x}\right) = 0 \qquad (f)
\end{aligned}
$$

5. El total de incógnitas en este punto (incluyendo las listadas en el paso 2 anterior) son 21: F_{b1x}, F_{b1y}, F_{12x}, F_{12y}, F_{21x}, F_{21y}, F_{32x}, F_{32y}, F_{23x}, F_{23y}, F_{13x}, F_{13y}, F_{31x}, F_{31y}, F_{cable_x}, F_{cable_y}, F_{funda_x}, F_{funda_y}, P_x, P_y, y M_h. Aquí se tienen sólo nueve ecuaciones, cuando mucho; tres en el conjunto de ecuaciones (*a*), una en el conjunto (*c*), dos en el conjunto (*d*) y tres en el conjunto (*e*). Se necesitan doce ecuaciones más para resolver el sistema. Se pueden obtener siete de ellas a partir de la tercera ley de Newton, que relaciona los elementos en contacto:

$$
\begin{aligned}
F_{23x} &= -F_{32x} \qquad & F_{23y} &= -F_{32y} \\
F_{21x} &= -F_{12x} \qquad & F_{21y} &= -F_{12y} \qquad (g) \\
F_{31x} &= -F_{13x} \qquad & F_{31y} &= -F_{13y} \\
& & F_{funda_x} &= -F_{cable_x}
\end{aligned}
$$

1

Tabla 1-2 - parte 1 repetida
Estudio de caso 1A
Datos conocidos

Variable	Valor	Unidad
F_{13x}	0.0	N
F_{b2x}	0.0	N
F_{b2y}	–267.0	N
θ	184.0	grad
ϕ	180.0	grad
R_{b2x}	39.39	mm
R_{b2y}	2.07	mm
R_{32x}	–50.91	mm
R_{32y}	4.66	mm
R_{12x}	–47.91	mm
R_{12y}	–7.34	mm
R_{21x}	7.0	mm
R_{21y}	19.0	mm
R_{b1x}	47.5	mm
R_{b1y}	–14.0	mm
R_{31x}	–27.0	mm
R_{31y}	30.0	mm
R_{px}	–27.0	mm
R_{py}	0.0	mm
R_{dx}	–41.0	mm
R_{dy}	27.0	mm

Dos ecuaciones más surgen del supuesto (que se muestra en la figura 1-1) de que las dos fuerzas, ejercidas por la mano sobre la palanca del freno y el mango del manubrio, son iguales y opuestas:*

$$F_{b1x} = -F_{b2x} \qquad F_{b1y} = -F_{b2y} \tag{h}$$

Las tres ecuaciones restantes se obtienen de la geometría que se conoce y de las suposiciones hechas para el sistema. Se sabe que la dirección de las fuerzas F_{cable} y F_{funda} es la misma hasta el final del cable. En la figura esto se ve horizontal; entonces, se dice que

$$F_{cable_y} = 0; \qquad F_{funda_y} = 0 \tag{i}$$

Debido a la suposición de que no hay fricción, se supone que la fuerza F_{31} es normal con respecto a la superficie de contacto entre el cable y el orificio en la pieza 1. Tal superficie es horizontal en este ejemplo, de modo que F_{31} es vertical y

$$F_{31x} = 0 \tag{j}$$

6. Lo anterior completa el conjunto de 21 ecuaciones (conjuntos de ecuaciones *a, c, d, e, g, h, i* y *j*), que se resuelven de manera simultánea para las 21 incógnitas “como si”, es decir, es posible colocar las 21 ecuaciones en una matriz y resolverlas con un programa de computadora de reducción de matrices. Sin embargo, el problema se simplifica al sustituir manualmente las ecuaciones *c, g, h, i* y *j* en las otras, para reducirlas a un conjunto de ocho ecuaciones y ocho incógnitas. Los datos conocidos o proporcionados son los que se muestran en la tabla 1-2, parte 1.

7. Como primer paso, se sustituyen, para el eslabón 2, las ecuaciones *b* y *c* para obtener:

$$\begin{gathered} F_{12x} + F_{b2x} + F_{32x} = 0 \\ F_{12y} + F_{b2y} + F_{32x}\tan\theta = 0 \\ \left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{b2x}F_{b2y} - R_{b2y}F_{b2x}\right) + \left(R_{32x}F_{32x}\tan\theta - R_{32y}F_{32x}\right) = 0 \end{gathered} \tag{k}$$

8. Después, para el eslabón 3, se toman las ecuaciones *d* y se sustituye la ecuación *c*, así como $-F_{32x}$ por F_{23x} y $-F_{32y}$ por F_{23y} de la ecuación *g* para eliminar esas variables.

$$\begin{gathered} F_{cable_x} + F_{13x} - F_{32x} = 0 \\ F_{cable_y} + F_{13y} - F_{32x}\tan\theta = 0 \end{gathered} \tag{l}$$

9. Para el eslabón 1, se sustituye la ecuación *f* en *e* y se reemplaza F_{21x} con $-F_{12x}$, F_{21y} con $-F_{12y}$, F_{31x} con $-F_{13x}$, F_{31y} con $-F_{13y}$ y F_{funda_x} con $-F_{cable_x}$ en la ecuación *g*,

$$\begin{gathered} -F_{12x} + F_{b1x} - F_{13x} + P_x - F_{cable_x} = 0 \\ -F_{12y} + F_{b1y} - F_{32x}\tan\theta + P_y = 0 \\ M_h + \left(-R_{21x}F_{12y} + R_{21y}F_{12x}\right) + \left(R_{b1x}F_{b1y} - R_{b1y}F_{b1x}\right) \\ +\left(-R_{31x}F_{13y} + R_{31y}F_{13x}\right) + \left(R_{Px}P_y - R_{Py}P_x\right) + R_{dy}F_{cable_x} = 0 \end{gathered} \tag{m}$$

10. Finalmente, se sustituyen las ecuaciones *h, i* y *j* en las ecuaciones *k, l* y *m*, para obtener el conjunto de ocho ecuaciones simultáneas con las siguientes ocho incógnitas: F_{12x}, F_{12y}, F_{32x}, F_{13y}, F_{cable_x}, P_x, P_y y M_h. Se colocan en forma estándar, con todas las incógnitas en el primer miembro y todos los términos conocidos en el segundo miembro del signo igual.

* Pero no necesariamente colineales.

$$
\begin{aligned}
F_{12x} + F_{32x} &= -F_{b2x} \\
F_{12y} + F_{32x}\tan\theta &= -F_{b2y} \\
F_{cable_x} - F_{32x} &= 0 \\
F_{13y} - F_{32x}\tan\theta &= 0 \qquad\qquad (n) \\
-F_{12x} + P_x - F_{cable_x} &= F_{b2x} \\
-F_{12y} - F_{13y} + P_y &= F_{b2y} \\
R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x} + \left(R_{32x}\tan\theta - R_{32y}\right)F_{32x} &= -R_{b2x}F_{b2y} + R_{b2y}F_{b2x} \\
M_h - R_{21x}F_{12y} + R_{21y}F_{12x} - R_{31x}F_{13y} + R_{Px}P_y - R_{Py}P_x + R_{dy}F_{cable_x} &= R_{b1x}F_{b2y} - R_{b1y}F_{b2x}
\end{aligned}
$$

11. Se da forma matricial a la ecuación *n*.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \tan\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\tan\theta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-R_{12y} & R_{12x} & R_{32x}\tan\theta - R_{32y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
R_{21y} & -R_{21x} & 0 & -R_{31x} & R_{dy} & -R_{Py} & R_{Px} & 1
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{32x} \\ F_{13y} \\ F_{cable_x} \\ P_x \\ P_y \\ M_h
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-F_{b2x} \\ -F_{b2y} \\ 0 \\ 0 \\ F_{b2x} \\ F_{b2y} \\ -R_{b2x}F_{b2y} + R_{b2y}F_{b2x} \\ R_{b1x}F_{b2y} - R_{b1y}F_{b2x}
\end{bmatrix}
\qquad (o)
$$

12. Se sustituyen los datos conocidos de la tabla 1-2 parte 1 (repetida opuesta).

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0.070 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.070 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
7.34 & -47.91 & -0.324 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
19 & -7 & 0 & 27 & 27 & 0 & -27 & 1
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{32x} \\ F_{13y} \\ F_{cable_x} \\ P_x \\ P_y \\ M_h
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 267 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -267 \\ 93.08 \\ -112.25
\end{bmatrix}
\qquad (p)
$$

13. La solución se muestra en la tabla 1-2, parte 2. La ecuación matricial se resuelve con cualquier solucionador de matrices comercial como *Mathcad*, *MATLAB*, *Maple* o *Mathematica*, así como con muchas calculadoras de bolsillo de ingeniería. En el CD-ROM de este libro se incluye un programa hecho a la medida llamado MATRIX, que es útil para resolver un sistema lineal de hasta 16 ecuaciones. La ecuación *p* se

Tabla 1-2 - parte 2
Estudio de caso 1A
Datos calculados

Variable	Valor	Unidad
F_{32x}	–1 909	N
F_{32y}	–133	N
F_{12x}	1 909	N
F_{12y}	400	N
F_{23x}	1 909	N
F_{23y}	133	N
F_{13y}	–133	N
F_{cable_x}	–1 909	N
F_{cable_y}	0	N
F_{b1x}	0	N
F_{b1y}	267	N
F_{31x}	0	N
F_{31y}	133	N
F_{21x}	–1 909	N
F_{21y}	–400	N
P_x	0	N
P_y	0	N
M_h	9	N-m
F_{funda_x}	1 909	N

1

Tabla 1-2 - parte 2 repetida
Estudio de caso 1A
Datos calculados

Variable	Valor	Unidad
F_{32x}	–1 909	N
F_{32y}	–133	N
F_{12x}	1 909	N
F_{12y}	400	N
F_{23x}	1 909	N
F_{23y}	133	N
F_{13y}	–133	N
F_{cable_x}	–1 909	N
F_{cable_y}	0	N
F_{b1x}	0	N
F_{b1y}	267	N
F_{31x}	0	N
F_{31y}	133	N
F_{21x}	–1 909	N
F_{21y}	–400	N
P_x	0	N
P_y	0	N
M_h	9	N-m
F_{funda_x}	1 909	N

resolvió con el programa MATRIX para encontrar las 8 incógnitas listadas en el paso 10. Tales resultados se sustituyeron después en las otras ecuaciones, con la finalidad de despejar las variables eliminadas previamente.

14. La tabla 1-2, parte 2, muestra los datos de la solución para los datos proporcionados en la figura 1-2 y la tabla 1-2, parte 1. Esto supone que la mano de la persona aplica una fuerza de 267 N (60 lb) a la palanca del freno. Entonces, la fuerza generada en el cable (F_{cable}) es de 1 909 N (429 lb) y la fuerza de reacción contra el manubrio (F_{21}) es de 1 951 N (439 lb) a $-168°$.

ESTUDIO DE CASO 2A

Análisis de carga de una pinza de presión operada manualmente

Problema **Determine las fuerzas sobre los elementos de la pinza para cortar cable mostrada en la figura 1-3, cuando está en funcionamiento.**

Se proporciona **La geometría y la herramienta desarrolla una fuerza de presión de 2 000 lb (8 896 N) al cerrarse en la posición mostrada.**

Suposiciones **Las aceleraciones son despreciables. Todas las fuerzas son coplanares y bidimensionales. Un modelo de carga de clase 1 es adecuado y un análisis estático es aceptable.**

Solución **Véase las figuras 1-3 y 1-4, y la tabla 1-3, partes 1 y 2.**

1. La figura 1-3 muestra la herramienta en posición cerrada en el proceso de unión de un conector de metal sobre un alambre. La mano del usuario genera las fuerzas de entrada en los eslabones 1 y 2, mostrados como el par de fuerzas de reacción F_h. El usuario puede apretar el mango en cualquier parte de su longitud, pero se supone un momento nominal del brazo de R_h para la aplicación de la fuerza de sujeción resultante del usuario (véase la figura 1-4). La elevada ventaja mecánica de la herramienta transforma la fuerza de sujeción en una fuerza de presión grande.

   La figura 1-3 es un diagrama de cuerpo libre del montaje completo, que desprecia el peso de la herramienta, que es pequeño en comparación con la fuerza de sujeción. Hay cuatro elementos, o eslabones, en el montaje, todos ellos interconectados. El eslabón 1 se considerará como "el eslabón guía", en tanto que el otro eslabón se mueve con respecto a él conforme se cierra la pinza. La magnitud deseada de la fuerza de presión F_c está definida y su dirección es normal a las superficies de cierre. La tercera ley relaciona el par de fuerzas de acción-reacción que actúa sobre los eslabones 1 y 4:

$$F_{c1x} = -F_{c4x} \qquad (a)$$
$$F_{c1y} = -F_{c4y}$$

2. La figura 1-4 muestra los elementos del montaje de la herramienta por separado, como diagramas de cuerpo libre con todas las fuerzas que se aplican a cada elemento, despreciando, de nuevo, sus pesos, que son insignificantes comparados con las fuerzas aplicadas. Los centros de gravedad de los elementos respectivos se utilizan como los orígenes de los sistemas locales de coordenadas no giratorios, en los cuales se ubican los puntos de aplicación de todas las fuerzas sobre los elementos.*

3. Se considerará el eslabón 1 como el plano guía y se analizarán los movimientos de los demás eslabones. Observe que inicialmente todas las fuerzas y los momentos desconocidos se suponen positivos. El eslabón 2 tiene tres fuerzas que actúan sobre ella: $\mathbf{F}_h$ es la fuerza desconocida de la mano, en tanto que $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{32}$ son las fuerzas

* Nuevamente, en un análisis estático no es necesario tomar el CG como el origen del sistema de coordenadas (se puede usar cualquier punto), pero se efectúa así para hacerlo consistente con el enfoque del análisis dinámico, en el cual es muy útil realizarlo así.

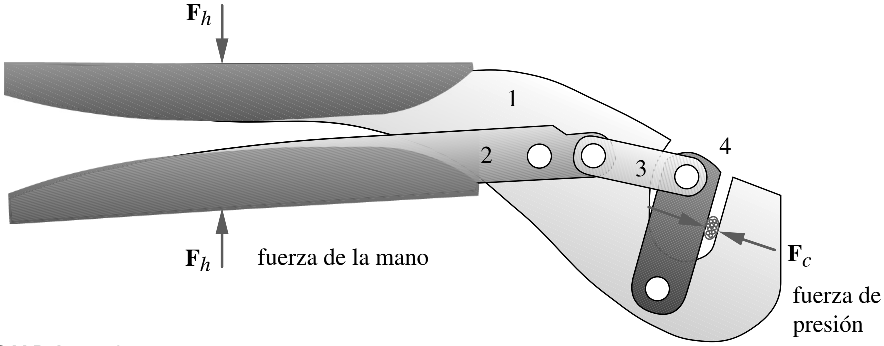


FIGURA 1-3

Pinza de presión para conectores de alambre

Tabla 1-3 - parte 1
Estudio de caso 2A
Datos calculados

Variable	Valor	Unidad
F_{c4x}	–1 956.30	lb
F_{c4y}	415.82	lb
R_{c4x}	0.45	in
R_{c4y}	0.34	in
R_{12x}	1.40	in
R_{12y}	0.05	in
R_{32x}	2.20	in
R_{32y}	0.08	in
R_h	–4.40	in
R_{23x}	–0.60	in
R_{23y}	0.13	in
R_{43x}	0.60	in
R_{43y}	–0.13	in
R_{14x}	–0.16	in
R_{14y}	–0.76	in
R_{34x}	0.16	in
R_{34y}	0.76	in

de reacción de los eslabones 1 y 3, respectivamente. La fuerza $\mathbf{F}_{12}$ es generada por la pieza 1 sobre la pieza 2 en el perno pivote; y la fuerza $\mathbf{F}_{32}$, por la pieza 3 que actúa sobre la pieza 2 en su perno pivote. Se desconocen la magnitud y las direcciones de tales fuerzas. Se escriben las ecuaciones 1.3*b* de dicho elemento para sumar las fuerzas en las direcciones *x* y *y,* así como para sumar los momentos con respecto al CG (con productos cruz expandidos).

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{12x} + F_{32x} = 0\\ \sum F_y &= F_{12y} + F_{32y} + F_h = 0 \qquad (b)\\ \sum M_z &= F_h R_h + \left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}\right) = 0\end{aligned}$$

4. Se ejercen dos fuerzas sobre el eslabón 3, $\mathbf{F}_{23}$ y $\mathbf{F}_{43}$. Se escriben las ecuaciones 1.3*b* para este elemento:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{23x} + F_{43x} = 0\\ \sum F_y &= F_{23y} + F_{43y} = 0 \qquad (c)\\ \sum M_z &= \left(R_{23x}F_{23y} - R_{23y}F_{23x}\right) + \left(R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x}\right) = 0\end{aligned}$$

5. Se ejercen tres fuerzas sobre el eslabón 4: $\mathbf{F}_{c4}$ es la fuerza conocida (deseada) de presión, mientras que $\mathbf{F}_{14}$ y $\mathbf{F}_{34}$ son las fuerzas de reacción de los eslabones 1 y 3, respectivamente. Se desconocen las magnitudes y direcciones de tales fuerzas. Se escriben las ecuaciones 1.3*b* para este elemento:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{14x} + F_{34x} + F_{c4x} = 0\\ \sum F_y &= F_{14y} + F_{34y} + F_{c4y} = 0 \qquad (d)\\ \sum M_z &= \left(R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x}\right) + \left(R_{34x}F_{34y} - R_{34y}F_{34x}\right)\\ &\quad + \left(R_{c4x}F_{c4y} - R_{c4y}F_{c4x}\right) = 0\end{aligned}$$

6. Las nueve ecuaciones de los conjuntos *b* a *d* tienen 13 incógnitas: F_{12x}, F_{12y}, F_{32x}, F_{32y}, F_{23x}, F_{23y}, F_{43x}, F_{43y}, F_{14x}, F_{14y}, F_{34x}, F_{34y} y F_h. Se pueden escribir las relaciones de la tercera ley entre los pares de fuerzas de acción-reacción en cada una de las uniones, para obtener las cuatro ecuaciones adicionales necesarias:

$$F_{32x} = -F_{23x}; \qquad F_{34x} = -F_{43x}; \qquad F_{32y} = -F_{23y}; \qquad F_{34y} = -F_{43y} \qquad (e)$$

1

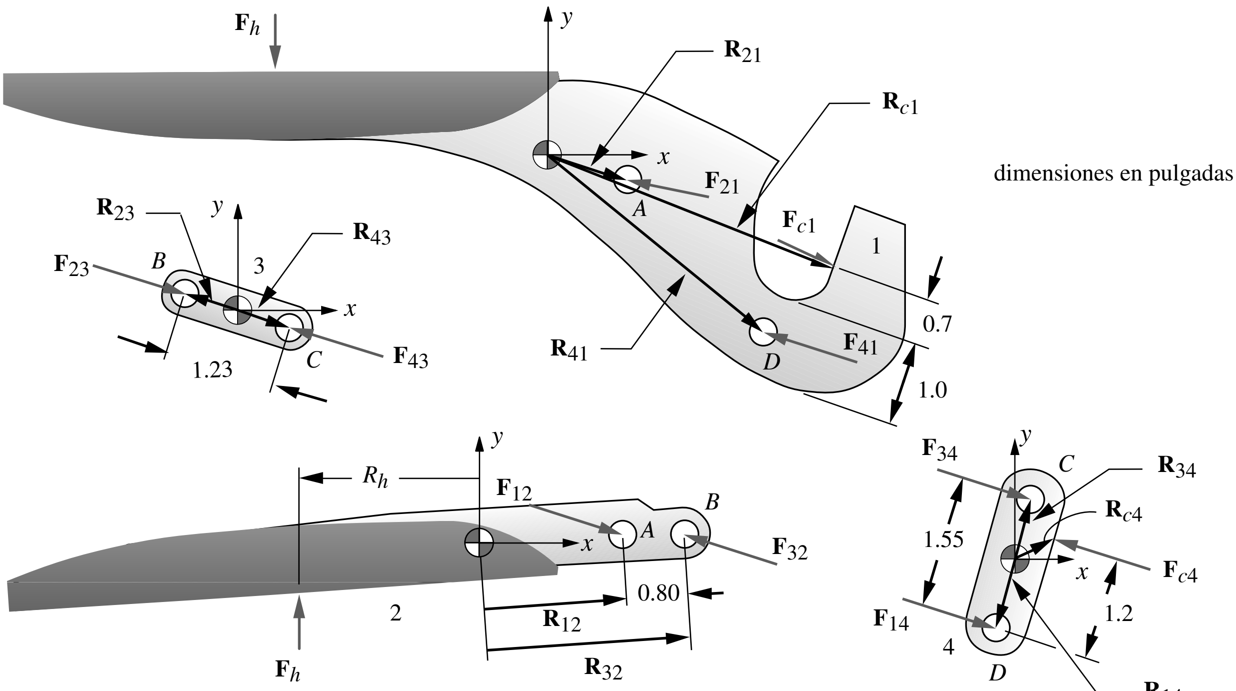


FIGURA 1-4

Diagramas de cuerpo libre de unas pinzas de presión para conector de alambre

Tabla 1-3 - parte 2
Estudio de caso 2A
Datos calculados

Variable	Valor	Unidad
F_h	53.1	lb
F_{12x}	1 513.6	lb
F_{12y}	–381.0	lb
F_{32x}	–1 513.6	lb
F_{32y}	327.9	lb
F_{43x}	–1 513.6	lb
F_{43y}	327.9	lb
F_{23x}	1 513.6	lb
F_{23y}	–327.9	lb
F_{34x}	1 513.6	lb
F_{34y}	–327.9	lb
F_{14x}	442.7	lb
F_{14y}	–87.9	lb
F_{21x}	–1 513.6	lb
F_{21y}	381.0	lb
F_{41x}	–442.7	lb
F_{41y}	87.9	lb

7. Las 13 ecuaciones *b* a *e* se resuelven simultáneamente por reducción matricial o por iteración con un algoritmo de búsqueda de raíces. Para una solución matricial, las incógnitas se colocan a la izquierda; los términos conocidos, a la derecha del signo igual.

$$
\begin{aligned}
F_{12x} + F_{32x} &= 0 \\
F_{12y} + F_{32y} + F_h &= 0 \\
R_h F_h + R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x} + R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x} &= 0 \\
F_{23x} + F_{43x} &= 0 \\
F_{23y} + F_{43y} &= 0 \\
R_{23x}F_{23y} - R_{23y}F_{23x} + R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x} &= 0 \\
F_{14x} + F_{34x} &= -F_{c4x} \\
F_{14y} + F_{34y} &= -F_{c4y} \\
R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x} + R_{34x}F_{34y} - R_{34y}F_{34x} &= -R_{c4x}F_{c4y} + R_{c4y}F_{c4x} \\
F_{32x} + F_{23x} &= 0 \\
F_{34x} + F_{43x} &= 0 \\
F_{32y} + F_{23y} &= 0 \\
F_{34y} + F_{43y} &= 0
\end{aligned}
\tag{f}
$$

8. Se sustituyen los datos proporcionados en la tabla 1-3 parte 1.

$$
\begin{aligned}
F_{12x} + F_{32x} &= 0 \\
F_{12y} + F_{32y} + F_h &= 0 \\
-4.4F_h + 1.4F_{12y} - 0.05F_{12x} + 2.2F_{32y} - 0.08F_{32x} &= 0 \\
F_{23x} + F_{43x} &= 0 \\
F_{23y} + F_{43y} &= 0 \\
-0.6F_{23y} - 0.13F_{23x} + 0.6F_{43y} + 0.13F_{43x} &= 0 \\
F_{14x} + F_{34x} &= 1\,956.3 \qquad (g) \\
F_{14y} + F_{34y} &= -415.82 \\
-0.16F_{14y} + 0.76F_{14x} + 0.16F_{34y} - 0.76F_{34x} &= -0.45(415.82) - 0.34(1\,956.3) \\
&= -852.26 \\
F_{32x} + F_{23x} &= 0 \\
F_{34x} + F_{43x} &= 0 \\
F_{32y} + F_{23y} &= 0 \\
F_{34y} + F_{43y} &= 0
\end{aligned}
$$

9. Se forman las matrices de solución.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.05 & 1.4 & -0.08 & 2.2 & -4.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.13 & -0.6 & 0.13 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.76 & -0.16 & -0.76 & 0.16 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{32x} \\ F_{32y} \\ F_h \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{43x} \\ F_{43y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \\ F_{34x} \\ F_{34y}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1\,956.30 \\ -415.82 \\ -852.26 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
\quad (h)
$$

10. La tabla 1-3, parte 2, muestra la solución del problema para los datos dados en la tabla 1-3, parte 1, suponiendo una fuerza aplicada de 2 000 lb (8 896 N), normal a la superficie de cierre. Se utilizó el programa MATRIX (del CD-ROM). La fuerza generada en el eslabón 3 es de 1 547 lb (6 888 N), la fuerza de reacción ($\mathbf{F}_{21}$) del eslabón 2 contra el eslabón 1 es de 1 561 lb (6 943 N) a 166°, la fuerza de reacción ($\mathbf{F}_{41}$) del eslabón 4 contra el eslabón 1 es de 451 lb (2 008 N) a 169°, además de que se debe aplicar un momento de −233.5 lb-in (−26.6 N-m) a los mangos de la pinza para generar la fuerza de cierre especificada. Este momento se obtiene con una fuerza de 53.1 lb (236 N) aplicada en la mitad del mango. Dicha fuerza se ubica dentro de la capacidad fisiológica de fuerza de sujeción del ser humano promedio.

ESTUDIO DE CASO 3A

Análisis de carga de un gato de tijera para automóvil

Problema **Determine las fuerzas sobre los elementos del gato de tijera, en la posición mostrada en la figura 1-5.**

Se proporciona **La geometría; el gato soporta una fuerza de P = 1 000 lb (4 448 N) en la posición que se indica.**

Suposiciones **Las aceleraciones son despreciables. El gato está sobre el nivel del suelo. El ángulo del chasis del auto elevado no ocasiona un momento que pueda volcar el gato. Todas las fuerzas son coplanares y bidimensionales. Un modelo de carga de clase 1 es adecuado y un análisis estático es aceptable.**

Solución **Véase las figuras 1-5 a 1-8 y la tabla 1-4, partes 1 y 2.**

1. La figura 1-5 muestra el esquema de un gato de tijera simple que sirve para elevar un automóvil. Consiste en seis eslabones, los cuales se pivotan y/o se engranan entre sí, así como en un séptimo eslabón con mecanismo de tornillo que gira para elevar el gato. Es claro que se trata de un dispositivo de tres dimensiones; sin embargo, es posible analizarlo como uno de dos dimensiones si se supone que la carga aplicada (debida al automóvil) y el gato están exactamente verticales (en la dirección *z*). Si es así, todas las fuerzas estarán en el plano *xy*. Esta suposición es válida si el automóvil se eleva desde una superficie nivelada. En caso contrario, habrá también algunas fuerzas en los planos *yz* y *xz*. El diseñador del gato tendrá que considerar el caso más general, aunque para nuestro ejemplo inicialmente se supondrá una carga bidimensional. Para el ensamble completo que se indica en la figura 1-5, se despeja la fuerza de reacción $\mathbf{F}_g$ dada la fuerza $\mathbf{P}$, sumando las fuerzas: $\mathbf{F}_g = -\mathbf{P}$.

2. La figura 1-6 ilustra un conjunto de diagramas de cuerpo libre para todo el gato. Se separó de los otros cada elemento o subensamble de interés, así como de las fuerzas o los momentos que actúan sobre él (excepto su peso, que es pequeño comparado con las fuerzas aplicadas y, por lo mismo, insignificante para el presente análisis). Las fuerzas y los momentos son tanto reacciones internas en las conexiones con otros elementos, como cargas externas del "mundo exterior". Los centros de

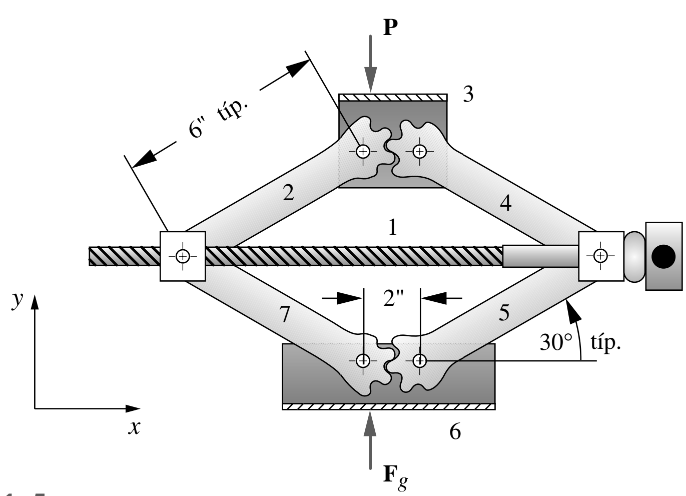


FIGURA 1-5

Gato de tijera para automóvil

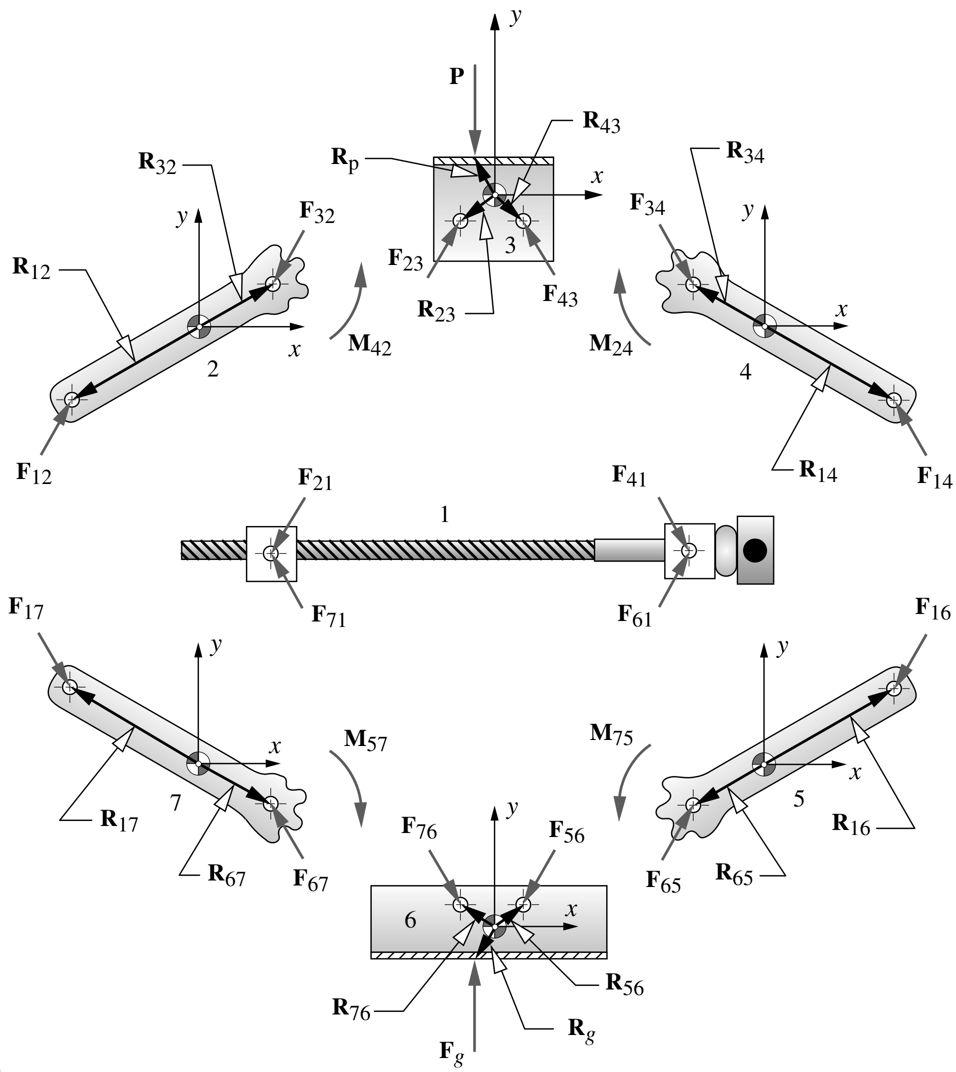


FIGURA 1-6

Diagramas de cuerpo libre del gato de tijera completo

gravedad de cada elemento se utilizan como los orígenes de los sistemas de coordenadas locales no giratorios, donde se localizan los puntos de aplicación de todas las fuerzas sobre los elementos. En el diseño, la estabilidad se logra al coincidir las dos fuerzas de los segmentos de engranes (no envolventes) que actúan entre los eslabones 2 y 4, así como entre los eslabones 5 y 7. Dichas interacciones se modelan como fuerzas que actúan a lo largo de una *normal común* compartida por los dos dientes. Esta normal común es perpendicular a la tangente común en el punto de contacto.

Hay tres ecuaciones válidas de la segunda ley para cada uno de los siete elementos, las cuales dan 21 incógnitas. Se necesitarán 10 ecuaciones adicionales de la tercera ley para un total de 31. Se trata de un sistema engorroso de resolver para un dispositivo tan sencillo; sin embargo, se puede aprovechar la ventaja de su simetría para simplificar el problema.

1

Tabla 1-4 - parte 1
Estudio de caso 3A
Datos conocidos

Variable	Valor	Unidad
P_x	0.00	lb
P_y	–1 000.00	lb
R_{px}	–0.50	in
R_{py}	0.87	in
θ	–45.00	grad
R_{12x}	–3.12	in
R_{12y}	–1.80	in
R_{32x}	2.08	in
R_{32y}	1.20	in
R_{42x}	2.71	in
R_{42y}	1.00	in
R_{23x}	–0.78	in
R_{23y}	–0.78	in
R_{43x}	0.78	in
R_{43y}	–0.78	in
R_{14x}	3.12	in
R_{14y}	–1.80	in
R_{24x}	–2.58	in
R_{24y}	1.04	in
R_{34x}	–2.08	in
R_{34y}	1.20	in

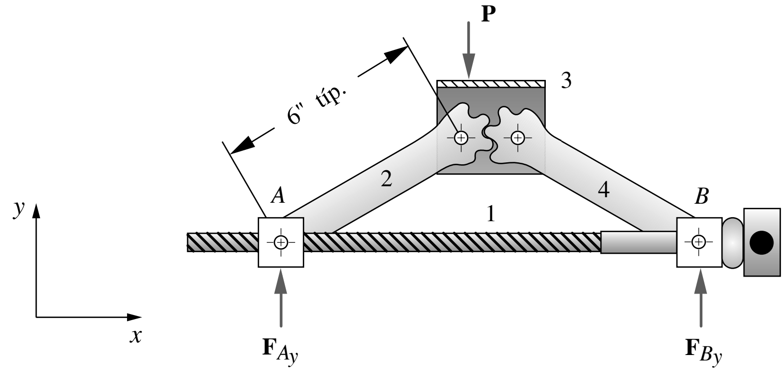


FIGURA 1-7

Diagrama de cuerpo libre de la mitad superior simétrica de un gato de tijera para automóvil

3. La figura 1-7 muestra la mitad superior del montaje del gato. Debido a la simetría de espejo entre las porciones superior e inferior, la mitad inferior se elimina para simplificar el análisis. Las fuerzas calculadas para esta mitad se duplicarán para la otra. Si se desea, las fuerzas de reacción en *A* y *B* se resuelven con las ecuaciones 1.3*b,* a partir de este diagrama de cuerpo libre del montaje de la mitad del gato.

4. La figura 1-8*a* muestra los diagramas de cuerpo libre de la mitad superior del montaje del gato, los cuales son en esencia los mismos que los de la figura 1-6. Ahora se tienen cuatro elementos, aunque se puede considerar que el subensamble 1 sea la "base", pero hay que dejar tres elementos para aplicarles las ecuaciones 1.3. Observe que en las ecuaciones todas las fuerzas y los momentos desconocidos se suponen inicialmente positivos.

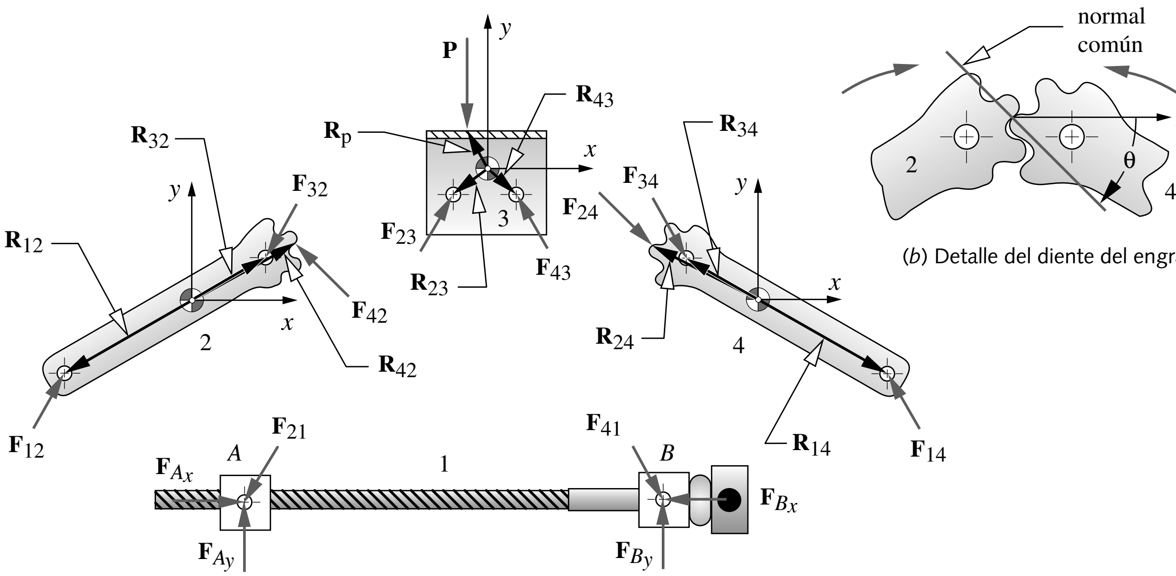
5. Se ejercen tres fuerzas sobre el eslabón 2: $\mathbf{F}_{42}$ es la fuerza desconocida en el contacto entre el diente del engrane y la parte 4; $\mathbf{F}_{12}$ y $\mathbf{F}_{32}$ son las fuerzas de reacción desconocidas de los eslabones 1 y 3, respectivamente. La fuerza $\mathbf{F}_{12}$ es generada por la pieza 1 sobre la pieza 2 en el perno pivote, mientras que la fuerza $\mathbf{F}_{32}$ es generada por la pieza 3 que actúa sobre la pieza 2 en su perno pivote. Se desconocen las magnitudes y las direcciones de tales fuerzas, así como la magnitud de $\mathbf{F}_{42}$. La dirección de $\mathbf{F}_{42}$ es a lo largo de la normal común mostrada en la figura 1-8*b*. Se determinan las ecuaciones 1.3*b* para este elemento, con el propósito de sumar las fuerzas en las direcciones *x* y *y,* así como de sumar los momentos en relación con el CG (con los productos cruz expandidos):*

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{12x} + F_{32x} + F_{42x} = 0\\ \sum F_y &= F_{12y} + F_{32y} + F_{42y} = 0\\ \sum M_z &= R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x} + R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x} + R_{42x}F_{42y} - R_{42y}F_{42x} = 0\end{aligned} \qquad (a)$$

6. Se ejercen tres fuerzas sobre la parte 3: la carga aplicada **P**, $\mathbf{F}_{23}$ y $\mathbf{F}_{43}$. Sólo se conoce **P**. Escribiendo las ecuaciones 1.3*b* para este elemento,

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{23x} + F_{43x} + P_x = 0\\ \sum F_y &= F_{23y} + F_{43y} + P_y = 0\\ \sum M_z &= R_{23x}F_{23y} - R_{23y}F_{23x} + R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x} + R_{Px}P_y - R_{Py}P_x = 0\end{aligned} \qquad (b)$$

* Observe la similitud con las ecuaciones (*b*) del estudio de caso 2A. Únicamente es diferente el subíndice del momento de reacción, ya que lo genera un eslabón diferente. La notación consistente de este método de análisis de fuerzas facilita determinar las ecuaciones para cualquier sistema.



(*b*) Detalle del diente del engrane

(*a*) Diagramas de cuerpo libre

FIGURA 1-8

Diagramas de cuerpo libre de los elementos de la mitad del gato de tijera

7. Se ejercen tres fuerzas sobre el eslabón 4: $\mathbf{F}_{24}$ es la fuerza desconocida del eslabón 2; $\mathbf{F}_{14}$ y $\mathbf{F}_{34}$ son las fuerzas de reacción desconocidas de los eslabones 1 y 3, respectivamente.

$$\sum F_x = F_{14x} + F_{24x} + F_{34x} = 0$$
$$\sum F_y = F_{14y} + F_{24y} + F_{34y} = 0 \qquad (c)$$
$$\sum M_z = R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x} + R_{24x}F_{24y} - R_{24y}F_{24x} + R_{34x}F_{34y} - R_{34y}F_{34x} = 0$$

8. Las nueve ecuaciones de los conjuntos *a* a *c* tienen 16 incógnitas, F_{12x}, F_{12y}, F_{32x}, F_{32y}, F_{23x}, F_{23y}, F_{43x}, F_{43y}, F_{14x}, F_{14y}, F_{34x}, F_{34y}, F_{24x}, F_{24y}, F_{42x} y F_{42y}. Se pueden escribir las relaciones de la tercera ley entre los pares de fuerzas de acción-reacción en cada una de las uniones, para obtener seis de las siete ecuaciones adicionales necesarias:

$$F_{32x} = -F_{23x} \qquad F_{32y} = -F_{23y}$$
$$F_{34x} = -F_{43x} \qquad F_{34y} = -F_{43y} \qquad (d)$$
$$F_{42x} = -F_{24x} \qquad F_{42y} = -F_{24y}$$

9. Las últimas ecuaciones que se requieren provienen de la relación entre las componentes *x* y *y* de la fuerza F_{24} (o bien, F_{42}) en el punto de contacto diente/diente. Una unión de contacto así (o la mitad) transmite fuerza (excepto la fuerza de fricción) tan sólo a lo largo de la **normal común**,[4] que es perpendicular a la tangente común de la unión, como se indica en la figura 1-8*b*. La normal común también se conoce como **eje de transmisión**. La tangente del ángulo de la normal común relaciona las dos componentes de la fuerza en el punto de unión:

$$F_{24y} = F_{24x} \tan\theta \qquad (e)$$

1

Tabla 1-4 - parte 2
Estudio de caso 3A
Datos calculados

Variable	Valor	Unidad
F_{12x}	877.8	lb
F_{12y}	530.4	lb
F_{32x}	–587.7	lb
F_{32y}	–820.5	lb
F_{42x}	–290.1	lb
F_{42y}	290.1	lb
F_{23x}	587.7	lb
F_{23y}	820.5	lb
F_{43x}	–587.7	lb
F_{43y}	179.5	lb
F_{14x}	–877.8	lb
F_{14y}	469.6	lb
F_{24x}	290.1	lb
F_{24y}	–290.1	lb
F_{34x}	587.7	lb
F_{34y}	–179.5	lb

10. Las ecuaciones (a) a (e) abarcan un conjunto de 16 ecuaciones simultáneas, que se resuelven por reducción matricial o por métodos iterativos de búsqueda de raíz. Al ponerlas en forma estándar, para una solución matricial, se tiene:

$$
\begin{aligned}
F_{12x} + F_{32x} + F_{42x} &= 0 \\
F_{12y} + F_{32y} + F_{42y} &= 0 \\
R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x} + R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x} + R_{42x}F_{42y} - R_{42y}F_{42x} &= 0 \\
F_{23x} + F_{43x} &= -P_x \\
F_{23y} + F_{43y} &= -P_y \\
R_{23x}F_{23y} - R_{23y}F_{23x} + R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x} &= -R_{Px}P_y + R_{Py}P_x \\
F_{14x} + F_{24x} + F_{34x} &= 0 \\
F_{14y} + F_{24y} + F_{34y} &= 0 \\
R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x} + R_{24x}F_{24y} - R_{24y}F_{24x} + R_{34x}F_{34y} - R_{34y}F_{34x} &= 0 \qquad (f) \\
F_{32x} + F_{23x} &= 0 \\
F_{32y} + F_{23y} &= 0 \\
F_{34x} + F_{43x} &= 0 \\
F_{34y} + F_{43y} &= 0 \\
F_{42x} + F_{24x} &= 0 \\
F_{42y} + F_{24y} &= 0 \\
F_{24y} - F_{24x}\tan\theta &= 0
\end{aligned}
$$

11. Al sustituir los datos de la tabla 1-4, parte 1:

$$
\begin{aligned}
F_{12x} + F_{32x} + F_{42x} &= 0 \\
F_{12y} + F_{32y} + F_{42y} &= 0 \\
-3.12F_{12y} + 1.80F_{12x} + 2.08F_{32y} - 1.20F_{32x} + 2.71F_{42y} - 0.99F_{42x} &= 0 \\
F_{23x} + F_{43x} &= 0.0 \\
F_{23y} + F_{43y} &= 1\ 000 \\
-0.78F_{23y} + 0.78F_{23x} + 0.78F_{43y} + 0.78F_{43x} &= -500 \\
F_{14x} + F_{24x} + F_{34x} &= 0 \\
F_{14y} + F_{24y} + F_{34y} &= 0 \\
3.12F_{14y} + 1.80F_{14x} - 2.58F_{24y} - 1.04F_{24x} - 2.08F_{34y} - 1.20F_{34x} &= 0 \qquad (g) \\
F_{32x} + F_{23x} &= 0 \\
F_{32y} + F_{23y} &= 0 \\
F_{34x} + F_{43x} &= 0 \\
F_{34y} + F_{43y} &= 0 \\
F_{42x} + F_{24x} &= 0 \\
F_{42y} + F_{24y} &= 0 \\
F_{24y} + 1.0F_{24x} &= 0
\end{aligned}
$$

12. Ponga estas ecuaciones en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.80 & -3.12 & -1.20 & 2.08 & -1.00 & 2.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.78 & -0.78 & 0.78 & 0.78 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.80 & 3.12 & -1.04 & -2.58 & -1.20 & -2.08 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{32x} \\ F_{32y} \\ F_{42x} \\ F_{42y} \\ F_{23x} \\ F_{23y} \\ F_{43x} \\ F_{43y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \\ F_{24x} \\ F_{24y} \\ F_{34x} \\ F_{34y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ -500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (h)$$

13. La parte 2 de la tabla 1-4 muestra la solución de este problema, usando el programa MATRIX para los datos de la parte 1 de la tabla 1-4, el cual supone una fuerza vertical aplicada **P** de 1 000 lb (4 448 N).

14. Las fuerzas sobre el eslabón 1 también se obtienen gracias a la tercera ley de Newton.

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= -F_{21x} = F_{12x} \\ F_{Ay} &= -F_{21y} = F_{12y} \\ F_{Bx} &= -F_{41x} = F_{14x} \\ F_{By} &= -F_{41y} = F_{14y} \end{aligned} \qquad (i)$$

1.5 ESTUDIO DE CASO DE CARGA ESTÁTICA TRIDIMENSIONAL

Esta sección presenta un estudio de caso, el cual implica una carga estática tridimensional sobre el ensamble del calibrador del freno de una bicicleta. Las mismas técnicas empleadas en el análisis de carga bidimensional funcionan también para el caso tridimensional. La tercera dimensión requiere más ecuaciones, que se obtienen a partir de la suma de fuerzas en la dirección *z,* así como de la suma de momentos con respecto a los ejes *x* y *y,* como lo definen las ecuaciones 1.1 y 1.3 para los casos estático y dinámico, respectivamente. Como ejemplo, se analizará el brazo del freno de la bicicleta que es accionado por la palanca del freno de mano, que se analizó en el estudio de caso 1A.

ESTUDIO DE CASO 4A

Análisis de carga del brazo del freno de una bicicleta

Problema **Determine las fuerzas que actúan, en tres dimensiones, sobre el brazo del freno de una bicicleta, que funciona en la posición que se muestra en la figura 1-9. Dicho brazo ha estado fallando, por lo que quizá sea necesario volverlo a diseñar.**

Se proporciona **La geometría del brazo del freno, para que sobre el brazo se ejerza una fuerza del cable de 1 046 N en la posición mostrada. (Véase también el estudio de caso 1A.)**

Suposiciones **Las aceleraciones son insignificantes. Un modelo de carga de clase 1 es adecuado y un análisis estático es aceptable. Se midió el coeficiente de fricción entre la almohadilla (goma) del freno y el aro de la rueda, que es de 0.45 a temperatura ambiente, y de 0.40 a 150°F.**

Solución **Véase las figuras 1-9 y 1-10 y la tabla 1-5.**

1. La figura 1-9 ilustra un ensamble, comúnmente usado en las bicicletas, del brazo del freno jalado por el centro. Consiste en seis elementos o subensambles: la estructura (el cuadro) y sus pernos pivotes (1), los dos brazos del freno (2) y (4), el montaje de la extensión del cable (3), las almohadillas de los frenos (5) y el aro de la rueda (6). Esto es un dispositivo tridimensional y debe analizarse como tal.

2. El cable es el mismo que está atado a la palanca del freno de la figura 1-1. La fuerza de la mano de 267 N (60 lb) se multiplica por la ventaja mecánica de la palanca del freno y se transmite mediante el cable al par de brazos del freno, como se calculó en el estudio de caso 1A. Se supondrá que no hay pérdida de fuerza en las guías del

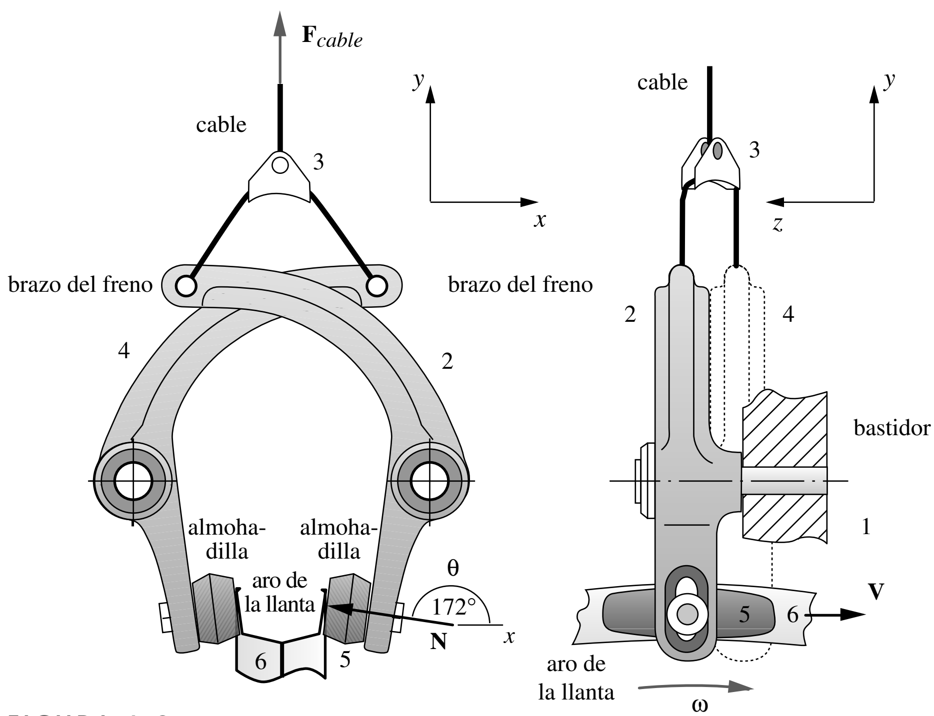


FIGURA 1-9

Montaje del brazo del freno jalado por el centro de una bicicleta

cable, de modo que la fuerza total del cable de 1 046 N (235 lb) está disponible en su extremo.

3. En la figura 1-9 se observa que la dirección de la fuerza normal entre la almohadilla del freno y el aro de la rueda es $\theta = 172°$, con respecto al eje x positivo, en tanto que la fuerza de fricción se dirige a lo largo del eje z. (Véase las figuras 1-9 y 1-10, para las orientaciones de los ejes *xyz*.)

4. La figura 1-10 presenta los diagramas de cuerpo libre del brazo, el bastidor y el montaje que jala el cable. Interesan sobre todo las fuerzas que actúan sobre el brazo del freno. Sin embargo, se necesita primero analizar el efecto de la geometría del jalador del cable sobre la fuerza aplicada al brazo en *A*. Este análisis puede ser bidimensional si, por sencillez, se ignora el descentrado z entre los dos brazos. Un análisis más preciso requeriría que se incluyeran las componentes z de las fuerzas de la extensión del cable que actúan sobre los brazos. Observe que el subensamble del cable (3) es un sistema de fuerzas concurrentes. Al escribir las ecuaciones 1.3*b* en dos dimensiones para este subensamble y al observar la simetría con respecto al punto A, a partir de la revisión del DCL, se tiene:

$$\sum F_x = F_{23x} + F_{43x} = 0$$
$$\sum F_y = F_{23y} + F_{43y} + F_{cable} = 0 \qquad (a)$$

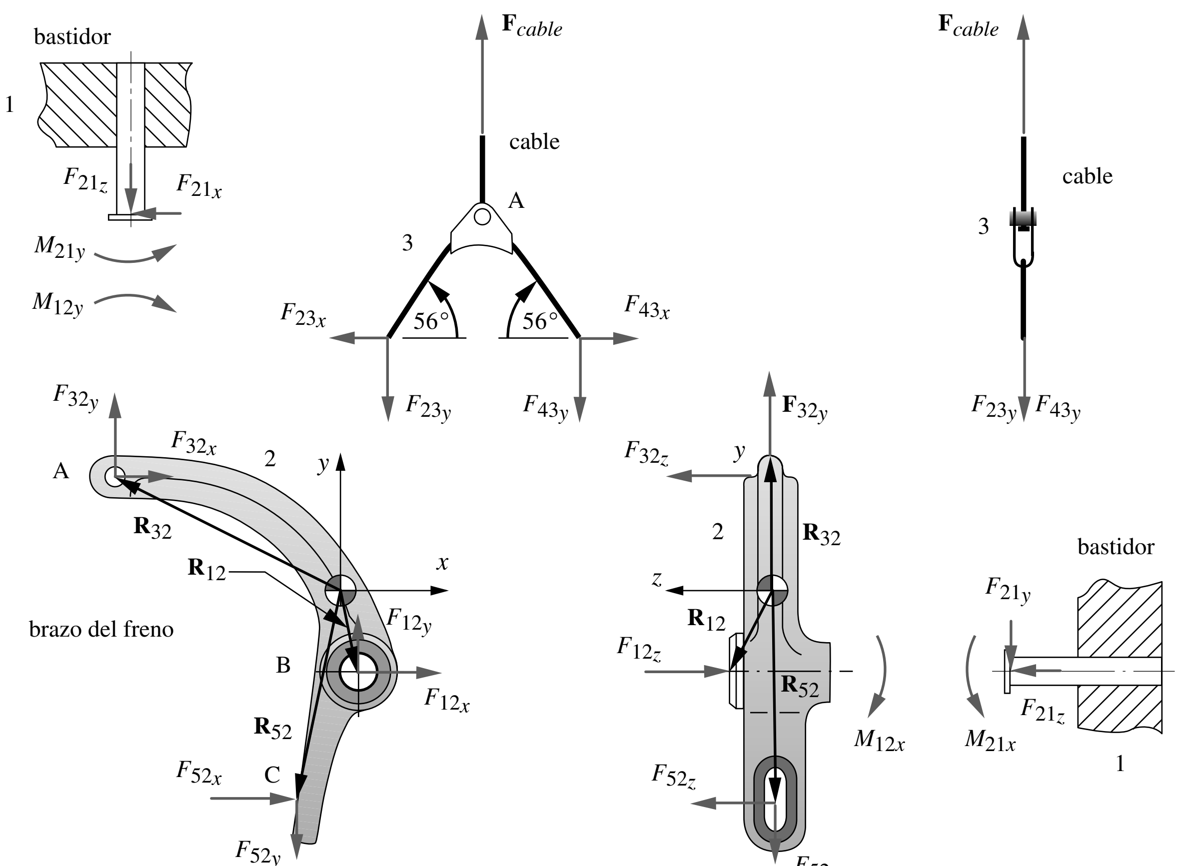


FIGURA 1-10

Diagramas de cuerpo libre del brazo del freno

Este conjunto de ecuaciones se resuelve fácilmente para obtener

$$\begin{aligned} F_{23y} &= F_{43y} = -\frac{F_{cable}}{2} = -\frac{1\,046}{2} = -523 \text{ N} \\ F_{23x} &= \frac{F_{23y}}{\tan(56°)} = \frac{-523}{1.483} = -353 \text{ N} \\ F_{43x} &= -F_{23x} = 353 \text{ N} \end{aligned} \tag{b}$$

La tercera ley de Newton relaciona tales fuerzas con sus reacciones sobre el brazo del freno en el punto A:

$$\begin{aligned} F_{32x} &= -F_{23x} = 353 \text{ N} \\ F_{32y} &= -F_{23y} = 523 \text{ N} \\ F_{32z} &= 0 \end{aligned} \tag{c}$$

5. Ahora se pueden escribir las ecuaciones 1.3*a* para el brazo (eslabón 2).

   Para las fuerzas:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{12x} + F_{32x} + F_{52x} = 0; \qquad & F_{12x} + F_{52x} &= -353 \\ \sum F_y &= F_{12y} + F_{32y} + F_{52y} = 0; \qquad & F_{12y} + F_{52y} &= -523 \\ \sum F_z &= F_{12z} + F_{32z} + F_{52z} = 0; \qquad & F_{12z} + F_{52z} &= 0 \end{aligned} \tag{d}$$

   Para los momentos:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= M_{12x} + \left(R_{12y}F_{12z} - R_{12z}F_{12y}\right) + \left(R_{32y}F_{32z} - R_{32z}F_{32y}\right) \\ &\quad + \left(R_{52y}F_{52z} - R_{52z}F_{52y}\right) = 0 \\ \sum M_y &= M_{12y} + \left(R_{12z}F_{12x} - R_{12x}F_{12z}\right) + \left(R_{32z}F_{32x} - R_{32x}F_{32z}\right) \\ &\quad + \left(R_{52z}F_{52x} - R_{52x}F_{52z}\right) = 0 \\ \sum M_z &= \left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}\right) \\ &\quad + \left(R_{52x}F_{52y} - R_{52y}F_{52x}\right) = 0 \end{aligned} \tag{e}$$

   Observe que en las ecuaciones las fuerzas y los momentos desconocidos se suponen inicialmente como positivos, sin importar sus direcciones aparentes en los DCL. Los momentos M_{12x} y M_{12y} se deben a que hay un momento en la unión entre el brazo (2) y el perno pivote (1), con respecto a los ejes x y y. Se supone que la fricción es insignificante con respecto al eje z, lo cual hace que M_{12} sea igual a cero.

6. La unión entre la almohadilla del freno (5) y el aro de la rueda (6) transmite una fuerza normal al plano de contacto. La magnitud de la fuerza de fricción, F_f, en el plano de contacto se relaciona con la fuerza normal por la ecuación de Coulomb para la fricción,

$$F_f = \mu N \tag{f}$$

   donde μ es el coeficiente de fricción y N es la fuerza normal. La velocidad del punto sobre el aro, debajo del centro de la almohadilla del freno, está en la dirección z. Las componentes de fuerza F_{52x} y F_{52y} se deben completamente a la fuerza normal transmitida a través de la almohadilla al brazo y, por lo tanto, están relacionadas por la tercera ley de Newton.

$$
\begin{aligned}
F_{52x} &= -N_x = -N\cos\theta = -N\cos 172° = 0.990N \\
F_{52y} &= -N_y = -N\operatorname{sen}\theta = -N\operatorname{sen}172° = -0.139N
\end{aligned} \tag{g}
$$

La dirección de la fuerza de fricción F_f siempre se opone al movimiento; por ende, actúa en la dirección z negativa sobre el aro de la rueda. Su fuerza de reacción sobre el brazo tiene el sentido opuesto.

$$
F_{52z} = -F_f \tag{h}
$$

7. Ahora se tienen 10 ecuaciones (en los conjuntos designados *d, e, f, g* y *h*) que contienen 10 incógnitas: F_{12x}, F_{12y}, F_{12z}, F_{52x}, F_{52y}, F_{52z}, M_{12x}, M_{12y}, N y F_f. Las fuerzas F_{32x}, F_{32y} y F_{32z} se conocen a partir de las ecuaciones *c*. Estas 10 ecuaciones se resuelven de manera simultánea por reducción matricial o por los métodos iterativos de búsqueda de raíces. Primero ordene las ecuaciones; para ello, coloque todas las incógnitas en el primer miembro y todos los valores conocidos o supuestos en el segundo miembro.

$$
\begin{aligned}
F_{12x} + F_{52x} &= -353 \\
F_{12y} + F_{52y} &= -523 \\
F_{12z} + F_{52z} &= 0 \\
M_{12x} + R_{12y}F_{12z} - R_{12z}F_{12y} + R_{52y}F_{52z} - R_{52z}F_{52y} &= R_{32z}F_{32y} - R_{32y}F_{32z} \\
M_{12y} + R_{12z}F_{12x} - R_{12x}F_{12z} + R_{52z}F_{52x} - R_{52x}F_{52z} &= R_{32x}F_{32z} - R_{32z}F_{32x} \\
R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x} + R_{52x}F_{52y} - R_{52y}F_{52x} &= R_{32y}F_{32x} - R_{32x}F_{32y} \\
F_f - \mu N &= 0 \\
F_{52x} + N\cos\theta &= 0 \\
F_{52y} + N\operatorname{sen}\theta &= 0 \\
F_{52z} + F_f &= 0
\end{aligned} \tag{i}
$$

8. Al sustituir los valores conocidos y supuestos de la tabla 1-5, parte 1:

$$
\begin{aligned}
F_{12x} + F_{52x} &= -353 \\
F_{12y} + F_{52y} &= -523 \\
F_{12z} + F_{52z} &= 0 \\
M_{12x} - 27.2F_{12z} - 23.1F_{12y} - 69.7F_{52z} - 0F_{52y} &= 0(523) - 38.7(0) = 0 \\
M_{12y} + 23.1F_{12x} - 5.2F_{12z} + 0F_{52x} + 13F_{52z} &= -75.4(0) - 0(353) = 0 \\
5.2F_{12y} + 27.2F_{12x} - 13F_{52y} + 69.7F_{52x} &= 38.7(353) + 75.4(523) = 53\,095 \\
F_f - 0.4N &= 0 \\
F_{52x} - 0.990N &= 0 \\
F_{52y} + 0.139N &= 0 \\
F_{52z} + F_f &= 0
\end{aligned} \tag{j}
$$

9. Se forman las matrices para solución.

Tabla 1-5 - parte 1
Estudio de caso 4A
Datos conocidos y supuestos

Variable	Valor	Unidad
μ	0.4	ninguno
θ	172.0	grados
R_{12x}	5.2	mm
R_{12y}	–27.2	mm
R_{12z}	23.1	mm
R_{32x}	–75.4	mm
R_{32y}	38.7	mm
R_{32z}	0.0	mm
R_{52x}	–13.0	mm
R_{52y}	–69.7	mm
R_{52z}	0.0	mm
F_{32x}	353.0	N
F_{32y}	523.0	N
F_{32z}	0.0	N
M_{12z}	0.0	N–m

1

Tabla 1-5 - parte 2
Estudio de caso 4A
Datos calculados

Variable	Valor	Unidad
F_{12x}	–1 805	N
F_{12y}	–319	N
F_{12z}	587	N
F_{52x}	1 452	N
F_{52y}	–204	N
F_{52z}	–587	N
M_{12x}	32 304	N–mm
M_{12y}	52 370	N–mm
N	1 467	N
F_f	587	N

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -23.1 & -27.2 & 0 & 0 & -69.7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 23.1 & 0 & -5.2 & 0 & 0 & 13 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 27.2 & 5.2 & 0 & 69.7 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.990 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.139 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{12z} \\ F_{52x} \\ F_{52y} \\ F_{52z} \\ M_{12x} \\ M_{12y} \\ F_f \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -353 \\ -523 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 53\,095 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (k)$$

10. La parte 2 de la tabla 1-5 muestra la solución del problema con el programa MATRIX, para los datos de la parte 1 de la tabla 1-5. Tal problema se resuelve usando uno de varios programas comerciales para resolver ecuaciones que hay; entre ellos, *Mathcad*, *MATLAB, Maple, Mathematica*, o bien, el programa **MATRIX** incluido en este texto.

1.6 ESTUDIO DE CASO DE CARGA DINÁMICA

Esta sección presenta un estudio de caso con una carga dinámica bidimensional, que actúa sobre un mecanismo articulado, diseñado como un dispositivo para demostrar cargas dinámicas. En la figura 1-11 se observa una fotografía de dicha máquina. El análisis de esta máquina se puede realizar en dos dimensiones, ya que todos los elementos se mueven en planos paralelos. La presencia de aceleraciones significativas en los elementos que se mueven en un sistema requiere que se efectúe un análisis dinámico con las ecuaciones 1.1. El enfoque es el mismo que el del análisis precedente para cargas estáticas, excepto la necesidad de incluir los términos $m\mathbf{A}$ e $I\alpha$ en las ecuaciones.

ESTUDIO DE CASO 5A

Análisis de carga de un mecanismo de cuatro barras

Problema — **Determine, para el cuerpo rígido, las fuerzas teóricas que actúan en dos dimensiones sobre el mecanismo de cuatro barras que se muestra en la figura 1-11.**

Se proporciona — **La geometría, las masas y los momentos de inercia de la masa, en tanto que el mecanismo es impulsado hasta 120 rpm usando un motor eléctrico de rapidez controlada.**

Suposiciones — **Las aceleraciones son significativas. El modelo de carga de clase 4 es adecuado, por lo que se requiere de un análisis dinámico. No hay cargas externas sobre el sistema; todas las cargas se deben a las aceleraciones de los eslabones. Las fuerzas debidas al peso son insignificantes, comparadas con las fuerzas inerciales; por ello, se despreciarán. Se asume que los eslabones son cuerpos rígidos ideales. La fricción y los efectos de los claros en las uniones de perno también se ignorarán.**

Solución — **Véase las figuras 1-11 a 1-13 y la tabla 1-6.**

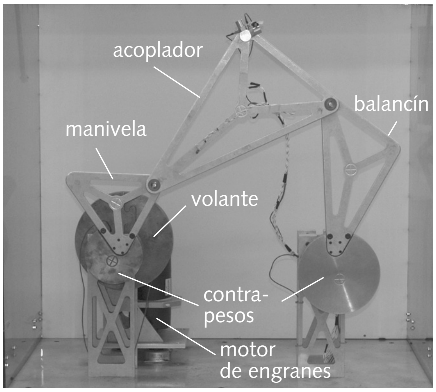


FIGURA 1-11

Modelo dinámico de eslabones de cuatro partes

Tabla 1-6 - parte 1
Estudio de caso 5A
Datos conocidos y supuestos

Variable	Valor	Unidad
θ_2	30.00	grad
ω_2	120.00	rpm
$masa_2$	0.525	kg
$masa_3$	1.050	kg
$masa_4$	1.050	kg
I_{cg2}	0.057	kg-m^2
I_{cg3}	0.011	kg-m^2
I_{cg4}	0.455	kg-m^2
R_{12x}	–46.9	mm
R_{12y}	–71.3	mm
R_{32x}	85.1	mm
R_{32y}	4.9	mm
R_{23x}	–150.7	mm
R_{23y}	–177.6	mm
R_{43x}	185.5	mm
R_{43y}	50.8	mm
R_{14x}	–21.5	mm
R_{14y}	–100.6	mm
R_{34x}	–10.6	mm
R_{34y}	204.0	mm

1. Las figuras 1-11 y 1-12 ilustran el modelo demostrativo del mecanismo de cuatro barras. Consiste en tres elementos móviles (eslabones 2, 3 y 4), más el bastidor o la bancada del montaje (1). El motor impulsa al eslabón 2 a través de un motor de engranes. Los dos pivotes fijos se instrumentaron, con transductores de fuerza piezoeléctricos, para medir las fuerzas dinámicas que actúan en las direcciones x y y sobre el plano de la bancada. Se montó un par de acelerómetros en un punto sobre el elemento flotante (eslabón 3) para medir sus aceleraciones.

2. La figura 1-12 contiene un esquema del dispositivo. Las partes fueron diseñadas con claros, para reducir sus masas y sus momentos de inercia de masa. La entrada del eslabón 2 puede ser una aceleración angular, una velocidad angular constante o un torque aplicado. El eslabón 2 gira totalmente alrededor de su pivote fijo en O_2. Aun cuando el eslabón 2 tenga una aceleración angular α_2 igual a cero, si opera a velocidad angular constante ω_2, habría incluso aceleraciones angulares variables en el tiempo en los eslabones 3 y 4, ya que oscilan hacia atrás y hacia adelante. En cualquier caso, los centros de gravedad de los eslabones experimentarán aceleraciones lineales variables en el tiempo, conforme el mecanismo se mueva. Tales aceleraciones angulares y lineales generarán fuerzas de inercia y torques de acuerdo

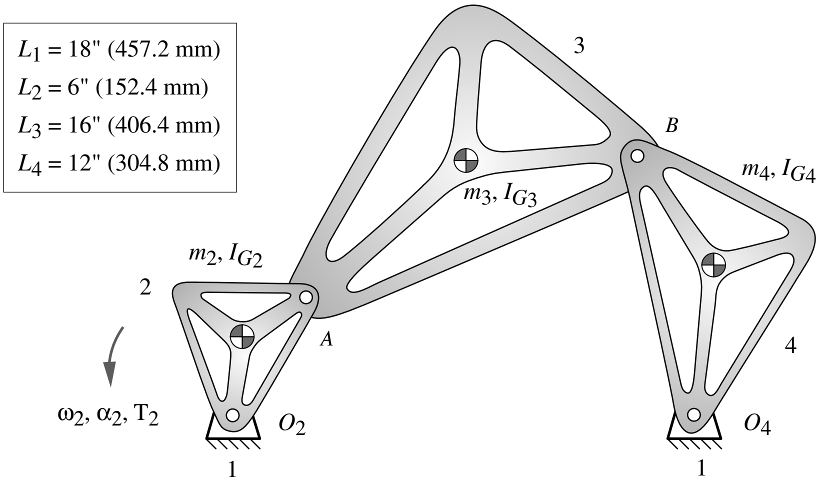


FIGURA 1-12

Esquema y dimensiones básicas del mecanismo articulado (véase la tabla 1-6 para más información)

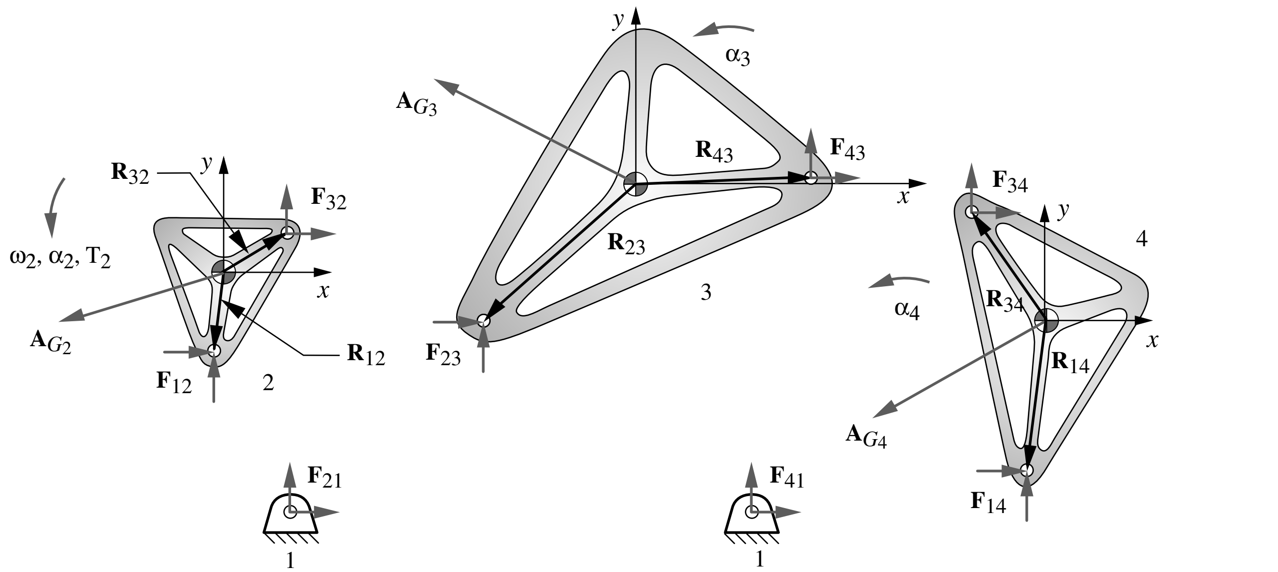


FIGURA 1-13

Diagrama de cuerpo libre de los elementos de un mecanismo de cuatro barras.

con la segunda ley de Newton. De modo que, aun cuando no haya fuerzas externas ni torques aplicados a las partes, las fuerzas inerciales crearán fuerzas de reacción en los pernos. Las fuerzas son las que se desea calcular.

3. La figura 1-13 muestra los diagramas de cuerpo libre de los eslabones individuales. El sistema de coordenadas local, sin rotación, de cada eslabón se ubica en su CG. Se deben resolver las ecuaciones cinemáticas del movimiento para determinar las aceleraciones lineales del CG, de cada eslabón, y la aceleración angular del eslabón, en cada posición de interés durante el ciclo. (Para la explicación de este procedimiento, consulte la referencia 1.) Tales aceleraciones, $\mathbf{A}_{Gn}$ y $\boldsymbol{\alpha}_n$, se muestran en acción en cada uno de los *n* eslabones. Las fuerzas de cada conexión de perno se ilustran como pares *xy*, numeradas como antes, y se supone que inicialmente son positivas.

4. Se pueden escribir las ecuaciones 1.1 para cada eslabón móvil del sistema. Se deben calcular las masas y los momentos de inercia de la masa de cada eslabón, con respecto a su CG, para usarlos en tales ecuaciones. En este estudio de caso, se usó un sistema de modelado sólido de CAD para diseñar la geometría de los eslabones y calcular las propiedades de su masa.

5. Para el eslabón 2:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{12x} + F_{32x} = m_2 A_{G2_x}\\ \sum F_y &= F_{12y} + F_{32y} = m_2 A_{G2_y}\\ \sum M_z &= T_2 + \left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}\right) = I_{G2}\alpha_2\end{aligned} \tag{a}$$

6. Para el eslabón 3:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{12x} + F_{32x} = m_2 A_{G2_x}\\ \sum F_y &= F_{12y} + F_{32y} = m_2 A_{G2_y}\\ \sum M_z &= T_2 + \left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}\right) = I_{G2}\alpha_2\end{aligned} \tag{b}$$

7. Para el eslabón 4:

$$\sum F_x = F_{14x} + F_{34x} = m_4 A_{G4_x}$$
$$\sum F_y = F_{14y} + F_{34y} = m_4 A_{G4_y} \qquad (c)$$
$$\sum M_z = \left(R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x}\right) + \left(R_{34x}F_{34y} - R_{34y}F_{34x}\right) = I_{G4}\alpha_4$$

8. Existen 13 incógnitas en esas nueve ecuaciones: F_{12x}, F_{12y}, F_{32x}, F_{32y}, F_{23x}, F_{23y}, F_{43x}, F_{43y}, F_{14x}, F_{14y}, F_{34x}, F_{34y} y T_2. Se pueden escribir cuatro ecuaciones de la tercera ley, con la finalidad de identificar los pares de fuerzas de acción-reacción en las uniones.

$$F_{32x} = -F_{23x}$$
$$F_{32y} = -F_{23y}$$
$$F_{34x} = -F_{43x} \qquad (d)$$
$$F_{34y} = -F_{43y}$$

9. El conjunto de 13 ecuaciones de *a* a *d* se resuelve de manera simultánea para determinar las fuerzas y torques, ya sea por los métodos de reducción matricial o de búsqueda de raíces iterativa. Este estudio de caso se resolvió con ambas técnicas y los archivos correspondientes se encuentran en el CD. Observe que las masas y los momentos de inercia de la masa de los eslabones son constantes independientemente del tiempo y la posición, pero las aceleraciones varían con el tiempo, de modo que un análisis completo requiere que las ecuaciones *a* a *d* se resuelvan para todas las posiciones o los tiempos de interés. Los modelos utilizan *listas o arreglos* para guardar los valores calculados de las ecuaciones *a* a *d* para los 13 valores del ángulo de entrada θ_2 del eslabón impulsor (de 0 a 360°, en incrementos de 30°). El modelo también calcula las aceleraciones cinemáticas de las partes y sus CG, que son necesarios para el cálculo de las fuerzas. Después, las fuerzas mayores y las menores, presentes en cada eslabón durante el ciclo, se calculan para su uso posterior en análisis de esfuerzo y deflexión. En las partes 1 y 2 de la tabla 1-6, se muestran los datos conocidos y los resultados de este análisis de fuerzas, para una posición de la manivela ($\theta_2 = 30°$). En la figura 1-14 se grafican las fuerzas en los pivotes fijos para una revolución completa de la manivela.

Tabla 1-6 - parte 2
Estudio de caso 5A
Datos calculados

Variable	Valor	Unidad
F_{12x}	–255.8	N
F_{12y}	–178.1	N
F_{32x}	252.0	N
F_{32y}	172.2	N
F_{34x}	–215.6	N
F_{34y}	–163.9	N
F_{14x}	201.0	N
F_{14y}	167.0	N
F_{43x}	215.6	N
F_{43y}	163.9	N
F_{23x}	–252.0	N
F_{23y}	–172.2	N
T_{12}	–3.55	N-m
α_3	56.7	rad/seg^2
α_4	138.0	rad/seg^2
A_{cg2x}	–7.4	rad/seg^2
A_{cg2y}	–11.3	rad/seg^2
A_{cg3x}	–34.6	rad/seg^2
A_{cg3y}	–7.9	rad/seg^2
A_{cg4x}	–13.9	rad/seg^2
A_{cg4y}	2.9	rad/seg^2

1.7 CARGAS POR VIBRACIÓN

En los sistemas cargados dinámicamente, por lo general hay cargas por vibración sobrepuestas a las cargas teóricas pronosticadas con las ecuaciones dinámicas. Tales cargas vibratorias suelen tener diferentes causas. Si los elementos del sistema fueran infinitamente rígidos, se eliminarían las vibraciones, pero los elementos reales, de cualquier material, son elásticos y, por ende, actúan como resortes cuando están sujetos a fuerzas. Las deflexiones resultantes pueden causar que se generen fuerzas adicionales, a partir de las fuerzas inerciales asociadas con los movimientos vibratorios del elemento o, si las tolerancias permiten el contacto de las uniones para generar cargas de impacto (choque) cuando vibran (véase más adelante).

Un estudio completo acerca de los fenómenos vibratorios está más allá del alcance del libro. Para un análisis más detallado, al final de este capítulo se incluye la bibliografía correspondiente. El tema se introduce aquí sobre todo para alertar al diseñador de máquinas, en cuanto a la necesidad de considerar la vibración como una fuente de carga. Con frecuencia, el único modo para obtener una medida precisa de los efectos de la vibración sobre un sistema es hacer pruebas en prototipos o sistemas de producción

1

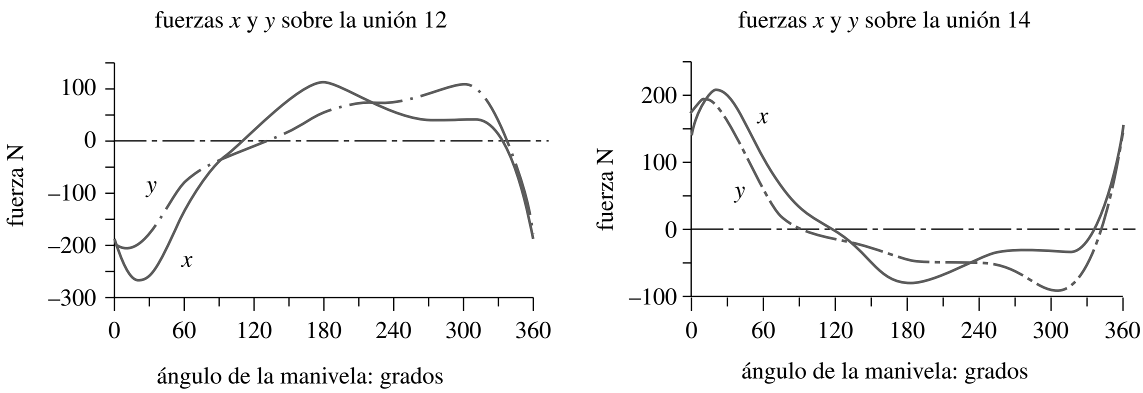


FIGURA 1-14

Fuerzas dinámicas en un cuerpo rígido calculadas para el mecanismo de cuatro barras del estudio de caso 5A

bajo condiciones de servicio severas. En el estudio del factor de seguridad en la sección A.7 se mencionó que muchas industrias (automotriz, aérea, etcétera) se comprometen en exhaustivos programas de prueba para desarrollar modelos de carga reales para sus equipos. Se estudiará más de este tema en la sección 4.4, cuando se introduzcan las cargas de fatiga. Las técnicas modernas de análisis de los elementos finitos (FEA) y los elementos límite (BEA) también permiten modelar y calcular los efectos de la vibración en un sistema o una estructura. Incluso, resulta difícil lograr un modelo por computadora de un sistema complejo que sea tan preciso y real como un prototipo. Lo anterior es especialmente cierto cuando los claros (espacios) entre las piezas móviles permiten que haya impactos en las uniones, cuando se invierten las cargas. Los impactos originan fenómenos no lineales muy difíciles de modelar matemáticamente.

Frecuencia natural

En el diseño de maquinaria es deseable determinar las frecuencias naturales del montaje, o submontaje, para pronosticar y eliminar problemas de resonancia durante la operación. Cualquier sistema real puede tener un número infinito de frecuencias naturales donde vibrará fácilmente. El número de frecuencias naturales necesarias o deseables para el cálculo varía según la situación. Para dicha tarea, el enfoque más completo es utilizar el análisis de los elementos finitos (FEA) al descomponer el montaje en un gran número de elementos discretos. Para mayor información sobre el FEA, véase el apéndice C. Los esfuerzos, las deflexiones y el número de frecuencias naturales que se pueden calcular con esta técnica están limitados básicamente por el tiempo y la disposición de recursos computacionales.

Si no se usa el FEA, se desearía determinar la frecuencia natural mínima, la menor o esencial del sistema, puesto que esta frecuencia por lo general creará la mayor magnitud de vibración. La frecuencia natural esencial sin amortiguamiento ω_n en unidades de rad/s, o f_n, en unidades de Hz, se calcula a partir de las expresiones

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$f_n = \frac{1}{2\pi}\omega_n \tag{1.4}$$

donde ω_n es la frecuencia natural fundamental, m es la masa móvil del sistema en unidades de masa reales (por ejemplo, kg, g, blob o slug, no lb_m) y k es la constante efectiva del resorte del sistema. (El periodo de la frecuencia natural es su recíproco en segundos, $T_n = 1/f_n$.)

La ecuación 1.4 se basa en un modelo agrupado del sistema con un solo grado de libertad. La figura 1-15 presenta un modelo como éste de un sistema simple de leva-seguidor consistente en una leva, un seguidor deslizante y un amortiguador simple. El modelo agrupado más sencillo es una masa conectada al suelo través de un solo resorte y un solo amortiguador. Todas las masas que se mueven en el sistema (seguidor, resorte) están contenidas en m y todos los "resortes", inclusive el resorte físico y la elasticidad de todas las otras piezas, se agrupan en la constante efectiva k del resorte.

Constante del resorte La constante k de un resorte se supone como una relación lineal entre la fuerza, F, que se aplica a un elemento y su deflexión resultante δ (véase la figura 1-17):

$$k = \frac{F}{\delta} \tag{1.5a}$$

Si es posible calcular o deducir la expresión de la deflexión de un elemento, se proporcionará esta relación resorte-constante. El tema se retoma en el siguiente capítulo. En el ejemplo de la figura 1-15, la deflexión δ del resorte es igual al desplazamiento y de la masa.

$$k = \frac{F}{y} \tag{1.5b}$$

Amortiguamiento Todas las pérdidas por amortiguamiento, o rozamiento, se agrupan en el coeficiente de amortiguamiento d. Para este modelo sencillo se supone que el amortiguamiento es inversamente proporcional a la velocidad y_{punto} de la masa.

$$d = \frac{F}{\dot{y}} \tag{1.6}$$

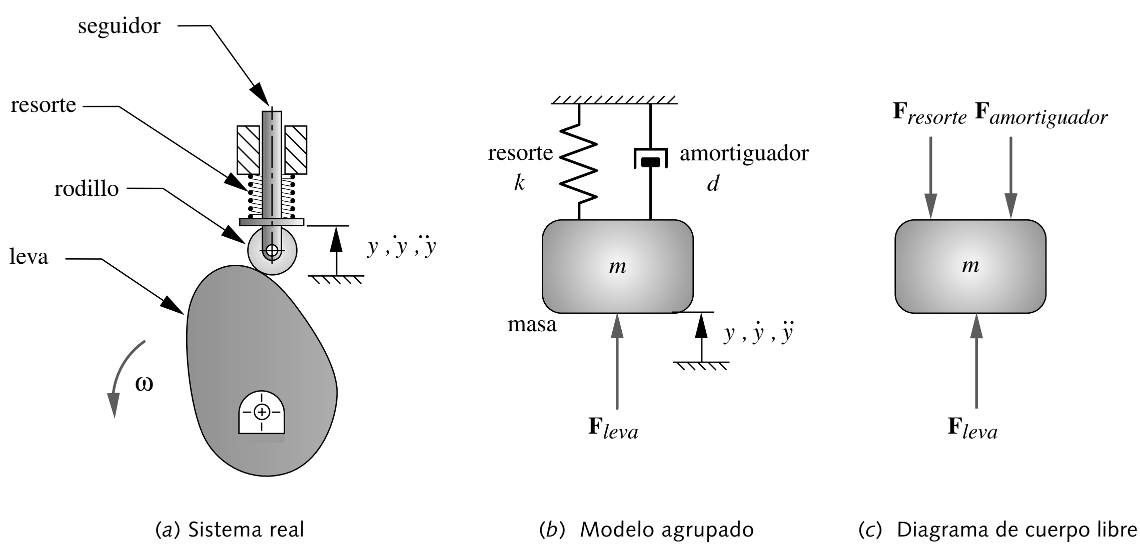


FIGURA 1-15

Modelo agrupado de un sistema dinámico de leva-seguidor

La ecuación 1.4 simplifica este modelo incluso más si se supone que el amortiguamiento d es igual a cero. Si se incluye el amortiguamiento, las expresiones de la frecuencia fundamental natural amortiguada ω_d en unidades de radián/seg, o f_d, en unidades de Hz, se convierte en

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2}$$
$$f_d = \frac{1}{2\pi}\omega_d \tag{1.7}$$

Tal frecuencia de amortiguamiento ω_d será ligeramente menor que la frecuencia no amortiguada ω_n.

VALORES EFECTIVOS La determinación de la masa efectiva de un modelo agrupado es sencilla, sólo requiere sumar todos los valores de las masas móviles conectadas en las unidades de masa adecuadas. La determinación de los valores de la constante efectiva del resorte y el coeficiente de amortiguación efectivo es más complicada, por lo que no se estudiará aquí. Para una explicación de esto, consulte la referencia 2.

RESONANCIA Se puede experimentar una condición, llamada resonancia, si la operación o la frecuencia de forzamiento aplicada al sistema son las mismas que cualquiera de sus frecuencias naturales. Es decir, si la velocidad angular de entrada aplicada a un sistema giratorio es la misma que ω_n, o está cercana a ésta, la respuesta vibratoria será muy grande. Lo anterior crea fuerzas grandes y causa fallas. Por lo tanto, es necesario descartar, si es posible, la operación en la frecuencia natural o cerca de ésta.

Fuerzas dinámicas

Si se escribe la ecuación 1.1 para el modelo simple de un GDL (grado de libertad) del sistema dinámico de la figura 1-15, y se sustituyen las ecuaciones 1.5 y 1.6, se tiene

$$F_y = ma = m\ddot{y}$$
$$F_{leva} - F_{resorte} - F_{amortiguador} = m\ddot{y} \tag{1.8}$$
$$F_{leva} = m\ddot{y} + d\dot{y} + ky$$

Si se conocen los parámetros cinemáticos de desplazamiento, velocidad y aceleración del sistema, esta ecuación se resuelve directamente para la fuerza sobre la leva como una función del tiempo. Si se conoce la fuerza de la leva y se desean los parámetros cinemáticos, entonces se puede aplicar la solución bien conocida de la ecuación diferencial lineal con coeficiente constante. Para una derivación detallada de la solución, consulte la referencia 3. Aunque se puede seleccionar arbitrariamente el sistema de coordenadas utilizado para un análisis dinámico, es importante notar que tanto los parámetros cinemáticos (desplazamiento, velocidad y aceleración) como las fuerzas de la ecuación 1.8 deben definirse en el **mismo** sistema de coordenadas.

Como un ejemplo del efecto de la vibración sobre las fuerzas dinámicas de un sistema, se regresará al estudio de caso 5A del mecanismo de cuatro barras, donde se verán los resultados de las mediciones reales de las fuerzas dinámicas bajo condiciones de operación.

ESTUDIO DE CASO 5B

Medición de la carga dinámica en el mecanismo de cuatro barras

Problema **Determine las fuerzas reales que actúan sobre los pivotes fijos del mecanismo articulado de la figura 1-11 (p. 29) durante una revolución de la manivela de entrada.**

Se proporciona **El mecanismo se impulsa a 60 rpm con un motor eléctrico de rapidez controlada, además de que se colocan transductores de fuerza entre los soportes de los pivotes fijos y la bancada.**

Suposiciones **No hay cargas externas aplicadas sobre el sistema; todas se deben a las aceleraciones de las piezas. Las fuerzas debidas al peso son insignificantes comparadas con las fuerzas inerciales y se despreciarán. Los transductores de fuerza miden sólo fuerzas dinámicas.**

Solución **Véase las figuras 1-12 (p. 29) y 1-16 (p. 36).**

1. La figura 1-11 presenta un mecanismo de cuatro barras. Está formado por tres elementos móviles (eslabones 2, 3 y 4), más el marco o la bancada (1). El motor montado de choque impulsa el eslabón 2 a través de una caja de engranes y un eje acoplado. Los dos pivotes fijos se instrumentaron con transductores piezoeléctricos de fuerza para medir las fuerzas dinámicas, que actúan en las direcciones x y y sobre el plano del suelo.

2. La figura 1-16 muestra la fuerza y el torque reales medidos mientras el eslabonamiento giraba a 60 rpm, y los compara con la fuerza y el torque teóricos pronosticados por las ecuaciones a a d, en el estudio de caso 5A.[5] Sólo la componente x de la fuerza en el pivote, entre el eslabón 2 y la bancada, así como el torque sobre el eslabón 2 se muestran como ejemplos. Las otras fuerzas y los demás componentes del perno muestran desviaciones similares de sus valores teóricos pronosticados. Algunas de tales desviaciones se deben a las variaciones en la velocidad angular instantánea del motor. El análisis teórico supone una velocidad angular constante de entrada del eje. Las vibraciones y los impactos se toman en cuenta para otras desviaciones.

El ejemplo de desviaciones de las fuerzas teóricas, en un sistema dinámico tan simple, se presenta para señalar que los mejores cálculos de las fuerzas (y, por lo tanto, de los esfuerzos resultantes) sobre un sistema pueden ser erróneos debido a factores que no se incluyen en un análisis de fuerza simplificado. En los pronósticos teóricos de fuerzas para un sistema dinámico, resulta común subestimar la realidad, lo cual es, por supuesto, imprudente. Siempre que sea posible, la prueba de prototipos físicos brindará los resultados más reales y exactos.

Los efectos de las vibraciones en un sistema podrían causar cargas significativas y son difíciles de predecir sin datos de prueba, como los que se muestran en la figura 1-16, donde las cargas reales se ven del doble de sus valores pronosticados; esto evidentemente duplica los esfuerzos. Un enfoque tradicional y un tanto rudimentario, que se usa en el diseño de máquinas, consiste en aplicar, con base en la experiencia, factores de sobrecarga a las cargas calculadas teóricas con el mismo equipo o un equipo similar. Como un ejemplo, consulte la tabla 8-17 (p. 577) en el capítulo de diseño de engranes. La tabla lista los factores de sobrecarga recomendados por la industria para engranes sujetos a varios tipos de cargas de choque. Tal clase de factores deberían usarse tan sólo si uno no puede desarrollar datos de prueba más precisos que los del tipo mostrado en la figura 1-16 (p. 36)

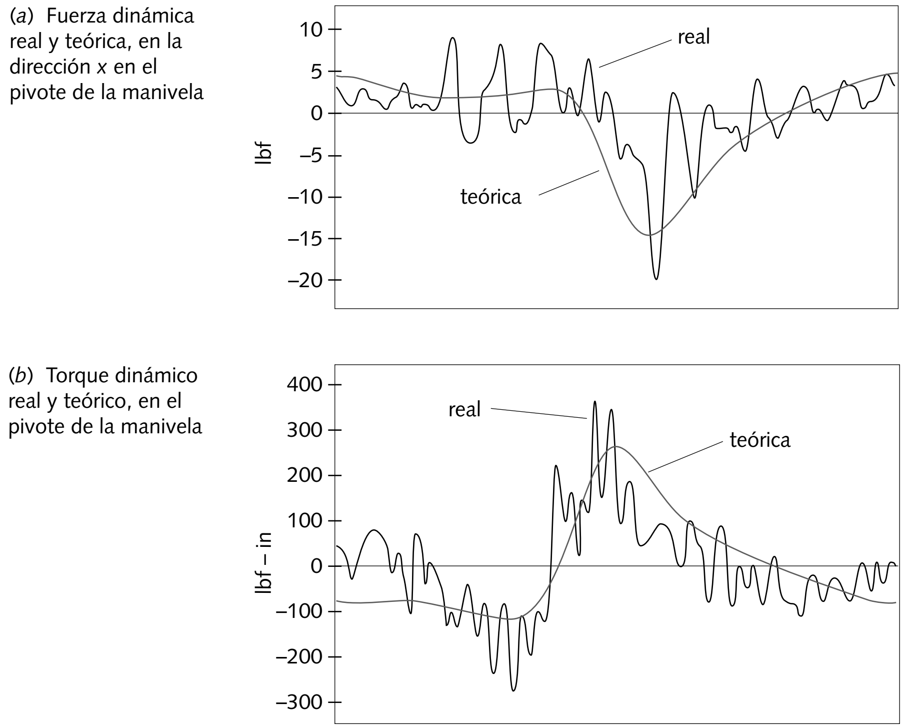


FIGURA 1-16

Fuerzas y torques dinámicos teóricos, medidos en un mecanismo de cuatro barras

1.8 CARGAS DE IMPACTO

Las cargas consideradas hasta ahora han sido estáticas pero, si varían con el tiempo, se ha supuesto que se aplican gradual y suavemente, con todas las uniones en contacto continuo. Muchas máquinas poseen elementos sujetos a cargas o a impactos repentinos. Un ejemplo es el mecanismo manivela-corredera, el cual es el corazón de un motor automotriz. La cabeza del pistón está sujeta a un aumento explosivo de la presión cada dos revoluciones del cigüeñal y cuando el cilindro explota, así como cuando el espacio entre la circunferencia del pistón y la pared superior del cilindro permiten el impacto de tales superficies cuando la carga se invierte en cada ciclo. Un ejemplo más extremo es un martillo neumático, cuyo propósito es golpear el pavimento y romperlo. Las cargas que resultan del impacto pueden ser mucho mayores que las que resultarían de los mismos elementos que contactan gradualmente. Trate de imaginar clavar un clavo con el martillo; para ello, coloque de forma suave la cabeza de éste sobre aquél, en vez de golpearlo.

Lo que distingue las cargas de impacto de las cargas estáticas es el tiempo de duración de la aplicación de la carga. Si la carga se aplica lentamente, se considera estática; si se aplica con rapidez, entonces es de impacto. Un criterio que sirve para distinguir entre ambas es comparar el tiempo de aplicación de la carga t_l (definido como el tiempo que le toma a la carga para elevarse de cero a su valor pico) con el periodo de la frecuencia natural T_n del sistema. Si t_l es menor que la mitad de T_n, se considera que es de impacto. Si t_l es mayor que tres veces T_n, se considera estática. Entre esos límites hay un área gris donde puede haber cualquier condición.

Se considera que hay dos casos generales de impacto; sin embargo, se verá que uno es el límite del otro. Burr[6] llama a estos dos casos *impacto por golpe* e *impacto por fuerza*. El **impacto por golpe** se refiere a una colisión real de dos cuerpos, tal como en

el martilleo o el estrechamiento del espacio entre las uniones de las piezas. La **fuerza de impacto** tiene que ver con una carga aplicada repentinamente sin la velocidad de colisión, como en un peso que súbitamente se levanta con un soporte. Tal condición es común en embragues y frenos de fricción (véase el capítulo 13). Los casos ocurren en forma independiente o en cualquier combinación.

Las colisiones severas entre cuerpos móviles pueden dar como resultado una deformación permanente de los cuerpos que colisionan, como en un accidente automovilístico. En tales casos, es deseable una deformación permanente, para absorber la gran cantidad de energía de la colisión, y proteger a los ocupantes de lesiones más graves. Aquí sólo se está interesado en los impactos que no causan una deformación permanente, es decir, los esfuerzos permanecerán en la región elástica. Esto es necesario para permitir el uso continuo de la componente después del impacto.

Si la masa del objeto que golpea m es grande, en comparación con la masa del objeto golpeado m_b, y si el objeto que golpea se considera rígido, entonces la energía cinética poseída por el objeto que golpea se puede igualar con la energía almacenada elásticamente en el objeto golpeado en su deflexión máxima. Este enfoque de energía proporciona un **valor aproximado** de la carga de impacto. No es exacto porque se supone que el esfuerzo a través del miembro impactado alcanza valores pico al mismo tiempo. Sin embargo, las ondas de esfuerzo que se generan en el cuerpo golpeado viajan a través de éste a la rapidez del sonido y se reflejan a partir de las fronteras. El cálculo de los efectos de tales ondas longitudinales sobre los esfuerzos en medios elásticos da resultados exactos, por lo que es necesario cuando es pequeña la razón entre la masa del objeto que golpea y el objeto golpeado. El método de ondas no se estudiará aquí. Se recomienda al lector consultar la referencia 6 para mayor información.

Método de la energía

Suponiendo que no hay pérdida de energía por el calor, la energía cinética del cuerpo que golpea se convierte en energía potencial almacenada en el cuerpo golpeado. Si se supone que todas las partículas de los cuerpos combinados llegan al reposo en el mismo instante, entonces, justo antes de rebotar, serán máximos la fuerza, el esfuerzo y la deflexión en el cuerpo golpeado. La energía elástica almacenada en el cuerpo golpeado será igual al área bajo la curva de fuerza-deflexión, que se define por la constante particular del resorte. Una curva generalizada de fuerza-deflexión de un resorte lineal se observa en la figura 1-17. La energía elástica almacenada es el área bajo la curva, entre cero y cualquier combinación de fuerza y deflexión. Por la relación lineal, ésta es el área de un triángulo, $A = 1/2bh$. De tal manera, la energía almacenada en el punto de deflexión pico por impacto δ_i es

$$E = \frac{1}{2} F_i \delta_i \tag{1.9a}$$

Al sustituir la ecuación 1.5,

$$E = \frac{F_i^2}{2k} \tag{1.9b}$$

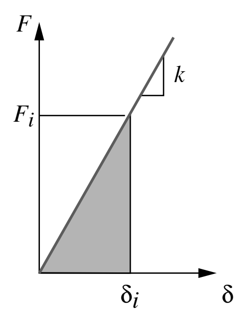


FIGURA 1-17
Energía almacenada en un resorte

IMPACTO HORIZONTAL La figura 1-18*a* muestra una masa a punto de impactar el extremo de una varilla horizontal. Tal dispositivo, que se conoce algunas veces como *martillo deslizante*, sirve para eliminar abolladuras de la carrocería de metal de un automóvil, entre otros usos. En el punto de impacto, la porción de energía cinética de la masa móvil que se transfiere a la masa golpeada es

$$E = \eta\left(\frac{1}{2} m v_i^2\right) \tag{1.10}$$

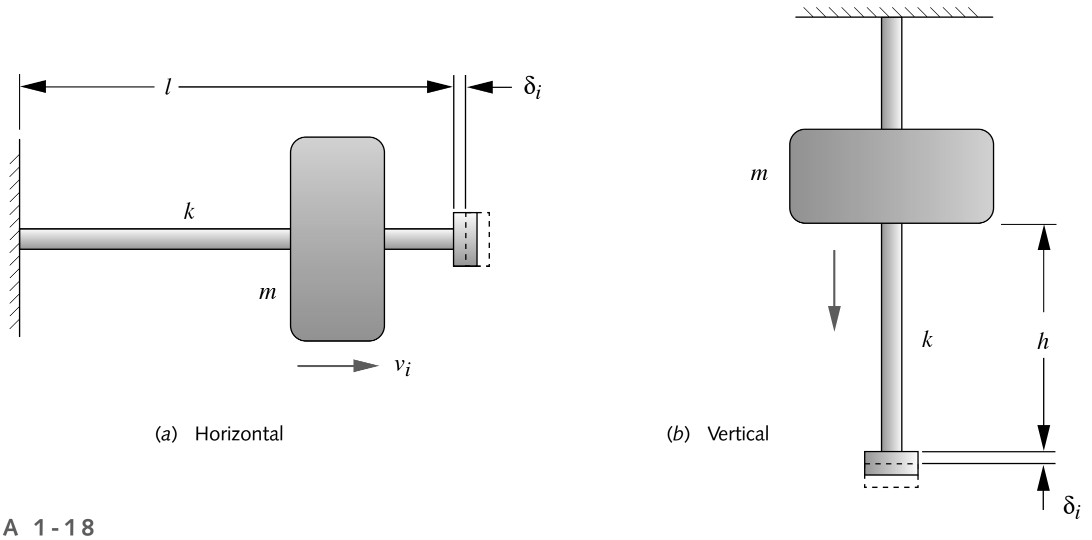


FIGURA 1-18

Impacto axial sobre una varilla delgada

donde m es su masa y v_i su velocidad al momento del impacto. Es necesario modificar la energía cinética, con un factor de corrección η, para considerar la disipación de energía asociada con el tipo específico del elemento elástico que se golpea. Si la disipación es insignificante, η será igual a 1.

Si se supone que toda la energía cinética transferida de la masa en movimiento se convierte en energía elástica almacenada en el miembro golpeado, eso permite igualar las ecuaciones 1.9 y 1.10:

$$\frac{F_i^2}{2k} = \eta \frac{m v_i^2}{2}$$
$$F_i = v_i \sqrt{\eta m k} \tag{1.11}$$

Si a la masa se le permitiera cargar estáticamente el elemento golpeado, la deflexión estática resultante sería $\delta_{st} = W / k$, donde $W = mg$. Al sustituir esto en la ecuación 1.11, da como resultado una razón entre fuerza dinámica y fuerza estática, o bien, entre deflexión dinámica y deflexión estática:

$$\frac{F_i}{W} = \frac{\delta_i}{\delta_{st}} = v_i \sqrt{\frac{\eta}{g \delta_{st}}} \tag{1.12}$$

El término del segundo miembro de la ecuación se conoce como factor de impacto, que proporciona la razón entre el impacto y la fuerza o deflexión estática. Entonces, si la deflexión estática se calcula al aplicar una fuerza igual al peso de la masa, se obtendría un estimado de la fuerza dinámica y la deflexión dinámica. Observe que las ecuaciones 1.11 y 1.12 son válidas para cualquier caso de impacto horizontal, donde el objeto se carga, como se muestra aquí, axialmente con deflexión o con torsión. Los métodos para el cálculo de deflexiones de varios casos se estudiarán en el siguiente capítulo. La razón de resorte k de cualquier objeto se obtiene al replantear su ecuación de deflexión de acuerdo con la ecuación 1.5.

IMPACTO VERTICAL Para el caso de una masa que cae una distancia h sobre una varilla como la de la figura 1-18*b*, también se aplica la ecuación 1.11 con una velocidad de impacto $v_i^2 = 2gh$. La energía potencial de un descenso a lo largo de la distancia h es:

$$E = \eta \frac{mv_i^2}{2} = \eta mgh = W\eta h \tag{1.13a}$$

Si la deflexión en el impacto es pequeña, comparada con la distancia de caída h, la ecuación es suficiente. Pero si la deflexión es significativa, comparada con h, la energía de impacto necesita incluir una cantidad debida a la deflexión, a través de la cual el peso cae más allá de h. La energía potencial total dejada por la masa en el impacto es, entonces,

$$E = W\eta h + W\delta_i = W(\eta h + \delta_i) \tag{1.13b}$$

Al igualar la energía potencial con la energía elástica, almacenada en el elemento golpeado, además de sustituir la ecuación 1.9b y la expresión $W = k\delta_{st}$

$$\frac{F_i^2}{2k} = W(\eta h + \delta_i)$$

$$F_i^2 = 2kW(\eta h + \delta_i) = 2\frac{W}{\delta_{st}} W(\eta h + \delta_i)$$

$$\left(\frac{F_i}{W}\right)^2 = \frac{2\eta h}{\delta_{st}} + \frac{\delta_i}{\delta_{st}} = \frac{2\eta h}{\delta_{st}} + 2\left(\frac{F_i}{W}\right)$$

$$\left(\frac{F_i}{W}\right)^2 - 2\left(\frac{F_i}{W}\right) - \frac{2\eta h}{\delta_{st}} = 0 \tag{1.14a}$$

que da una ecuación cuadrática en F_i/W, cuya solución es:

$$\frac{F_i}{W} = \frac{\delta_i}{\delta_{st}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\eta h}{\delta_{st}}} \tag{1.14b}$$

El segundo miembro de la expresión es la razón de impacto, para el caso del peso que cae. La ecuación 1.14b se puede utilizar para cualquier caso de impacto que implique la caída de un peso. Por ejemplo, si el peso se deja caer sobre una viga, se usa la deflexión estática de la viga en el punto de impacto.

Si la distancia h a la cual se eleva la masa es igual a cero, la ecuación 1.14b se hace igual a 2. Lo anterior indica que si la masa se mantiene **en contacto** con el elemento "golpeado" (con el peso de la masa soportado por separado) y, luego, se le permite descargar repentinamente su peso sobre ese elemento, la fuerza dinámica será del doble del peso. Éste es el caso del "impacto de fuerza" ya descrito, en el cual no hay una colisión real entre los objetos. Un análisis más preciso, usando métodos de ondas, pronostica que la fuerza dinámica será de más del doble, incluso en este caso de aplicación repentina de una carga sin colisión.[6] Muchos diseñadores usan 3 o 4 como una estimación más conservadora del factor dinámico, para el caso de aplicación repentina de la carga. Tan sólo se trata de una estimación rudimentaria; sin embargo, y si es posible, se deberían hacer mediciones experimentales, o bien, utilizar el método de análisis por ondas para determinar factores dinámicos más adecuados para cualquier diseño específico.

En la referencia 6 se encuentran factores de corrección η para varios casos de impacto derivados por Burr. Roark y Young ofrecen factores de casos adicionales en la referencia 7. Para el caso de una masa que impacta axialmente una varilla como la de la figura 1-18, el factor de corrección es[6]

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{m_b}{3m}} \tag{1.15}$$

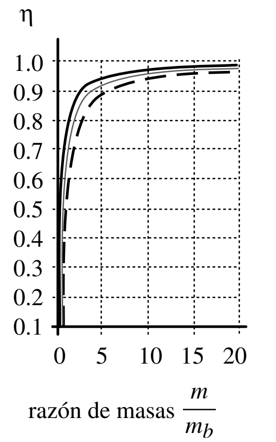


FIGURA 1-19

Factor de corrección η, como una función de la razón de masas

donde m es la masa del objeto que golpea y m_b es la masa del objeto golpeado. Conforme aumenta la razón masa golpeadora/masa golpeada, el factor de corrección η se aproxima asintóticamente a uno. La figura 1-19 muestra η en función de la razón de la masa para tres casos: una varilla axial (ecuación 1.15) trazada como línea delgada, una viga simple soportada en sus extremos y golpeada en el centro (línea gruesa), así como una viga en voladizo golpeada en el extremo libre (línea punteada).[6] Al suponer que uno es conservador, el factor de corrección η siempre es menor que uno (y > 0.9 para razones de masa > 5). Sin embargo, se debe estar consciente de que este método de energía da resultados aproximados, no conservadores en general, por lo que necesita utilizarse con factores de seguridad mayores que lo usual.

EJEMPLO 1-1

Carga de impacto sobre una varilla axial

Problema **La varilla axial mostrada en la figura 1-18*a* es golpeada por una masa que se mueve a 1 m/seg.**

a. Determine la sensibilidad de la fuerza de impacto en la razón longitud/diámetro de la varilla, para una masa constante de 1 kg que se mueve.

b. Determine la sensibilidad de la fuerza de impacto en la razón masa en movimiento/masa de la varilla, para una razón constante longitud/diámetro de 10.

Se proporciona **La varilla redonda tiene 100 mm de longitud. La varilla y la masa que se mueve son de acero con E = 207 Gpa y una densidad de masa de 7.86 g/cm^3.**

Suposiciones **Será aceptable un método de aproximación de energía. Se aplicará un factor de corrección de disipación de energía.**

Solución **Véase las figuras 1-18a, 1-20 y 1-21.**

1. La figura 1-18*a* muestra el sistema. La masa que se mueve golpea la pestaña en el extremo de la varilla con la velocidad indicada de 1 m/seg.

2. Para el inciso *a*), se mantendrá constante la masa que se mueve en 1 kg; la longitud de la varilla, de 100 mm, también es constante, mientras el diámetro de la varilla varía para obtener razones l / d en el intervalo de 1 a 20. En las ecuaciones que siguen, se mostrará sólo un cálculo realizado para la razón l / d igual a 10. También es posible calcular todos los valores para una lista de razones l / d. La deflexión estática, que resultaría de la aplicación de la fuerza del peso de la masa, se calcula de la expresión para la deflexión de una varilla a tensión. (Para la deducción, véase la ecuación 2.8 en el siguiente capítulo.)

$$\delta_{st} = \frac{Wl}{AE} = \frac{9.81\ \text{N}\left(100\ \text{mm}\right)}{78.54\ \text{mm}^2\left(2.07E5\ \text{N}/\text{mm}^2\right)} = 0.06\ \mu\text{m} \qquad (a)$$

El factor de corrección η se calcula aquí para una razón de masa estimada de 16.2,

$$\eta = \frac{1}{1+\dfrac{m_b}{3m}} = \frac{1}{1+\dfrac{0.0617}{3(1)}} = 0.98 \qquad (b)$$

Tales valores (calculados para cada diámetro diferente d de la varilla) se sustituyen después en la ecuación 1.12, para obtener la razón de la fuerza F_i/W y la fuerza dinámica F_i. Para $d = 10$ mm

$$\frac{F_i}{W} = v_i \sqrt{\frac{\eta}{g\delta_{st}}} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{0.98}{9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}(0.00006\,\text{m})}} = 1\,285.9$$

$$F_i = 1\,285.9(9.81\text{N}) = 12\,612 \text{ N} \tag{c}$$

En la figura 1-20 se muestra la variación, en la razón de la fuerza con cambios en la razón *l* / *d*, para una cantidad constante de la masa en movimiento y una velocidad de impacto constante (es decir, energía de entrada constante). Conforme se reduce la razón *l* / *d*, la varilla se vuelve mucho más rígida y genera fuerzas dinámicas mucho mayores con la misma energía de impacto. Esto indica claramente que las fuerzas de impacto se pueden reducir incrementando la funcionalidad del sistema impactado.

3. Para el inciso *b*), se mantendrá constante la razón *l* / *d*, con un valor de 10, y se variará la razón masa que se mueve/masa de la varilla en el intervalo de 1 a 20. Los archivos EXE03-01B del CD-ROM calculan todos los valores para un intervalo de razones de masa. Los resultados para una razón de masa de 16.2 son los mismos del inciso *a*). La figura 1-21*a* muestra que la razón de la fuerza dinámica F_i/W varía inversamente con la razón de la masa. Sin embargo, el valor de la fuerza dinámica se incrementa con la razón de la masa, como se indica en la figura 1-21*b*, ya que la fuerza estática *W* también se incrementa con la razón de masa.

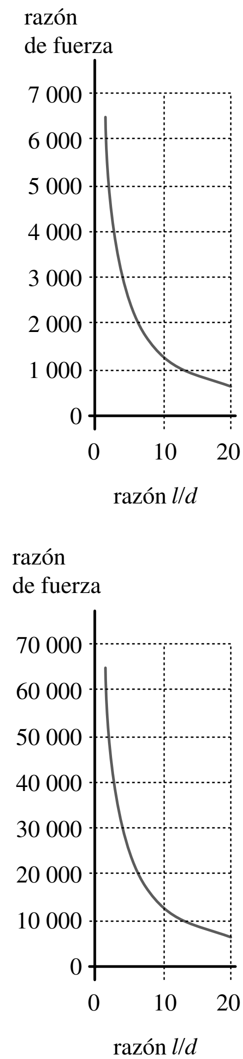


FIGURA 1-20

Fuerza dinámica y razón de fuerza en función de la razón *l/d* para el sistema del ejemplo 1-1

1.9 CARGA EN UNA VIGA

Una viga es un elemento cualquiera que soporta cargas transversales a lo largo de su eje longitudinal, pero también soporta cargas en dirección axial. Cuando una viga se sostiene sobre pernos o soportes angostos en cada extremo, se dice que está **simplemente apoyada**, como se muestra en la figura 1-22*a*. Una viga fija por uno de sus extremos y sin soporte en el otro es una **viga en voladizo** (figura 1-22*b*). Una viga simplemente apoyada que se extiende más allá de sus soportes en cualquiera de sus extremos se llama **viga suspendida** (figura 1-22*c*). Si una viga tiene más soportes de los necesarios para proporcionar estabilidad cinemática (es decir, hace el grado de libertad cinemática igual a cero), entonces se dice que la viga es indeterminada, como se indica en la figura 1-22*d*. Un problema de una **viga indeterminada** no se resuelve para sus cargas usando sólo las ecuaciones 1.3 (p. 8). Se requieren otras técnicas. Tal problema se estudia en el siguiente capítulo.

Las vigas se analizan normalmente como dispositivos estáticos; sin embargo, las vibraciones y las aceleraciones pueden provocar cargas dinámicas. Una viga soporta cargas en tres dimensiones, en cuyo caso se aplican las ecuaciones 1.3*a*. Para el caso bidimensional, bastan las ecuaciones 1.3*b*. Los ejemplos de repaso que se manejan aquí, se limitan a casos de dos dimensiones para fines de brevedad.

Cortante y momento

Una viga puede estar cargada con alguna combinación de fuerzas o momentos distribuidos y/o concentrados, como en la figura 1-22. Las fuerzas aplicadas darán lugar a fuerzas cortantes y momentos de flexión en la viga. Un análisis de la carga debe proporcionar las magnitudes y las distribuciones espaciales de esas fuerzas cortantes, así como momentos de flexión sobre la viga. Las fuerzas cortantes *V* y los momentos *M* en una viga se relacionan con la función de carga $q(x)$ mediante

$$q(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} \tag{1.16a}$$

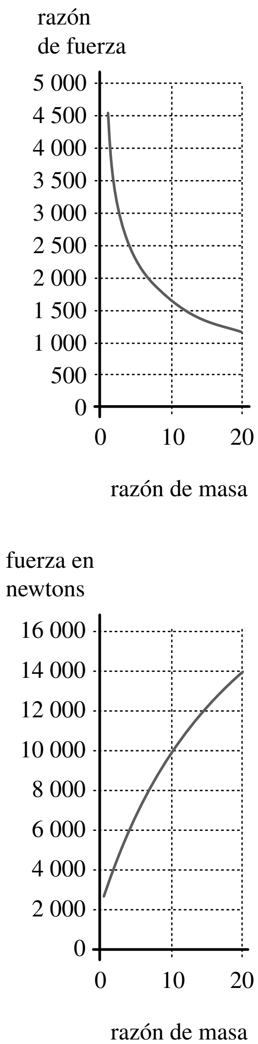


FIGURA 1-21

Fuerza dinámica y razón de fuerza en función de la razón de masa para el sistema del ejemplo 1-1

Por lo general, se conoce la función de carga $q(x)$, en tanto que las distribuciones de las fuerzas cortantes V y momentos M se obtienen al integrar la ecuación 1.16*a*:

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = \int_{x_A}^{x_B} q\,dx = V_B - V_A \tag{1.16b}$$

La ecuación 1.16*b* indica que la diferencia en las fuerzas cortantes entre dos puntos cualesquiera, A y B, es igual al área debajo de la gráfica de la función de carga, ecuación 1.16*a*.

Al integrar la relación entre cortante y momento,

$$\int_{M_A}^{M_B} dM = \int_{x_A}^{x_B} V\,dx = M_B - M_A \tag{1.16c}$$

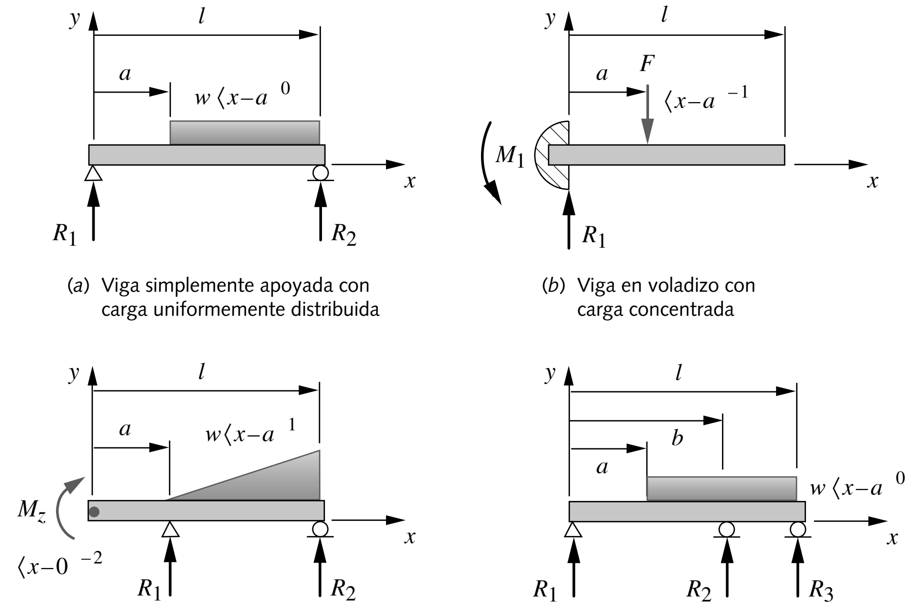
lo cual demuestra que la diferencia en el momento entre dos puntos cualesquiera, A y B, es igual al área debajo de la gráfica de la función cortante, ecuación 1.16*b*.

Convención de signos La convención usual (y arbitraria) de signos que se utilizan para las vigas, considera un momento positivo si provoca en la viga una deflexión cóncava hacia abajo (como para recolectar agua). Lo anterior pone en compresión la superficie superior y en tensión a la superficie inferior. La fuerza de corte se considera positiva, si causa una rotación en el sentido horario (de las manecillas del reloj) de la sección sobre la cual actúa. Estas convenciones se ilustran en la figura 1-23 y dan como resultado momentos positivos creados por la aplicación de cargas negativas. Todas las cargas aplicadas mostradas en la figura 1-22 son negativas. Por ejemplo, en la figura 1-22*a*, la magnitud de la carga distribuida de a a l es $q = -w$.

Solución de la ecuación La solución de las ecuaciones 1.3 (p. 8) y 1.16 para cualquier problema de vigas se puede obtener usando uno de varios enfoques. Las soluciones secuenciales y gráficas se describen en libros de texto sobre estática y mecánica de materiales. Un enfoque clásico para estos problemas consiste en obtener las reacciones sobre la viga, para lo cual hay que utilizar las ecuaciones 1.3 y luego dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento, mediante un enfoque de integración gráfica combinado con cálculos de los valores relevantes de las funciones. Desde un punto de vista didáctico, este enfoque tiene mucho valor, ya que se sigue fácilmente; sin embargo, su implementación resulta engorrosa. El enfoque más adecuado para una solución por computadora usa una clase de funciones matemáticas llamadas **función de singularidad** para representar las cargas sobre la viga. Se presenta el enfoque clásico como una referencia didáctica y, también, se indica el manejo de funciones de singularidad que ofrecen algunas ventajas computacionales. Mientras quizás este enfoque sea nuevo para algunos estudiantes, cuando se compara con los métodos aprendidos comúnmente en otros cursos, tiene ventajas muy importantes en la computarización de la solución.

Funciones de singularidad

Como las cargas sobre las vigas consisten típicamente en colecciones de entidades discretas, como cargas puntuales o segmentos de cargas distribuidas que pueden ser discontinuas a lo largo de la viga, resulta difícil representar las funciones discretas con ecuaciones válidas para un continuo completo de la longitud de la viga. Para tratar con dichas situaciones matemáticas, se inventó una clase especial de funciones llamada **funciones de singularidad**, las cuales se representan con frecuencia mediante un binomio entre corchetes angulados, como se observa en las ecuaciones 1.17. La primera cantidad entre corchetes es la variable de interés, en nuestro caso x, la distancia a lo largo de la longitud de la viga. La segunda cantidad a es un parámetro definido por el usuario, que indica dónde la función de singularidad x actúa o empieza a actuar. Por ejemplo, para una carga puntual, la



(*a*) Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida

(*b*) Viga en voladizo con carga concentrada

(*c*) Viga suspendida con momentos y cargas distribuidas linealmente

(*d*) Viga indeterminada estáticamente con carga uniformemente distribuida

FIGURA 1-22

Tipos de vigas y cargas en vigas

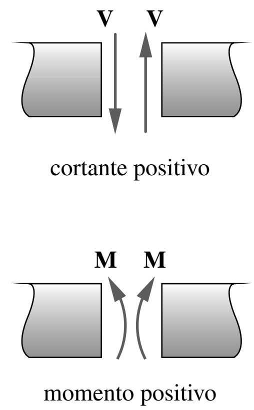


FIGURA 1-23

Convención de signos para vigas

cantidad a representa el valor particular de x, donde actúa la carga (véase la figura 1-22*b*). La definición de tal función de singularidad, llamada **impulso unitario** o **función delta de Dirac**, está dada en la ecuación 1.17*d*. Observe que todas las funciones de singularidad implican una restricción condicional. El impulso unitario se evalúa hasta ∞ *si* $x = a$ y es igual a cero para cualquier otro valor de x. La función de **paso unitario** o **función unitaria de Heaviside** (ecuación 1.17*c*) evalúa hasta cero todos los valores de x menores que a y hasta 1 para el resto de las x.

Como estas funciones están definidas para evaluar hasta la unidad, al multiplicarlas por un coeficiente se crea cualquier magnitud deseada. En los siguientes tres ejemplos se muestra su aplicación y se explica con el mayor detalle en el ejemplo 1-2B. Si una función de carga inicia y se detiene dentro del intervalo de x deseado, necesita dos funciones de singularidad para describirse. La primera define el valor de a_1 en el cual la función empieza a actuar y tiene un coeficiente negativo o positivo adecuado a su dirección. La segunda define el valor de a_2 en el cual la función termina de actuar y posee un coeficiente de la misma magnitud, pero signo opuesto al de la primera. Las dos funciones se cancelarán más allá de a_2, lo cual hace la carga igual a cero. Éste es el caso que se muestra en el ejemplo 2-6 del siguiente capítulo.

Las cargas distribuidas cuadráticamente se pueden representar mediante una **función unitaria parabólica**.

$$\langle x-a\rangle^2 \tag{1.17a}$$

la cual está definida como 0, cuando $x \le a$, e igual a $(x-a)^2$, cuando $x > a$.

Las cargas linealmente distribuidas se pueden representar por una **función unitaria de rampa**.

$$\langle x-a\rangle^1 \tag{1.17b}$$

la cual está definida como 0, cuando $x \leq a$, e igual a $(x - a)$, cuando $x > a$.

Una carga uniformemente distribuida sobre una porción de la viga se representa matemáticamente por una función de **paso unitario**.

$$\langle x - a \rangle^0 \tag{1.17c}$$

la cual está definida como 0, cuando $x < a$; la unidad, cuando $x > a$, e indefinida, cuando $x = a$.

Una fuerza concentrada se representa mediante una función de **impulso unitario**.

$$\langle x - a \rangle^{-1} \tag{1.17d}$$

la cual está definida como 0 cuando $x < a$, ∞ cuando $x = a$ y 0 cuando $x > a$. Su integral evalúa hasta 1 en a.

Un momento concentrado se representa por una **función doblete.**

$$\langle x - a \rangle^{-2} \tag{1.17e}$$

la cual está definida como 0 cuando $x < a$, indeterminada cuando $x = a$ y 0 cuando $x > a$. Esto origina un momento doble en a.

Tal proceso se extiende para obtener funciones de singularidad polinomial de cualquier orden $<x-a>^n$ y ajustar cargas distribuidas de cualquier forma. Cuatro de las cinco funciones de singularidad descritas aquí se muestran en la figura 1-22, tal como se aplican a diferentes tipos de vigas. Se necesita un programa de cómputo para evaluar dichas funciones. La tabla 1-7 muestra cinco de las funciones de singularidad implementadas en un pseudocódigo "BASIC-like". Los ciclos *For* ejecutan la variable x desde 0 hasta la longitud l de la viga. La prueba *If* determina si x ha alcanzado el valor de a, que es la posición de inicio de la función de singularidad. Según esta prueba, el valor de $y(x)$ se establece en cero o en la magnitud especificada de la función de singularidad. Este tipo de código se puede implementar con facilidad en cualquier lenguaje computacional (como C+, Fortran, BASIC) o en un solucionador de ecuaciones (como Mathcad, MATLAB, TK Solver, EES).

Las integrales de las funciones de singularidad tienen definiciones especiales que, en algunos casos, desafían el sentido común; sin embargo, brindan los resultados matemáticos deseados. Por ejemplo, la función de impulso unitario (ecuación 1.17*d*) se define en el límite que tiene cero de ancho y magnitud infinita, mientras que incluso su área (integral) se define igual a 1 (ecuación 1.18*d*). (Para un estudio más completo de las funciones de singularidad, consulte la referencia 8.) Las integrales de las funciones de singularidad en las ecuaciones 1.17 se definen como

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^2 d\lambda = \frac{\langle x - a \rangle^3}{3} \tag{1.18a}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^1 d\lambda = \frac{\langle x - a \rangle^2}{2} \tag{1.18b}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^0 d\lambda = \langle x - a \rangle^1 \tag{1.18c}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^{-1} d\lambda = \langle x - a \rangle^0 \tag{1.18d}$$

Tabla 1-7 Pseudocódigo para evaluar funciones de singularidad

```
' Función de singularidad de pulso
    For x = 0 to l
        If ABS (x – a) < 0.0001 Then y(x) = magnitude, Else y(x) = 0*
    Next x
' Función de singularidad de paso
    For x = 0 to l
        If x < a Then y(x) = 0, Else y(x) = magnitude
    Next x
' Función de singularidad de rampa
    For x = 0 to l
        If x < = a Then y(x) = 0, Else y(x) = magnitude * (x – a)
    Next x
' Función de singularidad parabólica
    For x = 0 to l
        If x < = a Then y(x) = 0, Else y(x) = magnitude * (x – a)^2
    Next x
' Función de singularidad cúbica
    For x = 0 to l
        If x < = a Then y(x) = 0, Else y(x) = magnitude * (x – a)^3
    Next x
```

* Nota: Esta rutina no genera el valor infinito de la función delta de Dirac. En cambio, genera la magnitud de una carga puntual aplicada en la posición *a* para su uso al graficar una función de carga de la viga.

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^{-2} d\lambda = \langle x - a \rangle^{-1} \tag{1.18e}$$

donde λ es tan sólo una variable de integración que corre desde $-\infty$ hasta x. Estas expresiones sirven para evaluar las funciones de corte y momento, que resultan de cualquier función de carga que se exprese como una combinación de funciones de singularidad.

EJEMPLO 1-2A

Diagramas de fuerza cortante y momento de una viga simplemente apoyada mediante un método gráfico

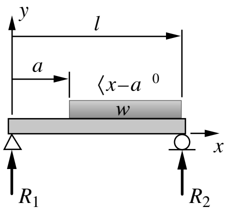
Problema **Determine y grafique las funciones de fuerza cortante y momento para la viga simplemente apoyada, con carga uniformemente distribuida que se ilustra en la figura 1-22*a*.**

Se proporciona **Longitud de la viga l = 10 in, y la carga se localiza en a = 4 in. La magnitud de la fuerza distribuida uniformemente es w = 10 lb/in.**

Suposiciones **El peso de la viga es insignificante comparado con la carga aplicada y se puede ignorar.**

Solución **Véase las figuras 1-22*a* y 1-24.**

1



Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida

FIGURA 1-22a

Repetida

1. Resuelva las fuerzas de reacción usando las ecuaciones 1.3 (p. 8). La suma de momentos con respecto al extremo derecho y la suma de fuerzas en la dirección y da

$$\sum M_z = 0 = R_1 l - \frac{w(l-a)^2}{2}$$
$$R_1 = \frac{w(l-a)^2}{2l} = \frac{10(10-4)^2}{2(10)} = 18 \tag{a}$$

$$\sum F_y = 0 = R_1 - w(l-a) + R_2$$
$$R_2 = w(l-a) - R_1 = 10(10-4) - 18 = 42 \tag{b}$$

2. La forma del diagrama de corte se puede esquematizar integrando gráficamente el diagrama de carga de la figura 1-24*a*. Como "recurso" para visualizar este proceso de integración gráfica, imagine que camina hacia atrás por el diagrama de carga de la viga, iniciando desde el extremo izquierdo y dando pasos pequeños de longitud dx. Usted registrará en el diagrama de fuerza cortante (figura 1-24*b*) el área (*fuerza* · dx) del diagrama de carga que observa conforme da cada paso. Cuando da el primer paso hacia atrás, a partir de $x = 0$, el diagrama de fuerza cortante de inmediato aumenta al valor de R_1. Cuando camina de $x = 0$ a $x = a$, no ocurren cambios, puesto que no ve fuerzas adicionales. Cuando camina más allá de $x = a$, comienza a ver franjas de área iguales a $-w \cdot dx$, las cuales se restan del valor de R_1 en el diagrama de corte. Cuando el lector alcanza $x = l$, el área total $w \cdot (l - a)$ habrá tomado el valor del diagrama de fuerza cortante para $-R_2$. Conforme usted camina hacia atrás, afuera del diagrama de carga de la viga (figura 1-24*a*) y cae en picada hacia abajo, ahora puede ver la fuerza de reacción R_2 que acerca el diagrama de corte a cero. El valor más grande de la fuerza de corte en este caso es, entonces, R_2 en $x = l$.

3. Si sus reflejos son lo suficientemente rápidos, el lector debería atrapar el diagrama de fuerza cortante (figura 1-24*b*) conforme cae, sube en él y repite el truco de la caminata hacia atrás para crear el diagrama de momento, que es la integral del diagrama de corte. En la figura 1-24*c*, observe que desde $x = 0$ hasta $x = a$ la función de momento es una recta con pendiente $= R_1$. Más allá del punto a, el diagrama de fuerza cortante es triangular; por ende, forma una parábola. El momento pico ocurrirá donde el diagrama de fuerza cortante cruza el cero (es decir, la pendiente cero en el diagrama de momento). El valor de x en $V = 0$ se obtiene con un poco de trigonometría, al ver que la pendiente del triángulo es $-w$:

$$x_{@V=0} = a + \frac{R_1}{w} = 4 + \frac{18}{10} = 5.8 \tag{c}$$

El área cortante positiva se suma al valor del momento y el área negativa se resta, de manera que el valor del momento pico se obtiene al sumar las áreas de las porciones rectangular y triangular del diagrama de fuerza cortante, a partir de $x = 0$ y hasta el punto de corte cero en $x = 5.8$:

$$M_{@x=5.8} = R_1(a) + R_1\frac{1.8}{2} = 18(4) + 18\frac{1.8}{2} = 88.2 \tag{d}$$

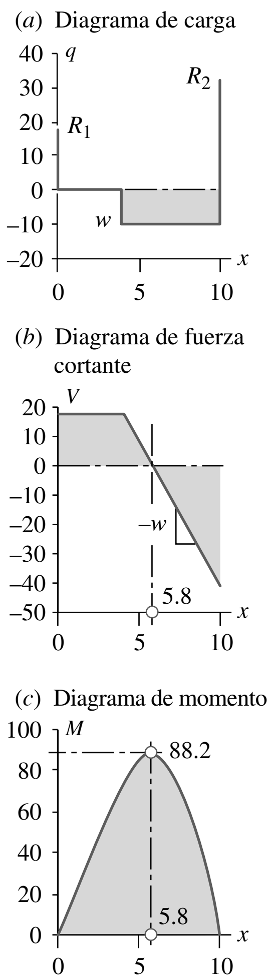


FIGURA 1-24

Gráficas del ejemplo 1-2

El método anterior da las magnitudes y posiciones del cortante y momento máximos sobre la viga y es útil para la determinación rápida de esos valores. Sin embargo, todas las caminatas y caídas pueden resultar tediosas, por lo que sería útil tener un método que se computarice convenientemente, para brindar información precisa y completa sobre los diagramas de fuerza cortante y momento de cualquier caso de

vigas cargadas. Tal método permitirá obtener la curva de deflexión de la viga con un poco de trabajo adicional. El método sencillo mostrado no es tan útil para determinar las curvas de deflexión, como se verá en el siguiente capítulo. Ahora se repetirá este ejemplo mediante funciones de singularidad, para determinar los diagramas de carga, cortante y momento.

EJEMPLO 1-2B

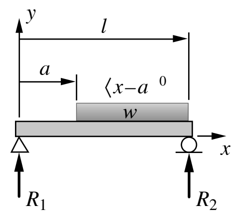
Diagramas de fuerza cortante y momento de una viga simplemente soportada mediante funciones de singularidad

Problema **Determine y grafique las funciones cortante y de momento para la viga simplemente apoyada con carga distribuida uniformemente que se muestra en la figura 1-22*a*.**

Se proporciona **Longitud de la viga *l* = 10 in, mientras que la carga se localiza en *a* = 4 in. La magnitud de la fuerza uniformemente distribuida es *w* = 10 lb/in.**

Suposiciones **El peso de la viga es insignificante, comparado con la carga aplicada, y se puede ignorar.**

Solución **Véase las figuras 1-22*a* y 1-24.**



Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida

FIGURA 1-22a

Repetida

1. Escriba las ecuaciones para la función de carga en términos de las ecuaciones 1.17 (pp. 43-44) e integre dos veces la función resultante usando la ecuación 1.18 (pp. 44-45), para obtener las funciones de corte y momento. Para la viga de la figura 1-22*a*,

$$q = R_1\langle x-0\rangle^{-1} - w\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-l\rangle^{-1} \tag{a}$$

$$V = \int q\,dx = R_1\langle x-0\rangle^{0} - w\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-l\rangle^{0} + C_1 \tag{b}$$

$$M = \int V\,dx = R_1\langle x-0\rangle^{1} - \frac{w}{2}\langle x-a\rangle^{2} + R_2\langle x-l\rangle^{1} + C_1x + C_2 \tag{c}$$

Hay que determinar dos fuerzas de reacción y dos constantes de integración. Se integra a lo largo de una viga hipotética infinita desde $-\infty$ hasta x. La variable x puede tomar valores tanto antes como más allá del extremo de la viga. Si se consideran las condiciones de un punto infinitesimal a la izquierda de $x = 0$ (que se denota como $x = 0^-$), el corte y el momento serán cero ahí. Las mismas condiciones se aplican a un punto infinitesimal ubicado a la derecha de $x = l$ (que se denota por $x = l^+$). Tales observaciones proporcionan las cuatro condiciones de frontera necesarias para evaluar las cuatro constantes C_1, C_2, R_1, R_2: cuando

$$x = 0^-,\ V = 0,\ M = 0;\ \text{y cuando}\ x = l^+,\ V = 0,\ M = 0.$$

2. Las constantes C_1 y C_2 se obtienen al sustituir las condiciones de frontera $x = 0^-$, $V = 0$ y $x = 0^-$, $M = 0$ en las ecuaciones *b*) y *c*), respectivamente:

$$\begin{aligned} V(0^-) &= 0 = R_1\langle 0^- - 0\rangle^{0} - w\langle 0^- - a\rangle^{1} + R_2\langle 0^- - l\rangle^{0} + C_1 \\ C_1 &= 0 \\ M(0^-) &= 0 = R_1\langle 0^- - 0\rangle^{1} - \frac{w}{2}\langle 0^- - a\rangle^{2} + R_2\langle 0^- - l\rangle^{1} + C_1(0^-) + C_2 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \tag{d}$$

Observe que, en general, las constantes C_1 y C_2 serán siempre cero, si las fuerzas de reacción y los momentos que actúan sobre la viga se incluyen en la función de carga, debido a que los diagramas de fuerza cortante y momento tienen que aproximarse a cero en cada extremo de la viga.

3. Las fuerzas de reacción R_1 y R_2 se calculan a partir de las ecuaciones (c) y (b), respectivamente, al sustituir las condiciones de frontera $x = l^+$, $V = 0$ y $M = 0$. Observe que se puede sustituir l por l^+ para evaluarla, ya que su diferencia es muy pequeña.

$$M\left(l^+\right) = R_1\left\langle l^+ - 0\right\rangle^1 - w\frac{\left\langle l^+ - a\right\rangle^2}{2} + R_2\left\langle l^+ - l\right\rangle^1 = 0$$

$$0 = R_1 l^+ - \frac{w\left(l^+ - a\right)^2}{2} \qquad (e)$$

$$R_1 = \frac{w\left(l^+ - a\right)^2}{2l^+} = \frac{w(l-a)^2}{2l} = \frac{10(10-4)^2}{2(10)} = 18$$

$$V\left(l^+\right) = R_1\left\langle l^+ - 0\right\rangle^0 - w\left\langle l^+ - a\right\rangle^1 + R_2\left\langle l^+ - l\right\rangle^0 = 0$$

$$0 = R_1 - w(l-a) + R_2 \qquad (f)$$

$$R_2 = w(l-a) - R_1 = 10(10-4) - 18 = 42$$

Puesto que se conocen w, l y a, la ecuación (e) se resuelve para R_1 y el resultado se sustituye en la ecuación (f) para encontrar R_2. Observe que la ecuación (f) es justamente $\Sigma F = 0$ y la ecuación (e) es la suma de momentos con respecto al punto l y está igualada a 0.

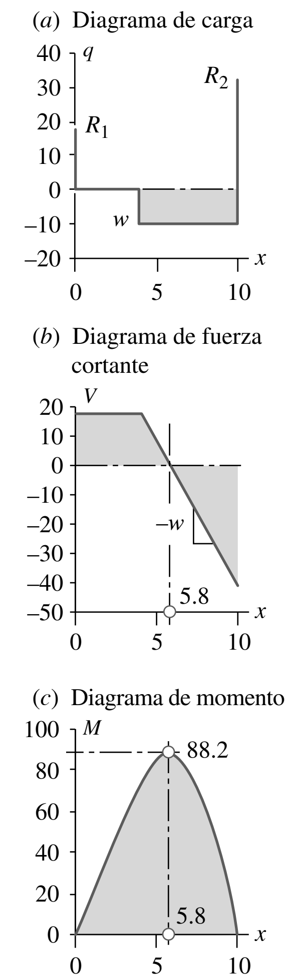


FIGURA 1-24 Repetida
Gráficas del ejemplo 1-2

4. Para generar las funciones de fuerza cortante y momento sobre la longitud de la viga, se deben evaluar las ecuaciones (b) y (c) para el intervalo de valores de x desde 0 hasta l, después de sustituir los valores anteriores de C_1, C_2, R_1 y R_2 en ellas. La variable independiente x se corrió de 0 a $l = 10$ en incrementos de 0.1. Las reacciones, la función de carga, la función fuerza cortante y la función de momento se calcularon con las ecuaciones (a) a (f) anteriores, y están graficadas en la figura 1-24. Los archivos EX03-02 que producen estas gráficas se encuentran en el CD-ROM.

5. Los valores absolutos mayores de las funciones de fuerza cortante y momento son de interés para el cálculo de esfuerzos en la viga. Las gráficas muestran que la fuerza de corte es más grande en $x = l$ y el momento tiene un máximo $M_{máx}$ cerca del centro. El valor de x en $M_{máx}$ se obtiene haciendo $V = 0$ en la ecuación (b) y despejando x. (La función cortante es la derivada de la función de momento; por ende, debe ser cero en cada uno de sus mínimos y máximos.) Esto da $x = 5.8$ en $M_{máx}$. Los valores de la función en dichos puntos de máximos y mínimos se calculan con las ecuaciones (b) y (c), respectivamente, sustituyendo los valores adecuados de x y evaluando las funciones de singularidad. Para el valor absoluto máximo de la fuerza de corte en $x = l$,

$$\begin{aligned} V_{máx} = V_{@\,x=l^-} &= R_1\left\langle l^- - 0\right\rangle^0 - w\left\langle l^- - a\right\rangle^1 + R_2\left\langle l^- - l\right\rangle^0 \\ &= R_1 - w\left(l^- - a\right) + 0 \qquad (g) \\ &= 18 - 10(10-4) + 0 = -42 \end{aligned}$$

Observe que el primer término de singularidad vale 1, puesto que $l^- > 0$ (véase la ecuación 1.17c, p. 44); el segundo término de singularidad tiene un valor de $(l - a)$, porque $l^- > a$ en este problema (véase la ecuación 1.17b), y el tercer término de singularidad tiene un valor de 0, como se definió en la ecuación 1.17c. El momento máximo se obtiene de una forma similar:

$$M_{máx} = M_{@\,x=5.8} = R_1\langle 5.8-0\rangle^1 - w\frac{\langle 5.8-a\rangle^2}{2} + R_2\langle 5.8-l\rangle^1$$

$$= R_1\langle 5.8\rangle^1 - w\frac{\langle 5.8-4\rangle^2}{2} + R_2\langle 5.8-10\rangle^1 \qquad (h)$$

$$= 18(5.8) - 10\frac{(5.8-4)^2}{2} + 0 = 88.2$$

El tercer término de singularidad vale 0, porque $5.8 < l$ (véase la ecuación 1.17*b*).

6. Los resultados son

$$R_1 = 18 \qquad R_2 = 42 \qquad V_{máx} = -42 \qquad M_{máx} = 88.2 \qquad (i)$$

EJEMPLO 1-3A

Diagramas de fuerza cortante y momento de una viga en voladizo usando un método gráfico

Problema **Determine y grafique las funciones de fuerza cortante y momento de una viga en voladizo con una carga concentrada, como se ilustra en la figura 1-22*b*.**

Se proporciona **Longitud de la viga $l = 10$ in, y la carga se localiza en $a = 4$ in. La magnitud de la fuerza aplicada es $F = 40$ lb.**

Suposiciones **El peso de la viga es insignificante comparado con la carga aplicada, de modo que puede ignorarse.**

Solución **Véase las figuras 1-22*b* y 1-25.**

1. Determine las fuerzas de reacción usando las ecuaciones 1.3 (p. 8). La suma de momentos con respecto al extremo izquierdo de la viga y la suma de las fuerzas en la dirección de y, nos da

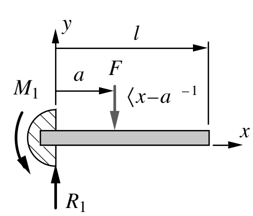
$$\sum M_z = 0 = Fa - M_1$$
$$M_1 = Fa = 40(4) = 160 \qquad (a)$$

$$\sum F_y = 0 = R_1 - F$$
$$R_1 = F = 40 \qquad (b)$$

2. De acuerdo con la convención de signos, en este ejemplo el corte es positivo y el momento es negativo. Para construir gráficamente los diagramas de fuerza cortante y momento de una viga en voladizo, imagine una “caminata hacia atrás”, que inicie en el extremo fijo de la viga y se mueva hacia el extremo libre (de izquierda a derecha en la figura 1-24).

   En este ejemplo, el resultado en la primera fuerza observada es la fuerza de reacción R_1 que actúa hacia arriba. Esta fuerza de corte permanece constante hasta que se alcanza la fuerza hacia abajo F en $x = a$, la cual aproxima a cero el diagrama de corte.

3. El diagrama de momento es la integral del diagrama de corte, que en este caso es una recta de pendiente = 40.



Viga en voladizo con carga concentrada

FIGURA 1-22b

Repetida

4. Tanto la fuerza cortante como el momento de la viga en voladizo son máximos en la pared. Sus magnitudes máximas se muestran en las ecuaciones (*a*) y (*b*) anteriores.

Este ejemplo se repetirá usando ahora funciones de singularidad.

EJEMPLO 1-3B

Diagramas de fuerza cortante y momento de una viga en voladizo usando funciones de singularidad

Problema **Determine y grafique las funciones cortante y de momento de una viga en voladizo con una carga concentrada, como se ilustra en la figura 1-22*b*.**

Se proporciona **Longitud de la viga $l = 10$ in, y la carga se localiza en $a = 4$ in. La magnitud de la fuerza aplicada es $F = 40$ lb.**

Suposiciones **El peso de la viga es insignificante, comparado con la carga aplicada, de modo que puede ignorarse.**

Solución **Véase las figuras 1-22*b* y 1-25.**

1. Escriba las ecuaciones de la función de carga en términos de las ecuaciones 1.17 (pp. 43-44) e integre dos veces la función resultante usando las ecuaciones 1-18 (pp. 44-45), para obtener las funciones cortante y de momento. Observe el uso de la función doblete unitaria para representar el momento en la pared. Para la viga de la figura 1-22*b*,

$$q = -M_1\langle x-0\rangle^{-2} + R_1\langle x-0\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1} \tag{a}$$

$$V = \int q\,dx = -M_1\langle x-0\rangle^{-1} + R_1\langle x-0\rangle^{0} - F\langle x-a\rangle^{0} + C_1 \tag{b}$$

$$M = \int V\,dx = -M_1\langle x-0\rangle^{0} + R_1\langle x-0\rangle^{1} - F\langle x-a\rangle^{1} + C_1 x + C_2 \tag{c}$$

El momento de reacción M_1 en la pared está en la dirección de z y las fuerzas R_1 y F están en la dirección de y en la ecuación (*b*). Todos los momentos de la ecuación (*c*) están en la dirección de z.

2. Debido a que las reacciones se incluyen en la función de carga, los diagramas de fuerza cortante y momento se aproximan a cero en cada extremo de la viga, haciendo $C_1 = C_2 = 0$.

3. La fuerza de reacción R_1 y el momento de reacción M_1 se calculan con las ecuaciones (*b*) y (*c*), respectivamente, en donde se sustituyen las condiciones de frontera $x = l^+$, $V = 0$, $M = 0$. Observe que es posible sustituir l por l^+, puesto que su diferencia es muy pequeña. M_1 no aparece en la ecuación (*d*), porque su función de singularidad no está definida en $l = l^+$.

$$\begin{aligned} V &= M\langle l\rangle^{-1} + R_1\langle l-0\rangle^{0} - F\langle l-a\rangle^{0} = 0 \\ 0 &= M(0) + R_1 - F \\ R_1 &= F = 40 \text{ lb} \end{aligned} \tag{d}$$

$$\begin{aligned} M &= -M_1\langle l-0\rangle^{0} + R_1\langle l-0\rangle^{1} - F\langle l-a\rangle^{1} = 0 \\ 0 &= -M_1 + R_1(l) - F(l-a) \\ M_1 &= R_1(l) - F(l-a) = 40(10) - 40(10-4) = 160 \text{ lb - in cw} \end{aligned} \tag{e}$$

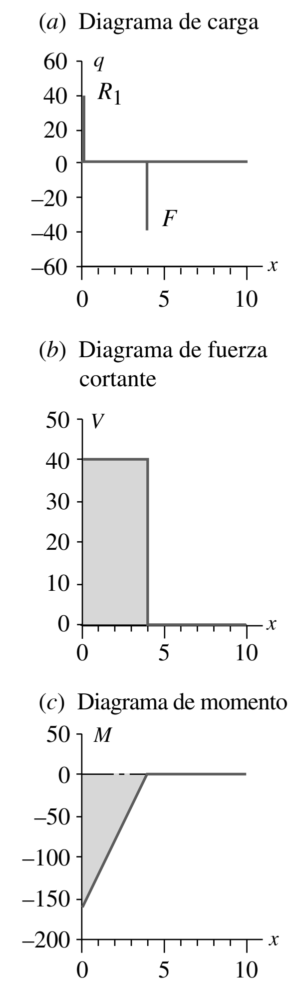


FIGURA 1-25
Gráficas del ejemplo 1-3

Puesto que se conocen F, l y a, la ecuación (d) se despeja para R_1, cuyo resultado se sustituye en la ecuación (e) para obtener M_1. Observe que la ecuación (d) es justamente $\Sigma F_y = 0$ y la ecuación (e) es $\Sigma M_z = 0$.

4. Para generar las funciones de fuerza cortante y momento sobre la longitud de la viga, hay que evaluar las ecuaciones (b) y (c), para el intervalo de valores de x desde 0 hasta l, después de sustituir los valores anteriores de C_1, C_2, R_1 y M_1 en ellas. La variable independiente x fue cambiando de valor de 0 a $l = 10$ en incrementos de 0.1. Las reacciones, la función de carga, la función de fuerza cortante y la función de momento se calcularon con las ecuaciones (a) a (e) anteriores, y se graficaron en la figura 1-25. Los archivos EX03-03 que generan tales gráficas se encuentran en el CD-ROM.

5. Los valores absolutos mayores de las funciones cortante y de momento son de interés para el cálculo de esfuerzos en la viga. Las gráficas muestran que la fuerza cortante y el momento son ambos mayores en $x = 0$. Los valores de la función en estos puntos se calculan con las ecuaciones (b) y (c), respectivamente, sustituyendo $x = 0$ y evaluando las funciones de singularidad:

$$R_1 = 40 \qquad V_{máx} = 40 \qquad |M_{máx}| = 160 \tag{f}$$

EJEMPLO 1-4

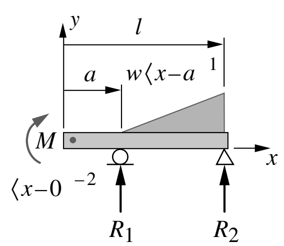
Diagramas de fuerza cortante y momento de una viga indeterminada usando funciones de singularidad

Problema **Determine y grafique las funciones cortante y de momento de una viga indeterminada, con un momento aplicado y una carga de rampa, como se ilustra en la figura 1-22*c*.**

Se proporciona **Longitud de la viga $l = 10$ in, y la carga se localiza en a = 4 in. La magnitud del momento aplicado es $M = 20$ lb-in y la pendiente de la distribución de la fuerza es $w = 10$ lb/in/in.**

Suposiciones **El peso de la viga es insignificante comparado con la carga aplicada, de modo que puede ignorarse.**

Solución **Véase las figuras 1-22*c* y 1-26.**



Viga indeterminada con momento y carga distribuida linealmente

FIGURA 1-22c

Repetida

1. Escriba las ecuaciones de la función de carga en términos de las ecuaciones 1.17 (pp. 43-44) e integre dos veces la función resultante usando las ecuaciones 1.18 (pp. 44-45), para obtener las funciones de fuerza cortante y momento. Para la viga de la figura 1-22c,

$$q = M\langle x-0\rangle^{-2} + R_1\langle x-a\rangle^{-1} - w\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-l\rangle^{-1} \tag{a}$$

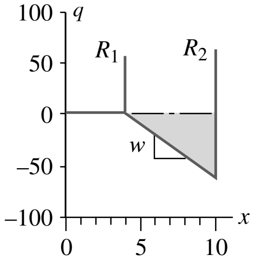
$$V = \int q\,dx = M\langle x-0\rangle^{-1} + R_1\langle x-a\rangle^{0} - \frac{w}{2}\langle x-a\rangle^{2} + R_2\langle x-l\rangle^{0} + C_1 \tag{b}$$

$$M = \int V\,dx = M\langle x-0\rangle^{0} + R_1\langle x-a\rangle^{1} - \frac{w}{6}\langle x-a\rangle^{3} + R_2\langle x-l\rangle^{1} + C_1x + C_2 \tag{c}$$

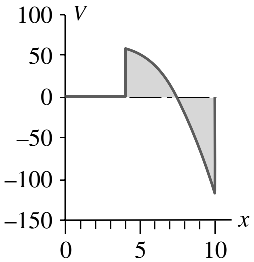
2. Como se mostró en los dos ejemplos anteriores, las constantes de integración C_1 y C_2 siempre serán iguales a cero si las fuerzas de reacción se incluyen en las ecuaciones de fuerza cortante y momento, de modo que se igualarán a cero.

1

(a) Diagrama de carga



(b) Diagrama de fuerza cortante



(c) Diagrama de momento

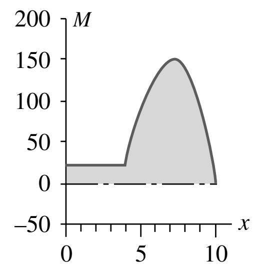


FIGURA 1-26

Gráficas del ejemplo 1-4

3. Las fuerzas de reacción R_1 y R_2 se calculan con las ecuaciones (c) y (d), respectivamente, sustituyendo las condiciones de frontera $x = l^+$, $V = 0$, $M = 0$. Observe que se puede sustituir l por l^+, ya que su diferencia es muy pequeña.

$$M = M_1\langle l\rangle^0 + R_1\langle l-a\rangle^1 - \frac{w}{6}\langle l-a\rangle^3 + R_2\langle l-l\rangle^1 = 0$$

$$0 = M_1 + R_1(l-a) - \frac{w}{6}(l-a)^3$$

$$R_1 = \frac{w}{6}(l-a)^2 - \frac{M_1}{(l-a)} \qquad (d)$$

$$= \frac{10}{6}(10-4)^2 - \frac{20}{(10-4)} = 56.67 \text{ lb}$$

$$V = M\langle l\rangle^{-1} + R_1\langle l-a\rangle^0 - \frac{w}{2}\langle l-a\rangle^2 + R_2\langle l-l\rangle^0 = 0$$

$$0 = M(0) + R_1 - \frac{w}{2}(l-a)^2 + R_2 \qquad (e)$$

$$R_2 = \frac{w}{2}(l-a)^2 - R_1 = \frac{10}{2}(10-4)^2 - 56.67 = 123.33 \text{ lb}$$

Observe que la ecuación (d) es justamente $\Sigma M_z = 0$ y la ecuación (e) es $\Sigma F_y = 0$.

4. Para generar las funciones de fuerza cortante y momento sobre la longitud de la viga, se deben evaluar las ecuaciones (b) y (c) para el intervalo de valores de x desde 0 hasta l, después de sustituir los valores de $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, R_1 y R_2 en ellas. La variable independiente x fue cambiando de valor de 0 a $l = 10$ en incrementos de 0.1. Las reacciones, la función de carga, la función fuerza cortante y la función de momento se calcularon con las ecuaciones (a) a (f) anteriores, que están graficadas en la figura 1-26.*

5. Los valores absolutos mayores de las funciones de fuerza cortante y momento son de interés para el cálculo de esfuerzos en la viga. Las gráficas muestran que la fuerza de corte es más grande en $x = l$ y el momento tiene un máximo a la derecha del centro de la viga. El valor de x en $M_{máx}$ se calcula haciendo $V = 0$ en la ecuación (b) y despejando x. La función de corte es la derivada de la función de momento; por lo tanto, debe ser cero en cada uno de sus mínimos y máximos. Esto nos da $x = 7.4$ en $M_{máx}$. Los valores de la función en esos puntos de mínimos o máximos se calculan con las ecuaciones (b) y (c), respectivamente, al sustituir los valores adecuados de x y evaluar la función de singularidad:

$$R_1 = 56.7 \qquad R_2 = 123.3 \qquad V_{máx} = -120 \qquad M_{máx} = 147.2 \qquad (f)$$

Superposición

Estos ejemplos de sistemas de vigas representan sólo una pequeña fracción de todas las combinaciones posibles de cargas y restricciones en vigas que se encontrarán en la práctica. En lugar de escribir e integrar las funciones de carga para cada nueva situación con vigas, empezando desde el inicio, usualmente se resuelve el problema particular con superposición, lo cual significa simplemente la suma de los resultados individuales. Para deflexiones pequeñas, es seguro suponer linealidad en estos problemas; la linealidad es un requerimiento para que la superposición sea válida. Por ejemplo, la carga debida al peso de una viga (ignorada en los ejemplos anteriores) se puede tomar en cuenta superponiendo una carga uniforme sobre la longitud completa de la viga, sin importar que estén presentes o no otras cargas sobre la viga.

* Los archivos EX03-04 que generan tales gráficas se encuentran en el CD-ROM.

Los efectos sobre los diagramas de fuerza cortante y momento de cargas múltiples sobre una viga también se determinan por superposición de las cargas individuales. Si, por ejemplo, la viga del ejemplo 1-3 tuviera dos cargas puntuales aplicadas sobre ella, cada una a una distancia *a* diferente, su efecto combinado se obtendría al aplicar dos veces las ecuaciones de ese ejemplo, una por cada carga y posición, y luego al sumar (superponiendo) los dos resultados. El apéndice F contiene un conjunto de casos comunes de cargas en vigas, resueltos para funciones de corte y momento, donde se proporcionan sus ecuaciones y gráficas. Tales soluciones se combinan por superposición para dar cabida a situaciones más complicadas. Se pueden superponer dentro de su modelo para obtener y graficar los diagramas totales de fuerza cortante y momento, así como sus máximos y sus mínimos.

1.10 RESUMEN

Aunque el aprendizaje del estudiante sobre el análisis de esfuerzos por primera vez quizá no parezca así, el tema del análisis de cargas con frecuencia llega a ser más difícil y complicado que el análisis de esfuerzos. En última instancia, la precisión de cualquier análisis de esfuerzos se limita por la calidad de nuestro conocimiento acerca de cargas sobre un sistema, ya que por lo general los esfuerzos son proporcionales a las cargas, como se verá en el capítulo 2. Este capítulo presentó un repaso de los métodos newtonianos para el análisis de fuerza y momento, en unos cuantos tipos de sistemas con cargas dinámicas o estáticas. De ningún modo se trata del tratamiento completo de un tema tan complejo como el análisis de cargas; se deberían consultar las referencias, para tener mayores detalles y casos adicionales no cubiertos aquí.

Se deben tener en cuenta los siguientes factores cuando se trate de calcular las cargas sobre un sistema:

1. Determinar el carácter de la carga en términos del tipo de ésta, como se definió en la sección 1.1, para decidir si se aplica un análisis estático o dinámico.

2. Dibujar diagramas de cuerpo libre (DCL) completos del sistema y de tantos subsistemas como sea necesario, para definir las cargas que actúan sobre sus elementos. Incluir todos los momentos que se aplican, así como los torques y las fuerzas. El énfasis en la importancia de un DCL minucioso nunca estará por demás. La mayoría de los errores en el análisis de fuerzas ocurren en este paso, debido a que el DCL a menudo se realiza incorrectamente.

3. Escribir las ecuaciones pertinentes usando las leyes de Newton para definir las fuerzas y los momentos desconocidos que actúan sobre el sistema. La solución de tales ecuaciones para la mayoría de problemas reales requiere alguna clase de herramienta informática, como un solucionador de ecuaciones o una hoja de cálculo, para obtener resultados satisfactorios en un tiempo razonable. Lo anterior es especialmente cierto para sistemas dinámicos, los cuales se pueden resolver para una multitud de posiciones al determinar las cargas máximas.

4. La presencia de fuerzas de impacto podría incrementar significativamente las cargas sobre cualquier sistema. El cálculo exacto de las fuerzas debidas al impacto es muy difícil. El método de energía para la estimación impacto-fuerza, presentada en este capítulo es burdo y debería considerarse sólo como una aproximación. Se necesita información detallada acerca de las deformaciones de los cuerpos en el impacto, para un resultado más preciso, que tal vez no esté disponible sin una prueba del sistema real bajo impacto. Existen técnicas de análisis más sofisticadas para el análisis impacto-fuerza, pero están más allá del alcance de este texto de introducción al diseño. Para mayor información, se remite al lector a la bibliografía.

5. Las cargas vibratorias también pueden incrementar drásticamente, por encima del valor calculado teóricamente, la carga real, como se muestra en el estudio de caso 5B y en la figura 1-16 (p. 36). La mejor forma de obtener información en estos casos son las mediciones experimentales, realizadas en un ambiente de carga real.

Los estudios de caso de este capítulo se diseñaron para resolver problemas reales de análisis de esfuerzo y fallas en los siguientes capítulos. Aun cuando su complejidad tal vez sea un poco desalentadora para el estudiante en su primer encuentro, se logrará mucho beneficio del tiempo dedicado a su estudio. Este esfuerzo será premiado con una mejor comprensión de los temas de análisis de esfuerzo y teoría de fallas de los capítulos subsecuentes.

Ecuaciones importantes usadas en este capítulo

Para información sobre el uso adecuado de estas ecuaciones, consulte las secciones referenciadas.

Segunda ley de Newton (sección 1.3):

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \tag{1.1b}$$

Ecuaciones de Euler (sección 1.3):

$$\begin{aligned} \sum M_x &= I_x\alpha_x - \left(I_y - I_z\right)\omega_y\omega_z \\ \sum M_y &= I_y\alpha_y - \left(I_z - I_x\right)\omega_z\omega_x \\ \sum M_z &= I_z\alpha_z - \left(I_x - I_y\right)\omega_x\omega_y \end{aligned} \tag{1.1d}$$

Carga estática (sección 1.3):

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \\ &\sum M_x = 0 \qquad \sum M_y = 0 \qquad \sum M_z = 0 \end{aligned} \tag{1.3a}$$

Frecuencia natural sin amortiguamiento (sección 1.7):

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ f_n &= \frac{1}{2\pi}\omega_n \end{aligned} \tag{1.4}$$

Frecuencia natural amortiguada (sección 1.7):

$$\begin{aligned} \omega_d &= \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2} \\ f_d &= \frac{1}{2\pi}\omega_d \end{aligned} \tag{1.7}$$

Constante del resorte (sección 1.7):

$$k = \frac{F}{\delta} \tag{1.5a}$$

Amortiguamiento viscoso (sección 1.7):

$$d = \frac{F}{\dot{y}} \tag{1.6}$$

Razón de fuerza dinámica (sección 1.8):

$$\frac{F_i}{W} = \frac{\delta_i}{\delta_{st}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\eta h}{\delta_{st}}} \tag{1.14b}$$

Funciones de carga, cortante y momento de la viga (sección 1.9):

$$q(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2} \tag{1.16a}$$

Integrales de funciones de singularidad (sección 1.9):

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^2 d\lambda = \frac{\langle x - a \rangle^3}{3} \tag{1.18a}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^1 d\lambda = \frac{\langle x - a \rangle^2}{2} \tag{1.18b}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^0 d\lambda = \langle x - a \rangle^1 \tag{1.18c}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^{-1} d\lambda = \langle x - a \rangle^0 \tag{1.18d}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle \lambda - a \rangle^{-2} d\lambda = \langle x - a \rangle^{-1} \tag{1.18e}$$

1.11 REFERENCIAS

1. **R.L. Norton**, *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*, 3a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, 2004, pp. 162-196, 265-355.
2. *Ibid.,* pp. 537-549.
3. *Ibid.,* pp. 730-753.
4. *Ibid.,* p. 279.
5. **R.L. Norton *et al.***, "Bearing Forces as a Function of Mechanical Stiffness and Vibration in a Fourbar Linkage", in *Effects of Mechanical Stiffness and Vibration on Wear*, R.G. Bayer, ed. American Society for Testing and Materials: Filadelfia, Pa., 1995.
6. **A.H. Burr y J.B. Cheatham**, *Mechanical Analysis and Design*. 2a. ed., Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1995, pp. 835-863.
7. **R.J. Roark y W.C. Young**, *Formulas for Stress and Strain*. 6a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, 1989.
8. **C.R. Wylie y L.C. Barret**, *Advanced Engineering Mathematics*. 5a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, 1982.

1.12 REFERENCIAS WEB

Diagramas de cuerpo libre

http://laser.phys.ualberta.ca/~freeman/enph131/fbdex1.html

http://eta.physics.uoguelph.ca/tutorials/fbd/Q.fbd.html

http://www.ac.wwu.edu/~vawter/PhysicsNet/Topics/Dynamics/Forces/FreeBodyDiagram.html

Funciones de singularidad

http://www.ce.berkeley.edu/Courses/CE130/Sing.pdf

1.13 BIBLIOGRAFÍA

Para un repaso adicional del análisis de fuerzas estáticas y dinámicas, véase:

R. C. Hibbeler, *Engineering Mechanics*: *Statics*. 7a. ed., Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1995.

R. C. Hibbeler, *Engineering Mechanics*: *Dynamics*. 7a. ed., Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1995.

I. H. Shames, *Engineering Mechanics*: *Static and Dynamics*. 3a. ed., Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1980.

Para información adicional sobre impactos, véase:

A. H. Burr y J. B. Cheatham, *Mechanical Analysis and Design*. 2a. ed., Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., capítulo 14, 1995.

W. Goldsmith, *Impact*. Edward Arnold Ltd.: Londres, 1960.

H. Kolsky, *Stress Waves in Solids*. Dover Publications: Nueva York, 1963.

Para más información sobre vibraciones, véase:

L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill: Nueva York, 1975.

Para las fórmulas y tablas de carga, véase:

R. J. Roark y W. C. Young, *Formulas for Stress and Strain*. 6a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, 1989.

Tabla P1-0†
Matriz tema/problema

1.1 Clases de carga
1-1

1.2 Diagramas de cuerpo libre
1-2, 1-43, 1-45, 1-50, 1-52

1.3 Análisis de cargas
1-3, 1-4, 1-5, 1-7, 1-9, 1-15, 1-16, 1-17, 1-18, 1-19, **1-21,** 1-29, 1-30, 1-31, 1-44, 1-46, 1-51, 1-53

1.7 Carga vibratoria
1-8, 1-47, 1-48, 1-49

1.8 Cargas de impacto
1-6, 1-14, 1-20, **1-22**, 1-42

1.9 Vigas: estática
1-10, 1-12, 1-23, 1-24, 1-26, 1-27, 1-28, 1-32, 1-33, 1-34, 1-35, 1-36, 1-37, 1-38, 1-39, 1-40, 1-41

1.9 Vigas: dinámica
1-11, 1-13

1.14 PROBLEMAS

1-1. ¿Qué clase de carga de la tabla 1-1 es más adecuada para estos sistemas?

(*a*) Estructura de bicicleta (*b*) Asta bandera (*c*) Remo de bote
(*d*) Trampolín (*e*) Llave Stilson (*f*) Palo de golf

1-2. Dibuje diagramas de cuerpo libre para los sistemas del problema 1-1.

*†**1-3**. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el montaje del brazo del pedal de una bicicleta, con los brazos del pedal en posición horizontal y las dimensiones mostradas en la figura P1-1. (Considere los dos brazos, los pedales y el pivote como una pieza.) Suponiendo una fuerza aplicada por el ciclista de 1500 N en el pedal, determine el torque aplicado a la rueda dentada de la cadena, así como el momento y torque de flexión máximos en el brazo del pedal.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los problemas con números en **negritas** son problemas que se ampliarán en capítulos posteriores, con problemas similares con el mismo número identificador; por ejemplo, el problema 2-4 está basado en el problema 1-4, etcétera.

1-4. Al montaje del remolque de la figura A-1 (p. 857) se le aplican cargas como las mostradas en la figura P1-2. El peso de la lengüeta de 100 kg actúa hacia abajo y la fuerza que jala, de 4 905 N, actúa horizontalmente. Usando las dimensiones del soporte de la esfera de la figura A-5 (p. 860), dibuje un diagrama de cuerpo libre del soporte de la esfera, luego obtenga las cargas de tensión y cortante, aplicadas a los dos tornillos que sujetan el soporte al canal en la figura A-1.

1-5. Para el montaje del remolque del problema 1-4, determine la fuerza horizontal que se genera sobre la bola al acelerar un remolque de 2000 kg a 60 m/seg en 20 segundos. Suponga una aceleración constante.

*__1-6__. Para el montaje del remolque del problema 1-4, determine la fuerza horizontal que se generará sobre la esfera por un impacto entre ésta y la lengüeta del remolque de 2000 kg si el gancho se flexiona dinámicamente 2.8 mm en el impacto. El tractor pesa 1 000 kg. La velocidad de impacto es de 0.3 m/seg.

*__1-7__. El pistón de un motor de combustión interna está conectado a su biela con un “pasador”. Obtenga la fuerza sobre el perno, si el pistón de 0.5 kg tiene una aceleración de 2 500 g.

*__1-8__. Un sistema de leva-seguidor, similar al mostrado en la figura 1-15 (p. 33), tiene una masa $m = 1$ kg, una constante del resorte $k = 1\ 000$ N/m y un coeficiente de amortiguamiento $d = 19.4$ N-s/m. Obtenga las frecuencias naturales amortiguada y sin amortiguamiento del sistema.

1-9. En la figura P1-3 están dibujadas a escala unas pinzas de presión ViseGrip®. Escale el dibujo para obtener las dimensiones. Calcule las fuerzas que actúan sobre cada perno y cada elemento del montaje, para una fuerza de sujeción supuesta de $P = 4\ 000$ N en la posición mostrada. ¿Qué fuerza F se requiere para mantenerla en la posición de sujeción mostrada? *Nota: Probablemente una herramienta similar esté a su disposición para revisarla en el taller de su escuela.*

*__1-10__. En la figura P1-4*a* se ilustra un trampolín indeterminado. Encuentre las fuerzas de reacción, luego elabore los diagramas de fuerza cortante y momento para la tabla, cuando una persona de 100 kg se para en su extremo libre. Determine la fuerza de corte máxima, el momento máximo y sus posiciones.

*__1-11__. Determine la fuerza de impacto y la deflexión dinámica que se producirán cuando la persona de 100 kg, del problema 1-10, salte hacia arriba 25 cm y caiga de regreso sobre la tabla. Suponga que la tabla pesa 29 kg y se flexiona 13.1 cm estáticamente cuando la persona está parada sobre ella. Obtenga las fuerzas de reacción, luego elabore los diagramas de corte y momento para la carga dinámica. Determine

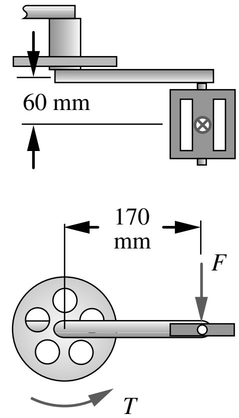


FIGURA P1-1

Problema 1-3 (un modelo sólido de esto se encuentra en el CD)

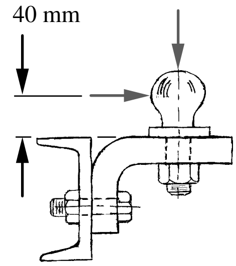
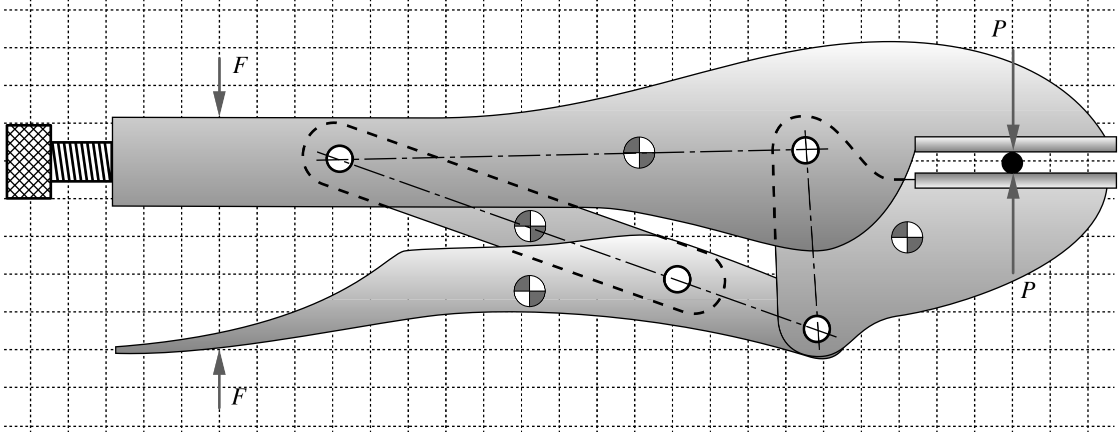


FIGURA P1-2

Problemas 1-4, 1-5, 1-6 (un modelo sólido de esto se encuentra en el CD)

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H.

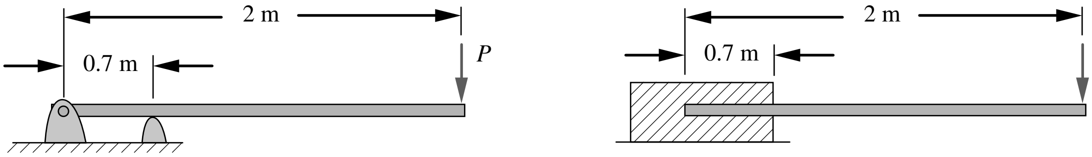
1



cuadrícula de 0.5 cm

FIGURA P1-3

Problema 1-9 (un modelo sólido de esto se encuentra en el CD)



(*a*) Trampolín indeterminado (*b*) Trampolín en voladizo

FIGURA P1-4

Problemas 1-10 a 1-13

la fuerza de corte máxima, el momento máximo y sus posiciones a lo largo de la longitud de la tabla.

1-12. Repita el problema 1-10 usando el diseño del trampolín en voladizo de la figura P1-4*b*.

1-13. Repita el problema 1-11 usando el diseño del trampolín de la figura P1-3*b*. Suponga que la tabla pesa 19 kg y se flexiona 8.5 cm cuando la persona está parada sobre ella.

1-14. La figura P1-5 muestra un juguete infantil llamado "cangurín". Un niño se para sobre las almohadillas del soporte y aplica la mitad de su peso en cada lado. Luego salta hacia arriba del suelo, manteniendo las almohadillas contra sus pies, y rebota junto con el resorte que amortigua el impacto y almacena energía para ayudar a cada rebote. Suponga un niño de 60 lb y una constante de resorte de 100 lb/in. El cangurín pesa 5 lb. Obtenga la frecuencia natural del sistema, la flexión estática del resorte con el niño aún parado, así como la fuerza dinámica y la flexión cuando el niño aterriza después de saltar 2 in arriba del suelo.

[*]**1-15**. El marcador de un graficador imparte una aceleración constante de 2.5 m/seg^2 al montaje del marcador, el cual viaja en línea recta por el papel. El montaje móvil del graficador pesa 0.5 kg. El graficador pesa 5 kg. ¿Qué coeficiente de fricción se necesita entre las patas del graficador y la cubierta de la mesa, sobre la cual se asienta, para evitar que el graficador se mueva cuando el marcador acelera?

1-16. La guía de unas bolas de boliche se diseñó con dos varillas redondas, como se muestra en la figura P1-6. Las varillas no son paralelas, sino que forman un ángulo pequeño entre sí. Las bolas ruedan sobre las varillas hasta que caen entre ellas y pasan a otra guía. El ángulo entre las varillas se modifica para hacer que las bolas caigan en diferentes lugares. La longitud del claro de cada varilla es de 30 in y el ángulo entre ellas es de 3.2°. Las bolas tienen 4.5 in de diámetro y pesan 2.5 lb. La distancia central entre las varillas de 1 in de diámetro es de 4.2 in en el extremo angosto. Encuentre la distancia desde el extremo angosto a la cual cae la bola, y determine la fuerza cortante y el momento máximos, en el peor de los casos, mientras la bola rueda una distancia desde el extremo angosto que está al 98% de la distancia de caída. Suponga que las varillas están simplemente soportadas en cada extremo y tienen una flexión igual a cero bajo la carga aplicada. (Observe que suponer una flexión igual a cero no es realista. Este supuesto se desechará en el siguiente capítulo, después de estudiar la flexión.)

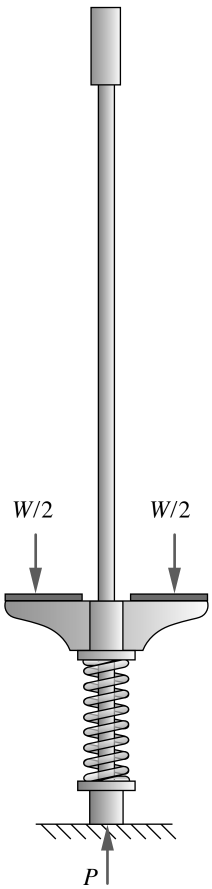


FIGURA P1-5

Problema 1-14

1-17. En la figura P1-7 se muestran unas tenazas para hielo. El hielo pesa 50 lb y tiene un ancho de 10 in de donde está sujeto a las tenazas. La distancia entre los mangos es de 4 in y el radio medio *r* de una tenaza es de 6 in. Dibuje los diagramas de cuerpo libre de las dos tenazas y encuentre todas las fuerzas que actúan sobre ellas. Determine el momento de flexión en el punto *A*.

[*]1-18. Un camión con remolque se volteó mientras entraba a una vía de acceso al New York Thruway. La carretera tiene un radio de 50 ft en ese punto y se inclina 3° hacia el lado externo de la curva. La caja del remolque de 45 ft de largo, por 8 ft de ancho, por 8.5 ft de altura (13 ft desde el suelo a la parte superior), se cargó con 44 415 lb de rollos de papel en dos filas por dos de altura, como se ilustra en la figura P1-8. Los rollos tienen 40 in de diámetro por 38 in de largo y pesan aproximadamente 900 lb cada uno. A los rollos se les ponen cuñas para evitar el rodamiento hacia atrás, aunque no se evita su deslizamiento lateral. El remolque vacío pesa 14 000 lb. El conductor alega que viajaba a menos de 15 mph y que la carga de papel se corrió dentro del

---

[*] Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en **negritas** se ampliarán en capítulos posteriores, con problemas similares con el mismo número identificador; por ejemplo, el problema 2-4 está basado en el problema 1-4, etcétera.

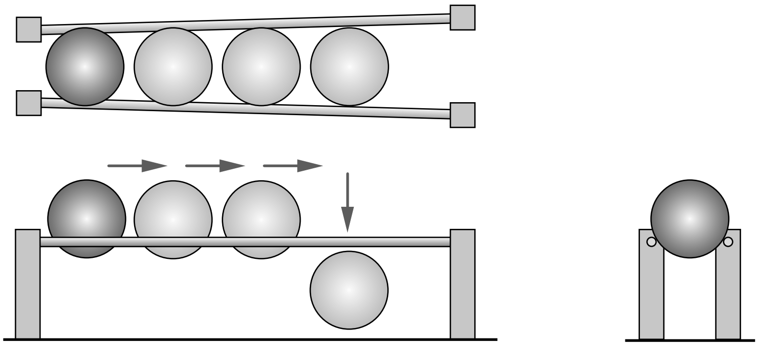


FIGURA P1-6

Problema 1-16

remolque, golpeó la pared lateral del remolque y volteó el camión. La compañía de papel que cargó el camión alega que éste fue estibado adecuadamente y la carga no se movería internamente a esa velocidad. Pruebas independientes del coeficiente de fricción entre rollos de papel similares y un piso similar al del remolque dan un valor de 0.43 $\pm$ 0.08. Se estima que el centro de gravedad compuesto del remolque cargado es de 7.5 ft por encima de la carretera. Determine la rapidez del camión que causaría que éste empezara justo a inclinarse y la rapidez a la cual los rollos empezaran justo a deslizarse en forma lateral. ¿Qué cree el lector que causó el accidente?

1-19. Suponga que el CG de los rollos de papel en el camión del problema 1-18 está 2.5 ft por encima del piso del remolque. ¿A qué rapidez sobre la misma curva la pila de rollos se volcaría (no deslizaría) con respecto al remolque?

1-20. Suponga que la carga de rollos de papel del problema 1-18 se deslizará lateralmente, a una rapidez del camión de 20 mph sobre la curva en cuestión. Estime la fuerza de impacto de la carga contra la pared del remolque. La fuerza/deflexión característica de la pared del remolque es de aproximadamente 400 lb/in.

1-21. La figura P1-9 muestra la rueda de un automóvil con dos estilos de llaves comunes que se utilizan para apretar los birlos, una llave con un solo extremo en (*a*) y una llave con dos extremos en (*b*). En cada caso, se requieren las dos manos para proporcionar las respectivas fuerzas en *A* y *B,* como se indica. La distancia entre los puntos *A* y *B* es de

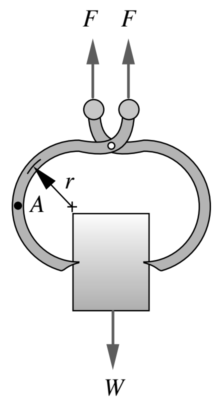


FIGURA P1-7

Problema 1-17

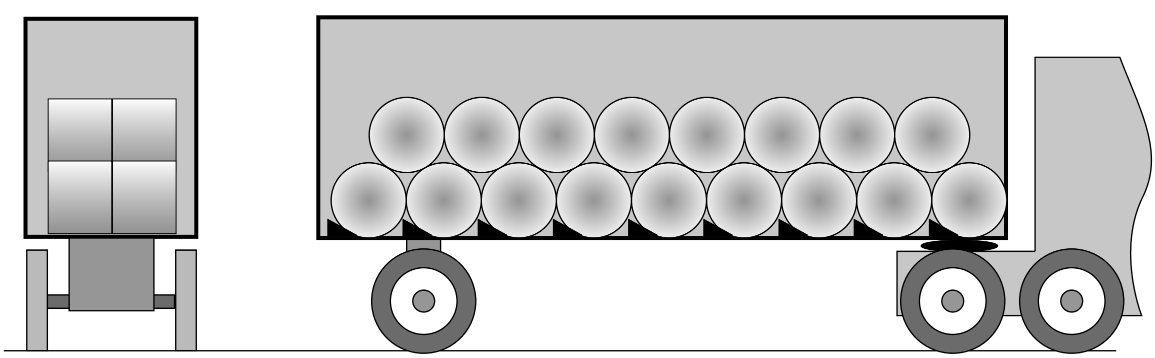


FIGURA P1-8

Problema 1-18

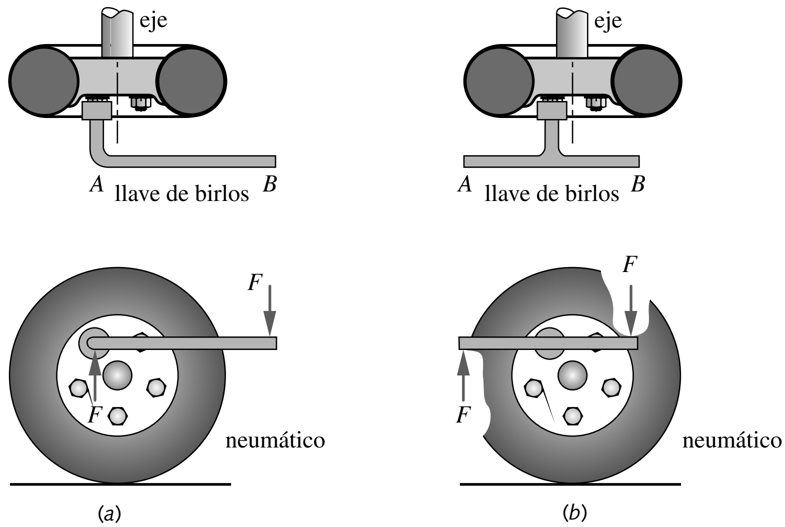


FIGURA P1-9

Problema 1-21

1 ft en ambos casos. Los birlos requieren un torque de 70 ft-lb. Dibuje diagramas de cuerpo libre para ambas llaves, luego determine las magnitudes de todas las fuerzas y todos los momentos sobre cada llave. ¿Existe alguna diferencia entre los modos en que las dos llaves ejecutan su tarea? ¿Un diseño es mejor que otro? Si es así, ¿por qué? Explique su respuesta.



FIGURA P1-10

Problema 1-22

***1-22**. En la figura P1-10 se muestra un patín de ruedas. Las ruedas de poliuretano tienen un diámetro de 72 mm. La combinación pie-bota-patín pesa 2 kg. La "razón efectiva del resorte" del sistema patín-persona es de 6 000 N/m. Encuentre las fuerzas sobre los ejes de las ruedas para una persona de 100 kg que aterriza sobre un pie luego de un salto de 0.5 m. *a*) Suponga que las cuatro ruedas llegan al suelo simultáneamente. *b*) Suponga que una rueda absorbe toda la fuerza de aterrizaje.

***1-23**. Una viga está soportada y cargada, como se muestra en la figura P1-11*a*. Encuentre las reacciones, la fuerza cortante máximo y el momento máximo para los datos proporcionados en la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P1-1.

***1-24**. Una viga está soportada y cargada, como se muestra en la figura P1-11*b*. Encuentre las reacciones, la fuerza cortante máximo y el momento máximo para los datos proporcionados en la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P1-1.

***1-25**. Una viga está soportada y cargada, como se muestra en la figura P1-11*c*. Encuentre las reacciones, la fuerza cortante máximo y el momento máximo para los datos proporcionados en la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P1-1.

1-26. Una viga está soportada y cargada, como se muestra en la figura P1-11*d*. Encuentre las reacciones, la fuerza cortante máximo y el momento máximo para los datos proporcionados en la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P1-1.

***1-27**. En la figura P1-12 se muestra un estante de almacenamiento para los rollos de papel del problema 1-18. Determine las reacciones, luego dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento, para el mandril que se extiende 50% hacia el rollo.

1-28. La figura P1-13 muestra una carretilla elevadora que sube una rampa de 15° para llegar a una plataforma de carga, cuya altura es de 4 ft. La carretilla pesa 5 000 lb y tiene una distancia entre ejes de 42 in. Determine las reacciones y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento para el peor caso de carga, conforme la carretilla viaja hacia arriba por la rampa.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los problemas con números en **negritas** se ampliarán en capítulos posteriores, con problemas similares que tienen el mismo número identificador; por ejemplo, el problema 2-4 está basado en el problema 1-4, etcétera.

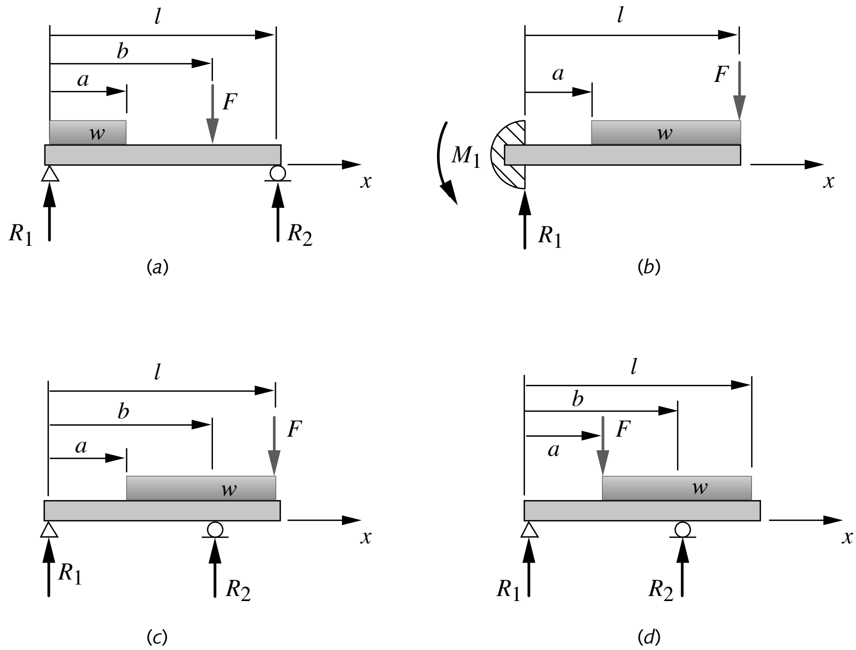


FIGURA P1-11

Vigas y cargas de la viga para los problemas 1-23 a 1-26; véase la tabla P1-1 para los datos

1-29. Corra en la computadora el modelo CASE1A para el estudio de caso 1A (en varios lenguajes del CD-ROM) y mueva el punto de aplicación de la fuerza de la mano a lo largo de la palanca, pero cambie los valores de $\mathbf{R}_{b2}$, vuelva a calcular, luego observe los cambios de las fuerzas y los momentos.

Tabla P1-1 Datos para los problemas 1-23 a 1-26

Use sólo los datos relevantes para el problema específico. Longitudes en m, fuerzas en N, I en m^4.

Fila	l	a	b	w^*	F	I	c	E
a	1.00	0.40	0.60	200	500	2.85*E*–08	2.00*E*–02	acero
b	0.70	0.20	0.40	80	850	1.70*E*–08	1.00*E*–02	acero
c	0.30	0.10	0.20	500	450	4.70*E*–09	1.25*E*–02	acero
d	0.80	0.50	0.60	65	250	4.90*E*–09	1.10*E*–02	acero
e	0.85	0.35	0.50	96	750	1.80*E*–08	9.00*E*–03	acero
f	0.50	0.18	0.40	450	950	1.17*E*–08	1.00*E*–02	acero
g	0.60	0.28	0.50	250	250	3.20*E*–09	7.50*E*–03	acero
h	0.20	0.10	0.13	400	500	4.00*E*–09	5.00*E*–03	alum
i	0.40	0.15	0.30	50	200	2.75*E*–09	5.00*E*–03	alum
j	0.20	0.10	0.15	150	80	6.50*E*–10	5.50*E*–03	alum
k	0.40	0.16	0.30	70	880	4.30*E*–08	1.45*E*–02	alum
l	0.90	0.25	0.80	90	600	4.20*E*–08	7.50*E*–03	alum
m	0.70	0.10	0.60	80	500	2.10*E*–08	6.50*E*–03	alum
n	0.85	0.15	0.70	60	120	7.90*E*–09	1.00*E*–02	alum

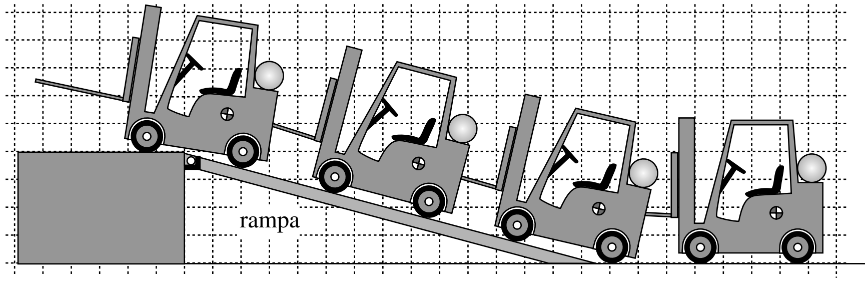


FIGURA P1-13

Problema 1-28

1-30. Corra en la computadora el modelo CASE2A para el estudio de caso 2A (en varios lenguajes del CD-ROM) y mueva el punto de aplicación de la fuerza de presión a lo largo de la mandíbula, vuelva a calcular y observe los cambios de las fuerzas y los momentos.

1-31. Corra en la computadora el modelo CASE3A para el estudio de caso 3A (en varios lenguajes del CD-ROM) y mueva el punto de aplicación de **P** a lo largo de la dirección *x* y vuelva a calcular, luego observe los cambios de las fuerzas y los momentos sobre las partes. ¿Qué pasa cuando la fuerza vertical **P** se centra sobre la parte 3? Cambie también el ángulo de la fuerza aplicada **P** para crear una componente *x*, después observe los efectos sobre las fuerzas y los momentos sobre los elementos.

1-32. La figura P1-14 muestra una leva y un brazo de leva-seguidor. Si la carga P = 200 lb, ¿qué fuerza de resorte es necesaria en el extremo derecho para mantener una carga mínima entre la leva y el seguidor de 25 lb? Encuentre la fuerza cortante y el momento de flexión máximos en el brazo seguidor. Grafique los diagramas de fuerza cortante y de momento.

1-33. Escriba un programa de cómputo o un modelo resolvedor de ecuaciones, para calcular todas las funciones de singularidad listadas en las ecuaciones 1.17. Defínalas como funciones que puedan llamarse desde cualquier otro programa o modelo.

1-34. Una viga está soportada y cargada como se ilustra en la figura P1-15. Encuentre las reacciones, la fuerza cortante máximo y el momento máximo para los datos proporcionados en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P1-2.

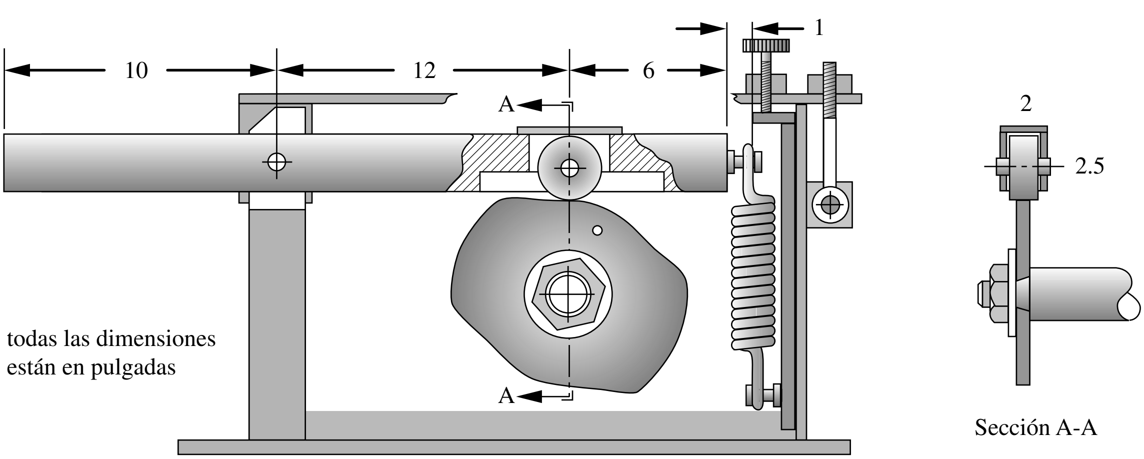


FIGURA P1-14

Problema 1-32

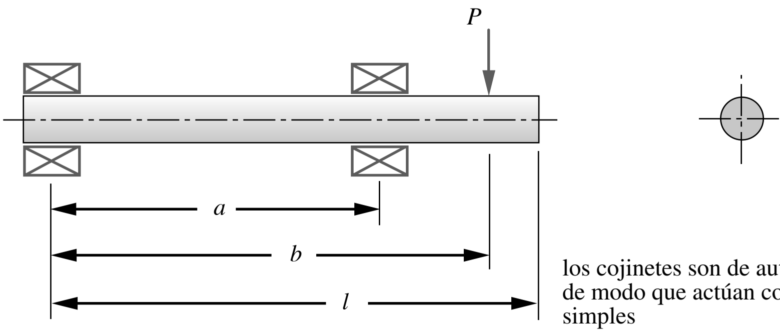


FIGURA P1-15
Problemas 1-34 y 1-35

*1-35. Una viga está soportada y cargada, como se muestra en la figura P1-15. Escriba un programa de cómputo o un modelo resolvedor de ecuaciones para calcular las reacciones, así como para calcular y graficar las funciones de carga, fuerza cortante y momento. Pruebe el programa con los datos proporcionados en las(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P1-2.

1-36. Una viga está soportada y cargada, como se ilustra en la figura P1-16. Encuentre las reacciones, la fuerza cortante máximo y el momento máximo para los datos proporcionados en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P1-2.

1-37. Una viga está soportada y cargada, como se muestra en la figura P1-16. Escriba un programa de cómputo o un modelo resolvedor de ecuaciones para calcular las reacciones, así como para calcular y graficar las funciones de carga, fuerza cortante y momento. Pruebe el programa con los datos proporcionados en las(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P1-2.

1-38. Una viga está soportada y cargada, como se muestra en la figura P1-17. Encuentre las reacciones, corte máximo y momento máximo para los datos proporcionados en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P1-2.

1-39. Una viga está soportada y cargada, como se muestra en la figura P1-17. Escriba un programa de cómputo o un modelo resolvedor de ecuaciones para calcular las reacciones, así como para calcular y graficar las funciones de carga, fuerza cortante y momento. Pruebe el programa con los datos proporcionados en las(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P1-2.

1-40. Una viga está soportada y cargada, como se indica en la figura P1-18. Encuentre las reacciones, la fuerza cortante máximo y el momento máximo para los datos proporcionados en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P1-2.

1-41. Una viga está soportada y cargada, como se muestra en la figura P1-18. Escriba un programa de cómputo o un modelo resolvedor de ecuaciones para calcular las reacciones, así como para calcular y graficar las funciones de carga, cortante y momento. Pruebe el programa con los datos proporcionados en las(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P1-2.

Tabla P1-2 Datos de los problemas 1-34 a 1-41

Fila	*l* (in)	*a* (in)	*b* (in)	*P* (lb) *o p* (lb/in)
a	20	16	18	1 000
b	12	2	7	500
c	14	4	12	750
d	8	4	8	1 000
e	17	6	12	1 500
f	24	16	22	750

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

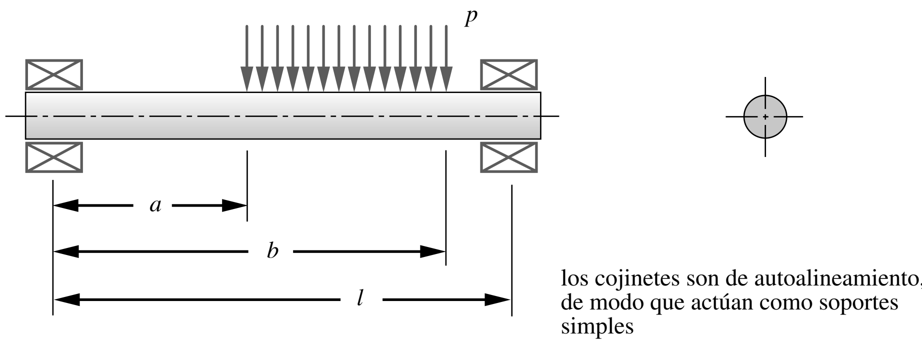


FIGURA P1-16

Problemas 1-36 y 1-37

Tabla P1-3
Problema 1-44

R_{12}	13.20 in @ 135°
R_{14}	79.22 in @ 196°
R_{32}	0.80 in @ 45°
R_{34}	32.00 in @ 169°
R_P	124.44 in @ 185°
F_{cable}	2970 lb
W_2	598 lb
W_4	2706 lb
θ_3	98.5°

1-42. Una lancha de motor de 1000 kg alcanza una rapidez de 16 kph, cuando tensa una cuerda de remolque de 100 m de largo atada a una tabla de surf que lleva a una persona de 100 kg. Si la cuerda tiene una $k = 5$ N/m, ¿cuál es la fuerza dinámica ejercida sobre la tabla?

1-43. La figura P1-19 muestra una bomba de varilla para un campo petrolero. Para la posición mostrada, dibuje los diagramas de cuerpo libre del cigüeñal (2), la biela (3), la viga cabeceadora [balancín] (4) usando nombres de variables similares a los usados en los estudios de caso 1A y 2A. Suponga que el cigüeñal gira lo suficientemente lento para que la aceleración pueda ignorarse. Incluya el peso que actúa sobre el CG de la viga cabeceadora y el cigüeñal, pero no el de la biela.

1-44. Para la bomba de varilla del problema 1-43 y los datos de la tabla P1-3, determine las fuerzas de los pernos sobre la viga cabeceadora, la biela, el cigüeñal y el torque de reacción sobre el cigüeñal.

1-45. La figura P1-20 muestra el mecanismo de un compartimiento para equipaje de mano en un avión, visto en la sección lateral. Para la posición mostrada, dibuje los diagramas de cuerpo libre de los eslabones 2 y 4 y la puerta (3) usando nombres de variables similares a los empleados en los estudios de caso 1A y 2A. Hay topes que evitan un movimiento adicional en el sentido horario de la parte 2 (y una parte idéntica detrás de ella en el otro extremo de la puerta), lo cual da como resultado fuerzas horizontales aplicadas a la puerta en los puntos A. Suponga que el mecanismo es simétrico, de modo que cada conjunto de los eslabones 2 y 4 soportan la mitad del peso de la puerta. Ignore el peso de los eslabones 2 y 4 ya que son insignificantes.

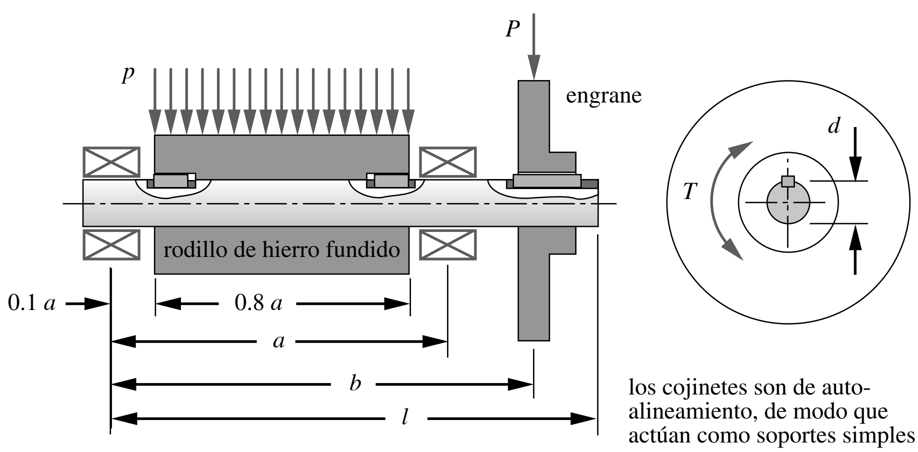


FIGURA P1-17

Problemas 1-38 y 1-39

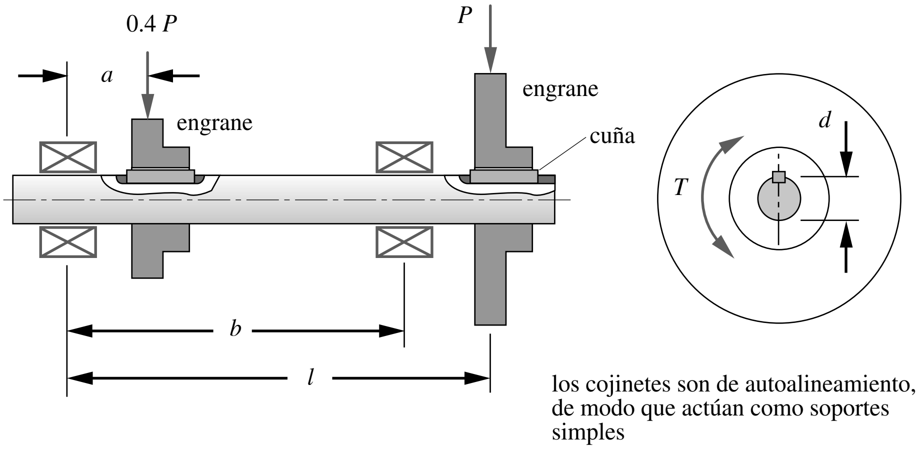


FIGURA P1-18

Problemas 1-40 y 1-41

1-46. Para el mecanismo del compartimiento del problema 1-45 y los datos de la tabla P1-4, determine las fuerzas del perno sobre la puerta (3) y los eslabones 2 y 4, así como la fuerza de reacción sobre cada uno de los dos topes.

1-47. La suspensión de cierto automóvil consiste en dos brazos A, la rueda (con neumático), un resorte y un amortiguador. La rigidez efectiva de la suspensión (llamada "razón de conducción") es una función de la rigidez del resorte y la rigidez del neumático. Los brazos A se diseñan para dar a la rueda un desplazamiento casi vertical, conforme la rueda pasa sobre los baches del camino. El montaje completo puede modelarse como un sistema masa-resorte-amortiguador, como el mostrado en la figura 1-15(b). Si la masa que brinca (masa de la porción del vehículo soportada por el sistema de suspensión) pesa 675 lb, determine la razón de conducción que se requiere para

Tabla P1-4
Problema 1-46

R_{23}	180 mm @ 160.345°
R_{43}	180 mm @ 27.862°
W_3	45 N
θ_2	85.879°
θ_4	172.352°

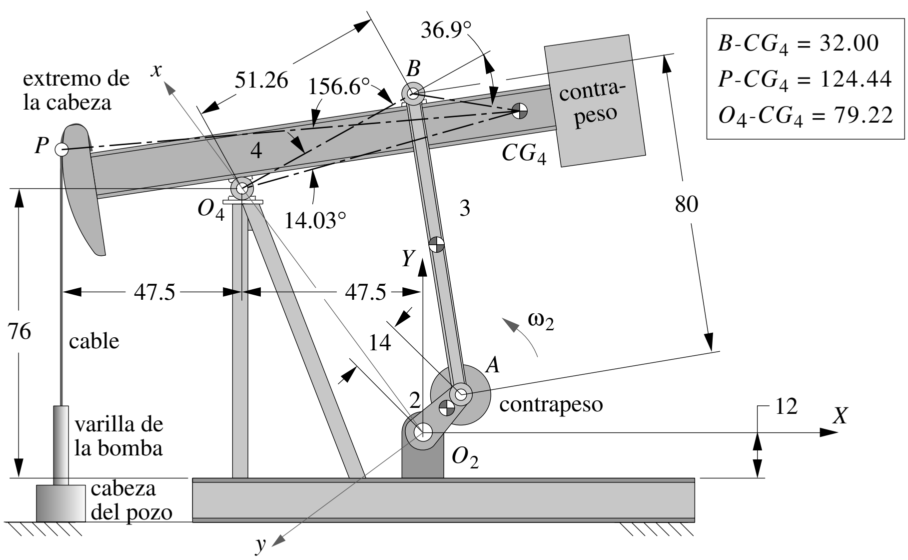


FIGURA P1-19

Problemas 1-43 y 1-44

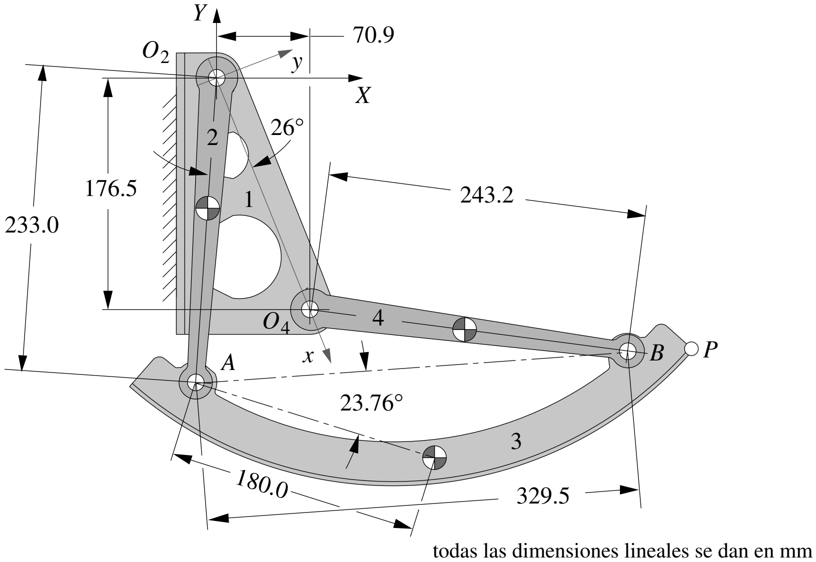


FIGURA P1-20

Problemas 1-45 y 1-46

alcanzar una frecuencia natural sin amortiguamiento de 1.4 Hz. ¿Cuál es la deflexión estática de la suspensión para la razón de manejo calculada?

*1-48. El sistema de suspensión independiente del problema 1-47 tiene un peso que no resortea (el peso del eje, la rueda, los brazos A, etcétera) de 106 lb. Calcule la frecuencia natural (resonancia de salto) de la masa que no resortea, si la rigidez de la combinación del neumático y del resorte (tasa de conducción) es de 1100 lb/in.

1-49. El sistema de suspensión independiente del problema 1-47 tiene un peso que resortea de 675 lb y una tasa de conducción de 135 lb/in. Calcule la frecuencia natural amortiguada de la masa que resortea si el coeficiente de amortiguación del amortiguador es una constante de 12 lb-seg/in.

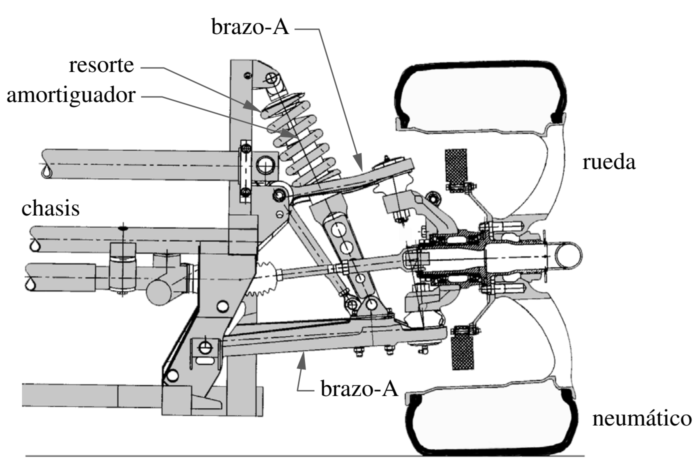


FIGURA P1-21

Problemas 1-47 a 1-49 Suspensión Viper; *cortesía de DaimlerChrysler Corporation*

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

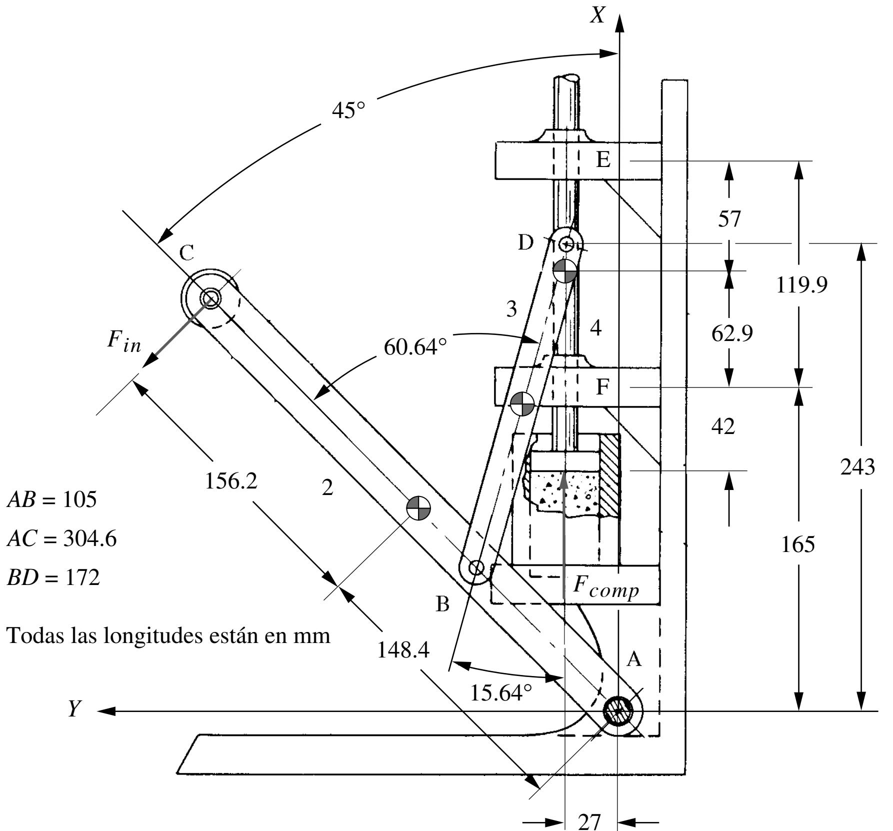


FIGURA P1-22

Problemas 1-50 y 1-51

Tabla P1-5

Problema 1-51

R_{12}	148.4 mm @ 315°
R_{14E}	57.0 mm @ 90°
R_{14F}	62.9 mm @ 270°
R_{32}	42.9 mm @ 74.36°
R_{23}	87.6 mm @ 254.36°
R_{34}	15.0 mm @ 90°
R_{43}	87.6 mm @ 74.36°
R_{in}	152.6 mm @ 225°
R_P	105.0 mm @ 270°
F_{comp}	100 N
θ_3	254.36°

1-50. La figura P1-22 muestra un mecanismo compactador de polvo. Para la posición mostrada, dibuje los diagramas de cuerpo libre del brazo de entrada (2), la biela (3) y el ariete compactador (4), usando nombres de variables similares a los empleados en los estudios de caso 1A y 2A. Suponga que los brazos de entrada giran lo suficientemente lento como para que se ignoren las aceleraciones. Ignore los pesos del brazo, la biela y el ariete compactador. Desprecie la fricción. Todos los eslabones son simétricos con respecto al centro de gravedad en el centro.

1-51. Para el mecanismo de compactación del problema 1-50 y los datos de la tabla P1-5, determine las fuerzas de los pernos sobre el ariete de compactación, la biela y el brazo de entrada. Los vectores de posición (R_{xx}) de la tabla ubican los puntos de aplicación de la fuerza sobre una parte contra el CG de la parte, sobre la cual actúa la fuerza. Todos los eslabones son simétricos con respecto al CG en el centro.

1-52. La figura P1-23 muestra un mecanismo de arrastre manivela corredera. Para la posición mostrada, dibuje los diagramas de cuerpo libre de las partes 2 a 6 usando nombres de variables similares a los empleados en los estudios de caso 1A y 2A. Suponga que la manivela gira lo suficientemente lento como para ignorar las aceleraciones. Ignore los pesos de los eslabones, así como cualesquier fuerza de fricción o torque. Todos los eslabones son simétricos con respecto al CG en el centro.

1-53. Para el mecanismo de arrastre manivela corredera del problema 1-52 y los datos de la tabla P1-6, determine las fuerzas de los pernos sobre la corredera, las bielas y la manivela, y el torque de reacción sobre la manivela. Los vectores de posición (R_{xx}) de la tabla ubican los puntos de aplicación de la fuerza sobre una parte contra el CG de la parte, sobre la cual actúa la fuerza. Todos los eslabones son simétricos con respecto al CG en el centro.

Tabla P1-6

Problema 1-53

R_{12}	63.5 mm @ 45.38°
R_{14}	93.6 mm @ –55.89°
R_{23}	63.5 mm @ 267.80°
R_{32}	63.5 mm @ 225.38°
R_{34}	103.5 mm @ 202.68°
R_{43}	63.5 mm @ 87.80°
R_{45}	190.5 mm @ 156.65°
R_{54}	103.5 mm @ 45.34°
R_{65}	190.5 mm @ –23.35°
F_P	85 N
θ_3	87.80°
θ_5	156.65°

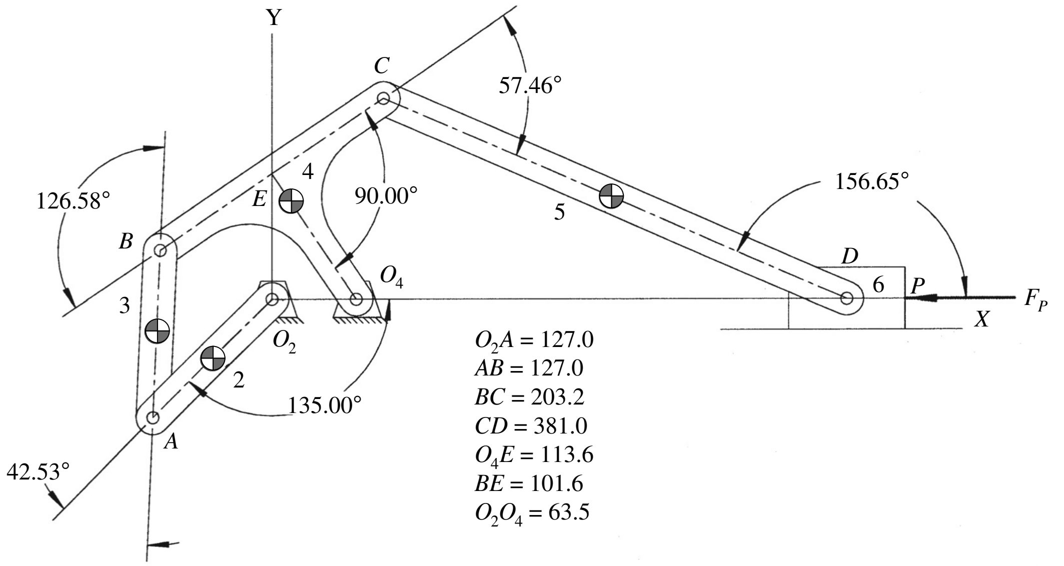


FIGURA P1-23

Problemas 1-52 y 1-53

2

ESFUERZO, DEFORMACIÓN UNITARIA Y DEFLEXIÓN



Esto no es saber mucho, pero es tan útil
que hace sabio a un hombre.
THOMAS FULLER M.D.

2.0 INTRODUCCIÓN

Probablemente el lector ya haya tomado un curso de análisis de esfuerzos (llamado tal vez *Resistencia de materiales* o *Mecánica de materiales*) y, por lo tanto, conoce los fundamentos de este tema. No obstante, este capítulo presentará un repaso básico con la finalidad de crear el marco para el estudio del análisis de fatiga en capítulos posteriores. En el apéndice B se estudiarán el esfuerzo y la deformación unitaria en las propiedades de los materiales, aunque no se verán exhaustivamente. En este capítulo tendremos una definición más completa de lo que se entiende por esfuerzo, deformación unitaria y deflexión.

La tabla 2-0 muestra las variables que se usan en este capítulo, así como las referencias a tablas o secciones donde se utilizan. Asimismo, al final del capítulo se incluye una sección de resumen que agrupa todas las ecuaciones relevantes del capítulo, para facilitar su consulta e identificar la sección en la cual se encuentra su aplicación.

2.1 ESFUERZO

En el apéndice B, el esfuerzo se define como la fuerza por unidad de área en unidades psi o MPa. En un elemento sometido a ciertas fuerzas, por lo general el esfuerzo se distribuye como una función que varía constantemente dentro del continuo del material. Cada elemento infinitesimal del material puede experimentar esfuerzos diferentes al mismo tiempo. Por consiguiente, se deben visualizar los esfuerzos que actúan sobre elementos pequeños evanescentes dentro de la pieza. Estos elementos infinitesimales se modelan generalmente como cubos, los cuales se ilustran en la figura 2-1 (p. 72). Se considera que los componentes del esfuerzo actúan sobre las caras de estos cubos de dos modos diferentes. Los **esfuerzos normales** actúan de forma perpendicular (es decir, normalmente) a la cara del cubo y tienden a jalarla hacia afuera (esfuerzo normal de tensión)

2

Tabla 2-0 Variables utilizadas en este capítulo
Parte 1 de 2

Símbolo	Variable	Unidades ips	Unidades SI	Véase
A	área	in^2	m^2	Secc. 2.7 - 2.9, 4.11
b	ancho de la sección transversal de la viga	in	m	Secc. 2.9
c	distancia a la fibra exterior - viga recta	in	m	Ec. 2.11 *b*
c_i	distancia a la fibra interior - viga curva	in	m	Ec. 2.12
c_o	distancia a la fibra exterior - viga curva	in	m	Ec. 2.12
d	diámetro de la sección transversal	in	m	Secc. 2.10, 2.11
E	módulo de Young	psi	Pa	Secc. 2-7 - 2.12
e	excentricidad de una columna	in	m	Secc. 2.14
e	desplazamiento del eje neutro - viga curva	in	m	Secc. 2.9, Ec. 2.12*a*
F	fuerza o carga	lb	N	Secc. 2.11
G	módulo de corte, módulo de rigidez	psi	Pa	Secc. 2.11
h	profundidad de la sección transversal de una viga	in	m	Secc. 2.9
I	segundo momento del área	in^4	m^4	Ec. 2.11*a*
K	parámetro de geometría - torsión	in^4	m^4	Ec. 2.26*b*, Tabla 2-7
k	radio de giro	in	m	Secc. 2.16
K_t	factor de concentración de esfuerzo geométrico - esfuerzo normal	ninguna	ninguna	Secc. 2.15
K_{ts}	factor de concentración de esfuerzo geométrico - esfuerzo cortante	ninguna	ninguna	Secc. 2.15
l	longitud	in	m	Secc. 2.7 - 2.12
M	momento, función de momento	lb-in	N-m	Secc. 2.9
P	fuerza o carga	lb	N	Secc. 2.7
P_{cr}	carga crítica de la columna	lb	N	Secc 2.16
q	función de carga de viga	lb	N	Secc. 2.10
Q	integral del primer momento de área - viga	in^3	m^3	Ec. 2.13
Q	parámetro de geometría - torsión	in^3	m^3	Ec. 2.26*a*, Tabla 2-3
r	radio - general	in	m	Secc. 2.9, Ec. 2.12
r_i	radio interior de viga curva	in	m	Ec. 2.12
r_o	radio exterior de viga curva	in	m	Ec. 2.12
S_r	razón de esbeltez - columna	ninguna	ninguna	Secc. 2.16
S_y	resistencia a la fluencia	psi	Pa	Secc. 2.16
T	torque	lb-in	N-m	Secc. 2.12
V	función de corte en viga	lb	N	Secc. 2.9, 2.10
x	variable de longitud generalizada	in	m	Secc. 2.10
y	distancia del eje neutral - viga	in	m	Ec. 2.11*a*
y	deflexión - general	in	m	Secc. 2.10, 2.14
Z	módulo de sección	in^3	m^3	Ec. 2.11*d*
x, y, z	coordenadas generales	cualquiera	cualquiera	Secc. 2.1, 2.2
ε	deformación unitaria	ninguna	ninguna	Secc. 2.2
θ	pendiente de la viga	rad	rad	Secc. 2.10
θ	deflexión angular - torsión	rad	rad	Secc. 2.12

Tabla 2-0 Variables utilizadas en este capítulo
Parte 2 de 2

Símbolo	Variable	Unidades ips	Unidades SI	Véase
σ	esfuerzo normal	psi	Pa	Secc. 2.1
σ_1	esfuerzo principal	psi	Pa	Secc. 2.3
σ_2	esfuerzo principal	psi	Pa	Secc. 2.3
σ_3	esfuerzo principal	psi	Pa	Secc. 2.3
τ	esfuerzo cortante	psi	Pa	Secc. 2.1
τ_{13}	esfuerzo cortante máximo	psi	Pa	Secc. 2.3
τ_{21}	esfuerzo principal	psi	Pa	Secc. 2.3
τ_{32}	esfuerzo principal	psi	Pa	Secc. 2.3

o empujarla hacia adentro (esfuerzo normal de compresión). El **esfuerzo cortante** actúa paralelo a las caras de los cubos, en pares (parejas) sobre caras opuestas, lo cual tiende a distorsionar el cubo en una forma de romboide. Esto es lo mismo que tomar las dos piezas de pan de un sándwich de mermelada y deslizarlos en direcciones opuestas. Como consecuencia de ello, se cortará la mermelada. Tales componentes de los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre un elemento infinitesimal dan como resultado un **tensor**.*

El esfuerzo es un tensor de segundo orden† y requiere nueve valores o componentes para describirlo en tres dimensiones. Un tensor de esfuerzo en tres dimensiones se expresa como la matriz:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.1a}$$

donde la notación para cada componente del esfuerzo contiene tres elementos: una magnitud (σ o τ), la dirección de la normal a la superficie de referencia (primer subíndice) y la dirección de acción (segundo subíndice). Se usará σ para referirnos a los esfuerzos normales, y τ para los esfuerzos cortantes.

Muchos elementos de máquinas están sujetos a estados de esfuerzo tridimensionales y, por lo tanto, requieren la aplicación del tensor de esfuerzo de la ecuación 2.1*a*. Sin embargo, hay algunos casos especiales, los cuales se pueden tratar como estados de esfuerzos bidimensionales.

El tensor de esfuerzo para dos dimensiones es

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \tag{2.1b}$$

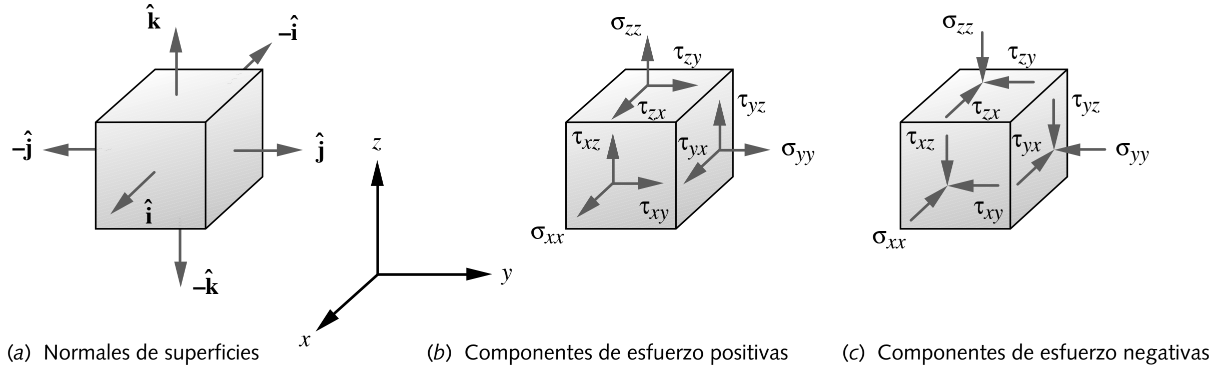
La figura 2-1 ilustra un cubo infinitesimal de material tomado del interior del continuo de la parte que se somete a algunos esfuerzos de tres dimensiones. Las caras de este cubo infinitesimal son paralelas a un conjunto de ejes *xyz* establecidos con alguna orientación conveniente. La orientación de cada cara está definida por su vector normal de superficie‡ como se indica en la figura 2-1*a*. La cara *x* tiene su normal de superficie paralela al eje *x*, etcétera. Observe que, por consiguiente, hay dos caras *x*, dos caras *y* y dos caras *z*, siendo una de ellas positiva y la otra negativa, como lo define el sentido de su vector normal de superficie.

* Para el estudio de la notación del tensor, consulte C. R. Wylie y L. C. Barret, *Advanced Engineering Mathematics*, 5a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1982.

† La ecuación 2.1*a* muestra más correctamente un tensor para coordenadas cartesianas rectilíneas. La notación más general del tensor para sistemas de coordenadas curvilíneas no se usará aquí.

‡ El vector normal de superficie se define como que "crece hacia afuera de la superficie del sólido, en dirección normal a esa superficie". Su signo se determina de acuerdo con el sentido de su vector normal de superficie en el sistema de coordenadas local.

2



(*a*) Normales de superficies (*b*) Componentes de esfuerzo positivas (*c*) Componentes de esfuerzo negativas

FIGURA 2-1

El cubo de esfuerzos, sus normales de superficie y sus componentes de esfuerzo

En las figuras 2-1*b* y *c* se muestran las nueve componentes del esfuerzo actuando sobre las superficies de este elemento infinitesimal. Las componentes σ_{xx}, σ_{yy} y σ_{zz} son los esfuerzos normales, que se llaman así porque actúan, respectivamente, en direcciones normales a las superficies *x*, *y* y *z* del cubo. Las componentes τ_{xy} y τ_{xz}, por ejemplo, son esfuerzos de corte que actúan sobre la cara *x* y cuyas direcciones de acción son paralelas a los ejes *y* y *z*, respectivamente. El signo de cualquiera de estas componentes se define como positivo, cuando los signos de su normal de superficie y la dirección de su esfuerzo son las mismas; y como negativas si son diferentes. De esta manera, las componentes de la figura 2-1*b* son todas positivas porque actúan sobre las caras positivas del cubo y sus direcciones también son positivas. Las componentes mostradas en la figura 2-1*c* son todas negativas porque actúan sobre las caras positivas del cubo y sus direcciones son negativas. Esta convención de signos hace que los esfuerzos normales de tensión sean positivos y que los esfuerzos normales de compresión sean negativos.

Para el caso bidimensional, tan sólo se dibuja una cara del cubo de esfuerzo. Si se conservan las direcciones *x* y *y* y se elimina *z*, se observa la normal al plano *xy* del cubo de la figura 2-1 y se ven los esfuerzos de la figura 2-2, que actúan sobre las caras ocultas del cubo. El lector debería verificar que las componentes de esfuerzo mostradas en la figura 2-2 son todas positivas según la convención de signos establecida anteriormente.

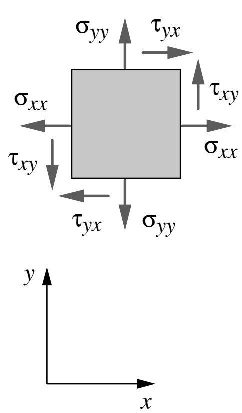


FIGURA 2-2

Elemento de esfuerzo bidimensional

Observe que la definición de la notación de los subíndices dobles es consistente cuando se aplica a esfuerzos normales. Por ejemplo, el esfuerzo normal σ_{xx} actúa sobre la cara *x* y también en la dirección de *x*. Puesto que los subíndices simplemente se repiten para esfuerzos normales, es común eliminar uno de ellos y referirse a las componentes normales simplemente como σ_x, σ_y y σ_z. Se requieren ambos subíndices para definir las componentes del esfuerzo cortante y, por lo mismo, se utilizarán los dos. También puede demostrarse[1] que el tensor de esfuerzo es simétrico, lo cual significa que

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Esto reduce el número de las componentes de esfuerzo a calcular.

2.2 DEFORMACIÓN UNITARIA

El esfuerzo y la deformación unitaria están linealmente relacionados por la ley de Hooke, en la región elástica de la mayoría de los materiales para ingeniería, como veremos en el apéndice B. La deformación unitaria es también un tensor de segundo orden, y para el caso tridimensional se expresa como

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.3a}$$

y para el caso bidimensional,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \tag{2.3b}$$

donde ε representa ya sea una deformación unitaria normal o cortante, que se diferencia entre sí por sus subíndices. También se simplificarán, por conveniencia, los subíndices repetidos de las deformaciones unitarias normales como ε_x, ε_y y ε_z, manteniendo los subíndices dobles para identificar las deformaciones unitarias cortantes. Las mismas relaciones simétricas de las componentes de los esfuerzos cortantes mostradas en la ecuación 2.2 se aplican también para las componentes de deformación unitaria.

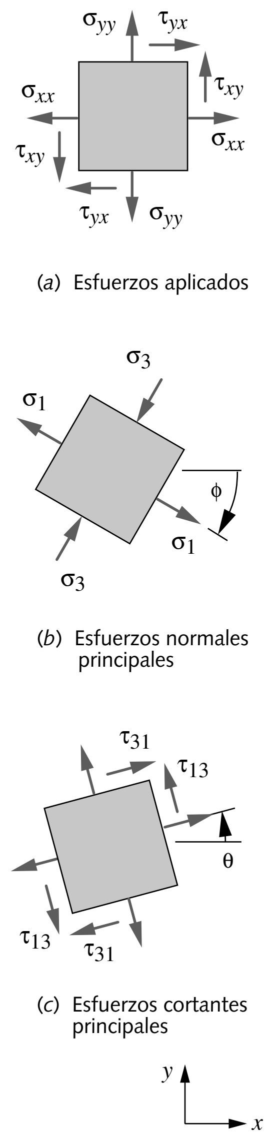


FIGURA 2-3

Esfuerzos principales sobre un elemento de esfuerzo bidimensional

2.3 ESFUERZOS PRINCIPALES

Los sistemas de ejes adoptados en las figuras 2-1 y 2-2 son arbitrarios, y usualmente se eligen por conveniencia para el cálculo de los esfuerzos aplicados. Para cualquier combinación particular de esfuerzos aplicados, existirá una distribución continua del campo del esfuerzo alrededor de cualquier punto que se analice. Los esfuerzos normales y cortantes en ese punto variarán según la dirección del sistema de coordenadas seleccionado. Siempre habrá planos sobre los cuales las componentes de esfuerzo cortante sean iguales a cero. Los esfuerzos normales que actúan sobre estos planos se llaman esfuerzos principales. Los planos sobre los cuales actúan tales esfuerzos principales se denominan **planos principales**. Las direcciones de las normales a la superficie de los planos principales se llaman **ejes principales**, y los esfuerzos normales que actúan en esas direcciones son los **esfuerzos normales principales**. También existe otro conjunto de ejes mutuamente perpendiculares a lo largo de los cuales los esfuerzos cortantes serán máximos. Los **esfuerzos cortantes principales** actúan sobre un conjunto de planos que están en ángulos de 45° con los planos de esfuerzos normales principales. Para el caso bidimensional de la figura 2-2, los planos principales y los esfuerzos principales se muestran en la figura 2-3.

Puesto que estamos más interesados en el diseño de las piezas de la máquina de modo que no falle, y como la falla ocurrirá si el esfuerzo en cualquier punto excede algún valor de seguridad, desde un punto de vista de ingeniería se necesita encontrar los mayores esfuerzos (tanto normales como cortantes) que ocurran dentro del continuo de material que forma la pieza de nuestra máquina. Se podría tener menos interés en las direcciones de dichos esfuerzos que en sus magnitudes, ya que el material se puede considerar isotrópico al menos macroscópicamente y, por lo tanto, tiene propiedades de resistencia que son uniformes en todas las direcciones. La mayoría de los metales y muchos otros materiales de ingeniería cumplen con este criterio, si bien la madera y los materiales compuestos son excepciones notables.

2

La expresión que relaciona los esfuerzos aplicados con los esfuerzos principales es

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.4a}$$

donde σ es la magnitud del esfuerzo principal, y n_x, n_y y n_z son los cosenos de la dirección del vector unitario **n**, el cual es normal al plano principal:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 1 \\ \hat{\mathbf{n}} &= n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} + n_z \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{2.4b}$$

Para que exista la solución de la ecuación 2.4*a*, el determinante de la matriz coeficiente debe ser cero. Al desarrollar este determinante y hacerlo igual a cero, se tiene:

$$\sigma^3 - C_2\sigma^2 - C_1\sigma - C_0 = 0 \tag{2.4c}$$

donde

$$\begin{aligned} C_2 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ C_1 &= \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x \\ C_0 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

La ecuación 2.4*c* es un polinomio cúbico en σ. Los coeficientes C_0, C_1 y C_2 se llaman las invariantes del tensor, ya que tienen los mismos valores sin importar la selección inicial de los ejes *xyz*, en los cuales se midieron o se calcularon los esfuerzos aplicados. Las unidades de C_2 son psi (MPa), de C_1 psi^2 (MPa^2) y de C_0 psi^3 (MPa^3). Los tres esfuerzos (normales) principales σ_1, σ_2, σ_3 son las tres raíces de este polinomio cúbico. Las raíces de este polinomio son siempre reales[2] y, por lo general, están ordenadas de modo que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Si es necesario, las direcciones de los vectores de esfuerzos principales se obtienen sustituyendo cada raíz de la ecuación 2.4*c* en 2.4*a* y resolviendo n_x, n_y y n_z para cada uno de los tres esfuerzos principales. Las direcciones de estos tres esfuerzos principales son mutuamente ortogonales.

Los esfuerzos cortantes principales se obtienen a partir de los valores de los esfuerzos normales principales, usando

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \\ \tau_{21} &= \frac{|\sigma_2 - \sigma_1|}{2} \\ \tau_{32} &= \frac{|\sigma_3 - \sigma_2|}{2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Si los esfuerzos normales principales se ordenan como se mostró antes, entonces $\tau_{máx} = \tau_{13}$. Las direcciones de los planos de los esfuerzos cortantes principales están a 45° de las de los esfuerzos normales principales y, también, son mutuamente ortogonales.

La solución de la ecuación 2.4*c* para sus tres raíces se pudo haber obtenido trigonométricamente con el método de Viete* o usando un algoritmo iterativo de búsqueda de raíces. El archivo STRESS3D resuelve la ecuación 2.4*c* y calcula las tres raíces de esfuerzos principales con el método de Viete y las ordena de acuerdo con la convención

* Véase *Numerical Recipes* de W. H. Press *et al.*, Cambridge Univ. Press, 1986, p. 146, o bien, *Standard Mathematical Tables*, CRC Press, 22a. ed., 1974, p. 104, o cualquier recopilación de fórmulas matemáticas estándar.

anterior. STRESS3D también calcula la función del esfuerzo (ecuación 2.4*c*), para una lista de valores de σ definidos por el usuario y, luego, grafica esa función. Los cruces de las raíces se pueden ver sobre la gráfica. La figura 2-4 muestra la función de esfuerzo de un conjunto arbitrario de esfuerzos aplicados, graficados en un rango de valores de σ que incluye las tres raíces. La tabla 2-1 presenta los resultados del cálculo.

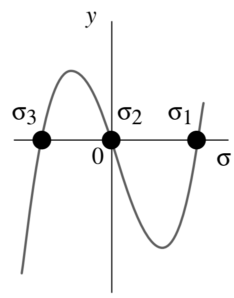


FIGURA 2-4

Las tres raíces de la función del esfuerzo para el caso de esfuerzo en un plano

Para el caso especial del estado de esfuerzo bidimensional, las ecuaciones 2.4*c* para el esfuerzo principal se reducen a*

$$\sigma_a, \sigma_b = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_c = 0 \tag{2.6a}$$

Las dos raíces diferentes de cero calculadas a partir de la ecuación 2.6*a* se designan temporalmente como σ_a y σ_b, y la tercera raíz σ_c es siempre cero en el caso bidimensional. Dependiendo de sus valores resultantes, las tres raíces se identifican de acuerdo con la convención: *la mayor algebraicamente* = σ_1, *la menor algebraicamente* = σ_3 y la *otra* = σ_2. Usando la ecuación 2.6*a* para resolver el ejemplo mostrado en la figura 2-4 se obtendrían los valores de $\sigma_1 = \sigma_a$, $\sigma_3 = \sigma_b$, $\sigma_2 = \sigma_c$, = 0, como se indica en la figura.† Desde luego, la ecuación 2.4*c* para el caso de 3-D se puede usar incluso para resolver cualquier caso bidimensional, de manera que uno de los tres esfuerzos principales obtenidos será cero. El ejemplo de la figura 2-4 es un caso bidimensional resuelto con la ecuación 2.4*c*. Note la raíz de $\sigma = 0$.

Una vez que se han obtenido y ordenado los tres esfuerzos principales como se describió anteriormente, se obtiene el esfuerzo de corte máximo con la ecuación 2.5:

$$\tau_{máx} = \tau_{13} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \tag{2.6b}$$

Tabla 2-1 Solución de la función de esfuerzo cúbica para el caso de un esfuerzo en el plano
Del archivo STRESS3D

Entrada	Variable	Salida	Unidad	Comentarios
1 000	σ_{xx}		psi	esfuerzo normal aplicado en la dirección de *x*
–750	σ_{yy}		psi	esfuerzo normal aplicado en la dirección de *y*
0	σ_{zz}		psi	esfuerzo normal aplicado en la dirección de *z*
500	τ_{xy}		psi	esfuerzo cortante aplicado en la dirección *xy*
0	τ_{yz}		psi	esfuerzo cortante aplicado en la dirección *yz*
0	τ_{zx}		psi	esfuerzo cortante aplicado en la dirección *zx*
	C_2	250	psi	término del coeficiente de σ^2
	C_1	1.0E6	psi^2	término del coeficiente de σ^1
	C_0	0	psi^3	término del coeficiente de σ^0
	σ_1	1 133	psi	raíz # 1 del esfuerzo principal
	σ_2	0	psi	raíz # 2 del esfuerzo principal
	σ_3	–883	psi	raíz # 3 del esfuerzo principal

* Las ecuaciones 2.6 también se pueden usar cuando un esfuerzo principal es diferente de cero, pero está dirigido a lo largo de uno de los ejes *xyz* del sistema de coordenadas *xyz* elegido para el cálculo. Entonces, el cubo del esfuerzo de la figura 2-1 se hace girar alrededor de uno de los ejes principales para determinar los ángulos de los otros dos planos principales.

† Si la convención de numeración tridimensional se aplica estrictamente en el caso bidimensional, entonces algunas veces los dos esfuerzos principales diferentes de cero resultarán ser σ_1 y σ_3 si tienen signo contrario (como en el ejemplo 2-1). Otras veces serán σ_1 y σ_2, cuando ambos tengan signo positivo, y el menor (σ_3) será cero (como en el ejemplo 2-2). Una tercera posibilidad es que ambos esfuerzos principales diferentes de cero sean negativos (de compresión), y el mayor algebraicamente del conjunto (σ_1) es entonces cero. La ecuación 2.6*a* designa arbitrariamente a los dos esfuerzos principales bidimensionales diferentes de cero como σ_a y σ_b, y el restante σ_c se reserva para el miembro del trío que es igual a cero. La aplicación de la convención estándar puede dar como resultado que cualquiera de las combinaciones σ_1 y σ_2, σ_1 y σ_3, o σ_2 y σ_3 se designen como σ_a y σ_b dependiendo de sus valores relativos. Véase los ejemplos 2-1 y 2-2.

2.4 ESFUERZO PLANO Y DEFORMACIÓN PLANA

El estado general del esfuerzo y la deformación es tridimensional; no obstante, existen configuraciones geométricas específicas que se pueden tratar de manera diferente.

Esfuerzo plano

El estado de esfuerzo bidimensional o biaxial también se conoce como **esfuerzo plano**, el cual requiere que un esfuerzo principal sea cero. Esta condición es común en algunas aplicaciones. Por ejemplo, una placa o un cascarón pueden tener también un estado de esfuerzo plano lejos de sus límites o puntos de unión. Estos casos se pueden tratar con el enfoque más sencillo de las ecuaciones 2.6.

Deformación plana

Existen deformaciones principales asociadas con los esfuerzos principales. Si una de las deformaciones principales (por ejemplo, ε_3) es cero, y si las deformaciones restantes son independientes de la dimensión a lo largo de su eje principal, $\mathbf{n_3}$, entonces se llama **deformación plana**. Esta condición ocurre en geometrías particulares. Por ejemplo, si una barra larga, sólida y prismática se carga tan sólo en dirección transversal, las regiones dentro de la barra que están lejos de cualquier restricción del extremo tendrán esencialmente deformación cero a lo largo del eje de la barra, y se tendrá una deformación plana. (Sin embargo, el esfuerzo no es cero en la dirección de deformación cero). Se puede considerar que una presa hidráulica grande tiene una condición de deformación plana en las regiones bien alejadas de sus extremos, o bien, en la base que está unida a las estructuras circundantes.

2.5 CÍRCULOS DE MOHR

Los círculos de Mohr* han probado exhaustivamente ser un buen medio para solucionar de forma gráfica la ecuación 2.6, así como para obtener los esfuerzos principales para el caso del esfuerzo plano. Muchos libros de texto sobre diseño de máquinas presentan el método de círculos de Mohr como una técnica de solución primordial para la determinación de los esfuerzos principales. Antes de la llegada de las calculadoras programables y las computadoras, el método gráfico de Mohr era un recurso razonable y práctico para resolver la ecuación 2.6. Sin embargo, ahora resulta más práctico obtener numéricamente los esfuerzos principales. No obstante, se presenta el método gráfico por varios motivos. Puede servir como una verificación rápida de una solución numérica y ser el único método viable si la energía de su computadora falla o se agotan las baterías de su calculadora. También es útil para obtener una presentación visual del estado del esfuerzo en un punto determinado.

Los círculos de Mohr también funcionan para el caso de esfuerzos tridimensionales, aunque no hay un método de construcción gráfica para crearlos directamente a partir de los datos del esfuerzo aplicado, excepto en el caso especial donde uno de los esfuerzos principales coincide con un eje del sistema de coordenadas *xyz* seleccionado, es decir, donde un plano es el plano del esfuerzo principal. Sin embargo, una vez que se calculan los esfuerzos principales de la ecuación 2.4*c* (p. 74) por una técnica adecuada de búsqueda de raíces, los círculos de Mohr tridimensionales se pueden dibujar usando los esfuerzos principales calculados. Con este propósito, en el disco se incluye un programa llamado MOHR. En el caso especial del esfuerzo en 3-D, donde un esfuerzo principal permanece a lo largo de un eje de coordenadas, los tres círculos de Mohr se pueden construir gráficamente.

* Ideados por el ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918). Sus círculos se usan también para la transformación de coordenadas de deformaciones, así como de momentos de área y productos de inercia.

El plano de Mohr, sobre el cual se dibujan los círculos, se traza con sus ejes mutuamente perpendiculares, pero el ángulo entre ellos es de 180° en el espacio real. Todos los ángulos dibujados sobre el plano de Mohr tienen el doble de su valor en el espacio real. La abscisa es el eje de todos los esfuerzos normales. Los esfuerzos normales aplicados σ_x, σ_y y σ_z se grafican a lo largo de este eje, y los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 también se encuentran sobre éste. La ordenada es el eje de todos los esfuerzos cortantes. Se suelen dibujar los esfuerzos cortantes aplicados τ_{xy}, τ_{yx} y τ_{xz} para encontrar el esfuerzo cortante máximo.* Mohr utilizaba una convención de signos para los esfuerzos cortantes, lo cual hace positivos a los esfuerzos que giren en sentido del movimiento de las manecillas del reloj (*cw*), aunque esto ***no es consistente*** *con el estándar convencional de la regla de la mano derecha*. Sin embargo, esta convención de la mano izquierda se emplea incluso para sus círculos. La mejor forma de demostrar el uso de los círculos de Mohr es con ejemplos.

EJEMPLO 2-1

Determinación de los esfuerzos principales mediante los círculos de Mohr

Problema **Un elemento de esfuerzo biaxial como el mostrado en la figura 2-2 tiene $\sigma_x = 40\ 000$ psi, $\sigma_y = -20\ 000$ psi y $\tau_{xy} = 30\ 000$ psi en sentido contrario al de las manecillas del reloj (*ccw*). Utilice los círculos de Mohr para determinar los esfuerzos principales. Verifique el resultado con un método numérico.**

Solución **Véase las figuras 2-2 (p. 72) y 2-5.**

1. Construya los ejes del plano de Mohr, como se indica en la figura 2-5*b* y desígnelos σ y τ.
2. Trace el esfuerzo aplicado σ_x (como la línea *OA*) a una escala conveniente a lo largo del eje de esfuerzo normal (horizontal). Observe que σ_x es un esfuerzo de tensión (positivo) en este ejemplo.
3. Trace a escala el esfuerzo aplicado σ_y (como la línea *OB*), a lo largo del eje del esfuerzo normal. Observe que σ_y es un esfuerzo de compresión (negativo) en este ejemplo.
4. La figura 2-2 muestra que el par de esfuerzos cortantes τ_{xy} crea un par en sentido contrario a las manecillas del reloj (*ccw*) sobre el elemento. Este par se compensa con el par en sentido de las manecillas del reloj (*cw*) proporcionado por los esfuerzos cortantes τ_{yx}. Recuerde que estos dos esfuerzos cortantes, τ_{xy} y τ_{yx}, son de la misma magnitud de acuerdo con la ecuación 2.2 (p. 72) y son positivos de acuerdo con la convención de signos de esfuerzos. Sin embargo, en vez de usar la convención de signos de esfuerzos, se grafican sobre el círculo de Mohr, de acuerdo con la rotación que le imprimen al elemento, usando la convención de signos de Mohr de la mano izquierda para el sentido de las manecillas del reloj (*cw*+) y en sentido contrario a las manecillas del reloj (*ccw*−).
5. Trace una línea vertical hacia abajo (*ccw*−) desde la punta de σ_x (como línea *AC*) para representar la magnitud a escala de τ_{xy}. Trace una línea vertical hacia arriba (*cw*+) desde la punta de σ_y (como línea *BD*) para representar la magnitud a escala de τ_{yx}.
6. El diámetro de uno de los círculos de Mohr es la distancia del punto *C* al punto *D*. La línea *AB* biseca *CD*. Trace el círculo usando esta intersección como centro.
7. Dos de los tres esfuerzos normales principales se obtienen en las dos intersecciones que este círculo de Mohr hace con el eje del esfuerzo normal en los puntos P_1 y P_3: $\sigma_1 = 52\ 426$ psi en P_1 y $\sigma_3 = -32\ 426$ psi en P_3.
8. Puesto que en este ejemplo no existen esfuerzos aplicados en la dirección *z*, se trata de un estado de esfuerzo bidimensional y el tercer esfuerzo principal, σ_2, es igual a cero y está localizado en el punto *O*, el cual también está identificado como P_2.

* El hecho de que Mohr usara los mismos ejes para graficar más de una variable es una de las fuentes de confusión para los estudiantes, cuando éstos se encuentran por primera vez con dicho método. Sólo recuerde que todas las σ se grafican sobre el eje horizontal, siempre que se trate de esfuerzos normales aplicados (σ_x, σ_y y σ_z) o esfuerzos principales (σ_1, σ_2 y σ_3); todas las τ se dibujan sobre el eje vertical, ya sea que sean esfuerzos cortantes aplicados (τ_{xy}, etcétera) o esfuerzos cortantes máximos (τ_{12}, etcétera). Los ejes de Mohr **no** son ejes cartesianos convencionales.

2

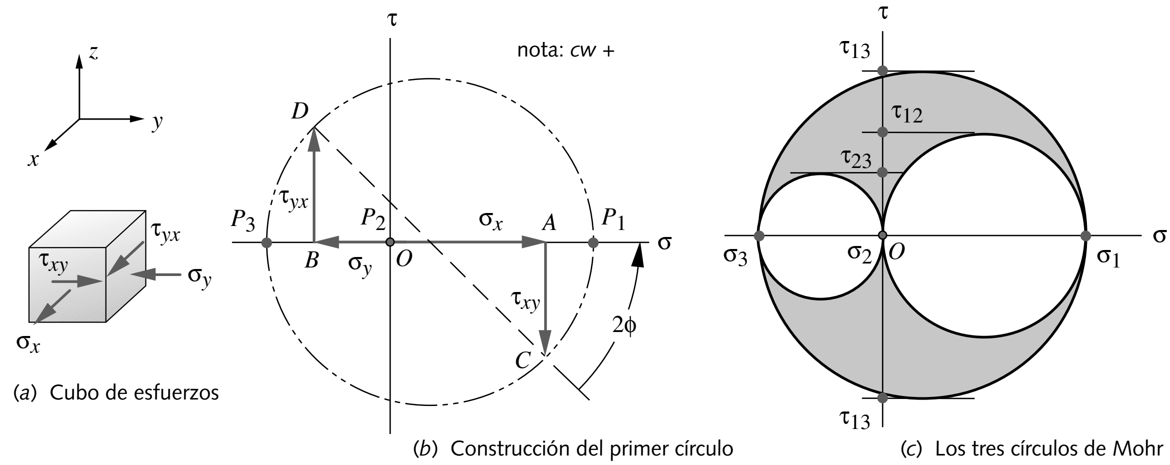


FIGURA 2-5

El cubo de esfuerzos y los círculos de Mohr del ejemplo 2-1

9. Deben dibujarse otros dos círculos de Mohr. Los tres círculos de Mohr están definidos por los diámetros $(\sigma_1 - \sigma_3)$, $(\sigma_1 - \sigma_2)$ y $(\sigma_2 - \sigma_3)$, los cuales son las líneas P_1P_3, P_2P_1 y P_2P_3. Los tres círculos se muestran en la figura 2-5*c*.

10. Trace líneas tangentes horizontales desde los extremos superior e inferior de cada círculo de Mohr hasta interceptar el eje de corte (vertical). Esto define los valores de los esfuerzos cortantes principales asociados con cada par de esfuerzos normales principales; es decir, $\tau_{13} = 42\,426$, $\tau_{12} = 26\,213$ y $\tau_{23} = 16\,213$ psi. Observe que a pesar de tener sólo dos esfuerzos normales principales diferentes de cero, hay tres esfuerzos cortantes principales diferentes de cero. Sin embargo, sólo el más grande de éstos, $\tau_{máx} = \tau_{13} = 42\,426$ psi, es de interés para el diseño.

11. También se pueden determinar los ángulos (con respecto a sus ejes *xyz* originales) de los esfuerzos normal principal y cortante principal, a partir del círculo de Mohr. Únicamente estos ángulos son de interés académico si el material es homogéneo e isotrópico. Si no es isotrópico, sus propiedades materiales son dependientes de la dirección y, por consiguiente, se vuelven importantes las direcciones de los esfuerzos principales. El ángulo $2\phi = -45°$ de la figura 2-5*a* representa la orientación del esfuerzo normal principal con respecto al eje *x* de su sistema original. Note que la línea *DC* sobre el plano de Mohr es el eje *x* en el espacio real y los ángulos se miden de acuerdo con la convención de la mano izquierda de Mohr, en sentido de las manecillas del reloj (*cw*+). Puesto que los ángulos sobre el plano de Mohr son del doble de los del espacio real, el ángulo del esfuerzo principal σ_1 con respecto al eje *x* del espacio real es $\phi = -22.5°$. El esfuerzo σ_3 será de 90° considerando σ_1, y el esfuerzo cortante máximo τ_{13} será de 45° tomando en cuenta el eje σ_1 en el espacio real.

Se desarrolló un programa de computadora llamado MOHR que se incluye en este texto. El programa MOHR permite la entrada de cualquier conjunto de esfuerzos aplicados y calcula los esfuerzos normal principal y cortante usando las ecuaciones 2.4 y 2.5 (p. 74). Luego, grafica los círculos de Mohr y también despliega la función de esfuerzo en la vecindad de las tres raíces de los esfuerzos principales. También se proporcionan los archivos de datos que se pueden leer con este programa. Abra el archivo EX04-01.moh de MOHR para ver la solución analítica de ese ejemplo. Se pueden introducir archivos adicionales con el nombre EX04.01 en varios programas comerciales (identificados por el sufijo); también calculan los esfuerzos principales y grafican la función de esfuerzo cúbica del ejemplo 2-1. Véase el CD-ROM del libro.

Ahora se modificará ligeramente el ejemplo anterior para demostrar la necesidad de dibujar los tres círculos de Mohr, incluso en el caso del esfuerzo plano. El cambio más significativo consiste en hacer positivos ambos esfuerzos aplicados σ_x y σ_y, en vez de que tengan signos contrarios.

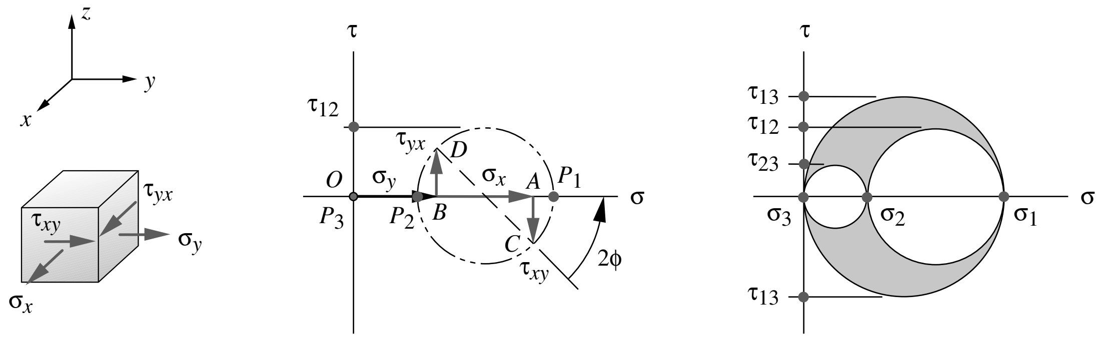
EJEMPLO 2-2

Determinación de los esfuerzos planos usando los círculos de Mohr

Problema **El elemento de esfuerzo biaxial mostrado en la figura 2-2 tiene σ_x = 40 000 psi, σ_y = 20 000 psi y τ_{xy} = 10 000 psi en sentido contrario a las manecillas del reloj (*ccw*). Use los círculos de Mohr para determinar los esfuerzos principales. Verifique el resultado con un método numérico.**

Solución **Véase las figuras 2-2 (p. 72) y 2-6.**

1. Construya los ejes del plano de Mohr, como se indica en la figura 2-6 y desígnelos σ y τ.
2. Trace a escala el esfuerzo aplicado σ_x, que se proporciona (como la línea *OA*), a lo largo del eje del esfuerzo normal (horizontal). Observe que σ_x es un esfuerzo de tensión (positivo) en este ejemplo.
3. Trace a escala el esfuerzo aplicado σ_y (como la línea *OB*) a lo largo del eje del esfuerzo normal. Observe que en este ejemplo σ_y es también un esfuerzo de tensión (positivo), de modo que se encuentra en la misma dirección que σ_x a lo largo del eje σ.
4. La figura 2-2 indica que los esfuerzos cortantes τ_{xy} crean un par en sentido contrario a las manecillas del reloj (*ccw*) sobre el elemento. Este par se compensa con el par en sentido de las manecillas del reloj (*cw*) proporcionado por los esfuerzos cortantes τ_{yx}. Recuerde que estos dos esfuerzos cortantes, τ_{xy} y τ_{yx}, tienen la misma magnitud de acuerdo con la ecuación 2.2 (p. 72) y son positivos de acuerdo con la convención de signos de los esfuerzos. No obstante, en vez de usar la convención de signos de los esfuerzos, se grafican sobre el círculo de Mohr según la rotación que le imprimen al elemento, empleando la convención de signos de Mohr de la mano izquierda de *cw*+ y *ccw*−.
5. Trace una línea vertical hacia abajo en sentido contrario a las manecillas del reloj (*ccw*−) desde la punta de σ_x (como línea *AC*) para representar la magnitud a escala de τ_{xy}. Trace una línea vertical hacia arriba en sentido de las manecillas del reloj (*cw*+) desde la punta de σ_y (como línea *BD*) para representar la magnitud a escala de τ_{yx}.
6. El diámetro de uno de los círculos de Mohr es la distancia desde el punto *C* hasta el punto *D*. La línea *AB* biseca *CD*. Dibuje el círculo usando esta intersección como centro.
7. Dos de los tres esfuerzos normales principales se obtienen entonces en las dos intersecciones que este círculo de Mohr forma con el eje del esfuerzo normal en los puntos P_1 y P_2: σ_1 = 44 142 psi y σ_2 = 15 858 psi. Observe que si se detiene en este punto, el esfuerzo cortante máximo es de τ_{12} = 14 142 psi, como lo define la proyección de una tangente horizontal que va desde lo alto del círculo hasta el eje τ, como se ilustra en la figura 2-6*b*.
8. Puesto que no existen esfuerzos aplicados en la dirección *z* en este ejemplo, se trata de un estado de esfuerzos bidimensional; en tanto que el tercer esfuerzo principal σ_3 es cero y está localizado en el punto *O*, también designado como P_3.
9. Existen otros dos círculos de Mohr que deben dibujarse. Los tres círculos de Mohr se definen mediante los diámetros $(\sigma_1 - \sigma_3)$, $(\sigma_1 - \sigma_2)$ y $(\sigma_2 - \sigma_3)$, los cuales en este caso son las líneas P_1P_3, P_1P_2 y P_2P_3, como se indica en la figura 2-6.



(*a*) Cubo de esfuerzos (*b*) Construcción del primer círculo (*c*) Los tres círculos de Mohr

FIGURA 2-6

El cubo de esfuerzos y los círculos de Mohr para el ejemplo 2-2

10. Trace líneas tangentes horizontales del extremo superior al extremo inferior de cada círculo de Mohr, hasta intersecar el eje cortante (vertical). Esto determina los valores de los esfuerzos cortantes principales asociados con cada par de esfuerzos normales principales; es decir, τ_{13} = 22 071, τ_{12} = 14 142 y τ_{23} = 7 929 psi. El mayor de éstos es $\tau_{máx}$ = 22,071, y no el valor 14 142 obtenido en el paso 7.
11. Observe que siempre es el círculo que se encuentra entre los esfuerzos principales mayor y menor lo que determina el esfuerzo cortante máximo. En el ejemplo anterior, el esfuerzo principal igual a cero no era el menor de los tres, porque un esfuerzo principal era negativo. En el presente ejemplo, el esfuerzo principal igual a cero es el menor. Por lo tanto, una falla al dibujar los tres círculos tendría como consecuencia un error grave en el valor de $\tau_{máx}$.
12. Los archivos EX04-02 pueden abrirse con el programa MOHR y otros. Véase el CD-ROM.

Los dos ejemplos previos muestran algunos usos y limitaciones del enfoque del círculo de Mohr para el cálculo del esfuerzo plano. Desde un punto de vista práctico, mientras se tengan a la mano recursos computacionales (al menos en la forma de una calculadora de bolsillo programable), el método de la solución analítica (ecuación 2.4*c*, p. 74) es preferible para determinar los esfuerzos principales. Se trata de una solución universal (sirve para esfuerzos planos, deformaciones planas o cualquier caso general de esfuerzos) y da como resultado los tres esfuerzos principales.

EJEMPLO 2-3

Determinación de esfuerzos tridimensionales usando métodos analíticos

Problema **Un elemento de esfuerzo triaxial, como el mostrado en la figura 2-1 (p. 72), tiene σ_x = 40 000 psi, σ_y = –20 000 psi, σ_z = –10 000, τ_{xy} = 5 000, τ_{yz} = –1 500, τ_{zx} = 2 500 psi. Obtenga los esfuerzos principales usando un método numérico y dibuje los círculos de Mohr resultantes.**

Solución **Véase las figuras 2-2 (p. 72) y 2-7.**

1. Calcule las invariantes del tensor C_0, C_1 y C_2 mediante la ecuación 2.4*c*.

$$C_2 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 40\,000 - 20\,000 - 10\,000 = 10\,000 \tag{a}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x \\ &= (5\,000)^2 + (-1\,500)^2 + (2\,500)^2 - (40\,000)(-20\,000) \\ &\quad -(-20\,000)(-10\,000) - (-10\,000)(40\,000) = 10.335E8 \end{aligned} \tag{b}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \\ &= 40\,000(-20\,000)(-10\,000) + 2(5\,000)(-1\,500)(2\,500) \\ &\quad -40\,000(-1\,500)^2 - (-20\,000)(2\,500)^2 \\ &\quad -(-10\,000)(5\,000)^2 = 8.248E12 \end{aligned} \tag{c}$$

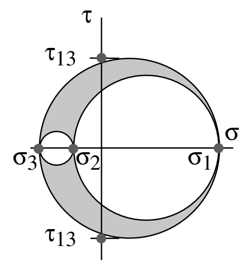


FIGURA 2-7

Círculos de Mohr para el ejemplo 2-3

2. Sustituya las invariantes en la ecuación 2.4*c* (p. 74) y resuélvala para sus tres raíces mediante el método de Viete o uno numérico.

$$\sigma^3 - C_2\sigma^2 - C_1\sigma - C_0 = 0$$

$$\sigma^3 - 10\,000\,\sigma^2 - 10.335E8\,\sigma - 8.248E12 = 0 \tag{d}$$

$$\sigma_1 = 40\,525; \qquad \sigma_2 = -9\,838; \qquad \sigma_3 = -20\,687$$

3. Los esfuerzos de corte principales se obtienen ahora aplicando la ecuación 2.5 (p. 74).

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{|40\,525 - (-20\,687)|}{2} = 30\,606 \\ \tau_{21} &= \frac{|\sigma_2 - \sigma_1|}{2} = \frac{|-9\,838 - 40\,525|}{2} = 25\,182 \\ \tau_{32} &= \frac{|\sigma_3 - \sigma_2|}{2} = \frac{|-20\,687 - (-9\,838)|}{2} = 5\,425 \end{aligned} \tag{e}$$

4. Los archivos EX04-03 pueden abrirse con el programa MOHR y otros. Véase el CD-ROM.

2.6 ESFUERZOS APLICADOS CONTRA ESFUERZOS PRINCIPALES

Ahora se desea resumir las diferencias entre los esfuerzos **aplicados a un elemento** y los esfuerzos principales que ocurrirían sobre otros planos como resultado de los esfuerzos aplicados. Los **esfuerzos aplicados** son las *nueve componentes del tensor de esfuerzo* (ecuación 2.4*a*, p. 74) que se generan siempre que se aplican cargas a la geometría específica del objeto, definidas en un sistema de coordenadas seleccionado por conveniencia. Los **esfuerzos principales** son los tres *esfuerzos normales principales* y los tres *esfuerzos cortantes principales* definidos en la sección 2.3. Desde luego, muchos de los términos del esfuerzo aplicado pueden ser cero en un caso determinado. Por ejemplo, en la muestra de la prueba de tensión estudiada en el apéndice B, el único término de la ecuación 2.4*a* (p. 74) de esfuerzo aplicado diferente de cero es σ_x, el cual es unidireccional y normal. No existen esfuerzos cortantes aplicados sobre las normales a las superficies en el eje de la fuerza en cargas de tensión pura. Sin embargo, los esfuerzos principales son **tanto normales como cortantes.**

2

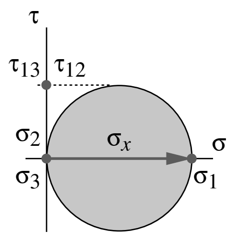


FIGURA 2-8
Círculos de Mohr para esfuerzos de tensión unidireccional (dos círculos coinciden y el tercero es un punto, ya que $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

La figura 2-8 ilustra el círculo de Mohr de una muestra de prueba a la tensión. En este caso, el esfuerzo aplicado es de tensión pura, mientras que el esfuerzo normal principal máximo es igual a él en magnitud y dirección. Sin embargo, un esfuerzo cortante principal de la mitad del esfuerzo de tensión aplicado actúa sobre un plano de 45° desde el plano del esfuerzo normal principal. Por lo tanto, los esfuerzos cortantes principales usualmente serán diferentes de cero, incluso en ausencia de cualquier esfuerzo cortante aplicado. Este hecho es importante para entender por qué las piezas fallan y se estudiará con mayor detalle en el capítulo 3. Los ejemplos de la sección previa también refuerzan este punto. En este contexto, la tarea más difícil para el diseñador de máquinas consiste en determinar correctamente las ubicaciones, los tipos y las magnitudes de todos los esfuerzos aplicados que actúan sobre la pieza. Mediante las ecuaciones 2.4 a 2.6 (pp. 74-75), el cálculo de los esfuerzos principales es entonces *mera formalidad*.

2.7 TENSIÓN AXIAL

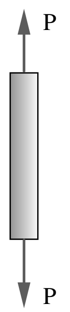


FIGURA 2-9
Barra en tensión axial

La carga axial a la tensión (figura 2-9) es uno de los tipos de carga más sencillos que se pueden aplicar a un elemento. Se supone que la carga se aplica a través del centroide del área del elemento, y que las dos fuerzas opuestas son colineales a lo largo del eje x. En algún lugar alejado de los extremos donde se aplican las fuerzas, la distribución del esfuerzo a través de la sección transversal del elemento es esencialmente uniforme, como se muestra en la figura 2-10. Ésta es una razón por la que este método de carga se utiliza para probar las propiedades de los materiales, tal como se describe en el apéndice B. Los esfuerzos normales aplicados para tensión axial pura se calculan mediante

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \tag{2.7}$$

donde P es la fuerza aplicada y A es el área de la sección transversal del punto de interés. Éste es un esfuerzo normal aplicado. Los esfuerzos normales principales y el esfuerzo cortante máximo se obtienen con las ecuaciones 2.6 (p. 75). El círculo de Mohr para este caso se muestra en la figura 2-8. La carga permisible para cualquier elemento particular en tensión se determina comparando los esfuerzos principales con la adecuada resistencia del material. Por ejemplo, si el material es dúctil, se puede comparar la resistencia de fluencia a la tensión, S_y, con el esfuerzo normal principal y el factor de seguridad se calcula como $N = S_y / \sigma_1$. El criterio de falla se tratará con mayor detalle en el capítulo 3.

El cambio de longitud Δs de un elemento de sección transversal uniforme cargado con una tensión pura está dado por

$$\Delta s = \frac{Pl}{AE} \tag{2.8}$$

donde P es la fuerza aplicada, A es el área transversal, l es la longitud cargada y E es el módulo de Young del material.

La carga a la tensión es muy común; ocurre en cables, puntales, pernos y muchos otros elementos cargados axialmente. El diseñador necesita verificar cuidadosamente la presencia de otras cargas en el elemento que, si se presentan en combinación con la carga de tensión, crea un estado de esfuerzo diferente al de la tensión axial pura descrito aquí.

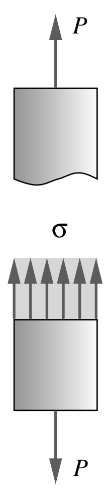
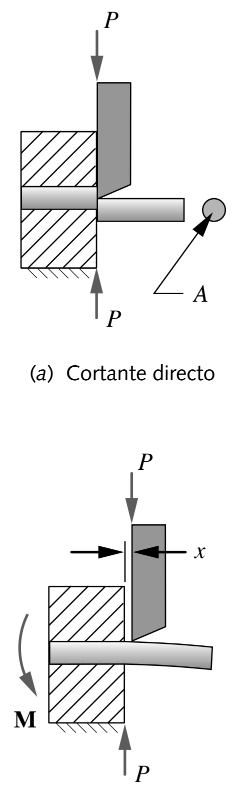


FIGURA 2-10
Distribución de esfuerzos en una barra bajo tensión axial

2.8 ESFUERZO CORTANTE DIRECTO, ESFUERZOS DE CONTACTO Y DESGARRAMIENTO

Estos tipos de carga ocurren principalmente en conexiones con pernos, atornilladas o remachadas. Los modos de falla posibles son por cortante directo del conector (clavo, remache o tornillo), falla por contacto del conector o material envolvente, o desgarramiento del material que envuelve el conector. Véase los estudios de caso más adelante en este capítulo, para ejemplos de cálculo de estos tipos de esfuerzos.



(*a*) Cortante directo

(*b*) Cortante con flexión

FIGURA 2-11

Carga cortante

Cortante directo

El cortante directo ocurre en situaciones donde no está presente la flexión. Un par de tijeras (también llamado *par de cortantes*) se diseña para producir cortante directo sobre el material a cortar. Unas tijeras de baja calidad o muy desgastadas no cortarán bien (incluso si están afiladas), si permiten la existencia de un espacio entre las dos cuchillas en dirección perpendicular al movimiento de éstas. La figura 2-11 muestra la condición de cortante directo y también una donde ocurre una flexión. Si el espacio entre las dos "cuchillas" o superficies cortantes se mantiene cercano a cero, entonces se puede suponer un estado de cortante directo y el esfuerzo promedio resultante sobre la cara de corte se estima con

$$\tau_{xy} = \frac{P}{A_{corte}} \tag{2.9}$$

donde P es la carga aplicada y A_{corte} es el área que se está cortando, es decir, el área de la sección transversal a cortar. Se supone aquí que el esfuerzo cortante está distribuido uniformemente sobre la sección transversal. Esto no es exacto, ya que los esfuerzos locales más grandes ocurrirán en la cuchilla.

En la figura 2-11*a* la cuchilla cortante está apretada contra las mandíbulas que sostienen la pieza que se trabaja. Por lo tanto, las dos fuerzas P están en el mismo plano y no crean un par. Esto provoca una condición de corte directo sin flexión. La figura 2-11*b* ilustra la misma pieza de trabajo con un pequeño hueco (x) entre la cuchilla de corte y las mandíbulas. Esto crea un brazo de momento, lo que convierte las fuerzas P en un par y genera flexión, en vez de cortar la pieza directamente. Desde luego, en este caso se desarrollan esfuerzos cortantes significativos, además de los esfuerzos de flexión. Observe que resulta difícil crear situaciones donde el cortante directo puro sea la única carga. Incluso los claros diminutos necesarios para el funcionamiento pueden superponer esfuerzos de flexión sobre los esfuerzos cortantes aplicados. Se estudiarán los esfuerzos debidos a la flexión en la siguiente sección.

La situación representada en las figuras 2-11*a* y 2-12*a* se conoce también como *cortante simple*, debido a que únicamente el área de una sección transversal de la pieza necesita cortarse para romperse. La figura 2-12*b* muestra un pasador de pivote con *cortante doble*. Deben fallar dos áreas antes de que se separe. Esto se conoce como *junta de horquilla con pasador*, donde el eslabón en forma de yugo es la *horquilla*. El área que debe usarse en la ecuación 2.9 es ahora 2A. Se prefiere el cortante doble por encima del cortante simple en los diseños pivote-pasador. Los pivotes de cortante simple sólo se deben utilizar donde sea imposible dar soporte a ambos extremos del pasador, como en algunas manivelas, las cuales deben pasar por un lado de los eslabones adyacentes. Las juntas atornilladas y remachadas son de cortante simple cuando se unen únicamente dos piezas planas.

2

Presión de contacto directa

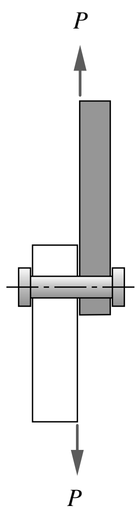
El pasador de un pivote en un orificio como el de la figura 2-12 puede fallar por razones diferentes a un cortante directo. Las superficies del pasador y el orificio están sometidos a un *esfuerzo de contacto* directo, el cual es compresivo por naturaleza. Los esfuerzos de contacto se presentan siempre que dos superficies se presionan entre sí. Este esfuerzo tiende a aplastar el orificio o el pasador en vez de cortarlo. El esfuerzo de contacto es normal, compresivo y se calcula con la ecuación 2.7 (p. 82). Si el pasador se ajusta bien en el orificio básicamente sin claros, el área que se usa por lo general para este cálculo se considera el **área de contacto proyectada** del pasador y del orificio, **no del área circunferencial**. Es decir,

$$A_{contacto} = l\,d \tag{2.10a}$$

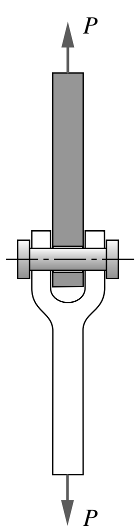
donde l es la longitud del contacto y d es el diámetro del orificio o del pasador. Si existen claros entre el pasador y el orificio, entonces se reduce el área de contacto. Grandin[7] ha demostrado que para este caso el área de contacto puede aproximarse mediante

$$A_{contacto} = \frac{\pi}{4}\,l\,d \tag{2.10b}$$

La figura 2-13*a* muestra las áreas de contacto de la junta pasador-horquilla de la figura 2-12. Cada una de las dos piezas unidas debe verificarse por separado para fallas de contacto, ya que es posible que una falle independientemente de la otra. La longitud l (es decir, el espesor del eslabón) y el diámetro del pasador se ajustan para crear un área de contacto suficiente y eliminar la falla.



(*a*) Pivote con cortante simple (no es el ideal)



(*b*) Pivote con cortante doble (preferido)

FIGURA 2-12

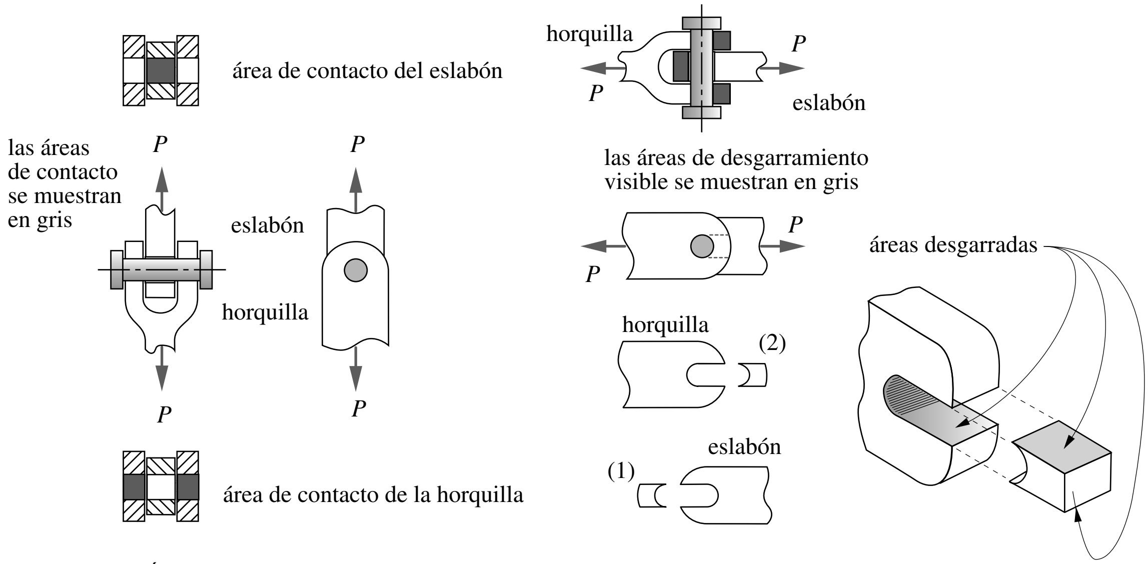
Cortantes simple y doble

Falla por desgarramiento

En juntas con pasador, otro modo de falla posible es el desgarramiento del material que rodea el orificio. Esto pasará si el orificio está colocado muy cerca del extremo. Se trata de una falla con cortante doble, pues requiere que ambos lados del orificio se separen del material raíz. La ecuación 2.9 es aplicable para este caso, siempre que se utilice el área cortante correcta. La figura 2-13*b* muestra las áreas desgarradas de la junta pasador-horquilla de la figura 2-12. Parece que el área se calcula como el producto del espesor del eslabón por la distancia del centro del orificio al extremo externo de la parte, duplicado para considerar ambos lados del orificio. Sin embargo, esta suposición implica que una cuña muy delgada de material dentro del diámetro del orificio agrega una significativa resistencia cortante. Una suposición más común y conservadora es usar dos veces el producto del espesor total del eslabón, por la dimensión del **borde del orificio al exterior de la parte** del área desgarrada. Resulta sencillo agregar suficiente material alrededor de los orificios para prevenir una falla por desgarramiento. Un mínimo de material de un diámetro del pasador entre el borde del orificio y el borde exterior de la pieza es un comienzo razonable para los cálculos de su diseño.

2.9 VIGAS Y ESFUERZOS DE FLEXIÓN

Las vigas son elementos muy comunes en estructuras y máquinas de cualquier tipo. Un cuerpo soportado intermitentemente sometido a cargas transversales a su longitud actuará como una viga. Vigas en pisos estructurales, vigas en el techo, ejes de maquinaria, resortes y armazones son unos cuantos ejemplos de elementos que con frecuencia se cargan como vigas. Las vigas normalmente tienen alguna combinación de esfuerzos normales y cortante distribuidos sobre sus secciones transversales. Es importante para



(*a*) Áreas de esfuerzo por presión de contacto (*b*) Falla por desgarramiento

FIGURA 2-13

Fallas por contacto y desgarramiento

el diseñador entender cómo están distribuidos los esfuerzos dentro de las vigas, con la finalidad de seleccionar las ubicaciones correctas para el cálculo de los esfuerzos máximos. La memorización de las fórmulas de esfuerzo en las vigas, si bien es útil, no es suficiente si no se adquiere el conocimiento de cómo y dónde aplicarlas adecuadamente.

Vigas con flexión pura

En la práctica es raro encontrarse con una viga cargada estrictamente con flexión "pura"; sin embargo, es útil explorar este caso de carga tan sencillo como un medio para desarrollar la teoría de esfuerzos debidos a cargas de flexión. La mayoría de las vigas reales están sujetas a cargas cortantes combinadas con momentos de flexión. Ese caso se tratará en la siguiente sección.

VIGAS RECTAS Como ejemplo de un caso de flexión pura, considere la viga recta, simplemente soportada, de la figura 2-14. Dos cargas concentradas P, idénticas, se aplican en los puntos A y B, los cuales se ubican a la misma distancia de los extremos respectivos de la viga. Los diagramas de cortante y momento flexionante para esta carga muestran que la sección central de la viga, entre los puntos A y B, tiene una fuerza cortante igual a cero y un momento de flexión constante de magnitud M. La ausencia de una fuerza cortante proporciona una flexión pura.

La figura 2-15 muestra un segmento removido y ampliado de la viga, tomado entre los puntos A y B. Las suposiciones para el análisis son las siguientes:

1. El segmento analizado está alejado de las cargas aplicadas o las restricciones externas sobre la viga.
2. La viga está cargada en un plano de simetría.

3. Las secciones transversales de la viga permanecen planas y perpendiculares al eje neutral durante la flexión.
4. El material de la viga es homogéneo y obedece la ley de Hooke.
5. Los esfuerzos permanecen por debajo del límite elástico y las deflexiones son pequeñas.
6. El segmento está sujeto a flexión pura sin cargas axiales o cortantes.
7. La viga está recta inicialmente.

El segmento sin carga en la figura 2-15*a* es recto, pero conforme el momento flexionante se va aplicando como en la figura 2-15*b*, el segmento se vuelve curvo (mostrado exageradamente). La línea de *N* a *N* a lo largo del eje neutro no cambia de longitud, aunque todas las otras líneas a lo largo de la dirección *x* deben acortarse o alargarse para mantener todas las secciones transversales perpendiculares al eje neutro. Las fibras externas de la viga en *A*-*A* se acortan, lo cual las pone en compresión; en tanto que las fibras externas en *B*-*B* se alargan y se ponen en tensión. Esto causa la distribución del esfuerzo flexionante mostrada en la figura 2-15*b*. La magnitud del esfuerzo flexionante es cero en el eje neutro y es linealmente proporcional a la distancia *y* del eje neutro. Esta relación se expresa mediante la conocida ecuación del esfuerzo flexionante:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{2.11a}$$

donde *M* es el momento flexionante aplicado en la sección en cuestión, *I* es el segundo momento del área (momento de inercia del área) de la sección transversal de la viga con respecto al plano neutro (que pasa por el centroide de la sección transversal de la viga recta), y *y* es la distancia del plano neutro al punto donde se calcula el esfuerzo.

El esfuerzo flexionante máximo ocurre en las fibras externas y se expresa como

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} \tag{2.11b}$$

donde *c* es la distancia del plano neutro a la fibra externa, ya sea en la parte superior o inferior de la viga. Observe que estas dos distancias serán las mismas tan sólo para las

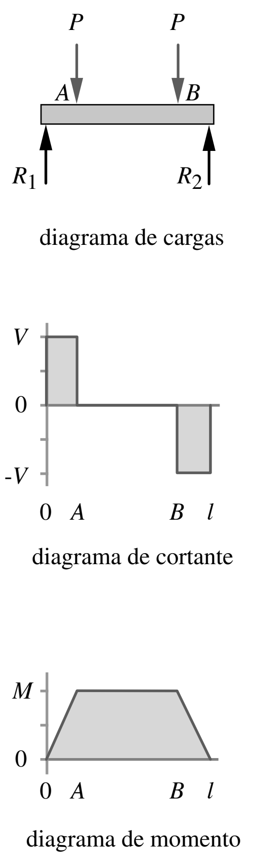


FIGURA 2-14

Flexión pura en una viga

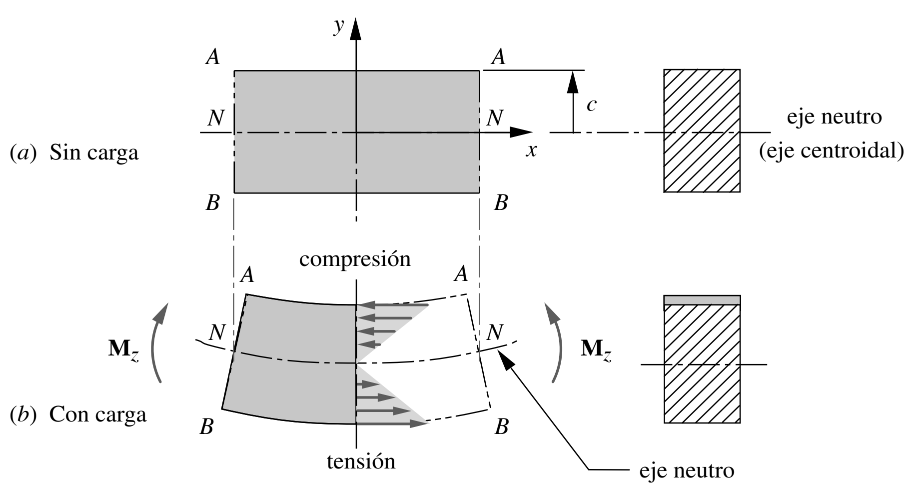


FIGURA 2-15

Segmento de una viga recta con flexión pura

secciones que son simétricas en relación con el plano neutro. El valor de c se suele tomar como positivo tanto para las superficies superior como para la inferior, y se coloca el signo adecuado para el esfuerzo con base en una revisión de la carga de la viga, para determinar qué superficie está en compresión (−) y cuál en tensión (+).

Con frecuencia, se usa una forma alterna de la ecuación 2.11*b*:

$$\sigma_{máx} = \frac{M}{Z} \tag{2.11c}$$

donde Z es el *módulo de sección* de la viga:

$$Z = \frac{I}{c} \tag{2.11d}$$

Aun cuando estas ecuaciones se desarrollaron para el caso de flexión pura, son aplicables para los casos donde la deformación cortante es insignificante y donde además del momento se aplican otras cargas a la viga. En tales situaciones, los efectos de las cargas combinadas deben tomarse en cuenta adecuadamente. Esto se verá en secciones posteriores. En el apéndice E se incluyen las fórmulas de las propiedades geométricas (A, I, Z) de secciones transversales de vigas comunes y también se proporcionan como archivos de computadora en el disco.

VIGAS CURVAS Muchas piezas de máquinas como ganchos de grúa, abrazaderas C, bastidores de troqueladores, entre otros, se cargan como vigas, aunque no sean rectas; tienen radios de curvatura. Las primeras seis suposiciones listadas antes para las vigas rectas también son aplicables. Si una viga tiene una curvatura significativa, entonces el eje neutro ya no coincidirá con el eje centroidal y las ecuaciones 2.11 no se aplican directamente. El eje neutro se desplaza hacia el centro de la curvatura en una distancia e, como se indica en la figura 2-16.

$$e = r_c - \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \tag{2.12a}$$

donde r_c es el radio de curvatura del eje centroidal de la viga curva, A es el área de la sección transversal y r es el radio del centro de curvatura de la viga al área diferencial dA. La evaluación numérica de la integral se puede hacer para perfiles complejos.*

* En la referencia [4] se encuentran expresiones de esta integral para diversas formas transversales comunes. Por ejemplo, para una sección transversal rectangular, $e = r_c - (r_o - r_i)/\mathrm{LN}(r_o/r_i)$

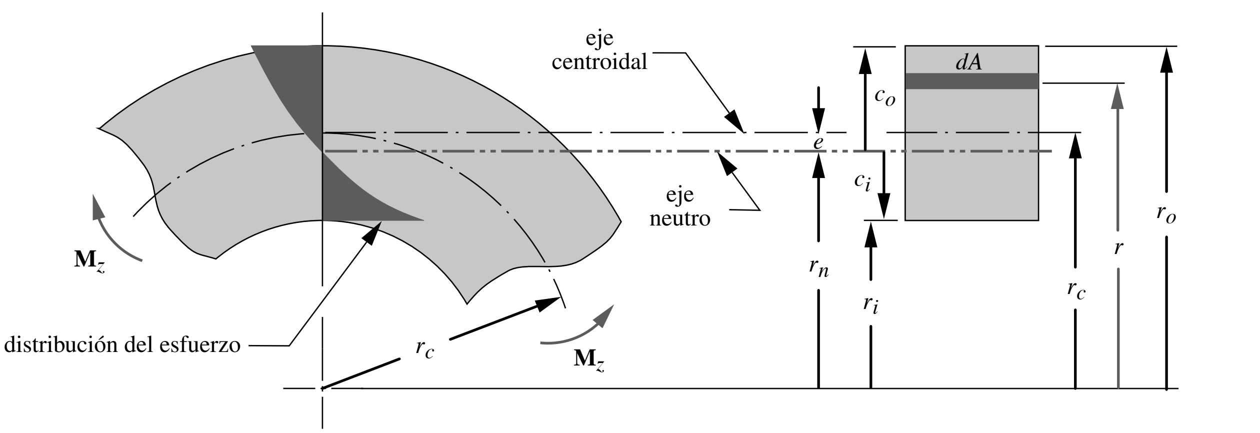
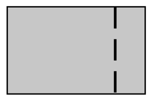
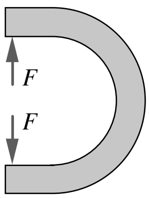


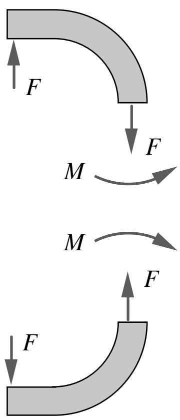
FIGURA 2-16

Segmento de una viga curva con flexión pura





(*a*) Viga curva con fuerza de carga



(*b*) Diagramas de cuerpo libre

FIGURA 2-17

Viga curva con fuerza de carga

La distribución del esfuerzo a través de la sección ya no es lineal sino que ahora es hiperbólica, y es mayor en la superficie interior de la sección transversal rectangular mostrada en la figura 2-16. La convención es definir un momento positivo como aquel que tiende a enderezar la viga. Esto crea tensión sobre la superficie interior, y compresión en la exterior, con un momento aplicado positivo y viceversa. Para cargas de flexión pura, las expresiones para los esfuerzos máximos en las superficies interna y externa de la superficie de una viga curva se convierten ahora en:

$$\sigma_i = +\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right) \tag{2.12b}$$

$$\sigma_o = -\frac{M}{eA}\left(\frac{c_o}{r_o}\right) \tag{2.12c}$$

donde el subíndice *i* representa la superficie interior y el subíndice *o* la exterior, *M* es el momento aplicado en la sección en cuestión, *A* es el área de la sección transversal, en tanto que r_i y r_o son los radios de curvatura de las superficies interior y exterior. Estas expresiones contienen la razón c/r. Si el radio de curvatura *r* es grande comparado con *c*, entonces la viga parece más "recta" que "curva". Cuando c/r se vuelve menor que 1:10 aproximadamente, los esfuerzos serán tan sólo alrededor de 10% mayores que los de una viga recta de las mismas dimensiones y carga. (Observe que ésta no es una relación lineal, en la medida en que *e* es también una función de *c* y *r*).

Resulta más común tener cargas aplicadas en una viga curva, como se ilustra en la figura 2-17*a*. Un ejemplo es una abrazadera o un gancho. Los diagramas de cuerpo libre de la figura 2-17*b* muestran que ahora existen una fuerza axial y un momento en la sección de corte. Las ecuaciones del esfuerzo en el interior y el exterior de la viga se convierten en

$$\sigma_i = +\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right) + \frac{F}{A} \tag{2.12d}$$

$$\sigma_o = -\frac{M}{eA}\left(\frac{c_o}{r_o}\right) + \frac{F}{A} \tag{2.12e}$$

Los segundos términos de las ecuaciones 2.12*d* y 2.12*e* representan el esfuerzo de tensión axial directo sobre la sección media de la viga. El archivo CURVBEAM calcula las ecuaciones 2.12 para cinco perfiles comunes de secciones transversales de viga curva: redondo, elíptico, trapezoidal, rectangular y en forma de T. Este programa utiliza integración numérica para evaluar la ecuación 2.12*a*, así como para encontrar el área y el centroide de la sección transversal.

Cortante debido a cargas transversales

La situación más común en una viga cargada es una combinación de fuerzas cortantes y momentos flexionantes aplicados a una sección específica. La figura 2-18 muestra una carga puntual en una viga simplemente apoyada, así como sus diagramas de fuerza cortante y de momento. Ahora se necesita estudiar cómo afecta la carga cortante el estado de esfuerzos dentro de las secciones transversales de la viga.

La figura 2-19*a* ilustra un segmento tomado de la viga alrededor del punto *A* de la figura 2-18. Se muestra un elemento designado como *P*, recortado de la viga en el punto *A*. Este elemento tiene un ancho *dx* y se corta desde la fibra exterior en *c* hasta una profundidad y_1 a partir del eje neutro. Observe que la magnitud del momento $M(x_1)$ sobre el lado izquierdo de *P* (cara b_1-c_1) es menor que el momento $M(x_2)$ sobre el lado

derecho (cara b_2-c_2) y su diferencia es el momento diferencial dM. La figura 2-18 indica que en el punto A, el momento $M(x)$ se incrementa como una función de la longitud x de la viga, debido a la presencia en ese punto de la fuerza cortante V diferente de cero. Los esfuerzos normales sobre las caras verticales de P se obtienen con las ecuaciones 2.11a. Puesto que el esfuerzo normal debido a la flexión es proporcional a $M(x)$, el esfuerzo σ sobre la cara del lado izquierdo de P es menor que el de la cara del lado derecho, como se muestra en la figura 2-19b. Para efectos de equilibrio, este desequilibrio de esfuerzos debe contrarrestarse mediante alguna otra componente del esfuerzo, la cual se ilustra como el **esfuerzo cortante** τ en la figura 2-19b.

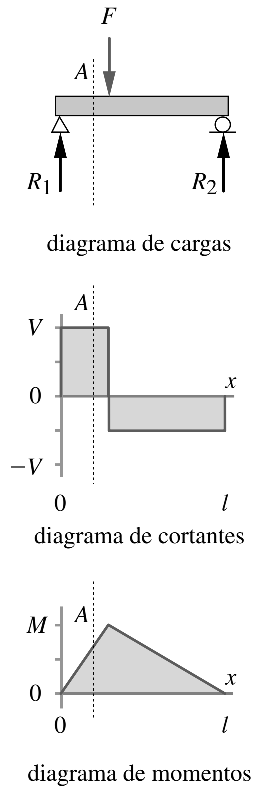


FIGURA 2-18

Fuerza cortante y momento flexionante en una viga

La fuerza que actúa sobre la cara del lado izquierdo de P, a cualquier distancia y desde el eje neutro, se obtiene multiplicando el esfuerzo por el área diferencial dA en ese punto.

$$\sigma dA = \frac{My}{I} dA \tag{2.13a}$$

La fuerza total que actúa sobre la cara del lado izquierdo se obtiene integrando

$$F_{1x} = \int_{y_1}^{c} \frac{My}{I} dA \tag{2.13b}$$

y, de forma similar, para la cara del lado derecho:

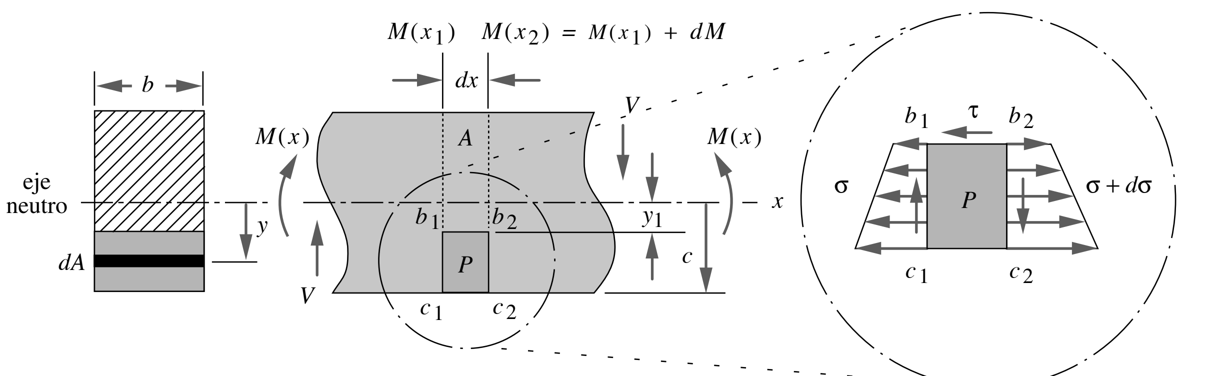
$$F_{2x} = \int_{y_1}^{c} \frac{(M + dM)y}{I} dA \tag{2.13c}$$

La fuerza cortante sobre la cara superior a una distancia y_1 del eje neutro se obtiene con

$$F_{xy} = \tau \, b \, dx \tag{2.13d}$$

donde el producto bdx es el área de la cara superior del elemento P.

Para efectos de equilibrio, las fuerzas que actúan sobre P deben sumar cero,



(a) Segmento de la viga con el elemento P cortado

(b) Vista ampliada del elemento separado P

FIGURA 2-19

Segmento de una viga en flexión y cortante transversal. Se muestra separado de la viga en el punto A de la figura 2-18

2

$$F_{xy} = F_{2x} - F_{1x}$$
$$\tau b\, dx = \int_{y_1}^{c} \frac{(M + dM)y}{I} dA - \int_{y_1}^{c} \frac{My}{I} dA \qquad (2.13e)$$
$$\tau = \frac{dM}{dx} \frac{1}{Ib} \int_{y_1}^{c} y\, dA$$

lo cual proporciona una expresión para el esfuerzo de corte τ como una función del cambio en el momento con respecto a x, la distancia y desde el eje neutro, el segundo momento del área I de la sección transversal y el ancho b de la sección transversal en y. La ecuación 1.16*a* (p. 41) indica que la pendiente de la función del momento dM/dx es igual a la magnitud de la función de cortante V en cualquier punto, de manera que:

$$\tau_{xy} = \frac{V}{Ib} \int_{y_1}^{c} y dA \qquad (2.13f)$$

La integral de la ecuación 2.13*f* representa el primer momento con respecto al eje neutro de la porción del área de la sección transversal que existe por fuera del valor de y_1 para el cual se está calculando el esfuerzo cortante. Es una convención asignar la variable Q al valor de esta integral.

$$Q = \int_{y_1}^{c} y dA$$

y, entonces, (2.13*g*)

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{Ib}$$

Evidentemente, la integral Q variará con la forma de la sección transversal de la viga y, también, con la distancia y_1 al eje neutro. Por lo tanto, para cualquier sección transversal particular, se debería esperar que el esfuerzo cortante varíe a lo largo de la viga. Siempre será cero en las fibras externas porque Q desaparece cuando y_1 se hace igual a c. Esto tiene sentido, ya que no hay material para que exista cortante en la fibra exterior. El esfuerzo cortante debido a cargas transversales será máximo en el eje neutro. Estos resultados son muy fortuitos, ya que el esfuerzo normal debido a la flexión es máximo en la fibra exterior y cero en el eje neutro. De modo que su combinación sobre cualquier elemento específico dentro de la sección transversal rara vez crea un estado de esfuerzo peor que el que existe en las fibras exteriores.

El esfuerzo cortante debido a la carga transversal será pequeño comparado con el esfuerzo flexionante Mc / I si la viga es larga comparada con su profundidad. La explicación de esto la brindan la ecuación 1.16 y los diagramas de cortante y de momento, cuyo ejemplo se muestra en la figura 2-18. Puesto que la magnitud de la función de momento es igual al área bajo la función de cortante, para cualquier valor dado de V en la figura 2-18, el área debajo de la función de cortante y, por lo tanto, el momento máximo se incrementará con la longitud de la viga. Entonces, mientras la magnitud del esfuerzo cortante máximo permanece constante, el esfuerzo flexionante se incrementa con la longitud de la viga, disminuyendo finalmente el esfuerzo cortante. La regla general comúnmente usada indica que el esfuerzo cortante debido a la carga transversal en una viga será lo suficientemente pequeño como para ignorarlo, si la razón longitud-profundidad de la viga es de 10 o más. En vigas cortas que tienen una razón por debajo de ese valor, deberían investigarse los esfuerzos cortantes transversales, así como esfuerzos flexionantes.

VIGAS RECTANGULARES El cálculo de los esfuerzos cortantes debidos a cargas transversales usualmente se convierte en un ejercicio de evaluación de la integral de Q para la sección transversal particular de la viga. Una vez que se hace esto, se calcula fácilmente el valor máximo de τ. Para una viga con una sección transversal rectangular de ancho b y profundidad h, $dA = b\,dy$ y $c = h / 2$.

$$Q = \int_{y_1}^{c} y\,dA = b\int_{y_1}^{c} y\,dy = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)$$

y (2.14*a*)

$$\tau = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)$$

El esfuerzo cortante varía parabólicamente a lo largo de una viga rectangular, como se muestra en la figura 2-20*a*. Cuando $y_1 = h / 2$, $\tau = 0$ como se esperaba. Cuando $y_1 = 0$, $\tau_{máx} = Vh^2 / 8I$. Para un rectángulo, $I = bh^3 / 12$, lo cual da

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \tag{2.14b}$$

Esto es válido **sólo para vigas de sección transversal rectangular** y se muestra en la figura 2-20*a*.

VIGAS REDONDAS Las ecuaciones 2.13*g* se aplican para cualquier sección transversal. La integral Q para una sección transversal circular es

$$Q = \int_{y_1}^{c} y\,dA = 2\int_{y_1}^{c} y\sqrt{r^2 - y^2}\,dy = \frac{2}{3}\left(r^2 - y_1^2\right)^{\frac{3}{2}} \tag{2.15a}$$

y la distribución del esfuerzo cortante es

$$\tau = \frac{VQ}{bI} = \frac{V\left[\dfrac{2}{3}\left(r^2 - y_1^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]}{2\sqrt{r^2 - y^2}\left(\dfrac{\pi r^4}{4}\right)} = \frac{4}{3}\frac{V}{\pi r^2}\left(1 - \frac{y_1^2}{r^2}\right) \tag{2.15b}$$

Ésta también es una distribución parabólica, aunque tiene un valor pico menor que la sección rectangular, como se indica en la figura 2-20*b*. En el eje neutro, el esfuerzo cortante máximo en una **viga sólida de sección transversal circular** es:

$$\tau_{máx} = \frac{4}{3}\frac{V}{A} \tag{2.15c}$$

Si la **viga redonda es hueca y de pared delgada** (espesor de la pared < 1/10 aproximadamente del radio exterior), el esfuerzo cortante máximo en el eje neutro será aproximadamente de

$$\tau_{máx} \cong \frac{2V}{A} \tag{2.15d}$$

como se muestra en la figura 2-20*c*.

VIGAS-I Se puede demostrar matemáticamente que la configuración de la viga-I de la figura 2-21*a* es la forma óptima de sección transversal para una viga en términos de la razón resistencia-peso. Esto explica por qué las vigas-I se usan comúnmente como vigas

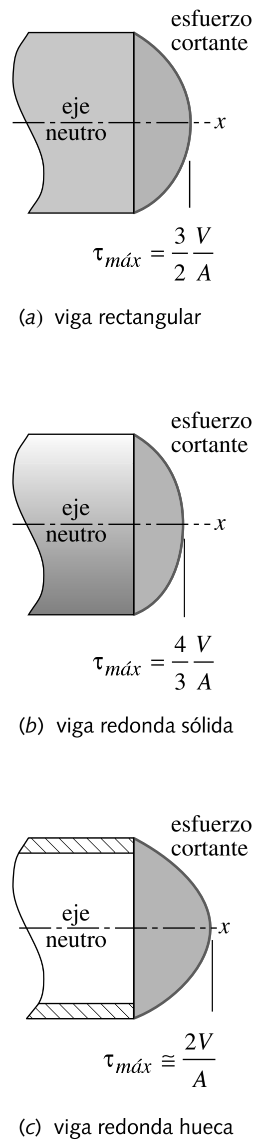
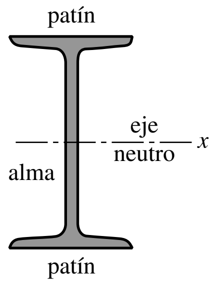
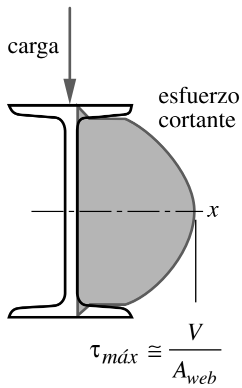


FIGURA 2-20

Distribución de esfuerzo cortante y máximo en vigas redonda, redonda hueca y rectangular



(*a*) perfil de viga-I



(*b*) Distribución del esfuerzo

FIGURA 2-21

Distribución del esfuerzo cortante y máximo en una viga-I

para el piso y para el plafón (techo) en estructuras grandes. Su perfil coloca la mayoría del material en las fibras externas donde el esfuerzo flexionante es máximo. Esto da como resultado un gran momento de inercia del área para resistir el momento flexionante. Como el esfuerzo cortante es máximo en el eje neutro, el alma angosta que une los patines (llamada alma cortante) sirve para resistir las fuerzas cortantes en la viga. En una viga larga, los esfuerzos cortantes debidos a la flexión son pequeños comparados con los esfuerzos flexionantes, lo cual permite la esbeltez del alma, reduciendo así el peso. Una expresión que aproxima el esfuerzo cortante máximo en una viga-I usa sólo el área del alma e ignora los patines:

$$\tau_{máx} \cong \frac{V}{A_{web}} \tag{2.16}$$

La figura 2-21*b* muestra la distribución del esfuerzo cortante a través de la profundidad de la sección de la viga-I. Observe las discontinuidades en las interfases alma-patín. El esfuerzo cortante en el patín es pequeño debido a su área grande. El esfuerzo cortante salta hacia un valor mayor en las entradas del alma, luego se eleva parabólicamente hasta un máximo en el eje neutro.

2.10 DEFLEXIÓN EN VIGAS

Además de los esfuerzos en una viga, el diseñador también debe preocuparse por sus deflexiones. Cualquier carga de flexión aplicada provocará una deflexión en la viga, ya que se trata de un material elástico. Si la deflexión no causa deformaciones más allá del punto de fluencia del material, la viga regresará a su estado sin flexión cuando se retire la carga. Si la deformación excede ese punto de fluencia del material, la viga cederá y "adquirirá dureza" si es dúctil, o quizá se fracture si es frágil. Si a la viga se le da un tamaño para evitar los esfuerzos que exceden el punto de fluencia del material (u otros criterios de resistencia adecuados), entonces no se debe presentar un endurecimiento o una ruptura permanente. Sin embargo, las deflexiones elásticas de esfuerzos muy por debajo de los niveles de falla del material pueden generar serios problemas en una máquina.

Las deflexiones pueden causar interferencias entre las piezas móviles o desalineamientos que destruyen la exactitud requerida del dispositivo. En general, diseñar para minimizar las deflexiones ocasionará secciones transversales más grandes de la viga, que si se diseña sólo contra las fallas por esfuerzos. Incluso en estructuras estáticas, como edificios, la deflexión puede ser el criterio decisivo para decidir el tamaño de las vigas en los pisos o los plafones. Usted tal vez haya caminado sobre un piso residencial que rebote de forma notoria con cada paso. El piso es indudablemente seguro contra el colapso debido a los esfuerzos excesivos, pero no fue diseñado lo suficientemente rígido para evitar deflexiones indeseables bajo cargas de trabajo normales.

La deflexión por flexión de una viga se calcula por integración doble de la ecuación de la viga,

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{2.17}$$

la cual relaciona el momento aplicado M, el módulo de elasticidad E del material y el momento de inercia del área de la sección transversal I con la segunda derivada de la deflexión de la viga y. La variable independiente x es la posición a lo largo de la longitud de la viga. La ecuación 2.17 es válida únicamente para deflexiones pequeñas, lo cual no es una limitación en la mayoría de los casos de diseño de vigas para aplicaciones de maquinaria o estructurales. Algunas veces las vigas se utilizan como resortes y, por consiguiente, sus deflexiones pueden exceder las restricciones de esta ecuación. El diseño de resortes se estudiará en un capítulo posterior. La ecuación 2.17 tampoco incluye los

efectos de la deflexión provocada por cargas cortantes transversales. La componente cortante transversal de la deflexión en vigas largas es pequeña comparada con aquella que la flexión provoca, y por lo general se ignora a menos que la razón longitud/profundidad de la viga sea < 10 aproximadamente.

La ecuación 2.17 puede diferenciarse dos veces e integrarse dos veces para crear el conjunto de las cinco ecuaciones 2.18 (incluyendo la ecuación 2.17 repetida como ecuación 2.18*c*), las cuales definen el comportamiento de la viga. En la sección 1.9 se expuso la relación entre la función de carga $q(x)$, la función cortante $V(x)$ y la función momento $M(x)$. V es la primera derivada y q la segunda derivada de la ecuación 2.17 con respecto a x. La integración de la ecuación 2.17 una vez da la pendiente θ de la viga y, al integrar una segunda vez, se obtiene la deflexión y de la viga. Estas relaciones forman el siguiente conjunto de ecuaciones para vigas:

$$\frac{q}{EI} = \frac{d^4 y}{dx^4} \tag{2.18a}$$

$$\frac{V}{EI} = \frac{d^3 y}{dx^3} \tag{2.18b}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{2.18c}$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} \tag{2.18d}$$

$$y = f(x) \tag{2.18e}$$

En estas ecuaciones, el único parámetro del material es el módulo de Young E, el cual define su rigidez. Puesto que la mayoría de las aleaciones de un metal base determinado tienen esencialmente el mismo módulo de elasticidad, las ecuaciones 2.18 muestran por qué no existe ventaja en el uso de una aleación más costosa y más fuerte cuando se diseña para minimizar la deflexión. Las aleaciones de alta resistencia, por lo general, sólo proporcionan resistencias máximas a la fluencia o a la ruptura, mientras que el diseño en contra de un criterio de deflexión dará como resultado esfuerzos relativamente bajos. Éste es el motivo por el cual las vigas-I y otros perfiles de acero estructurado se elaboran fundamentalmente con aceros de baja resistencia y al bajo carbono.

La determinación de la deflexión de una viga es un ejercicio de integración. Por lo general, se conoce la función de carga q y puede integrarse por cualquiera de varios métodos: analítico, gráfico o numérico. Las constantes de integración se evalúan a partir de las condiciones de frontera de la configuración específica de la viga. Los cambios de sección en el módulo a través de la viga requieren de la creación de la función M/EI a partir del diagrama de momento antes de la integración de la pendiente de la viga. Si el momento de inercia de área I de la viga y el módulo E del material son uniformes en su longitud, la función de momento se puede dividir justo entre la constante EI. Si la sección transversal de la viga cambia en alguna parte de su longitud, entonces la integración se debe hacer por partes para tomar en cuenta los cambios de I. Las formas integrales de las ecuaciones de la viga son

$$V = \int q\,dx + C_1 \qquad 0 < x < l \tag{2.19a}$$

$$M = \int V\,dx + C_1 x + C_2 \qquad 0 < x < l \tag{2.19b}$$

$$\theta = \int \frac{M}{EI} dx + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \qquad 0 < x < l \tag{2.19c}$$

$$y = \int \theta \, dx + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \qquad 0 < x < l \qquad (2.19d)$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan a partir de las condiciones de frontera sobre las funciones cortante y momento. Por ejemplo, el momento será cero para el extremo de una viga simplemente apoyada y también será cero (o conocido si se aplica) en el extremo libre sin soporte de una viga. La fuerza cortante será cero en un extremo libre sin carga. Observe que si se incluyen las fuerzas de reacción en la función de carga $q(x)$, entonces $C_1 = C_2 = 0$.

Las constantes C_3 y C_4 se obtienen a partir de las condiciones de frontera sobre la pendiente y las funciones de deflexión. Por ejemplo, la deflexión será cero en cualquier soporte rígido y la pendiente de la viga será cero en una junta de momentos. Se sustituyen dos combinaciones conocidas de valores de x y y, o bien, x y θ junto con C_1 y C_2 en las ecuaciones 2.19*c* y 2.19*d*, y se despejan C_3 y C_4. Se han desarrollado muchas técnicas de solución para tales ecuaciones como la integración gráfica, el método de área-momento, métodos de energía y funciones de singularidad. En seguida se explorarán las dos últimas de éstas.

Deflexión por funciones de singularidad

En la sección 1.9 se estudió el uso de las funciones de singularidad para representar cargas sobre una viga. Estas funciones vuelven relativamente sencilla la ejecución analítica de la integración y se programan fácilmente para soluciones con computadora. En la sección 1.9 también se aplicó este enfoque para obtener las funciones cortante y momento, a partir de la función de carga. Ahora se ampliará esa técnica para desarrollar las funciones de pendiente y deflexión de las vigas. El mejor modo para explorar este método es por medio de ejemplos. Por consiguiente, se calcularán las funciones cortante, momento, pendiente y deflexión de la viga para los casos de la figura 2-22.

EJEMPLO 2-4

Obtención de la pendiente y deflexión de una viga simplemente apoyada usando funciones de singularidad

Problema **Determine y grafique las funciones de pendiente y deflexión de la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 2-22*a*.**

Se proporciona **La carga es uniforme sobre parte de la longitud de la viga. Sea longitud de la viga l = 10 in, y la carga se localiza en a = 4 in. Para esta viga, I = 0.163 in^4 y E = 30 Mpsi. La fuerza distribuida es w = 100 lb/in.**

Suposiciones **El peso de la viga es despreciable comparado con la carga aplicada y por ende se puede ignorar.**

Solución **Véase las figuras 2-22 y 2-23.**

1. Resuelva para las fuerzas de reacción usando las ecuaciones 1.3 (p. 8). Sume los momentos con respecto al extremo derecho y sume las fuerzas en la dirección y:

$$\sum M_z = 0 = R_1 l - \frac{w(l-a)^2}{2}$$
$$R_1 = \frac{w(l-a)^2}{2l} = \frac{100(10-4)^2}{2(10)} = 180 \qquad (a)$$

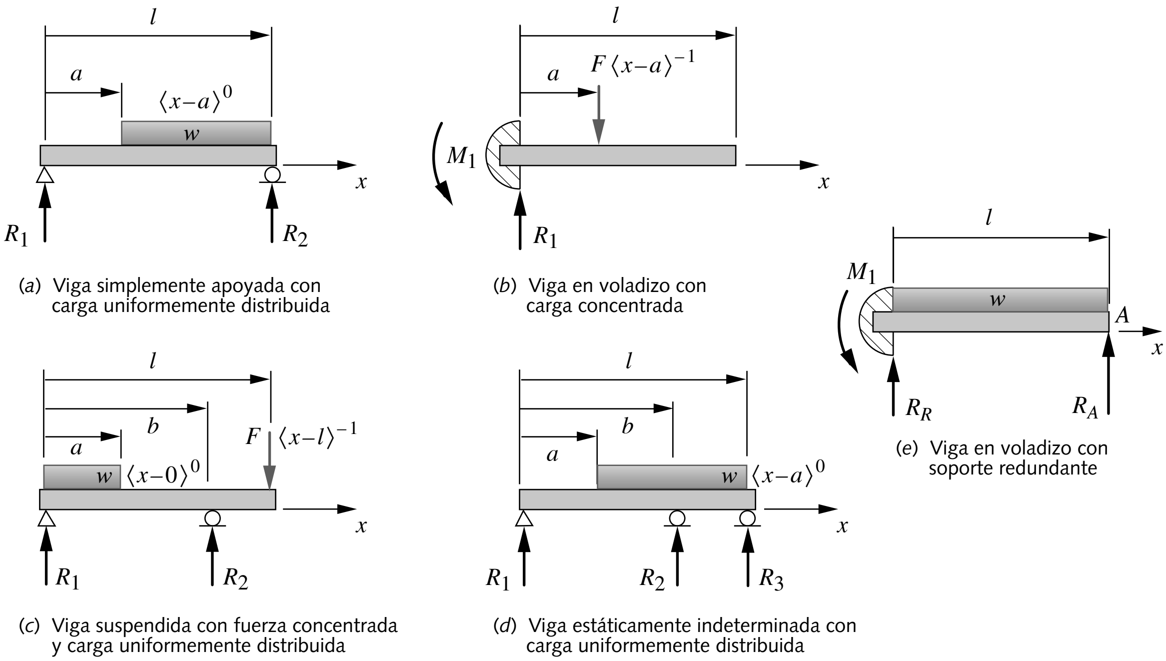


FIGURA 2-22

Varias vigas y cargas en vigas

$$\sum F_y = 0 = R_1 - w(l-a) + R_2$$
$$R_2 = w(l-a) - R_1 = 100(10-4) - 180 = 420 \tag{b}$$

2. Escriba las ecuaciones para la función de carga en términos de las ecuaciones 1.17 (pp. 43-44) e integre la función resultante cuatro veces usando las ecuaciones 1.18 (pp. 44-45) para obtener las funciones cortante, momento, pendiente y deflexión. Para la viga simplemente apoyada con carga distribuida sobre una parte de su longitud:

$$q = R_1\langle x-0\rangle^{-1} - w\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-l\rangle^{-1} \tag{c}$$

$$V = \int q\,dx = R_1\langle x-0\rangle^{0} - w\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-l\rangle^{0} + C_1 \tag{d}$$

$$M = \int V\,dx = R_1\langle x-0\rangle^{1} - \frac{w}{2}\langle x-a\rangle^{2} + R_2\langle x-l\rangle^{1} + C_1x + C_2 \tag{e}$$

$$\theta = \int \frac{M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\begin{pmatrix} \frac{R_1}{2}\langle x-0\rangle^{2} - \frac{w}{6}\langle x-a\rangle^{3} + \frac{R_2}{2}\langle x-l\rangle^{2} \\ + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \end{pmatrix} \tag{f}$$

$$y = \int \theta\,dx = \frac{1}{EI}\begin{pmatrix} \frac{R_1}{6}\langle x-0\rangle^{3} - \frac{w}{24}\langle x-a\rangle^{4} + \frac{R_2}{6}\langle x-l\rangle^{3} \\ + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4 \end{pmatrix} \tag{g}$$

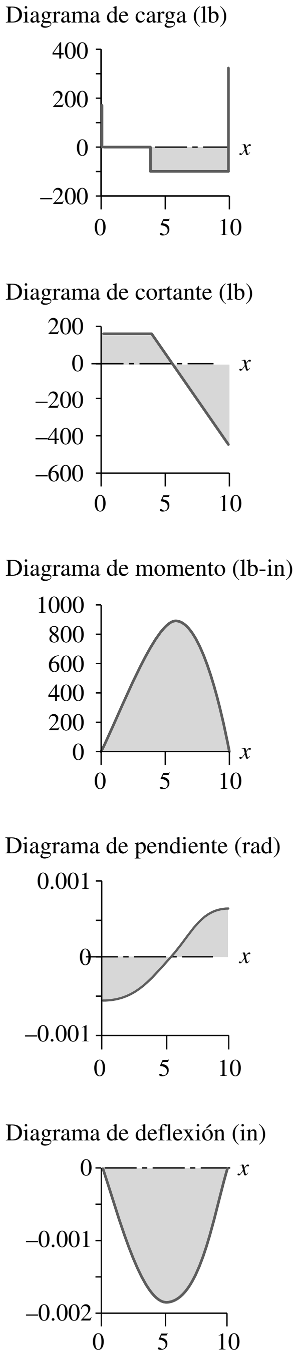


FIGURA 2-23

Gráficas del ejemplo 2-4

3. Se deben obtener cuatro constantes de integración. Las constantes C_1 y C_2 son iguales a cero porque las fuerzas de reacción y los momentos que actúan sobre la viga están incluidos en la función de carga. La deflexión y es cero en los soportes. Las constantes C_3 y C_4 se obtienen sustituyendo las restricciones $x = 0$, $y = 0$ y $x = l$, $y = 0$ en la ecuación (g).

$$y(0) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle 0-0\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle 0-a\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle 0-l\rangle^3 + C_3(0) + C_4\right)$$

$$C_4 = -\frac{R_1}{6}\langle 0-0\rangle^3 + \frac{w}{24}\langle 0-4\rangle^4 - \frac{R_2}{6}\langle 0-10\rangle^3 - C_3(0)$$

$$C_4 = -\frac{R_1}{6}(0) + \frac{w}{24}(0) - \frac{R_2}{6}(0) - C_3(0) = 0 \qquad (h)$$

$$y(l) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle l-0\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle l-a\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle l-l\rangle^3 + C_3 l + C_4\right)$$

$$C_3 = \frac{w}{24l}\left[(l-a)^4 - 2l^2(l-a)^2\right]$$

$$C_3 = \frac{100}{24(10)}\left[(10-4)^4 - 2(10)^2(10-4)^2\right] = -2\,460 \qquad (i)$$

4. La sustitución de los valores o las expresiones de C_3, C_4, R_1 y R_2 obtenidas de las ecuaciones (a), (b), (h) e (i), en la ecuación (g) da la ecuación de la deflexión resultante para la viga del inciso (a) de la figura 2-22 (p. 95):

$$y = \frac{w}{24lEI}\left\{\left[2(l-a)^2\right]x^3 + \left[(l-a)^4 - 2l^2(l-a)^2\right]x - l\langle x-a\rangle^4\right\} \qquad (j)$$

5. La deflexión máxima ocurrirá en el punto x donde la pendiente de la curva de deflexión es cero. Iguale a cero la ecuación (f) de viga-pendiente y despeje x:*

$$\theta = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{2}x^2 - \frac{w}{6}(x-a)^3 + C_3\right) = 0$$

$$0 = \frac{1}{3E7(0.163)}\left(90x^2 - 16.67(x-4)^3 - 2\,460\right)$$

$$x = 5.264 \qquad (k)$$

Observe que se necesita aplicar el método de Viete o un algoritmo numérico de búsqueda de raíces para obtener las raíces de esta ecuación cúbica.

6. Use este valor de x en la ecuación (g) para obtener la magnitud de la deflexión más grande, ya sea positiva o negativa.

$$y_{máx} = \frac{100}{24(10)(4.883E6)}\left\{\begin{array}{c}\left[2(10-4)^2\right](5.264)^3 + \left[(10-4)^4 - 2(10)^2(10-4)^2\right](5.264) \\ -10(5.264-4)^4\end{array}\right\}$$

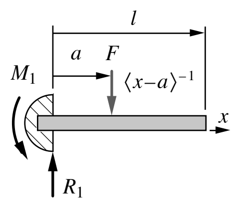
$$y_{máx} = -0.00176 \text{ in} \qquad (l)$$

7. Las gráficas de las funciones de carga, cortante, momento, pendiente y deflexión del inciso (a) se muestran en la figura 2-23. Los archivos EX04-04 se pueden abrir en el programa de su preferencia para examinar el modelo y ver las gráficas de las funciones de la figura 2-23 a escala ampliada.

* Debido a que el valor de x en la deflexión máxima de una viga simplemente apoyada debe ser menor que la longitud entre los soportes l, el tercer término de la ecuación (f) es cero.

EJEMPLO 2-5

Obtención de la pendiente y deflexión de una viga en voladizo usando funciones de singularidad



Viga en voladizo con carga concentrada

FIGURA 2-22b
Repetida

Problema **Determine y grafique las funciones de pendiente y deflexión de la viga mostrada en la figura 2-22*b* (*repetida aquí*).**

Se proporciona **La carga es la fuerza concentrada que se muestra. La longitud de la viga es l = 10 in, y la ubicación de la carga es a = 4 in. Para esta viga, I = 0.5 in^4 y E = 30 Mpsi. La magnitud de la fuerza aplicada es F = 400 lb.**

Suposiciones **Ignore el peso de la viga ya que es despreciable comparado con la carga aplicada.**

Solución **Véase las figuras 2-22*b* y 2-24.**

1. Escriba las ecuaciones para la función de carga en términos de las ecuaciones 1.17 (pp. 43-44) e integre dos veces la función resultante mediante las ecuaciones 1.18 (pp. 44-45), para obtener las funciones cortante y momento. Note la aplicación de la función doblete unitaria para representar el momento en la pared. Para la viga de la figura 2-22*b*,

$$q = -M_1\langle x-0\rangle^{-2} + R_1\langle x-0\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1} \tag{a}$$

$$V = \int q\,dx = -M_1\langle x-0\rangle^{-1} + R_1\langle x-0\rangle^{0} - F\langle x-a\rangle^{0} + C_1 \tag{b}$$

$$M = \int V\,dx = -M_1\langle x-0\rangle^{0} + R_1\langle x-0\rangle^{1} - F\langle x-a\rangle^{1} + C_1x + C_2 \tag{c}$$

$$\theta = \int \frac{M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left(\begin{array}{c} -M_1\langle x-0\rangle^{1} + \dfrac{R_1}{2}\langle x-0\rangle^{2} - \dfrac{F}{2}\langle x-a\rangle^{2} \\ +\dfrac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \end{array}\right) \tag{d}$$

$$y = \int \theta\,dx = \frac{1}{EI}\left(\begin{array}{c} -\dfrac{M_1}{2}\langle x-0\rangle^{2} + \dfrac{R_1}{6}\langle x-0\rangle^{3} - \dfrac{F}{6}\langle x-a\rangle^{3} \\ +\dfrac{C_1x^3}{6} + \dfrac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4 \end{array}\right) \tag{e}$$

El momento de reacción M_1 en la pared se encuentra en la dirección z, mientras que las fuerzas R_1 y F están en la dirección y en la ecuación (b). Todos los momentos en la ecuación (c) están en la dirección z.

2. Puesto que las reacciones están incluidas en la función de carga, los diagramas cortante y momento se acercan a cero en cada extremo de la viga, haciendo $C_1 = C_2 = 0$.

3. La fuerza de reacción R_1 y el momento de reacción M_1 se calculan con las ecuaciones (b) y (c), respectivamente, pero sustituyendo las condiciones de frontera $x = l+$, $V = 0$, $M = 0$. Note que se puede sustituir l por $l+$ ya que su diferencia es notablemente pequeña.

$$\begin{aligned} V\left(l^+\right) = 0 &= R_1\langle l-0\rangle^{0} - F\langle l-a\rangle^{0} \\ 0 &= R_1 - F \\ R_1 &= F = 400 \text{ lb} \end{aligned} \tag{f}$$

$$M\left(l^{+}\right) = 0 = -M_1\langle l-0\rangle^0 + R_1\langle l-0\rangle^1 - F\langle l-a\rangle^1$$

$$0 = -M_1 + lR_1(l) - F(l-a) \tag{g}$$

$$M_1 = R_1(l) - F(l-a) = 400(10) - 400(10-4) = 1\,600 \text{ lb - in } \; cw$$

Puesto que w, l y a son datos conocidos, la ecuación (f) se puede resolver para R_1, y sustituir este resultado en la ecuación (g) para obtener M_1. Observe que la ecuación (f) es justo $\Sigma F_y = 0$ y la ecuación (g) es $\Sigma M_z = 0$. M_1 no aparece en la ecuación (f) porque está en una dirección vectorial diferente de la de las fuerzas y.

4. Al sustituir $x = 0$, $\theta = 0$ y $x = 0$, $y = 0$ en (d) y (e) y despejando C_3 y C_4:

$$\theta(0) = 0 = \frac{1}{EI}\left(-M_1\langle 0-0\rangle^1 + \frac{R_1}{2}\langle 0-0\rangle^2 - \frac{F}{2}\langle 0-a\rangle^2 + C_3\right)$$

$$C_3 = M_1\langle 0-0\rangle^1 - \frac{R_1}{2}\langle 0-0\rangle^2 + \frac{F}{2}\langle 0-4\rangle^2 = 0 \tag{h}$$

$$y(0) = 0 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{M_1}{2}\langle 0-0\rangle^2 + \frac{R_1}{6}\langle 0-0\rangle^3 - \frac{F}{6}\langle 0-a\rangle^3 + C_3(0) + C_4\right)$$

$$C_4 = \frac{M_1}{2}\langle 0-0\rangle^2 - \frac{R_1}{6}\langle 0-0\rangle^3 + \frac{F}{6}\langle 0-4\rangle^3 = 0 \tag{i}$$

5. La sustitución de las expresiones de C_3, C_4, R_1 y M_1 obtenidas de las ecuaciones (f), (g), (h) e (i), en la ecuación (e) nos da la ecuación de la deflexión para la viga en voladizo de la figura 2-22b (p. 95):

$$y = \frac{F}{6EI}\left[x^3 - 3ax^2 - \langle x-a\rangle^3\right] \tag{j}$$

6. La deflexión máxima de una viga en voladizo se da en su extremo libre. Se sustituye $x = l$ en la ecuación (j) para obtener $y_{máx}$.

$$y_{máx} = \frac{F}{6EI}\left[l^3 - 3al^2 - (l-a)^3\right] = \frac{Fa^2}{6EI}(a-3l)$$

$$y_{máx} = \frac{400(4)^2}{6(3E7)(0.5)}\left[4 - 3(10)\right] = -0.00185 \text{ in} \tag{k}$$

7. Las gráficas de las funciones de carga, cortante, momento, pendiente y deflexión se muestran en la figura 2-24. Observe que la pendiente de la viga se vuelve crecientemente negativa, para la porción de la viga entre el soporte y la carga y, luego, se vuelve constante a la derecha de la carga. Aun cuando no es muy notorio en la pequeña escala de la figura, la deflexión de la viga se convierte en una recta a la derecha del punto de aplicación de la carga.

Los archivos EX04-05 se pueden abrir en el programa de su preferencia para examinar el modelo y ver a escala ampliada las gráficas de las funciones de la figura 2-24.

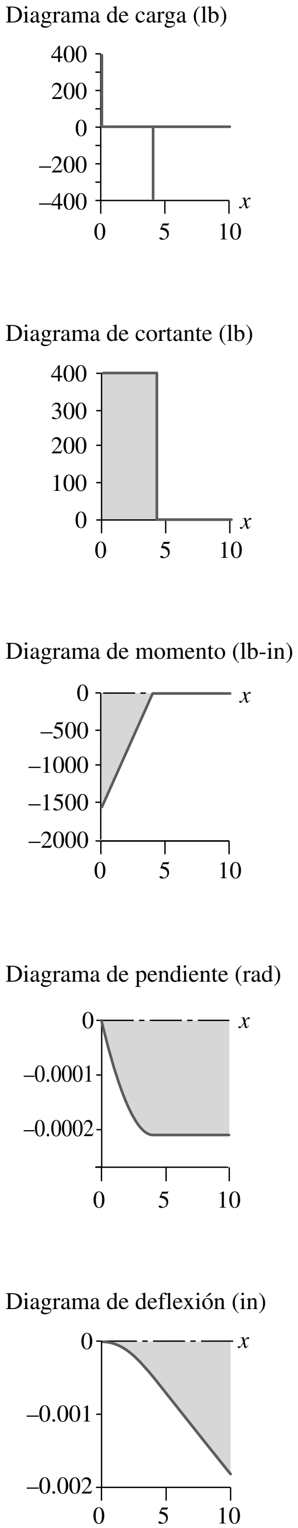
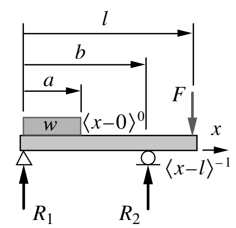


FIGURA 2-24
Gráficas del ejemplo 2-5

EJEMPLO 2-6

Determine la pendiente y deflexión de una viga indeterminada usando funciones de singularidad



Viga suspendida con fuerza concentrada y carga uniformemente distribuida

FIGURA 2-22c

Repetida

Problema **Determine y grafique las funciones de pendiente y deflexión de una viga indeterminada, con carga uniformemente distribuida sobre una parte de su longitud y una fuerza concentrada en su extremo como se indica en la figura 2-22*c* (p. 95).**

Se proporciona **Longitud de la viga l = 10 in y localizaciones de la carga en a = 4 in y b = 7 in. Para esta viga, I = 0.2 in^4 y E = 30 Mpsi. La magnitud de la fuerza concentrada es F = 200 lb y la fuerza distribuida es w = 100 lb/in.**

Suposiciones **El peso de la viga es despreciable comparado con las cargas aplicadas y puede ser ignorado.**

Solución **Véase las figuras 2-22*c* *(repetida aquí)*, 2-25 y 2-26.**

1. La carga distribuida no se encuentra sobre la totalidad de la viga. Todas las funciones de singularidad se aplican desde su punto inicial hasta el extremo de la viga. Entonces, para terminar, la función escalonada de la carga uniforme en algún punto cerca del extremo de la viga se aplica otra función escalonada, de igual amplitud y de signo opuesto, para cancelarla en todos los puntos más allá de la longitud a, como se indica en la figura 2-25. La suma de las dos funciones escalonadas de signo opuesto es entonces cero a la derecha de la distancia a.

$$q = R_1\langle x-0\rangle^{-1} - w\langle x-0\rangle^{0} + w\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-b\rangle^{-1} - F\langle x-l\rangle^{-1} \qquad (a)$$

$$V = \int q\,dx = R_1\langle x-0\rangle^{0} - w\langle x-0\rangle^{1} + w\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-b\rangle^{0} - F\langle x-l\rangle^{0} + C_1 \qquad (b)$$

$$M = \int V dx = \begin{pmatrix} R_1\langle x-0\rangle^{1} - \dfrac{w}{2}\langle x-0\rangle^{2} + \dfrac{w}{2}\langle x-a\rangle^{2} + R_2\langle x-b\rangle^{1} \\ -F\langle x-l\rangle^{1} + C_1 x + C_2 \end{pmatrix} \qquad (c)$$

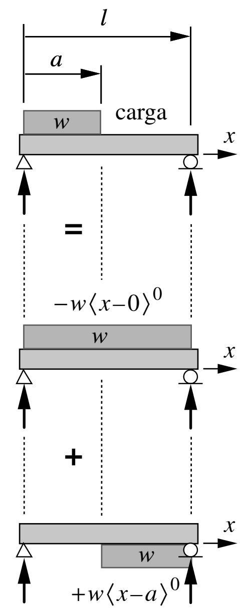
$$\theta = \int \frac{M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\begin{pmatrix} \dfrac{R_1}{2}\langle x-0\rangle^{2} - \dfrac{w}{6}\langle x-0\rangle^{3} + \dfrac{w}{6}\langle x-a\rangle^{3} + \dfrac{R_2}{2}\langle x-b\rangle^{2} \\ -\dfrac{F}{2}\langle x-l\rangle^{2} + \dfrac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \end{pmatrix} \qquad (d)$$

$$y = \int \theta\,dx = \frac{1}{EI}\begin{pmatrix} \dfrac{R_1}{6}\langle x-0\rangle^{3} - \dfrac{w}{24}\langle x-0\rangle^{4} + \dfrac{w}{24}\langle x-a\rangle^{4} + \dfrac{R_2}{6}\langle x-b\rangle^{3} \\ -\dfrac{F}{6}\langle x-l\rangle^{3} + \dfrac{C_1}{6}x^3 + \dfrac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4 \end{pmatrix} \qquad (e)$$

2. Puesto que las reacciones están incluidas en la función de carga, los diagramas de corte y momento tienden a cero en cada extremo de la viga, haciendo que $C_1 = C_2 = 0$.

3. Puesto que tanto el corte como el momento son cero en $x = l^+$, las reacciones R_1 y R_2 se calculan simultáneamente usando (*b*) y (*c*) con $x = l^+ = l$:

$$V(l) = 0 = R_1\langle l-0\rangle^{0} - w\langle l-0\rangle^{1} + w\langle l-a\rangle^{1} + R_2\langle l-b\rangle^{0} - F\langle l-l\rangle^{0}$$
$$0 = R_1 - wl + w(l-a) + R_2 - F \qquad (f)$$
$$R_2 = -R_1 + wl - w(l-a) + F = 400 \text{ lb}$$



$$\text{carga} = -\,w\langle x-0\rangle^0 + w\langle x-a\rangle^0$$

FIGURA 2-25

Las funciones de singularidad interrumpidas están formadas por la combinación de funciones de signo opuesto que inician en diferentes puntos a lo largo de la viga

$$M(l) = 0 = \left(R_1 \langle l \rangle^1 - \frac{w}{2} \langle l \rangle^2 + \frac{w}{2} \langle l-a \rangle^2 + R_2 \langle l-b \rangle^1 - F \langle l-l \rangle^1 \right)$$

$$0 = R_1 l - \frac{wl^2}{2} + \frac{w(l-a)^2}{2} + R_2 (l-b) \qquad (g)$$

$$R_1 = \frac{1}{l}\left[\frac{wl^2}{2} - \frac{w(l-a)^2}{2} - R_2 (l-b) \right] = 200 \text{ lb}$$

Observe que las ecuaciones (f) son justamente la suma de fuerzas = 0 y la suma de momentos tomados con respecto al punto l e igualados a cero.

4. Al sustituir $x = 0$, $y = 0$ y $x = b$, $y = 0$ en la ecuación (e) y despejando C_3 y C_4:

$$y(0) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\begin{array}{l} \frac{R_1}{6}\langle 0-0 \rangle^3 - \frac{w}{24}\langle 0-0 \rangle^4 + \frac{w}{24}\langle 0-a \rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle 0-b \rangle^3 \\ -\frac{F}{6}\langle 0-l \rangle^3 + \frac{C_1}{6}(0)^3 + \frac{C_2}{2}(0)^2 + C_3(0) + C_4 \end{array} \right)$$

$$C_4 = 0 \qquad (h)$$

$$y(b) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\begin{array}{l} \frac{R_1}{6}\langle b-0 \rangle^3 - \frac{w}{24}\langle b-0 \rangle^4 + \frac{w}{24}\langle b-a \rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle b-b \rangle^3 \\ -\frac{F}{6}\langle b-l \rangle^3 + \frac{C_1}{6}(b)^3 + \frac{C_2}{2}(b)^2 + C_3(b) + C_4 \end{array} \right)$$

$$C_3 = \frac{1}{b}\left[-\frac{R_1}{6} b^3 + \frac{w}{24} b^4 - \frac{w}{24}\langle b-a \rangle^4 \right]$$

$$= \frac{1}{7}\left[-\frac{200}{6}(7)^3 + \frac{100}{24}(7)^4 - \frac{100}{24}(7-4)^4 \right] = -252.4 \qquad (i)$$

5. La sustitución de las expresiones de C_1, C_2, C_3, C_4, R_1 y R_2 de las ecuaciones (f), (g), (h) e (i) en la ecuación (e) da la ecuación de la deflexión resultante

$$y = \frac{1}{EI}\left(\begin{array}{l} \frac{R_1}{6}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + \frac{w}{24}\langle x-a \rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle x-b \rangle^3 - \frac{F}{6}\langle x-l \rangle^3 \\ +\frac{1}{b}\left[-\frac{R_1}{6}(b)^3 + \frac{w}{24}(b)^4 - \frac{w}{24}\langle b-a \rangle^4 \right] x \end{array} \right) \qquad (j)$$

6. Puesto que una viga suspendida es una forma de viga en voladizo, la deflexión máxima está más probablemente en el extremo libre. Se sustituye $x = l$ en la ecuación (f) para obtener $y_{máx}$.

$$y_{máx} = \frac{1}{EI}\left(\begin{array}{l} \frac{R_1}{6}l^3 - \frac{w}{24}l^4 + \frac{w}{24}\langle l-a \rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle l-b \rangle^3 - \frac{F}{6}\langle l-l \rangle^3 \\ +\frac{1}{b}\left[-\frac{R_1}{6}(b)^3 + \frac{w}{24}(b)^4 - \frac{w}{24}\langle b-a \rangle^4 \right] l \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{3E7(0.2)}\left(\begin{array}{l} \frac{200}{6}10^3 - \frac{100}{24}10^4 + \frac{100}{24}\langle 10-4 \rangle^4 + \frac{400}{6}(10-7)^3 \\ -\frac{200}{6}0^3 + \frac{1}{7}\left[-\frac{200}{6}(7)^3 + \frac{100}{24}(7)^4 - \frac{100}{24}(7-4)^4 \right] 10 \end{array} \right)$$

$$y_{máx} = -0.0006 \text{ in} \qquad (k)$$

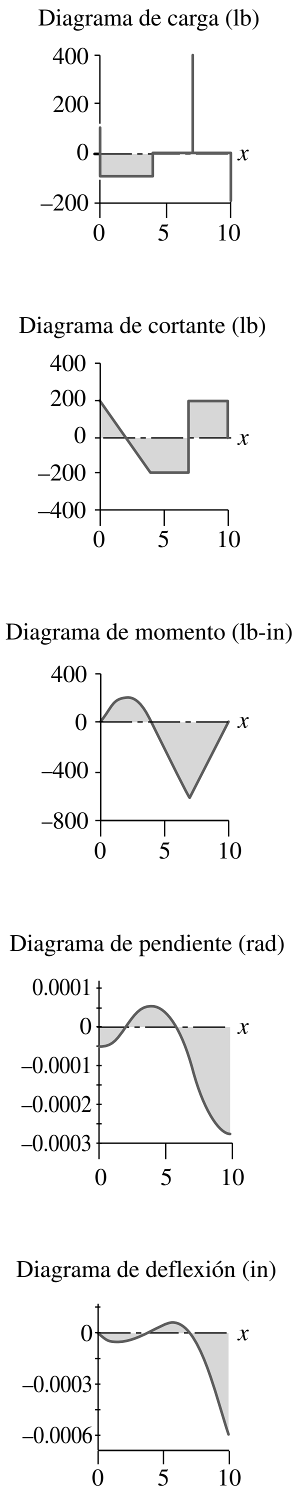


FIGURA 2-26

Gráficas del ejemplo 2-6

7. Las gráficas de las funciones de carga, cortante, momento, pendiente y deflexión para el inciso (*c*) se muestran en la figura 2-26. Los archivos EX04-06 se pueden abrir en el programa de su elección, con la finalidad de examinar el modelo y ver a escala ampliada las gráficas de las funciones de la figura 2-26.

Vigas estáticamente indeterminadas

Cuando una viga tiene soportes redundantes, como se muestra en la figura 2-22*d* (repetida abajo), se dice que es estáticamente indeterminada. Este ejemplo también se conoce como viga continua y es bastante común. Las vigas que soportan las construcciones tienen con frecuencia varias columnas distribuidas debajo del espacio de la viga larga. Las magnitudes de más de dos fuerzas o momentos de reacción no se pueden obtener usando tan sólo las dos ecuaciones de equilibrio estático, $\Sigma F = 0$ y $\Sigma M = 0$. Para calcular más de dos reacciones se requieren ecuaciones adicionales y se debe usar la función de deflexión con este propósito. Se puede suponer que la deflexión será cero en cada soporte simple (como primera aproximación) y que se conoce la pendiente de la viga, o bien, puede estimarse aproximadamente en un soporte de momento.* Esto provoca una condición limitante adicional para cada reacción agregada, lo cual permite obtener la solución.

Solución de vigas indeterminadas con funciones de singularidad Las funciones de singularidad brindan una manera conveniente para establecer y evaluar las ecuaciones de las funciones de carga, cortante, momento, pendiente y deflexión, como ya se demostró en ejemplos anteriores. Este enfoque también sirve para resolver un problema de vigas indeterminadas y se demuestra mejor con otro ejemplo.

EJEMPLO 2-7

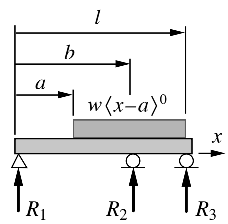
Cálculo de las reacciones y deflexión de vigas estáticamente indeterminadas usando funciones de singularidad

Problema **Determine y grafique las funciones de carga, cortante, momento, pendiente y deflexión para la viga de la figura 2-22*d*. Obtenga la deflexión máxima.**

Se proporciona **La carga está uniformemente distribuida sobre una parte de la viga, como se muestra. Longitud de la viga l = 10 in, a = 4 in y b = 7 in. Para esta viga, I = 0.08 in^4 y E = 30 Mpsi. La magnitud de la fuerza distribuida es w = 500 in/lb.**

Suposiciones **El peso de la viga es despreciable comparado con las cargas aplicadas y se puede ignorar.**

Solución **Véase las figuras 2-22*d* (*repetida aquí*) y 2-27 (p. 103).**



Viga indeterminada con carga uniformemente distribuida

FIGURA 2-22d
Repetida

1. Escriba una ecuación para la función de carga en términos de las ecuaciones 1.17 (pp. 43-44) e integre cuatro veces la función resultante, usando las ecuaciones 1.18 (pp. 44-45) para obtener las funciones de cortante, momento, pendiente y deflexión.

$$q = R_1\langle x-0\rangle^{-1} - w\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-b\rangle^{-1} + R_3\langle x-l\rangle^{-1} \qquad (a)$$

$$V = \int q\,dx = R_1\langle x-0\rangle^{0} - w\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-b\rangle^{0} + R_3\langle x-l\rangle^{0} + C_1 \qquad (b)$$

$$M = \int V\,dx = R_1\langle x-0\rangle^{1} - \frac{w}{2}\langle x-a\rangle^{2} + R_2\langle x-b\rangle^{1} + R_3\langle x-l\rangle^{1} + C_1 x + C_2 \qquad (c)$$

* Ya que es verdaderamente rígido, los apoyos de la viga pueden flexionarse (comprimirse) bajo las caras aplicadas. Sin embargo, si los apoyos son adecuadamente rígidos, el movimiento del apoyo será por lo general pequeño comparado con la deflexión de la viga, y para el análisis de tal deflexión puede suponerse igual a cero

2

$$\theta = \int \frac{M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{2}\langle x-0\rangle^2 - \frac{w}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{R_2}{2}\langle x-b\rangle^2 + \frac{R_3}{2}\langle x-l\rangle^2 + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \right) \tag{d}$$

$$y = \int \theta\, dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle x-0\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle x-a\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle x-b\rangle^3 + \frac{R_3}{6}\langle x-l\rangle^3 + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4 \right) \tag{e}$$

2. Hay tres fuerzas de reacción y cuatro constantes de integración por determinar. Las constantes C_1 y C_2 son iguales a cero porque las fuerzas de reacción y los momentos que actúan sobre la viga están incluidos en la función de carga. Esto deja cinco incógnitas.

3. Si se consideran las condiciones en un punto infinitesimal a la izquierda de $x = 0$ (denotado como $x = 0^-$), el cortante y el momento serán ambos iguales a cero. Las mismas condiciones se obtienen en un punto infinitesimal a la derecha de $x = l$ (denotado como $x = l^+$). Asimismo, la deflexión y debe ser cero en los tres soportes. Estas observaciones proporcionan las cinco condiciones de frontera necesarias para evaluar las tres fuerzas de reacción y las dos constantes de integración restantes; es decir, cuando $x = 0^-$, $V = 0$, $M = 0$; cuando $x = 0$, $y = 0$; cuando $x = b$, $y = 0$; cuando $x = l$, $y = 0$; cuando $x = l+$, $V = 0$, $M = 0$.

Tabla 2-2
Datos calculados del ejemplo 2-7

Variable	Valor	Unidad
R_1	158.4	lb
R_2	2471.9	lb
R_3	369.6	lb
C_1	0.0	lb
C_2	0.0	lb-in
C_3	–1052.7	rad
C_4	0.0	in
$V_{mín}$	–1291.6	lb
$V_{máx}$	1130.4	lb
$M_{mín}$	–1141.1	lb-in
$M_{máx}$	658.7	lb-in
$\theta_{mín}$	–0.025	grados
$\theta_{máx}$	0.027	grados
$y_{mín}$	–0.0011	in
$y_{máx}$	0.0001	in

4. Sustituya las condiciones de frontera $x = 0, y = 0, x = b, y = 0$ y $x = l, y = 0$ en (e).

para $x = 0$:

$$y(0) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle 0-0\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle 0-a\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle 0-b\rangle^3 + \frac{R_3}{6}\langle 0-l\rangle^3 + C_3(0) + C_4 \right)$$

$$C_4 = 0 \tag{f}$$

para $x = b$:

$$y(b) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle b-0\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle b-a\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle b-b\rangle^3 + \frac{R_3}{6}\langle b-l\rangle^3 + C_3b + C_4 \right)$$

$$C_3 = \frac{1}{b}\left(-\frac{R_1}{6}b^3 + \frac{w}{24}\langle b-a\rangle^4 \right) = \frac{1}{7}\left(-\frac{R_1}{6}7^3 + 100(7-4)^4 \right) = 385.7 - 8.17R_1 \tag{g}$$

para $x = l$:

$$y(l) = 0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle l-0\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle l-a\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle l-b\rangle^3 + \frac{R_3}{6}\langle l-l\rangle^3 + C_3l + C_4 \right)$$

$$C_3 = \frac{1}{l}\left(-\frac{R_1}{6}l^3 + \frac{w}{24}\langle l-a\rangle^4 - \frac{R_2}{6}\langle l-b\rangle^3 \right)$$

$$C_3 = \frac{1}{10}\left(-\frac{R_1}{6}10^3 + \frac{100}{24}\langle 10-4\rangle^4 - \frac{R_2}{6}\langle 10-7\rangle^3 \right) = 540 - 16.67R_1 - 4.5R_2 \tag{h}$$

5. Se pueden escribir dos ecuaciones más mediante las ecuaciones (c) y (b), y considerando que en un punto l^+, infinitesimalmente más allá del extremo derecho de la viga, tanto V como M son cero. Se puede sustituir l por l^+ ya que su diferencia es notablemente pequeña.

$$M(l) = 0 = R_1\langle l-0\rangle^1 - \frac{w}{2}\langle l-a\rangle^2 + R_2\langle l-b\rangle^1 + R_3\langle l-l\rangle^1$$

$$0 = R_1 l - \frac{w}{2}(l-a)^2 + R_2(l-b)$$

$$R_1 = \frac{1}{l}\left[\frac{w}{2}(l-a)^2 - R_2(l-b)\right]$$

$$R_1 = \frac{1}{10}\left[\frac{100}{2}(10-4)^2 - R_2(10-7)\right] = 180 - 0.3R_2 \qquad (i)$$

$$V(l) = 0 = R_1\langle l\rangle^0 - w\langle l-a\rangle^1 + R_2\langle l-b\rangle^0 + R_3\langle l-l\rangle^0 = 0$$

$$0 = R_1 - w(l-a) + R_2 + R_3$$

$$R_2 = w(l-a) - R_1 - R_3 = 600 - R_1 - R_3 \qquad (j)$$

6. Las ecuaciones (*f*) a (*j*) proporcionan cinco ecuaciones para las cinco incógnitas R_1, R_2, R_3, C_3, C_4 y se pueden resolver simultáneamente. La función de deflexión se expresa en términos de geometría más la carga y fuerzas de reacción; pero en este caso es necesaria una solución simultánea.

$$y = \frac{1}{EI}\left(\begin{aligned}&\frac{R_1}{6}x^3 + \frac{1}{b}\left(\frac{w}{24}\langle b-a\rangle^4 - \frac{R_1}{6}b^3\right)x - \frac{w}{24}\langle x-a\rangle^4\\ &+\frac{R_2}{6}\langle x-b\rangle^3 + \frac{R_3}{6}\langle x-l\rangle^3\end{aligned}\right) \qquad (k)$$

7. Las gráficas de las funciones de carga, cortante, momento, pendiente y deflexión se muestran en la figura 2-27, y sus valores extremos en la tabla 2-2. Los archivos EX04-07 se pueden abrir con el programa de su preferencia para examinar el modelo y ver una ampliación de las funciones mostradas en la figura 2-27.

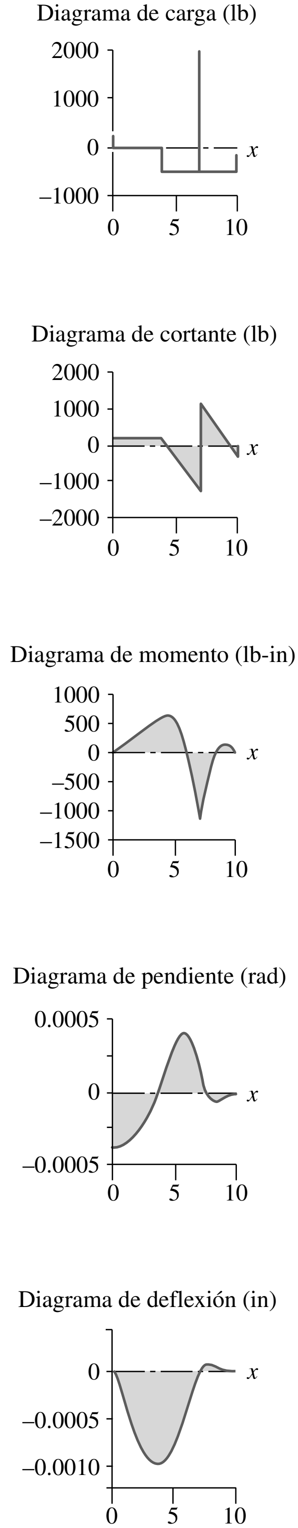


FIGURA 2-27
Gráficas del ejemplo 2-7

Este ejemplo muestra que las funciones de singularidad brindan un excelente medio para resolver problemas de vigas de reacciones y deflexiones, simultáneamente, cuando hay reacciones redundantes. Las funciones de singularidad permiten escribir una sola expresión para cada función que se aplica en toda la viga. También son inherentemente computarizables en conjunción con un resolvedor de ecuaciones que dé solución a las ecuaciones simultáneas. El método de funciones de singularidad utilizado aquí es universal y resuelve cualquier problema de los tipos que se estudiaron.

Existen otras técnicas para la solución de problemas de deflexión y reacciones redundantes. El **análisis de elementos finitos** (FEA) resuelve estos problemas (véase el apéndice C). El **método de área-momento** trata la función de momento como si fuera una función de "carga" e integra dos veces para obtener la función de deflexión. Para información adicional sobre estos temas, se remite al lector a la bibliografía de este capítulo. El **método de Castigliano** emplea las ecuaciones de la energía de deformación para determinar la deflexión en cualquier punto.

2.11 MÉTODO DE CASTIGLIANO

A menudo, los métodos de energía ofrecen soluciones sencillas y rápidas a los problemas. Por ejemplo, un método útil para la solución de deflexiones en vigas es el de Castigliano, el cual también brinda una solución para problemas de vigas indeterminadas.

2

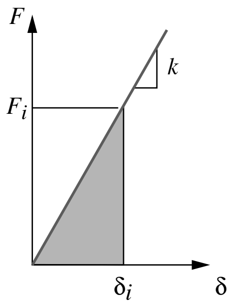


FIGURA 1-17 Repetida

Energía almacenada en un resorte

Cuando se flexiona un elemento elástico por la acción de una fuerza, torque o momento, se almacena la energía de deformación en el elemento. Para deflexiones pequeñas, en la mayoría de geometrías, se puede suponer que la relación entre la fuerza aplicada, el momento, o torque, y la deflexión resultante es lineal, como se ilustra en la figura 1-17, que se repite aquí. Esta relación se conoce con frecuencia como razón k del resorte del sistema. El área debajo de la curva de deflexión por carga es la energía U de deformación almacenada en la pieza. Para una relación lineal, ésta es el área de un triángulo.

$$U = \frac{F\delta}{2} \tag{2.20}$$

donde F es la carga aplicada y δ es la deflexión.

Castigliano observó que cuando un cuerpo se flexiona elásticamente por una carga, la deflexión en la dirección de la carga es igual a la derivada parcial de la energía de deformación con respecto a esa carga. Si Q representa una carga generalizada y Δ una deflexión generalizada,

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial Q} \tag{2.21}$$

Esta relación se puede aplicar a cualquier caso de carga, ya sea axial, de flexión, cortante o de torsión. Si hay más de un tipo de carga sobre la misma pieza, sus efectos se superponen mediante la ecuación 2.21 para cada caso.

Energía de deformación con carga axial Para una carga axial, la energía de deformación se obtiene sustituyendo la expresión de la deflexión axial (ecuación 2.8, p. 82) en la ecuación 2.20:

$$U = \frac{1}{2}\frac{F^2 l}{EA} \tag{2.22a}$$

la cual es válida únicamente si ni E ni A varían en la longitud l. Si varían con la distancia x a lo largo del elemento, entonces, se requiere una integración:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{F^2}{EA}\,dx \tag{2.2b}$$

Energía de deformación con carga de torsión Para carga de torsión (véase la siguiente sección), la energía de deformación es

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{T^2}{GK}\,dx \tag{2.22c}$$

donde T es el torque aplicado, G es el módulo de rigidez y K es una propiedad geométrica de la sección transversal, como se definió en la tabla 2-2 (p. 102).

Energía de deformación con carga de flexión Para la flexión, la energía de deformación es

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx \tag{2.22d}$$

donde M es el momento de flexión, que puede ser una función de x.

Energía de deformación con carga cortante transversal Para una carga cortante transversal en una viga, la energía de deformación será una función del perfil de la sección transversal, así como de la carga y la longitud. Para vigas con secciones transversales rectangulares, la energía de deformación es

$$U = \frac{3}{5}\int_0^l \frac{V^2}{GA}\,dx \qquad (2.22e)$$

donde V es la carga cortante, la cual puede ser una función de x. Para secciones transversales diferentes de la rectangular, la fracción 3/5 será diferente.

Los efectos de las cargas cortantes transversales sobre las deflexiones en las vigas son usualmente menores del 6% de los efectos debidos a los momentos de flexión, cuando la razón longitud-profundidad de la viga es > 10. Por lo tanto, sólo las vigas cortas tendrán efectos significativos de cortante transversal. Para secciones transversales diferentes de las rectangulares, normalmente se utiliza 1/2 en la ecuación 2.22*e* en vez de 3/5, con la finalidad de obtener una aproximación rápida de la energía de deformación debida a cargas cortantes transversales. Este cálculo burdo dará una indicación de si el orden de la magnitud de la deflexión debida al cortante transversal es suficiente para justificar un cálculo más preciso.

Deflexión por el método de Castigliano

Este método es útil para el cálculo de deflexiones en puntos específicos de un sistema. La ecuación 2.21 relaciona la fuerza y deflexión mediante la energía de deformación. Para un sistema flexionado por más de un tipo de carga, los efectos individuales se pueden superponer usando una combinación de las ecuaciones 2.21 y 2.22. Cuando existen cargas de flexión y de torsión, sus componentes de deflexión por lo general serán significativamente mayores que aquéllas debidas a cualquier carga axial presente. Por tal motivo, algunas veces se ignoran los efectos axiales.

La deflexión en puntos donde no hay una carga real se determina aplicando una "carga simulada" en ese punto y resolviendo la ecuación 2.21 con la carga simulada igual a cero. El cálculo se hace más fácil si la diferenciación parcial de la ecuación 2.21 se hace antes de realizar la integración definida en la ecuación 2.22.

Para determinar la deflexión máxima, se requiere alguna noción de su localización a lo largo de la viga. El método de la función de singularidad, por otro lado, proporciona la función de deflexión sobre la viga completa, a partir de la cual los máximos y mínimos se obtienen fácilmente.

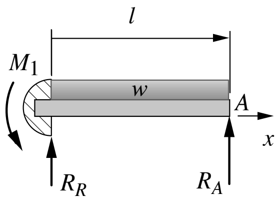
Determinación de reacciones redundantes con el método de Castigliano

El método de Castigliano brinda un modo conveniente para resolver problemas de vigas estáticamente indeterminadas. Las fuerzas de reacción en soportes redundantes sobre una viga se obtienen a partir de la ecuación 2.22*d* haciendo la deflexión en el soporte redundante igual a cero y al resolver para la fuerza.

EJEMPLO 2-8

Determinación de las reacciones de una viga estáticamente indeterminada usando el método de Castigliano

Problema **Encuentre las fuerzas de reacción de la viga indeterminada de la figura 2-22*e*.**



(*e*) Viga en voladizo con soporte redundante

FIGURA 2-22e

Viga indeterminada

2

Se proporciona **La carga está uniformemente distribuida sobre la viga, como se muestra. La longitud es *l*. La magnitud de la fuerza distribuida es *w*.**

Suposiciones **Ignore el peso de la viga, ya que es despreciable comparado con la carga aplicada.**

Solución **Véase la figura 2-22*e*.**

1. Considere que la fuerza de reacción en A es redundante y descártela temporalmente. Entonces, la viga será estáticamente determinada y se flexionará en A. Ahora considere que la fuerza de reacción R_A es una carga aplicada desconocida, lo cual hará que la deflexión sea cero (como debe ser, si el punto A es soportado). Si se escribe la ecuación de la deflexión en A en términos de la fuerza R_A y, luego, se resuelve para R_A con la deflexión igual a cero, se determinará la fuerza de reacción necesaria R_A.

2. Escriba la ecuación 2.21 de la deflexión y_A para la carga aplicada desconocida R_A, en términos de la energía de deformación en la viga en ese punto.

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} \tag{a}$$

3. Al sustituir la ecuación 2.22*d* y diferenciando:

$$y_A = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}dx\right)}{\partial R_A} = \int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_A}dx \tag{b}$$

4. Escriba la expresión para el momento de flexión a una distancia x de A:

$$M = R_A x - \frac{1}{2}wx^2 \tag{c}$$

5. Su derivada con respecto a R_A es:

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x \tag{d}$$

6. Sustituya (*c*) y (*d*) en (*b*) para obtener:

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^l \left(R_A x^2 - \frac{1}{2}wx^3\right)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A l^3}{3} - \frac{wl^4}{8}\right) \tag{e}$$

7. Haga $y_A = 0$ y despeje R_A para obtener:

$$R_A = \frac{3}{8}wl \tag{f}$$

8. A partir de la suma de fuerzas y la suma de momentos, se tiene:

$$R_R = \frac{5}{8}wl \qquad M_1 = \frac{1}{8}wl^2 \tag{g}$$

2.12 TORSIÓN

Cuando los elementos se cargan con un momento respecto a su eje longitudinal, se dice que están en **torsión** y, por consiguiente, el momento aplicado se llama **torque**. Esta situación es común en ejes de transmisión de potencia, en tornillos y en cualquier situación donde el vector del momento aplicado sea paralelo al eje largo de una pieza, en vez del transversal, como en el caso de la flexión. Muchas piezas de máquinas tienen cargas combinadas de torques y momentos de flexión; se tratarán estas situaciones en capítulos posteriores. Aquí sólo se desea considerar el caso sencillo de **carga de torsión pura**.

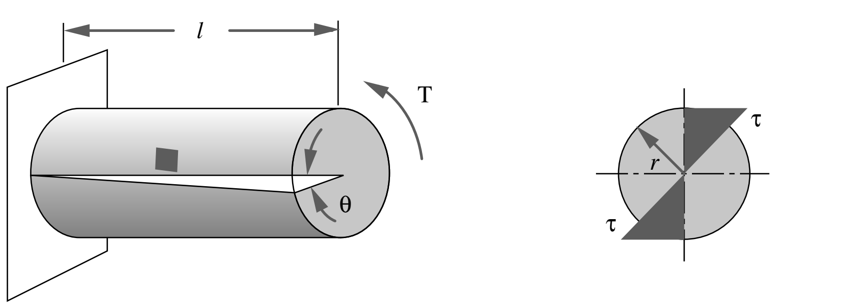
La figura 2-28*a* muestra una barra recta que tiene una sección transversal circular uniforme con un torque puro aplicado, de tal manera que no se presentan momentos de flexión ni otras fuerzas. Esto se puede llevar a cabo con una llave inglesa de doble manija, como una llave de macheulo, la cual permite que se aplique un par puro sin fuerza transversal neta. El extremo fijo de la barra está empotrado en una pared rígida. La barra gira alrededor de su eje largo y su extremo libre se flexiona un ángulo θ. Las suposiciones para este análisis son las siguientes:

1. El elemento analizado está alejado de las cargas aplicadas o las restricciones externas sobre la barra.
2. La barra está sometida a torsión pura en un plano normal a su eje y no hay cargas de flexión axial o de corte directo.
3. Las secciones transversales de la barra permanecen planas y perpendiculares al eje.
4. El material de la barra es homogéneo, isotrópico y cumple con la ley de Hooke.
5. Los esfuerzos permanecen por debajo del límite elástico.
6. La barra es recta inicialmente.

Secciones circulares Un elemento diferencial tomado de cualquier parte de la superficie exterior se cortará con una carga de torque. El esfuerzo τ es cortante puro, y varía desde cero en el centro hasta un máximo en el radio exterior, como se indica en la figura 2-28*b*,

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{2.23a}$$

donde T = torque aplicado, ρ = radio en cualquier punto y J = momento de inercia polar del área de la sección transversal. El esfuerzo es máximo en la superficie exterior, en el radio r,



(a) Deflexión θ *(b)* Distribución del esfuerzo cortante τ

FIGURA 2-28

Barra redonda en torsión pura

$$\tau_{máx} = \frac{Tr}{J} \tag{2.23b}$$

La deflexión angular debida al torque aplicado es

$$\theta = \frac{Tl}{JG} \tag{2.24}$$

donde l es la longitud de la barra y G es el módulo de corte (módulo de rigidez) del material, como se definió en la ecuación B.5.

Observe que las **ecuaciones 2.24 se aplican sólo para secciones transversales circulares**. Cualquier otra forma de sección transversal se comportará de manera diferente. El momento de inercia polar del área de un sólido con sección transversal circular de diámetro d es

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \tag{2.25a}$$

y para una sección transversal circular hueca de diámetro exterior d_o y diámetro interior d_i es

$$J = \frac{\pi\left(d_o^4 - d_i^4\right)}{32} \tag{2.25b}$$

La sección transversal circular es el perfil óptimo para cualquier barra sometida a carga de torsión y se debería usar en casos de torsión, siempre que sea posible.

Secciones no circulares En algunos casos, tal vez se necesiten otros perfiles por motivos de diseño. Las secciones no circulares sometidas a torsión tienen un comportamiento que transgrede algunas de las suposiciones enunciadas anteriormente. Las secciones no permanecen planas, más bien se torcerán. Las líneas radiales no permanecen rectas y la distribución del esfuerzo cortante no necesariamente es lineal a través de la sección. La expresión general para el **esfuerzo cortante máximo debido a la torsión en secciones no circulares** es

$$\tau_{máx} = \frac{T}{Q} \tag{2.26a}$$

donde Q es una función de la geometría de la sección transversal. La deflexión angular es

$$\theta = \frac{Tl}{KG} \tag{2.26b}$$

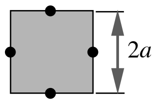
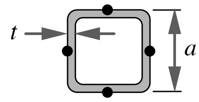
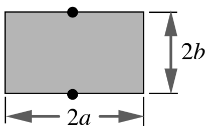
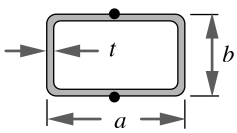
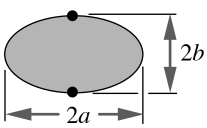
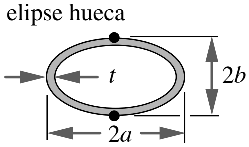
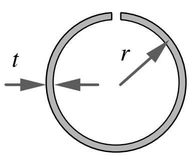
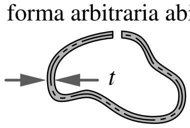
donde K es una función de la geometría de la sección transversal. Observe la similitud entre esta ecuación y la 2.24. El factor de geometría K es el momento de inercia polar J sólo para una sección circular cerrada. Para cualquier forma de sección transversal cerrada diferente a la circular, el factor K será menor que J para las mismas dimensiones de la sección, lo cual es una indicación de lo valioso que resulta usar una sección circular cerrada para cargas de torsión. Este hecho se demostrará en el siguiente ejemplo.

En la referencia 3 y en otras fuentes se pueden encontrar expresiones de Q y K de varias secciones transversales. La tabla 2-3 incluye expresiones de Q y K para algunas secciones transversales comunes; asimismo, muestra la ubicación del esfuerzo de corte máximo.

Tabla 2-3 Expresiones de K y Q de algunas secciones transversales en torsión

Los puntos negros indican los puntos de esfuerzos de corte máximos

(Fuente: Ref. 4, con autorización)

Perfil	K	Q
cuadrado sólido 	$K = 2.25a^4$	$Q = \dfrac{a^3}{0.6}$
cuadrado hueco 	$K = \dfrac{2t^2(a-t)^4}{2at-2t^2}$ las esquinas interiores pueden tener un esfuerzo mayor si el radio de la esquina es pequeño	$Q = 2t(a-t)^2$
rectángulo sólido 	$K = ab^3\left[\dfrac{16}{3} - 3.36\dfrac{b}{a}\left(1 - \dfrac{b^4}{12a^4}\right)\right]$	$Q = \dfrac{8a^2b^2}{3a+1.8b}$
rectángulo hueco 	$K = \dfrac{2t^2(a-t)^2(b-t)^2}{at+bt-2t^2}$ las esquinas interiores pueden tener un esfuerzo mayor si el radio de la esquina es pequeño	$Q = 2t(a-t)(b-t)$
elipse sólida 	$K = \dfrac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}$	$Q = \dfrac{\pi a b^2}{2}$
elipse hueca 	$K = \dfrac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}\left[1 - \left(1 - \dfrac{t}{a}\right)^4\right]$	$Q = \dfrac{\pi a b^2}{2}\left[1 - \left(1 - \dfrac{t}{a}\right)^4\right]$
tubo circular abierto 	$K = \dfrac{2}{3}\pi r t^3; \quad t << r$	$Q = \dfrac{4\pi^2 r^2 t^2}{6\pi r + 1.8t}; \quad t << r$
forma arbitraria abierta  U = longitud de la mediana	$K = \dfrac{1}{3}Ut^3; \quad t << U$ t debe ser mucho más pequeña que el radio de curvatura mínimo	$Q = \dfrac{U^2t^2}{3U+1.8t}; \quad t << U$

EJEMPLO 2-9

Diseño de una barra de torsión

Problema **Determine el perfil más adecuado de la sección transversal de una barra de torsión hueca, que está hecha de una hoja de acero de dimensiones conocidas, para resistir una carga de torsión pura con deflexión angular mínima. También obtenga el esfuerzo cortante máximo.**

Se proporciona **El torque aplicado es de 10 N-m. La hoja de acero tiene una longitud *l* = 1 m, ancho *w* = 100 Mm y espesor *t* = 1 mm. *G* = 80.8 GPa.**

Suposiciones **Intente con cuatro formas diferentes de sección transversal: placa plana sin formado, sección circular abierta, sección circular cerrada y sección cuadrada cerrada. El perfil circular abierto es rolado, pero no está soldado en la costura. Las costuras de formas cerradas están soldadas para crear una sección transversal continua. Considere un diámetro medio o un perímetro medio consistentes con el ancho de la hoja.**

Solución **Véase la figura 2-29 y la tabla 2-3.**

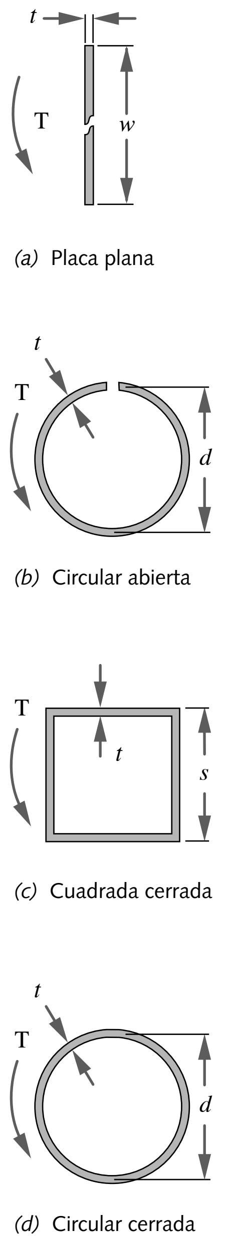


FIGURA 2-29

Secciones transversales del ejemplo 2-9

1. Se aplicará la ecuación 2.26 a todas las secciones, siempre que se sustituya J por K y J/r por Q en el caso de la sección circular cerrada.

2. La placa plana sin formado se comporta como una sección rectangular sólida, como se muestra en la figura 2-29*a* y en la tabla 2-3. Tiene las dimensiones $a = w/2 = 0.05$ m y $b = t/2 = 0.0005$ m:

$$K = ab^3\left[\frac{16}{3} - 3.36\frac{b}{a}\left(1 - \frac{b^4}{12a^4}\right)\right]$$

$$= (0.05)(0.0005)^3\left[5.333 - 3.36\frac{0.0005}{0.05}\left(1 - \frac{(0.0005)^4}{12(0.05)^4}\right)\right] \qquad (a)$$

$$K = 3.312E-11 \text{ m}^4 = 33.123 \text{ mm}^4$$

$$\theta = \frac{Tl}{GK} = \frac{(10)(1)}{(8.08E10)(3.312E-11)} = 3.736 \text{ rad} = 214.1^\circ$$

Evidentemente, ésta es una deflexión angular bastante grande, lo cual indica que la placa plana se enroscó como un sacacorchos por la carga de torsión.

$$Q = \frac{8a^2b^2}{3a + 1.8b}$$

$$= \frac{8(0.05)^2(0.0005)^3}{3(0.05) + 1.8(0.0005)} \qquad (b)$$

$$Q = 3.313E-8 \text{ m}^3 = 33.13 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{T}{Q} = \frac{10}{3.313E-8} = 301.8 \text{ MPa} = 43\,772 \text{ psi}$$

El esfuerzo cortante máximo es de 300 MPa, el cual requiere un material con una resistencia a la fluencia por encima de 520 MPa (75 000 psi) para que no ceda y

se endurezca. Esto requiere acero de alta resistencia. (Véase la sección 3.1 para el análisis de la relación entre la resistencia a la tensión y al corte, como se definió en la ecuación 3.9*b* en la p. 181).

3. La forma circular abierta está ahora formada por un tubo cuyo diámetro es de 3.18 cm, pero su costura longitudinal no está soldada y está abierta como se ilustra en la figura 2-29*b*. En la tabla 2-3, se observa que las expresiones para *K* y *Q* son

$$K = \frac{2}{3}\pi r t^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi \frac{\left(\frac{w}{\pi} - t\right)}{2} t^3 = \frac{1}{3}(w - \pi t)t^3 = \frac{1}{3}(0.1 - 0.001\pi)0.001^3 \qquad (c)$$

$$K = 3.2286E - 11 \text{ m}^4 = 32.286 \text{ mm}^4$$

$$\theta = \frac{Tl}{GK} = \frac{(10)(1)}{(8.08E10)(3.2286E - 11)} = 3.833 \text{ rad} = 219.6^\circ$$

Ésta es una deflexión angular tan grande como la de la placa plana.

$$Q = \frac{4\pi^2 r^2 t^2}{6\pi r + 1.8t}$$

$$= \frac{4\pi^2 (0.01542)^2 (0.001)^3}{6\pi(0.01542) + 1.8(0.001)} \qquad (d)$$

$$Q = 3.209E - 8 \text{ m}^3 = 32.09 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{T}{Q} = \frac{10}{3.209E - 8} = 311.6 \text{ MPa} = 45\,201 \text{ psi}$$

El esfuerzo y la deflexión son inaceptables. Se trata justamente de un diseño tan malo como el de la placa plana.

4. El tubo cuadrado cerrado se formó plegando la hoja en una sección cuadrada de lado $s = a = w / 4$. La costura está soldada como se muestra en la figura 2-29*c*. A partir de la tabla 2-3, *K* y *Q*, y el esfuerzo y la deflexión son ahora

$$K = \frac{2t^2(a-t)^4}{2at - 2t^2} = \frac{2t^2\left(\frac{w}{4} - t\right)^4}{2\frac{w}{4}t - 2t^2} = \frac{2(0.001)^2\left(\frac{0.1}{4} - 0.001\right)^4}{2\left(\frac{0.1}{4}\right)(0.001) - 2(0.001)^2}$$

$$K = 1.382E - 8 \text{ m}^4 = 13\,824 \text{ mm}^4 \qquad (e)$$

$$\theta = \frac{Tl}{GK} = \frac{(10)(1)}{(8.08E10)(1.382E - 8)} = 0.00895 \text{ rad} = 0.51^\circ$$

$$Q = 2t(a-t)^2 = 2t\left(\frac{w}{4} - t\right)^2 = 2(0.001)\left(\frac{0.1}{4} - 0.001\right)^2$$

$$Q = 1.152E - 6 \text{ m}^3 \qquad (f)$$

$$\tau = \frac{T}{Q} = \frac{10}{1.152E - 6} = 8.7 \text{ MPa} = 1\,259 \text{ psi}$$

La deflexión angular del tubo cuadrado es mucho menor que la de la sección abierta y el esfuerzo cortante máximo es ahora mucho más razonable.

5. La forma circular cerrada se formó con un tubo de diámetro exterior igual a 3.18 cm y su costura longitudinal está soldada, como se indica en la figura 2-29*d*. Se pueden usar las ecuaciones 2.24 y 2.25 (p. 108) o las ecuaciones generales 2.26 (p. 108) que implican *K* y *Q*, las cuales son ahora una función de *J* para este perfil circular. Para la deflexión,

$$K = J = \frac{\pi\left(d_o^4 - d_i^4\right)}{32}; \qquad d_o = \frac{w}{\pi}, \qquad d_i = d_o - 2t$$

$$= \frac{\pi\left[\left(\frac{w}{\pi}\right)^4 - \left(\frac{w}{\pi} - 2t\right)^4\right]}{32} = \frac{\pi\left[\left(\frac{0.1}{\pi}\right)^4 - \left(\frac{0.1}{\pi} - 2\{0.001\}\right)^4\right]}{32} \tag{g}$$

$$K = J = 2.304E-8 \text{ m}^4 = 23\,041 \text{ mm}^4$$

$$\theta = \frac{Tl}{GK} = \frac{(10)(1)}{(8.08E10)(2.304E-8)} = 0.0054 \text{ rad} = 0.31^\circ$$

y para el esfuerzo cortante máximo en la superficie exterior,

$$Q = \frac{J}{r} = \frac{\pi\left(d_o^4 - d_i^4\right)}{32 r_o} = \frac{\pi\left[\left(\frac{w}{\pi}\right)^4 - \left(\frac{w}{\pi} - 2t\right)^4\right]}{32\left(\frac{w}{2\pi}\right)} = \frac{\pi\left[\left(\frac{0.1}{\pi}\right)^4 - \left(\frac{0.1}{\pi} - 2\{0.001\}\right)^4\right]}{32\left(\frac{0.1}{2\pi}\right)}$$

$$Q = 1.448E-6 \text{ m}^3 \tag{h}$$

$$\tau = \frac{T}{Q} = \frac{10}{1.448E-6} = 6.91 \text{ MPa} = 1\,002 \text{ psi}$$

6. Este diseño circular cerrado tiene el menor esfuerzo y la deflexión y, a todas luces, es la mejor selección de los cuatro diseños presentados. El espesor de la pared podría incrementarse para reducir el esfuerzo y la deflexión, si así se desea. También necesita verificarse el diseño para un posible pandeo por torsión. Los archivos EX04-09 se pueden abrir en el programa de su preferencia.

Los ejemplos anteriores dejan en claro las ventajas de usar secciones circulares cuando haya cargas de torsión. Recuerde que la cantidad del material y, por lo tanto, el peso son idénticos en todos los diseños de este ejemplo. La sección cuadrada cerrada tiene 1.6 veces la deflexión angular de la sección circular cerrada (tubo). La placa plana tiene 691 veces la deflexión del tubo circular cerrado. Observe que la sección circular abierta no es mejor para la torsión que la placa plana: tiene 708 veces la deflexión angular del tubo cerrado. Este tipo de resultados son verídicos para cualquier sección abierta en torsión, ya sea una viga-I, un canal, un ángulo, un cuadrado, un círculo o una forma arbitraria. **Por lo general, cualquier sección abierta no es mejor para la torsión, que una placa plana con las mismas dimensiones de la sección transversal**. Evidentemente, **las secciones abiertas deberían eliminarse de todas las aplicaciones con carga de torsión**. Incluso se deben eliminar las secciones cerradas no circulares, ya que son menos eficientes en cuanto a torsión que las secciones circulares cerradas. **Sólo las secciones circulares cerradas, sólidas o huecas, son recomendables para aplicaciones con cargas de torsión**.

2.13 ESFUERZOS COMBINADOS

En las piezas de máquinas, resulta muy común tener combinaciones de cargas que crean tanto esfuerzos normales como esfuerzos cortantes sobre la misma pieza. Quizás haya ubicaciones dentro de la pieza donde estos esfuerzos aplicados deban combinarse para encontrar los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo. El mejor modo de explicar esto es con un ejemplo.

EJEMPLO 2-10

Esfuerzos de torsión y de flexión combinados

Problema **Obtenga las localizaciones de los mayores esfuerzos sobre el soporte mostrado en la figura 2-30 y determine los esfuerzos aplicado y principal en esas ubicaciones.**

Se proporciona **La longitud de la varilla l = 6 in y el brazo a = 8 in. El diámetro exterior de la varilla d = 1.5 in. Carga F = 1 000 lb.**

Suposiciones **La carga es estática y el montaje está a temperatura ambiente. Considere el cortante debido a cargas transversales, así como otros esfuerzos.**

Solución **Véase las figuras 2-30 a 2-33.**

1. La investigación se limita a la varilla, la cual está cargada tanto a la flexión (como una viga en voladizo) como a la torsión. (En un diseño completo, también debería analizarse el brazo). Primero es necesario determinar las distribuciones de la carga sobre la longitud de la varilla, dibujando sus diagramas de cortante, momento y torque.

2. Los diagramas de cortante y momento son similares a los de la viga en voladizo del ejemplo 2-5, la diferencia es que esta fuerza se encuentra en el extremo de la viga, en vez de en algún punto intermedio. La figura 2-31 muestra que la fuerza cortante es uniforme a través de la longitud de la viga y su magnitud es igual a la carga aplicada $V_{máx} = F = 1\,000$ lb. El momento máximo sucede en la pared y su magnitud es $M_{máx} = Fl = (1\,000)(6) = 6\,000$ lb-in. (Para las deducciones, véase el ejemplo 2-5).

   El torque aplicado a la barra se debe a la fuerza F que actúa en el extremo del brazo de 8 in y es $T_{máx} = Fa = (1\,000)(8) = 8\,000$ lb-in. Observe que este torque es uniforme sobre la longitud de la varilla, ya que sólo puede tener una reacción en contra por parte de la pared. La figura 2-31 muestra todas estas funciones de carga. De estas figuras, es evidente que la sección transversal más cargada es la de la pared, donde las tres cargas son máximas.

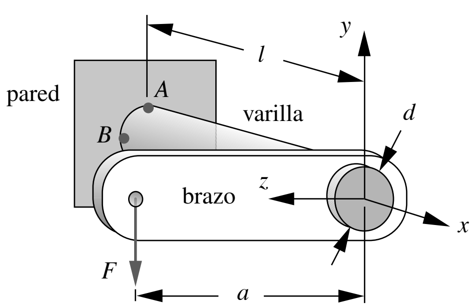


FIGURA 2-30

Soporte del ejemplo 2-10

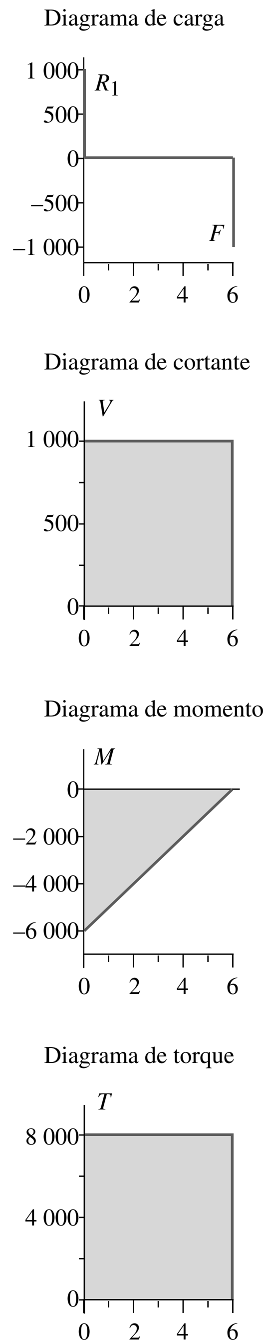
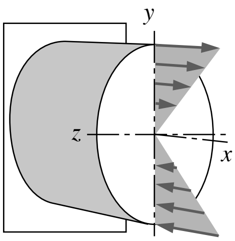
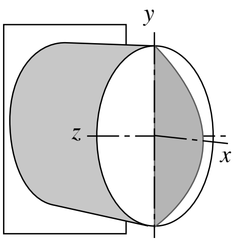


FIGURA 2-31

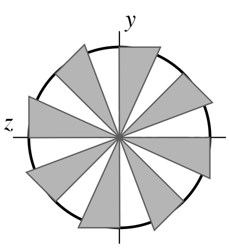
Diagramas de carga para flexión cortante, momento y torque del ejemplo 2-10



(a) Distribución del esfuerzo normal de flexión a través de la sección



(b) Distribución del esfuerzo cortante transversal a través de la sección



(c) Distribución del esfuerzo cortante de torsión a través de la sección

FIGURA 2-32

Sección transversal de la varilla del ejemplo 2-10

3. Ahora se tomará la sección de la varilla en la pared y se examinará dentro de ella la distribución del esfuerzo debido a las cargas externas. La figura 2-32*a* muestra la distribución de los esfuerzos normales de flexión, los cuales tienen un máximo (+/−) en las fibras externas y son iguales a cero en el eje neutral. El esfuerzo cortante debido a la carga transversal es máximo en todos los puntos del plano neutral (*xz*) y es cero en las fibras externas (figura 2-32*b*).

   El esfuerzo cortante debido a la torsión es proporcional al radio, de modo que es cero en el centro y máximo en todos los puntos sobre la superficie exterior, como se indica en la figura 2-32*c*. Observe las diferencias entre las distribuciones del esfuerzo de flexión normal y el esfuerzo cortante de torsión. La magnitud del esfuerzo de flexión es proporcional a la distancia *y* medida desde el plano neutro, de modo que es máxima sólo en las partes superior e inferior de la sección, mientras que el esfuerzo cortante de torsión es máximo alrededor de todo el perímetro.

4. Se seleccionan los puntos *A* y *B* en la figura 2-30 para analizarlos (también mostrados en la figura 2-30*a*) porque tienen las peores combinaciones de esfuerzos. El mayor esfuerzo de flexión a la tensión estará en la fibra externa más alta en el punto *A* y se combina con el mayor esfuerzo de corte a la torsión que está a todo alrededor de la circunferencia externa de la varilla. En la figura 2.33*b* se muestra un elemento diferencial tomado en el punto *A*. Observe que el esfuerzo normal (σ_x) actúa sobre la cara *x* en la dirección *x* y el esfuerzo cortante a la torsión (τ_{xz}) actúa sobre la cara *x* en la dirección +*z*.

   En el punto *B*, el esfuerzo cortante a la torsión tiene la misma magnitud que en el punto *A*, pero la dirección del esfuerzo cortante a la torsión (τ_{xy}) en el punto *B* tiene 90° de diferencia con la del punto *A*. El esfuerzo cortante debido a la carga transversal (τ_{xy}) es máximo en el punto *B*. Advierta que estos esfuerzos cortantes actúan en la dirección −*y* sobre la cara *x* en el punto *B*, como se observa en la figura 2-33*c*. Los esfuerzos cortantes a la torsión y transversales se suman después en el punto *B*.

5. Obtenga el esfuerzo de flexión normal y el esfuerzo cortante a la torsión en el punto *A* usando las ecuaciones 2.11*b* (p. 86) y 2.19*b* (p. 93), respectivamente.

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(Fl)c}{I} = \frac{1\,000(6)(0.75)}{0.249} = 18\,108 \text{ psi} \tag{a}$$

$$\tau_{xz} = \frac{Tr}{J} = \frac{(Fa)r}{J} = \frac{1\,000(8)(0.75)}{0.497} = 12\,072 \text{ psi} \tag{b}$$

6. Determine el esfuerzo cortante máximo y los esfuerzos principales que resultan de esta combinación de esfuerzos aplicados, usando las ecuaciones 2.6 (p. 75).

$$\begin{aligned}
\tau_{máx} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{18\,108 - 0}{2}\right)^2 + 12\,072^2} = 15\,090 \text{ psi} \\
\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \tau_{máx} = \frac{18\,108}{2} + 15\,090 = 24\,144 \text{ psi} \\
\sigma_2 &= 0 \\
\sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \tau_{máx} = \frac{18\,108}{2} - 15\,090 = -6\,036 \text{ psi}
\end{aligned} \tag{c}$$

7. Obtenga el cortante debido a la carga transversal en el punto *B* sobre el eje neutro. El esfuerzo cortante transversal máximo en el eje neutro de una varilla redonda se determina con las ecuaciones 2.15*c* (p. 91).

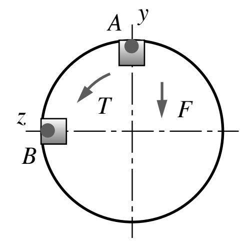
$$\tau_{transversal} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(1\,000)}{3(1.767)} = 755 \text{ psi} \tag{d}$$

El punto B es cortante puro. El esfuerzo cortante total en el punto B es la suma algebraica del esfuerzo cortante transversal y el esfuerzo cortante a la torsión; ambos actúan sobre los mismos planos del elemento diferencial.

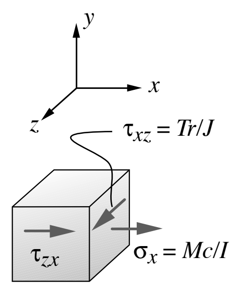
$$\tau_{máx} = \tau_{torsión} + \tau_{transversal} = 12\,072 + 755 = 12\,827 \text{ psi} \qquad (e)$$

lo cual puede demostrarse, por las ecuaciones 2.6 o con el círculo de Mohr, que es igual al esfuerzo principal más grande en este punto.

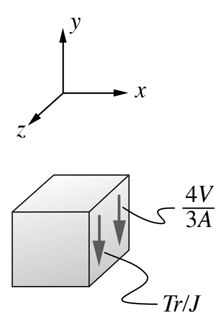
8. El punto A tiene el mayor esfuerzo principal en este caso; sin embargo, observe que los valores relativos del torque y el momento aplicados determinan cuál de estos dos puntos tendrá el mayor esfuerzo principal. Entonces, ambos puntos deben verificarse. Vea los archivos EX04-10 del CD.



(a) Dos puntos de interés para los cálculos del esfuerzo



(b) Elemento de esfuerzo en el punto A



(c) Elemento de esfuerzo en el punto B

FIGURA 2-33

Elementos de esfuerzo en los puntos A y B dentro de la sección transversal de la varilla del ejemplo 2-10

2.14 RAZONES DEL RESORTE

Todas las piezas hechas de un material que tenga un rango elástico se pueden comportar como un resorte. Algunas piezas se diseñan para funcionar como resortes, generando una deflexión controlada y predecible en respuesta a una carga aplicada, o viceversa. La "elasticidad" de una pieza está definida por su razón de resorte k, la cual es igual a la carga por unidad de deflexión. Para resortes con movimiento rectilíneo,

$$k = \frac{F}{y} \qquad (2.27a)$$

donde F es la carga aplicada y y es la deflexión resultante. Las unidades usuales son lb/in, o bien, N/m. Para resortes con movimiento angular la expresión general es

$$k = \frac{T}{\theta} \qquad (2.27b)$$

donde T es el torque aplicado y θ es la deflexión angular resultante. Las unidades usuales son in-lb/rad, o bien, N-m/rad, o algunas veces se expresa como in-lb/rev o N-m/rev.

La ecuación de la razón del resorte para cualquier parte se obtiene fácilmente de la ecuación de deflexión pertinente, la cual da la relación entre la fuerza (o torque) y la deflexión. Por ejemplo, para una barra uniforme en tensión axial, la deflexión está dada por la ecuación 2.8 (p. 82), replanteada para definir su razón de resorte axial.

$$k = \frac{F}{y}: \qquad \text{pero} \quad y = \frac{Fl}{AE}, \quad \text{así que} \quad k = \frac{AE}{l} \qquad (2.28)$$

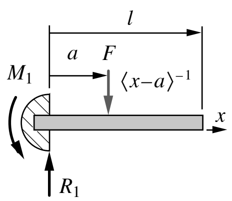
Ésta es una razón de resorte constante, que depende sólo de la geometría de la barra y de las propiedades de su material.

Para una barra redonda de sección uniforme en torsión pura, la deflexión está dada por la ecuación 2.24 (p. 108), replanteadas para definir la razón del resorte a la torsión:

$$k = \frac{T}{\theta}: \qquad \text{pero} \quad \theta = \frac{Tl}{GJ}, \quad \text{así que}: \; k = \frac{GJ}{l} \qquad (2.29)$$

Ésta también es una razón de resorte constante, que depende sólo de la geometría de la barra y de las propiedades de su material.

2



Viga en voladizo con carga concentrada

FIGURA 2-22b

Repetida

Para una viga en voladizo con una carga puntual concentrada como se muestra en la figura 2-22*b* (repetida aquí), la deflexión está dada por la ecuación (*j*) del ejemplo 2-5, replanteada aquí para definir la razón de resorte de la viga, con la fuerza aplicada en el extremo ($a = l$):

$$y = \frac{F}{6EI}\left[x^3 - 3ax^2 - \langle x-a\rangle^3\right]$$

pero, cuando $a = l$, $$y = \frac{F}{6EI}\left(x^3 - 3lx^2 - 0\right) = \frac{Fx^2}{6EI}(x - 3l)$$

para F en $x = l$: $$y = \frac{Fl^2}{6EI}(l - 3l) = -\frac{Fl^3}{3EI}$$

entonces $$k = \frac{F}{y} = \frac{3EI}{l^3} \tag{2.30}$$

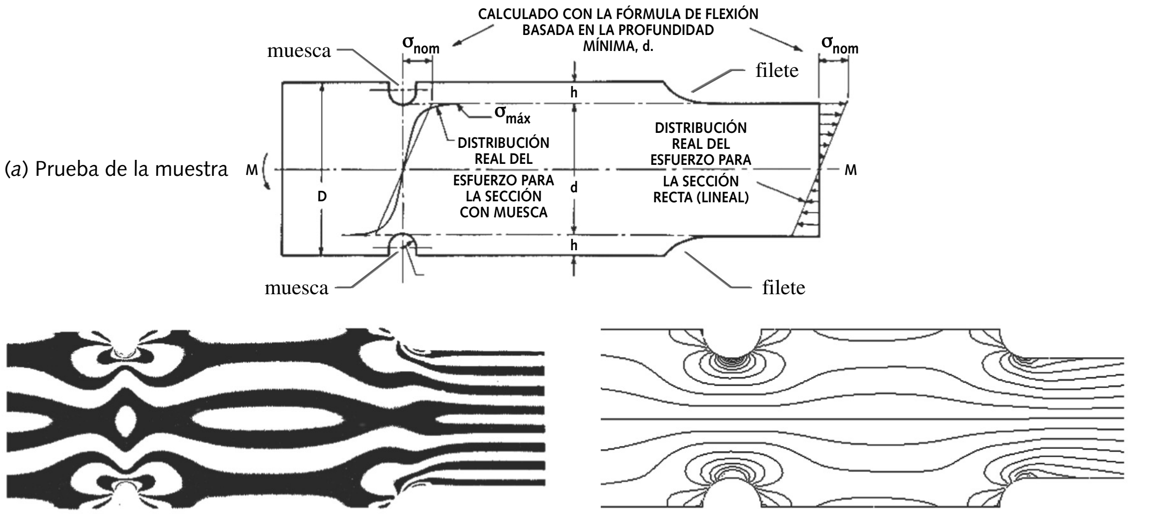
Observe que la razón del resorte *k* de una viga es única para su modo de soporte y su distribución de carga, ya que *k* depende de la ecuación de deflexión particular de la viga y del punto de aplicación de la carga. Se investigará el diseño de resortes con más detalle en un capítulo posterior.

2.15 CONCENTRACIÓN DEL ESFUERZO

En todos los análisis de distribución de esfuerzos dentro de los elementos cargados que se han hecho hasta ahora, se ha supuesto que las secciones transversales de esos elementos son uniformes en todas partes. Sin embargo, la mayoría de las piezas de una máquina real tienen secciones transversales variables. Por ejemplo, a menudo los ejes se escalonan a diferentes diámetros para tomar en cuenta cojinetes, engranes, poleas, etcétera. Un eje puede tener ranuras para fijar anillos, o tener cilindros para llaves y orificios con la finalidad de fijar otras piezas. Los tornillos tienen rosca o cuerda y una cabeza más grande que su caña. Cualquiera de estos cambios en la geometría de la sección transversal provocará concentraciones de esfuerzos localizados.

La figura 2-34 muestra la concentración de esfuerzos generada por muescas y filetes en una barra plana sometida a un momento de flexión. La figura 2-34*b* ilustra los efectos del esfuerzo conforme se mide usando técnicas fotoelásticas. El análisis de esfuerzo fotoelástico implica construir un modelo físico de la parte en un tipo especial de plástico transparente, cargándolo en una parte y fotografiándolo con luz polarizada, lo cual provoca que los esfuerzos se vean como “franjas” que describen la distribución de esfuerzo en la pieza. La figura 2-34*c* ilustra el modelo de un elemento finito (FEM) de una pieza con la misma geometría, y que está restringida y cargada del mismo modo que el espécimen fotoelástico. Sus líneas presentan barras iguales de niveles de esfuerzo. Observe que, en el extremo derecho de la pieza, donde la sección transversal es uniforme, las líneas de franjas de la figura 2-34*b* son rectas, de ancho uniforme y equidistantes. Las barras iguales del modelo de elemento finito (FEM) de la figura 2-34*c* muestran un patrón similar.* Esto indica una distribución lineal de esfuerzo a través de esta porción de la barra muy lejos de las muescas, pero donde la geometría cambia, la distribución de esfuerzo es completamente no lineal y es de magnitud más grande. En los filetes donde el ancho de la parte se reduce de *D* a *d*, las líneas de la franja y las isobarras del FEM indican un trastorno y una concentración de esfuerzos con este cambio súbito de geometría. El mismo efecto se observa cerca del extremo izquierdo alrededor de las dos muescas. La figura 2-34*b* brinda evidencia experimental y la figura 2-34*c* evidencia computacional de la existencia de concentración de esfuerzos en cualquier cambio de geometría. Estos cambios geométricos se conocen a menudo como “elevadores de esfuerzo” y se deberían eliminar o, por lo menos, minimizar hasta donde sea posible en el diseño. Por desgracia, no resulta práctico eliminar todos los incrementadores de esfuerzos, ya que se necesitan tales detalles geométricos para conectar las piezas en las uniones y para dar formas funcionales a la pieza.

* El modelo de elemento finito era realmente más grande que el presentado y tenía las cargas aplicadas en los extremos, muy lejos de la sección mostrada. Esto se hizo así no sólo para mostrar las concentraciones locales de esfuerzo en los puntos de aplicación de la carga, sino para igualar los campos de esfuerzo del ejemplo fotoelástico, el cual quizá también era más grande que el mostrado por la misma razón.



(*b*) Distribución de esfuerzos fotoelástica (*c*) Distribución de esfuerzos mediante análisis de elemento finito

FIGURA 2-34

Medición de la concentración de esfuerzo en las piezas flexionadas de una barra plana, escalonada y con muescas, a través del análisis fotoelástico y de elemento finito.
Los incisos (a) y (b) se reproducen de la referencia 5, fig. 2, p. 3, y están reimpresos con autorización de John Wiley & Sons, Inc.

La cantidad de concentración de esfuerzos en cualquier geometría específica se denota por un factor de concentración de esfuerzo geométrico K_t para esfuerzos normales, o bien, por K_{ts} para esfuerzos cortantes. El esfuerzo máximo en un incrementador de esfuerzo local se define entonces como

$$\sigma_{máx} = K_t\, \sigma_{nom}$$
$$\tau_{máx} = K_{ts}\, \tau_{nom} \tag{2.31}$$

donde σ_{nom} y τ_{nom} son los esfuerzos nominales calculados para la carga aplicada específica y la sección transversal neta, suponiendo la distribución de esfuerzo, a través de la sección, que se obtendría con una geometría uniforme. Por ejemplo, en la viga de la figura 2-34, la distribución del esfuerzo nominal es lineal en la fibra externa, $\sigma_{nom} = Mc / I$. El esfuerzo en las muescas sería entonces de $\sigma_{máx} = K_t Mc / I$. En el caso de tensión axial, la distribución del esfuerzo nominal sería como se definió en la figura 2-10 (p. 82) y para la torsión como se definió en la figura 2-28 (p. 107). Observe que los esfuerzos nominales se calculan usando la **sección transversal neta**, la cual se *reduce por la geometría de la muesca*, es decir, usando d en vez de D como el ancho en las muescas de la figura 2-34.

Los factores K_t y K_{ts} sólo toman en cuenta los efectos de la geometría de la parte y no consideran cómo se comporta el material en presencia de concentraciones de esfuerzos. La ductilidad o fragilidad del material, así como el tipo de carga, ya sea estática o dinámica, también afectan la respuesta a las concentraciones de esfuerzo.

Concentración de esfuerzo bajo carga estática

La ductilidad o fragilidad del material tiene un gran efecto sobre su respuesta a las concentraciones de esfuerzos bajo cargas estáticas. Se discutirán cada uno de estos casos en su momento.

Los **MATERIALES DÚCTILES** cederán localmente en los incrementadores de esfuerzos; mientras que el material con menores esfuerzos, lejos de la discontinuidad geométrica, permanece por debajo del punto de fluencia. Cuando el material cede localmente, ahí su curva de esfuerzo-deformación unitaria se vuelve no lineal y con pendiente baja (véase la figura B-2, apéndice B), lo cual previene el incremento más significativo de esfuerzos en ese punto. Conforme aumenta la carga, más material cede, sometiendo a más área de la sección transversal al esfuerzo. Sólo cuando la sección transversal completa se lleva al punto de fluencia, la pieza continuará subiendo la curva σ-ε hasta la fractura. Así, es común ignorar los efectos de la concentración de esfuerzos geométrica en los *materiales dúctiles con carga estática*. El esfuerzo para la sección transversal neta se calcula como si la concentración de esfuerzos no estuviera ahí. Sin embargo, la reducción en el área de la sección transversal neta o en el momento de inercia de área debido al material removido **se** toma en cuenta, produciendo así mayores esfuerzos que para una parte de las mismas dimensiones generales que no tiene muesca.

Los **MATERIALES FRÁGILES** no cederán localmente puesto que no tienen un rango plástico. Por lo tanto, las concentraciones de esfuerzos tienen un efecto sobre su comportamiento incluso bajo cargas estáticas. Una vez que el esfuerzo en el incrementador de esfuerzos excede la resistencia a la fractura, se empieza a formar una grieta. Esto reduce la disponibilidad del material para resistir la carga y también incrementa la concentración de esfuerzos en la grieta. Entonces, la parte avanza rápidamente hacia la falla. De modo que, para materiales frágiles bajo cargas estáticas, se debería aplicar el factor de concentración de esfuerzos para incrementar el esfuerzo máximo aparente de acuerdo con la ecuación 2.31.

La única excepción para esto son los materiales fundidos frágiles que tienden a presentar muchos rupturas y discontinuidades dentro de su estructura, debido a las escamas de grafito en la aleación, o burbujas de aire, material extraño, partículas de arena, etcétera, los cuales se introdujeron en el material fundido en el molde. Estas discontinuidades dentro del material crean muchos incrementadores de esfuerzos, los cuales también están presentes en las muestras de prueba utilizadas para establecer las resistencias básicas del material. Por lo tanto, los datos de prueba publicados incluyen los efectos de la concentración del esfuerzo. Se considera que la suma de los aumentadores de esfuerzo geométrico al diseño de la parte aporta poco al efecto estadístico general que ya posee el material. De modo que el factor de concentración del esfuerzo geométrico con frecuencia se ignora para materiales fundidos frágiles o para cualquier material que tenga defectos distribuidos reconocidos en su interior. Pero se debería aplicar a los esfuerzos en otros materiales frágiles.

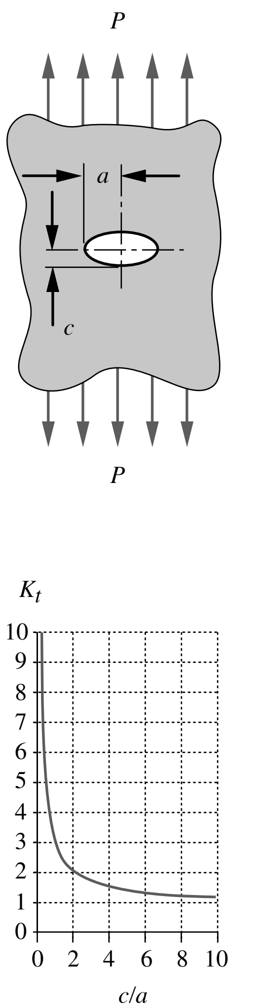


FIGURA 2-35

Concentración de esfuerzos en el borde de un orificio elíptico en una placa.

Concentración de esfuerzos con carga dinámica

Los materiales dúctiles bajo una carga dinámica se comportan y fallan como si fueran frágiles. Entonces, sin importar la fragilidad o ductilidad del material, el factor de concentración de esfuerzos se debe aplicar cuando existen cargas dinámicas (de fatiga o impacto). Sin embargo, existen aún parámetros relacionados con el material que hay que considerar. Mientras que todos los materiales se ven afectados por las concentraciones de esfuerzos bajo cargas dinámicas, algunos materiales son más sensibles que otros. Un parámetro llamado sensibilidad de la muesca q está definido para varios materiales y se utiliza para modificar los factores geométricos K_t y K_{ts} de un material determinado bajo carga dinámica. Estos procedimientos se estudiarán con detalle en el capítulo 4.

Determinación de los factores de concentración de esfuerzos geométricos

Es posible utilizar la teoría de la elasticidad para deducir las funciones de concentración de esfuerzos para algunas geometrías simples. La figura 2-35 ilustra un orificio elíptico en una **placa semiinfinita** sometida a tensión axial. Se supone que el orificio es pequeño comparado con la placa y está muy alejado de los bordes de la placa. El esfuerzo nominal

se calcula con base en la fuerza aplicada y el área total, $\sigma_{nom} = P / A$. El factor teórico de concentración del esfuerzo en el borde del orificio fue desarrollado por Inglis en 1913* y es

$$K_t = 1 + 2\left(\frac{a}{c}\right) \tag{2.32a}$$

donde a es la mitad del ancho de la elipse y c es la mitad de la altura. Se ve claramente que conforme la altura del orificio elíptico se aproxima a cero, creando una grieta afilada, la concentración del esfuerzo se va al infinito. Cuando el orificio es un círculo, $a = c$ y $K_t = 3$. La figura 2-35 también muestra una gráfica de K_t como función de c/a, el recíproco de la razón en la ecuación 2.32a. La función es asintótica para $K_t = 1$ en valores grandes de c / a.

Medición de la concentración de esfuerzos La teoría de elasticidad puede proporcionar valores de concentración de esfuerzos para casos como el descrito. Otros factores de concentración de esfuerzos tienen su origen en investigaciones experimentales de piezas bajo carga controlada. Las mediciones experimentales se pueden hacer con medidores de deformación, técnicas fotoelásticas, holografía con láser y otros medios. Las técnicas de análisis de elementos finitos (FEA) y el análisis de elemento límite (BEA) se utilizan cada vez con mayor frecuencia en el desarrollo de los factores de concentración de esfuerzos. Cuando se hace un análisis de esfuerzo con estas técnicas numéricas, la concentración de esfuerzos "sale de los cálculos", mientras la malla se haga lo suficientemente fina alrededor de las áreas de las entallas. (Véase la figura 2-51, p. 144).

Efecto de la razón longitud-ancho Observe que el análisis clásico de Inglis en 1913 de este caso de concentración de esfuerzos descrito anteriormente suponía una "placa semiinfinita", lo cual significa que las cargas se aplicaban lejos del orificio. Recientemente, el análisis FEA del caso de un orificio circular en una placa ha demostrado que el factor de concentración de esfuerzos es más grande para placas muy cortas, como lo define la razón entre la longitud de la placa (en la dirección de la carga) y su anchura, L/W. Troyani y otros[8] demuestran que para razones L/W menores que aproximadamente 2 y para una carga de tensión uniforme aplicada sobre la anchura W, los valores de K_t varían de alrededor del valor 3 de Inglis, hasta tanto como 11 dependiendo de la razón entre el radio del orificio y el ancho de la placa r/W en combinación con la razón L/W. Si su diseño utiliza una placa muy corta con orificio(s) y está cargada a la tensión, quizá se debería consultar esta referencia para obtener un valor mejor de K_t. Este estudio también demostró que si la carga a la tensión aplicada a la placa es resultado de un desplazamiento uniforme a través del ancho W en vez de una fuerza uniforme, entonces se reduce el valor de K. Esto se debe a que las redes más rígidas alrededor del orificio se fuerzan a soportar la carga, cuando la sección transversal en el extremo que se desplaza se mantiene sin deformación por el desplazamiento uniforme. Esto apunta al efecto de las condiciones limitantes sobre el esfuerzo en una pieza. Otros estudios de los mismos autores muestran una susceptibilidad similar de K_t ante la razón L/W de la pieza. La referencia [9] analiza barras planas escalonadas en tensión y la [10] cubre barras redondas escalonadas en tensión. En este último caso, las barras muestran que cargando uniformemente el extremo del diámetro mayor y fijando el extremo pequeño de una varilla escalonada se obtiene una K_t *creciente* con una razón L/W reducida; en tanto que si se aplica una carga uniforme al extremo del diámetro pequeño de la varilla y se fija el extremo grande, se obtiene una K_t *decreciente* con L/W reducida. Mientras que estos resultados son bastante interesantes, los cambios en K_t no ocurren sino hasta que la razón L/W se vuelve muy pequeña (<2), en cuyo caso la barra o varilla escalonada comienza a tomar la apariencia de una pila de panqueques. Esta configuración geométrica rara vez se encuentra en la práctica del diseño de máquinas.

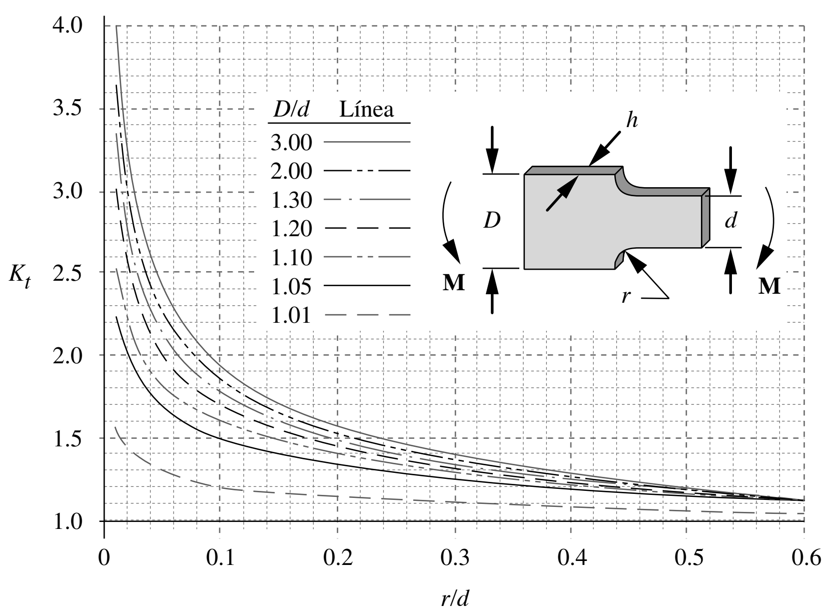
Datos de la concentración de esfuerzos Los datos mejor conocidos y más referenciados del factor de concentración de esfuerzos están en el libro de Peterson[3, 5]. Este libro recopila los resultados teóricos y experimentales de muchos investigadores,

* C.E. Inglis, 1913, "Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners", *Engineering* (Londres), v. 95, p. 415.

en tablas de diseño donde se incluyen los valores de K_t y K_{ts} de varios parámetros geométricos y tipos de carga. Roark y Young[4] también proporcionan tablas de factores de concentración de esfuerzos para diversos casos.

La figura 2-36 y el apéndice G contienen funciones de concentración de esfuerzos y sus gráficas, con base en datos de literatura técnica para un conjunto de casos de situaciones que comúnmente se encuentran en el diseño de máquinas. En algunos casos, las funciones matemáticas se dedujeron ajustándose a las curvas empíricas lo más cercanamente posible. En otros casos, la lista de funciones (búsqueda en la tabla) se creó para permitir la interpolación y la recuperación automática de los valores de K_t en el proceso de cálculo de esfuerzos. Mientras que estas funciones de concentración de esfuerzos (SCF) son aproximaciones de los datos de la literatura, superan a las originales en términos de utilidad, ya que se pueden incorporar al modelo matemático de un problema de diseño de máquinas. Con este texto se proporcionan algunas de estas SCF, como los archivos *TK Solver*, los cuales se intercalan con otros modelos o se utilizan como herramientas individuales para calcular K_t y K_{ts} con cualquier geometría. Esto es preferible que consultar los datos de las gráficas para cada cálculo.

Como ejemplo, la figura 2-36 muestra la función de concentración de esfuerzos para una barra plana, escalonada, en flexión. (Éste y otros casos también se incluyen en el apéndice G). La reducción del ancho de D a d en el trozo crea un incrementador de esfuerzos y el tamaño del radio r del filete también es un factor. Estos dos parámetros geométricos se expresan como las razones adimensionales r/d y D/d. La primera de éstas se utiliza como la variable independiente en la ecuación, en tanto que la segunda determina el elemento de la familia de curvas que resulta. Esta función de concentración de esfuerzos es realmente una superficie tridimensional con los ejes r/d, D/d y K_t. En la figura 2-36, se observan las líneas sobre la superficie en 3-D calculadas con diferentes valores de D/d, y proyectadas hacia adelante en el plano r/d-K_t. La geometría de la pieza y su ecuación de esfuerzos están definidas en la figura, tal como la función que define cada curva de concentración del esfuerzo. En la figura 2-36 existe una función exponencial de la forma



$$\sigma_{nom} = \frac{Mc}{I} = 6\frac{M}{hd^2}$$

$$\sigma_{máx} = K_t \sigma_{nom}$$

y :

$$K_t = A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

donde :

D/d	A	b
3.00	0.907 20	–0.333 33
2.00	0.932 32	–0.303 04
1.30	0.958 80	–0.272 69
1.20	0.995 90	–0.238 29
1.10	1.016 50	–0.215 48
1.05	1.022 60	–0.191 56
1.01	0.966 89	–0.154 17

FIGURA 2-36

Factores y funciones de concentración del esfuerzo geométrico para una barra plana escalonada en flexión; véase también el archivo APP_C-10.

Fuente: fig. 73 p. 98, R. E. Peterson, Stress Concentration Factors, John Wiley & Sons, 1975, con autorización del editor.

$$K_t = Ax^b \tag{2.32b}$$

donde x representa la variable independiente o, en este caso, r/d. Los valores del coeficiente A y el exponente b, para cualquier valor de D/d, están determinados por la regresión no lineal sobre varios datos puntuales tomados de los datos experimentales. Los valores que resultan de A y b, para varias magnitudes de la segunda variable independiente D/d, se dan en la tabla dentro de la figura. A y b para otros valores de D/d se pueden interpolar. El nombre del archivo que evalúa estas funciones y las interpola también está anotado en esta figura y en el apéndice G para cada uno de los 14 casos mostrados allí.

Las gráficas y funciones de concentración de esfuerzos incluidas en el apéndice G, junto con sus archivos correspondientes, son útiles en el diseño de piezas de máquinas durante todo este texto y en la práctica de la ingeniería. Para casos de carga y geometría no cubiertos en el apéndice G de este texto, véase las referencias 3 y 4.

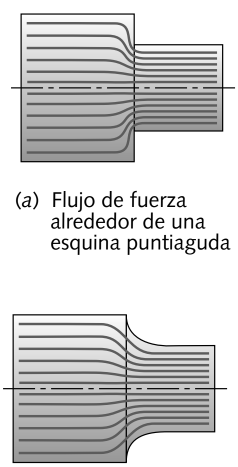
Diseño para eliminar concentraciones de esfuerzos

Con frecuencia se necesitan geometrías complicadas para el correcto funcionamiento de las piezas de una máquina. Por ejemplo, un cigüeñal debe tener contornos adecuados para que cumpla con su objetivo. El diseñador siempre enfrenta el problema de las concentraciones de esfuerzos en secciones que sufren cambios abruptos de forma. Lo mejor que se puede hacer es minimizar sus efectos. El estudio de las curvas de concentración de esfuerzos para varias geometrías del apéndice G muestra que, en general, cuanto más puntiaguda sea la esquina y más grande sea la magnitud del cambio en el contorno, peor será la concentración del esfuerzo. Para la barra escalonada de la figura 2-36, las razones D/d más grandes y las razones r/d más pequeñas generarán las peores concentraciones de esfuerzos. A partir de estas observaciones, podemos establecer algunos lineamientos generales de diseño para minimizar las concentraciones de esfuerzos.

1. Si es posible, evite cambios abruptos y/o de gran magnitud en la sección transversal.
2. Evite por completo las esquinas puntiagudas y procure los radios de transición más grandes posibles entre las superficies de diferentes contornos.

Es conveniente establecer estos lineamientos y mejor cumplirlos; sin embargo, con frecuencia hay restricciones en el diseño práctico que impiden seguirlos estrictamente. En las figuras 2-37 a 2-39 se muestran algunos ejemplos de diseños, buenos y malos, de concentración de esfuerzos, junto con algunos consejos comunes que utilizan los diseñadores experimentados para mejorar la situación.

Analogía fuerza-flujo La figura 2-37*a* ilustra un eje con un escalón abrupto y una esquina puntiaguda, en tanto que la figura 2-37*b* muestra el mismo paso en el eje con un radio de transición grande. Un modo útil para visualizar la diferencia en los estados de esfuerzos de los contornos de partes como éstas es usar la analogía “fuerza-flujo”, la cual considera que las fuerzas (y por lo tanto los esfuerzos) fluyen alrededor de los contornos de manera similar al flujo de un fluido ideal incompresible dentro de una tubería o un ducto de contorno cambiante. (Véase también la figura 2-34). Un angostamiento súbito de la tubería o ducto causa un incremento en la velocidad del fluido en el estrechamiento, para mantener el flujo constante. El perfil de la velocidad “se concentra” entonces en una región más pequeña. Se utilizan formas aerodinámicas en tuberías y ductos (y sobre objetos que son empujados en un medio fluido, como aviones y botes) para reducir la turbulencia y la resistencia al flujo. Al “aerodinamizar” los contornos de la pieza (por lo menos internamente) se pueden obtener beneficios similares en la reducción de las concentraciones de esfuerzos. Los contornos de fuerza-flujo en el paso abrupto de transición de la figura 2-37*a* están más concentrados que en el diseño de la figura 2-37*b*.

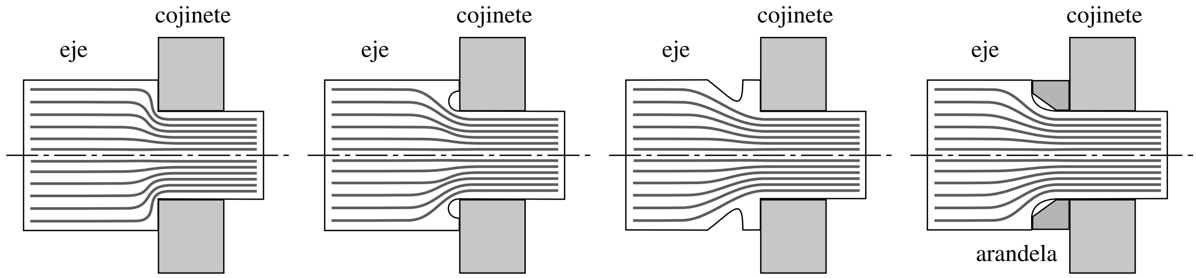


(*a*) Flujo de fuerza alrededor de una esquina puntiaguda

(*b*) Flujo de fuerza alrededor de una esquina con curva

FIGURA 2-37

Analogía fuerza-flujo de piezas con contorno



(*a*) Concentración de esfuerzos en una esquina puntiaguda (*b*) Concentración de esfuerzos reducida por el radio (*c*) Concentración de esfuerzos reducida con ranuras (*d*) Concentración de esfuerzos reducida con arandela

FIGURA 2-38

Modificaciones al diseño para reducir las concentraciones de esfuerzos en una esquina puntiaguda

El ejemplo de la figura 2-38 es un eje escalonado, al cual se adaptó un cojinete de bolas. Se necesita un escalón para colocar el cojinete axial y radialmente sobre el diámetro del eje. Los cojinetes comerciales de bolas y rodillos tienen radios muy pequeños en sus esquinas, lo cual obliga al diseñador a crear una esquina bastante puntiaguda en el escalón del eje. Para reducir la concentración de esfuerzos en el escalón (*a*), se requiere un radio más grande que el que permitiría el cojinete. En la figura se ilustran tres posibles modificaciones al diseño para mejorar el flujo de fuerza alrededor del escalón. En el primer diseño (*b*) se remueve material en la esquina para aumentar el radio y entonces "regresar" al contorno para dar la superficie axial necesaria para posicionar la superficie del cojinete. El segundo enfoque (*c*) elimina el material detrás del escalón para mejorar la fuerza aerodinámica. El tercer enfoque (*d*) proporciona a la esquina un radio adecuadamente grande, y agrega una arandela especial que tiende un puente sobre el radio para dar un asiento al cojinete. La concentración de esfuerzos se reduce en cada caso en relación con el diseño original de esquina puntiaguda.

En la figura 2-39*a* se presenta un enfoque similar de remoción de material para mejorar el flujo de fuerza, el cual muestra una ranura con un broche de aro en un eje con ranuras de alivio adicionales ubicadas en cada lado para suavizar la transición efectiva de la dimensión de la sección transversal. El efecto sobre las líneas del flujo de fuerza es similar al mostrado en la figura 2-38*c*. Otra fuente común de concentraciones de esfuerzos es la cuña que se necesita para aplicar torque a engranes, poleas, volantes, etcétera, de un eje. La ranura de la cuña tiene esquinas puntiagudas en las ubicaciones de flexión y esfuerzos de torsión máximos. Hay diferentes tipos de cuñas; las más comunes son la cuña cuadrada y la cuña Woodruff de segmento circular, que se ilustran en las figuras 2-38*b* y 2-38*c*. Para mayor información sobre cuñas y cuñeros, véase la sección 6.10.

Otro ejemplo de remoción de material para reducir la concentración de esfuerzos (que no se ilustra) es la reducción del diámetro de la porción sin cuerda de un tornillo a una dimensión menor que el de la raíz de la cuerda. Puesto que los contornos de la cuerda crean concentraciones de esfuerzos grandes, la estrategia consiste en mantener las líneas del flujo de fuerza dentro de la porción (sin cuerda) sólida del tornillo.

Estos ejemplos muestran la utilidad de la *analogía del flujo de fuerza* como medio para mejorar cualitativamente el diseño de piezas de máquinas para reducir las concentraciones de esfuerzos. El diseñador debería intentar minimizar los cambios puntiagudos en los contornos de las líneas internas del flujo de fuerza mediante la selección adecuada de la forma de la parte.

2.16 COMPRESIÓN AXIAL: COLUMNAS

En la sección 2.7 se vieron los esfuerzos y las deflexiones provocadas por la tensión axial, y se desarrollaron ecuaciones para su cálculo, las cuales se repiten aquí para nuestra conveniencia.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \tag{2.7}$$

$$\Delta s = \frac{Pl}{AE} \tag{2.8}$$

Cuando se invierte la dirección de la carga axial, entonces, como el elemento se pone en compresión, quizá la ecuación 2.7 no sea suficiente por sí sola para determinar la carga de seguridad del elemento. Ahora se trata de una **columna** y puede fallar pandeándose en vez de fallar por compresión. El **pandeo** ocurre repentinamente y sin advertencia, incluso en los materiales dúctiles y, por ende, es uno de los modos de falla más peligrosos. El lector puede comprobar el pandeo por sí mismo tomando entre las palmas de sus manos una goma para borrar de hule y aplicar gradualmente una carga de compresión axial. La goma resistirá la carga hasta un punto donde repentinamente se pandea en forma de arco y colapsa. (Si se siente muy fuerte, usted puede hacer lo mismo con una lata de aluminio).

Razón de esbeltez

Una **columna corta** *fallará a la compresión* como se indica en la figura B-6 (apéndice B) y su esfuerzo de compresión se calcula con la ecuación 2.7. Una **columna intermedia** o una **grande** *fallarán por pandeo* cuando la carga axial aplicada exceda algún valor crítico. El esfuerzo de compresión puede estar **muy por debajo** de la resistencia a la fluencia del material, en el momento del pandeo. El factor que determina si una columna es corta o larga es su **razón de esbeltez** S_r,

$$S_r = \frac{l}{k} \tag{2.33}$$

donde l es la longitud de la columna y k es su *radio de giro*. El **radio de giro** se define como

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \tag{2.34}$$

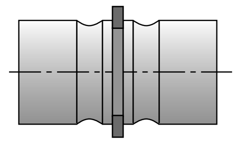
donde I es el *momento de inercia de área* más pequeño (*segundo momento de área*) de la sección transversal de la columna (alrededor de cualquier eje neutral) y A es el *área de la misma sección transversal*.

Columnas cortas

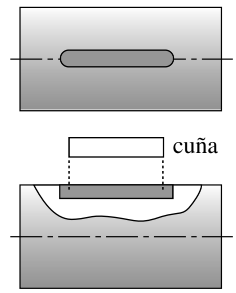
Por lo general, una columna corta se define como aquella cuya razón de esbeltez es menor que aproximadamente 10. La resistencia a la fluencia del material en compresión se usa entonces como el factor limitante a comparar con el esfuerzo calculado en la ecuación 2.7.

Columnas largas

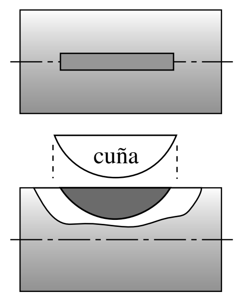
Una columna larga requiere del cálculo de su **carga crítica**. La figura 2-40 muestra una columna delgada con extremos redondeados bajo el efecto de fuerzas de compresión en cada extremo, las cuales son coaxiales y actúan inicialmente a través del centroide



(*a*) Los relieves pueden reducir la concentración de esfuerzos alrededor de la hendidura de la chaveta circular



(*b*) La ranura de una cuña cuadrada crea concentraciones de esfuerzos



(*c*) La ranura de una cuña Woodruff crea concentraciones de esfuerzos

FIGURA 2-39

Concentraciones de esfuerzos en ejes

2

del área de la columna. (Se eliminó una parte de la columna para mostrar la fuerza y el momento de reacción dentro de la columna). La columna se presenta ligeramente flexionada en la dirección y negativa, lo cual desplaza su centroide de área fuera del alineamiento inicial con las fuerzas aplicadas en sus extremos. Este cambio del centroide de área crea un brazo de momento para la fuerza que actúa alrededor y pone el elemento tanto en flexión como en compresión. El momento de flexión tiende a incrementar la deflexión lateral, ¡la cual también incrementa entonces el brazo del momento! Una vez que se excede el valor crítico de la carga P_{cr}, la retroalimentación positiva de este mecanismo causa un pandeo repentino y catastrófico. No hay advertencia previa.

El momento de flexión está dado por

$$M = Py \tag{2.35}$$

Para deflexiones pequeñas de una viga (usando la ecuación 2.17 repetida aquí de la p. 92)

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{2.17}$$

La combinación de las ecuaciones 2.35 y 2.17 produce una ecuación diferencial familiar:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0 \tag{2.36}$$

que tiene la solución bien conocida:

$$y = C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x \tag{2.37a}$$

donde C_1 y C_2 son las constantes de integración que dependen de las restricciones definidas para la columna en la figura 2-40 como $y = 0$ en $x = 0$; $y = 0$ en $x = l$. La sustitución de estas condiciones indica que $C_2 = 0$ y

$$C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} l = 0 \tag{2.37b}$$

Esta ecuación aplica si $C_1 = 0$, pero es una solución nula. Entonces, C_1 debe ser diferente de cero y

$$\operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} l = 0 \tag{2.37c}$$

lo cual es verdadero para

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} l = n\pi; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.37d}$$

La primera carga crítica ocurrirá para $n = 1$, lo cual da

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{2.38a}$$

Esto se conoce como **fórmula de la columna de Euler** para columnas con extremo redondeado o conectadas con pasadores. Observe que la carga crítica es función sólo de la geometría I de la sección transversal de la columna, de su longitud l y del módulo de elasticidad E del material. La **resistencia del material no es un factor**. Utilizar un acero más fuerte (mayor resistencia a la fluencia), por ejemplo, no ayuda en

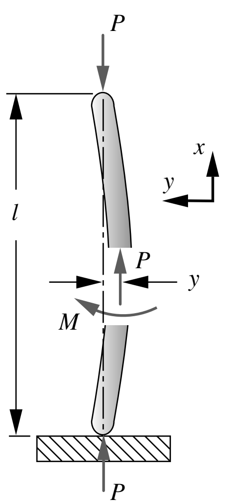


FIGURA 2-40

Pandeo de una columna Euler

nada, ya que todas las aleaciones de acero tienen esencialmente el mismo módulo de elasticidad y, por lo tanto, fallarán con la misma carga crítica sin importar la resistencia a la fluencia.

Al sustituir la ecuación 2.33 y la expresión $I = Ak^2$ de la ecuación 2.34 en la ecuación 2.38*a*:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EAk^2}{l^2} = \frac{\pi^2 EA}{\left(\frac{l}{k}\right)^2} = \frac{\pi^2 EA}{S_r^{\,2}} \tag{2.38b}$$

Si se normaliza la ecuación 2.38*b* por el área de la sección transversal de la columna, se obtiene una expresión para la **carga unitaria crítica,**

$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{S_r^{\,2}} \tag{2.38c}$$

la cual tiene las mismas unidades del esfuerzo o la resistencia. Ésta es la **carga por unidad de área** del extremo de una columna redondeada (o con pasadores) que causará el pandeo. Por consiguiente, representa la resistencia de una columna específica en vez de la resistencia del material del cual está hecha.

Al sustituir la ecuación 2.38*a* en la 2.37*a*, se obtiene la curva de deflexión de esta columna como

$$y = C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \tag{2.39}$$

la cual es la mitad del periodo de una onda senoidal. Note que la aplicación de diferentes condiciones limitantes o **condiciones de extremo** producirán una curva de deflexión y una carga crítica diferentes.

Condiciones de extremo

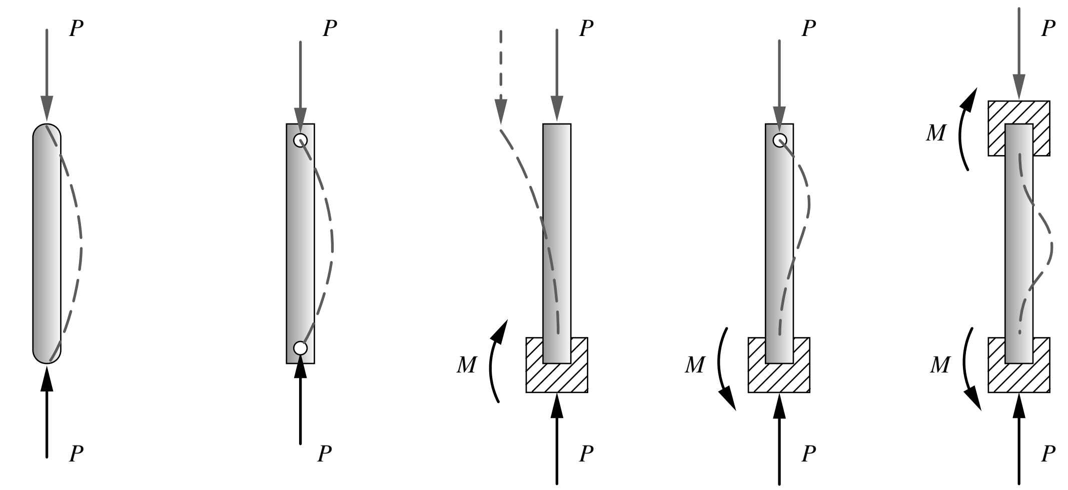
En la figura 2-41 se ilustran varias condiciones de extremos posibles. La condición *redondeado-redondeado* y la condición *articulada-articulada* de las figuras 2-41*a* y 2-41*b* son básicamente las mismas. Cada una de ellas permite que las fuerzas, aunque no los momentos, estén soportadas en sus extremos. Sus restricciones son idénticas, como se describió anteriormente. Sus cargas unitarias críticas se definen con la ecuación 2.38*c* y su deflexión con la ecuación 2.39.

La columna *empotrado-libre* de la figura 2-41*c* soporta una fuerza y un momento en su base y, por lo tanto, controla tanto la deflexión, y, como la pendiente, y', en ese extremo; sin embargo, no controla el movimiento en x ni en y en su punta. Sus restricciones son $y = 0$ y $y' = 0$ en $x = 0$. La sustitución de estas condiciones en la ecuación 2.37*a* da

$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{4S_r^{\,2}} \tag{2.40a}$$

$$y = C_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2l} \tag{2.40b}$$

La curva de deflexión de una columna de Euler empotrada-libre es un cuarto de una onda senoidal, haciéndola efectivamente dos veces más grande que una columna articulada-articulada que tiene la misma sección transversal. Esta columna sólo puede soportar 1/4 de la carga crítica de una columna articulada-articulada. Esta reducción se puede tomar en cuenta usando la longitud efectiva l_{ef} de una columna con condiciones de extremo diferentes de las usadas en una columna articulada-articulada para deducir las ecuaciones de carga crítica.



(*a*) Redondeada-redondeada (*b*) Articulada-articulada (*c*) Empotrada-libre (*d*) Empotrada-articulada (*e*) Empotrada-empotrada

FIGURA 2-41

Varias condiciones de extremo para columnas y sus curvas de deflexión resultante (las cargas aplicadas se muestran en gris; las reacciones, en negro) *(las cargas aplicadas se muestran en gris; las reacciones, en negro)*

La columna *empotrada-articulada* (figura 2-41*d*) tiene una $l_{ef} = 0.707l$ y la columna *empotrada-empotrada* (figura 2-41*e*) tiene una $l_{ef} = 0.5l$. Las restricciones más rígidas hacen que estas columnas se comporten como si fueran más cortas (es decir, más rígidas), que la versión articulada-articulada y, por lo tanto, soportarán más carga. Se sustituye la longitud efectiva adecuada en la ecuación 2.33 (p. 123) para obtener la razón de esbeltez adecuada y usarla en cualquiera de las fórmulas de carga crítica:

$$S_r = \frac{l_{ef}}{k} \tag{2.41}$$

donde l_{ef} toma los valores indicados en la tabla 2-4 para varias condiciones de extremo. Observe que las condiciones *empotrada-articulada* y *empotrada-empotrada* tienen valores teóricos de l_{ef} de $0.5l$ y $0.707l$ respectivamente, pero estos valores rara vez se usan porque es muy difícil obtener una junta fija que no permita **ningún** cambio en la pendiente en el extremo de la columna. Las juntas soldadas normalmente permiten alguna deflexión angular, lo cual depende de la rigidez de la estructura a la cual está soldada la columna.

Tabla 2-4 Condiciones de extremo y factores de longitud efectiva de la columna

Condiciones de extremo	Valores teóricos	Recomendados por la AISC*	Valores conservadores
Redondeada-redondeada	$l_{ef} = l$	$l_{ef} = l$	$l_{ef} = l$
Articulada-articulada	$l_{ef} = l$	$l_{ef} = l$	$l_{ef} = l$
Empotrada-libre	$l_{ef} = 2l$	$l_{ef} = 2.1l$	$l_{ef} = 2.4l$
Empotrada-articulada	$l_{ef} = 0.707l$	$l_{ef} = 0.80l$	$l_{ef} = l$
Empotrada-empotrada	$l_{ef} = 0.5l$	$l_{ef} = 0.65l$	$l_{ef} = l$

En el análisis teórico también se supone que la carga está perfectamente centrada en el eje de la columna. Esta condición rara vez se da en la práctica. Cualquier excentricidad en la carga causará un momento y creará mayores deflexiones de las que predice el modelo. Por tales motivos, la AISC* sugiere valores mayores para la l_{ef}, mientras que los teóricos y algunos diseñadores utilizan incluso valores más conservadores, como los mostrados en la tercera columna de la tabla 2-4. El problema de las columnas cargadas excéntricamente se estudia en una sección posterior.

2

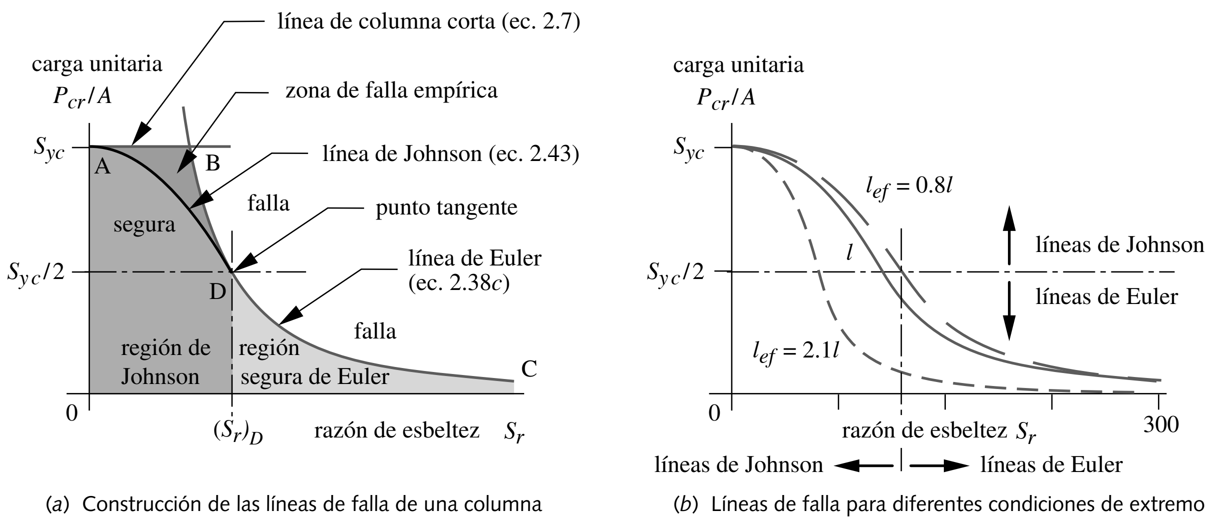
Columnas intermedias

Las ecuaciones 2.7 (p. 82) y 2.38*c* (p. 125) están graficadas en la figura 2-42, como una función de la razón de esbeltez. La resistencia a la fluencia por compresión del material, S_{yc}, se usa como el valor de σ_x en las ecuaciones 2.7 y la carga unitaria crítica de la ecuación 2.38*c* se grafica sobre el mismo eje como la resistencia del material. La envoltura *OABCO* definida por estas dos líneas y los ejes parecería describir una región segura para las cargas unitarias de la columna. Sin embargo, los experimentos han demostrado que las columnas cargadas dentro de esta aparente área de seguridad algunas veces fallan. El problema surge cuando las cargas unitarias se encuentran en la región *ABDA*, cerca de la intersección de las dos curvas en el punto *B*. Por su parte, J. B. Johnson sugiere adecuar una curva parabólica entre el punto *A* y el punto tangente *D* sobre la curva de Euler (ecuación 2.38*c*, p. 125), la cual excluye la zona de falla empírica. El punto *D* se toma usualmente en la intersección de la curva de Euler y una línea horizontal en S_{yc} / 2. El valor de $(S_r)_D$ correspondiente a este punto se encuentra con la ecuación 2.38*c*.

$$\frac{S_{yc}}{2} = \frac{\pi^2 E}{S_r^{\,2}}$$

$$\left(S_r\right)_D = \pi\sqrt{\frac{2E}{S_{yc}}} \tag{2.42}$$

* American Institute of Steel Construction, en su *Manual of Steel Construction*.



(*a*) Construcción de las líneas de falla de una columna (*b*) Líneas de falla para diferentes condiciones de extremo

FIGURA 2-42

Líneas de falla en una columna de Euler, de Johnson y corta

La ecuación de la parábola ajustada entre los puntos A y D es

$$\frac{P_{cr}}{A} = S_{yc} - \frac{1}{E}\left(\frac{S_{yc}S_r}{2\pi}\right)^2 \tag{2.43}$$

Si las ecuaciones 2.38*c* y 2.43 se toman juntas en sus regiones adecuadas, proporcionan un modelo de falla razonable para todas las columnas con cargas concéntricas. Si la razón de esbeltez es $\leq (S_r)_D$, use la ecuación 2.43, si no, use la ecuación 2.38*c*. Observe que la ecuación 2.43 es tanto válida como conservadora para columnas cortas. Las ecuaciones 2.38*c* y 2.43 pronostican la falla en las cargas unitarias críticas calculadas, de modo que se debe aplicar un factor de seguridad adecuado al resultado para reducir adecuadamente la carga permitida.

El archivo COLMPLOT calcula la carga crítica y grafica las curvas de falla de la columna de la figura 2-42, para cualquier opción de S_{yc}, S_r, E y el factor de condiciones de extremo. También sirve para verificar el diseño de cualquier columna con carga concéntrica o para explorar decisiones de diseño. El lector puede experimentar con este programa si cambia los valores de los factores anteriores y observando los efectos sobre las curvas graficadas.

EJEMPLO 2-11

Diseño de una columna con carga concéntrica

Problema **Se va a levantar con gato una casa de playa a 10 pies por encima del suelo, la cual está colocada sobre columnas de acero. El peso estimado que debe soportar cada una de las columnas es de 200 000 lb. Se deben considerar dos diseños, uno que use tubos cuadrados de acero y otro que use tubos redondos de acero.**

Se proporciona **Diseñe las columnas usando un factor de seguridad de 4. Determine las dimensiones más exteriores de las columnas para cada perfil, suponiendo un espesor de la pared del tubo de 0.5 in en cada caso. La aleación de acero tiene un esfuerzo de fluencia a la compresión S_{yc} = 60 kpsi.**

Suposiciones **La carga es concéntrica y las columnas son verticales. Sus bases se harán de concreto y la parte de arriba estará libre, creando condiciones de extremo para columna empotrada-libre. Utilice los factores de condiciones de extremo recomendados por la AISC.**

Solución **Véase la tabla 2-5, partes 1 y 2.**

1. Este problema, como se dijo, requiere una solución iterativa debido a que se especificó la carga permisible y se requieren las dimensiones de la sección transversal de la columna. Si se deseara lo contrario, se podrían resolver directamente las ecuaciones 2.38*c* (p. 125), 2.42 (p. 127) y 2.43 (p. 128) para determinar la carga permisible de cualquier geometría seleccionada.

2. Para resolver este problema usando tan sólo una calculadora, se requiere suponer una dimensión de la sección transversal, como el diámetro exterior, y calcular las propiedades de la sección transversal del área A, el segundo momento del área I, la radio de giro k y la razón de esbeltez l_{ef}/k; luego, se deben usar estos valores en las ecuaciones 2.38*c*, 2.42 y 2.43 para determinar la carga permisible después de la aplicación del factor de seguridad. No se sabe en principio si se trata de una columna Johnson o Euler, de modo que con la ecuación 2.42 se puede obtener la razón de esbeltez $(S_r)_D$ en el punto tangente, y compararla con la S_r real de la columna para decidir si se requiere la ecuación de Johnson o de Euler.

3. Suponga un diámetro exterior de 8 in para un primer intento, en la columna redonda. El área A, el segundo momento del área I y el radio de giro k para un espesor de la pared de 0.5 in del tubo redondo del diámetro exterior son

$$A = \frac{\pi\left(d_o^2 - d_i^2\right)}{4} = \frac{\pi(64 - 49)}{4} = 11.781 \text{ in}^2$$

$$I = \frac{\pi\left(d_o^4 - d_i^4\right)}{64} = \frac{\pi(4096 - 2401)}{64} = 83.203 \text{ in}^4 \qquad (a)$$

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{83.203}{11.781}} = 2.658 \text{ in}$$

4. Calcule la razón de esbeltez S_r para esta columna y compárela con el valor $(S_r)_D$ correspondiente al punto tangente entre las curvas de Euler y de Johnson (ecuación 2.42). Use el valor recomendado por la AISC (tabla 2-4, p. 126) para una columna *empotrada-libre* de $l_{ef} = 2.1\, l$.

$$S_r = \frac{l_{ef}}{k} = \frac{120(2.1)}{2.658} = 94.825$$

$$\left(S_r\right)_D = \pi\sqrt{\frac{2E}{S_y}} = \pi\sqrt{\frac{2(30E6)}{60000}} = 99.346 \qquad (b)$$

5. Esta razón de esbeltez S_r de la columna está a la izquierda del punto tangente y, por lo tanto, está en la región de Johnson en la figura 2-42 (p. 127), entonces, use la ecuación 2.43 (p. 128) para obtener la carga crítica P_{cr} y aplique el factor de seguridad para determinar la carga permisible $P_{permisible}$.

$$P_{cr} = A\left[S_y - \frac{1}{E}\left(\frac{S_y S_r}{2\pi}\right)^2\right] = 11.8\left\{6E4 - \frac{1}{3E7}\left[\frac{6E4(94.83)}{2\pi}\right]^2\right\} = 384\,866 \text{ lb}$$

$$P_{permisible} = \frac{P_{cr}}{SF} = \frac{384\,866}{4} = 96\,217 \text{ lb} \qquad (c)$$

6. Esta carga está sustancialmente por debajo de la requerida de 200 000 lb, de modo que se deben repetir los cálculos de los pasos 3 a 5 usando mayores diámetros exteriores (o paredes más gruesas) hasta que se obtenga una carga permisible adecuada. El problema también requiere el diseño de una columna de sección cuadrada, la cual sólo cambia las ecuaciones (a) en el paso 3.

7. Éste es un proceso de solución claramente tedioso cuando únicamente se dispone de una calculadora y pide con urgencia un mejor enfoque. Un paquete para resolver ecuaciones o una hoja de cálculo pueden ser una mejor herramienta. Para este problema se necesita un solucionador iterativo que permita especificar la carga permisible deseable y que el programa itere hasta que llegue al valor del diámetro exterior (D_{ext}) que soporte la carga deseada, dado un espesor de pared supuesto. Es necesario suponer valores de uno o más de los parámetros desconocidos para iniciar la iteración. Los archivos EX04-10 se encuentran en el CD-ROM.

8. Estos programas permiten solucionar diseños para secciones transversales cuadradas o redondas, y deciden si usan las ecuaciones de Euler o las de Johnson, según los valores relativos de las razones de esbeltez calculadas en el paso 4. La solución completa toma sólo unos segundos. La parte 1 de la tabla 2-5 muestra la solución de la columna circular y la tabla 2-5 parte 2 muestra la solución de la columna cuadrada.

Tabla 2-5 Ejemplo 2-11 – Diseño de columnas
Parte 1 de 2 *Diseño de columna redonda*

Entrada	Variable	Salida	Unidad	Comentario
				Datos de entrada
'circular	*Perfil*			perfil de columna 'cuadrada o 'circular
120	*L*		in	longitud de la columna
0.5	*Pared*		in	espesor de la pared de la columna
2.1	*extremo*			factor de condición de extremo de la AISC
30*E*6	*E*		psi	módulo de Young
60 000	*Sy*		psi	esfuerzo de fluencia a la compresión
4	*FS*			factor de seguridad
200 000	*Permisible*		lb	carga permisible deseada
				Datos de salida
G *	*Dext*	11.35	in	diámetro exterior de la columna
	Lef	252	in	longitud efectiva de la columna
	Sr	65.60		razón de esbeltez
	Srd	99.35		punto de tangencia en S_r
	Carga	46 921	lb	carga crítica unitaria
	Johnson	46 921	lb	carga unitaria de Johnson
	Euler	68 811	lb	carga unitaria de Euler
	Din	10.35	in	diámetro interior de la columna
	k	3.84	in	radio de giro
	I	251.63	in^4	segundo momento del área
	A	17.05	in^2	área de la sección transversal

* Indica que se requiere un valor supuesto para iniciar la iteración.

9. Una columna redonda de 11.3 in de diámetro y una pared de 0.5 in es la adecuada para la carga especificada. Ésta es una columna de Johnson con una razón de esbeltez efectiva de 65.6 y un peso de 579 lb. La fórmula de Euler pronostica una carga crítica de aproximadamente 1.5 veces la de la fórmula de Johnson, de modo que esta columna estaría en la “región peligrosa” *ABDA* de la figura 2-42 (p. 127), si se usara la fórmula de Euler. Si se selecciona una columna con pared de 0.5 in y sección transversal cuadrada, su dimensión exterior será de 9.3 in para la misma razón de esbeltez y carga permisible, aunque la columna pesará más de 600 lb. Una columna cuadrada siempre será más fuerte que una redonda con los mismos dimensión exterior y espesor de la pared, ya que su área, su segundo momento de área y su radio de giro son más grandes debido a que el material de las esquinas tiene un radio más grande. El peso adicional del material también la hace más costosa que la columna redonda con la misma resistencia.

Columnas excéntricas

La discusión anterior sobre la falla de la columna supuso que la carga aplicada era concéntrica en la columna y pasaba exactamente a través de su centroide. Aun cuando esta

Tabla 2-5 **Ejemplo 2-11 – Diseño de columnas**
Parte 2 de 2 *Diseño de columna cuadrada*

Entrada	Variable	Salida	Unidad	Comentario
				Datos de entrada
'cuadrada	*Perfil*			perfil de columna 'cuadrada o 'circular
120	*L*		in	longitud de la columna
0.5	*Pared*		in	espesor de la pared de la columna
2.1	*extremo*			factor de condición de extremo de la AISC
30*E*6	*E*		psi	módulo de Young
60 000	*Sy*		psi	esfuerzo de fluencia a la compresión
4	*FS*			factor de seguridad
200 000	*Permisible*		lb	carga permisible deseada
				Datos de salida
G *	*Dext*	9.34	in	diámetro exterior de la columna
	Lef	252	in	longitud efectiva de la columna
	Sr	69.69		razón de esbeltez S_r
	Srd	99.35		punto de tangencia en
	Carga	45 235	lb	carga unitaria crítica
	Johnson	45 235	lb	carga unitaria de Johnson
	Euler	60 956	lb	carga unitaria de Euler
	Din	8.34	in	diámetro interior de la columna
	k	3.62	in	radio de giro
	I	231.21	in^4	segundo momento del área
	A	17.69	in^2	área de la sección transversal

* Indica que se requiere un valor supuesto para iniciar la iteración.

condición es deseable, rara vez ocurre en la práctica, porque las tolerancias de manufactura suelen provocar que la carga sea un poco excéntrica con el eje centroidal de la columna. En otros casos, el diseño puede incluir deliberadamente una excentricidad e, como se muestra en la figura 2-43. Cualquiera que sea la causa, la excentricidad cambia la situación de carga significativamente por la superposición de un momento de flexión Pe sobre la carga axial P. El momento de flexión causa una deflexión lateral y, la cual incrementa a la vez el brazo del momento a $e + y$. Al sumar los momentos con respecto al punto A,

$$\sum M_A = -M + Pe + Py = -M + P(e + y) = 0 \qquad (2.44a)$$

Al sustituir la ecuación 2.17 (p. 92) se produce la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = -\frac{Pe}{EI} \qquad (2.44b)$$

Las restricciones son $x = 0$, $y = 0$ y $x = l / 2$, $dy/dx = 0$, lo cual nos da la solución para la deflexión en la mitad de la longitud como

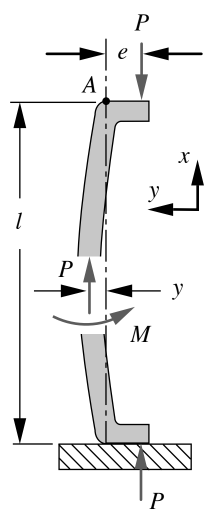


FIGURA 2-43
Una columna cargada excéntricamente

$$y = e\left[\sec\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) - 1\right] \tag{2.45a}$$

2

y para el momento flexionante máximo,

$$M_{máx} = -P(e + y) = -Pe \sec\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \tag{2.45b}$$

El esfuerzo a la compresión es

$$\sigma_c = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{Ak^2} \tag{2.46a}$$

Al sustituir la expresión del momento máximo de la ecuación 2.45*b*:

$$\sigma_c = \frac{P}{A}\left[1 + \left(\frac{ec}{k^2}\right)\sec\left(\frac{l}{k}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)\right] \tag{2.46b}$$

La falla ocurrirá en la mitad de la longitud cuando el esfuerzo a la compresión máximo exceda la resistencia a la fluencia del material, si es dúctil, o su resistencia a la fractura, si es frágil. Haciendo a σ_c igual a la resistencia a la fluencia de compresión para un material dúctil, se obtiene una expresión para la carga unitaria crítica de una columna excéntrica:

$$\frac{P}{A} = \frac{S_{yc}}{1 + \left(\frac{ec}{k^2}\right)\sec\left(\frac{l_{ef}}{k}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)} \tag{2.46c}$$

Esto se conoce como la **fórmula de columna secante**. Se usa el factor adecuado de condición de extremo de la tabla 2-4 (p. 126) para obtener la longitud efectiva l_{ef}, la cual toma en cuenta las condiciones de frontera de la columna. El radio de giro k de la ecuación 2.46*c* se toma con respecto al eje alrededor del cual actúa el momento flexionante aplicado. Si la sección transversal de la columna es asimétrica y el momento flexionante no actúa alrededor del eje más débil, se debe revisar la falla en columnas concéntricas alrededor del eje que tiene la k más pequeña, así como para la falla provocada por la carga excéntrica en el plano de flexión.

La fracción ec / k^2 en la ecuación 2.46*c* se llama **razón de excentricidad** E_r de la columna. Un estudio realizado en 1933* concluyó que se debe suponer un valor de 0.025 para la razón de excentricidad que tome en cuenta las variaciones típicas de la excentricidad de la carga en las columnas de Euler cargadas concéntricamente. Sin embargo, si la columna se encuentra en el rango de Johnson, se aplicarán las fórmulas de Johnson para las E_r menores de 0.1 aproximadamente. (Véase la figura 2-44 y la siguiente explicación).

La ecuación 2.46*c* es una función difícil de evaluar. No sólo requiere una solución iterativa, sino que la función secante vaya a $+\infty$, causando problemas de cálculo. También produce resultados incorrectos cuando la función secante se vuelve negativa. El archivo SECANT calcula y grafica la ecuación 2.46*c* (así como las fórmulas de Euler y de Johnson), en un intervalo de razones de esbeltez para cualesquiera razón de excentricidad y parámetros de la sección transversal de columna redonda. Con este programa también se calculan las columnas no redondas, designando el área A y el momento de inercia I como valores de entrada, en vez de usar las dimensiones lineales de la columna. Cuando use este programa, tenga cuidado al graficar la función resultante y observe las regiones, si existe alguna, donde los resultados son incorrectos debido al comportamiento de la secante. Esto será evidente en las gráficas.

* Reporte de un comité especial sobre una investigación en columnas de acero, *Trans. Amer. Soc. Civil Engrs.*, 98 (1933).

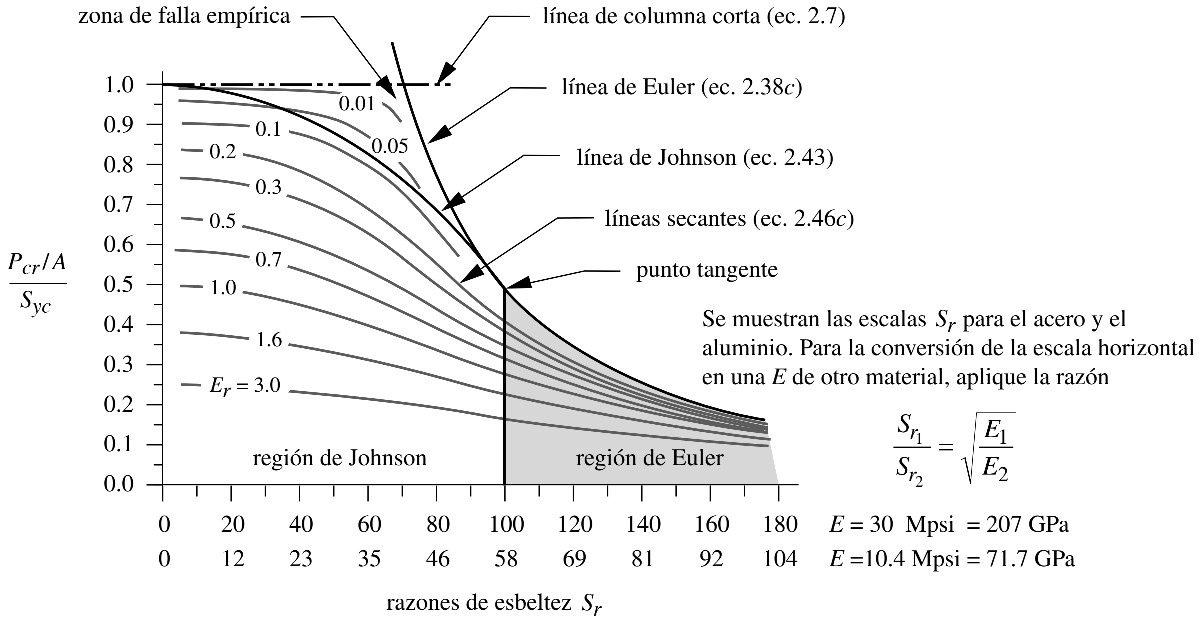


FIGURA 2-44

Líneas secantes superpuestas sobre las líneas de falla de columnas cortas de Euler y Johnson

La figura 2-44 muestra las gráficas de la ecuación 2.46*c* del programa SECANT (en intervalos válidos†) superpuestas sobre las curvas de Euler-Johnson y las gráficas de columnas cortas de la figura 2-42. Estas curvas están normalizadas con la resistencia a la fluencia de compresión del material. Las formas de las curvas son las mismas para el módulo de elasticidad E de cualquier material; tan sólo cambia la escala horizontal. En la figura se observa la escala de la razón S_r para los valores de la razón E de diferentes materiales.

Todas las curvas secantes son asintóticas respecto de la curva de Euler a lo largo de S_r. Para una razón excéntrica igual a cero, la curva secante coincide con la curva de Euler hasta aproximadamente el nivel de la línea de una columna corta. Cuando la razón de excentricidad es más pequeña que 0.1, aproximadamente, las funciones secantes destacan en la región de falla empírica en columnas concéntricas, designada como *ABDA* en la figura 2-42 (p. 127), es decir, se mueven por arriba de la línea de Johnson. Esto indica que **para columnas excéntricas intermedias con razones de excentricidad pequeñas**, la *fórmula de Johnson para columnas concéntricas (en vez de la fórmula de secante) debe ser el criterio de falla* y tiene que calcularse.

2.17 ESFUERZOS EN CILINDROS

Los cilindros se utilizan con frecuencia como recipientes o tuberías de presión y pueden estar sometidos a presiones internas y/o externas, como se ilustra en la figura 2-45. Algunos ejemplos son los cilindros de aire o los cilindros hidráulicos, los tanques de almacenamiento de fluidos y las tuberías, así como los cañones de armas de fuego. Algunos de estos dispositivos están abiertos por los extremos y otros están cerrados. Si es de extremos abiertos, en las paredes del cilindro existe un estado de esfuerzos bidimensional, con componentes de esfuerzo radial y tangencial (se trata de un aro). Si es de extremos cerrados, también estará presente un esfuerzo tridimensional llamado longitudinal o axial. Estos tres esfuerzos aplicados son mutuamente ortogonales y son principales, ya que no existe cortante aplicado por la presión uniformemente distribuida.

† En la figura 2-44 observe que las curvas de secantes para razones de excentricidad 0.01, 0.05 y 0.1 terminan en forma abrupta. Aquí es donde ocurre la primera discontinuidad de la función secante y los datos más allá de estos puntos son inválidos hasta que la secante se vuelva positiva de nuevo. Véase las gráficas del archivo SECANT para una mayor explicación.

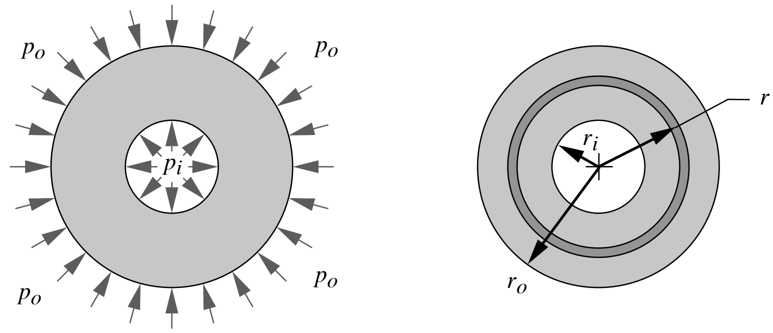


FIGURA 2-45

Cilindro sometido a presiones interna y externa

Cilindros de pared gruesa

En la figura 2-45 se muestra un elemento diferencial anular en el radio r. Los esfuerzos radial y tangencial sobre el elemento de un cilindro con extremos abiertos se obtienen mediante la ecuación de Lame:

$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} + \frac{r_i^2 r_o^2 (p_i - p_o)}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)} \tag{2.47a}$$

$$\sigma_r = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} - \frac{r_i^2 r_o^2 (p_i - p_o)}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)} \tag{2.47b}$$

donde r_i y r_o son los radios interior y exterior, p_i y p_o son las presiones interna y externa, respectivamente, y r es el radio del punto de interés. Note que la variación de estos esfuerzos, a través del espesor de la pared, no es lineal.

Si los extremos del cilindro están cerrados, el esfuerzo axial en la pared es:

$$\sigma_a = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \tag{2.47c}$$

Advierta la ausencia de r en esta ecuación cuando el esfuerzo axial es uniforme a través del espesor de la pared.

Si la presión externa $p_o = 0$, entonces, la ecuación se reduce a

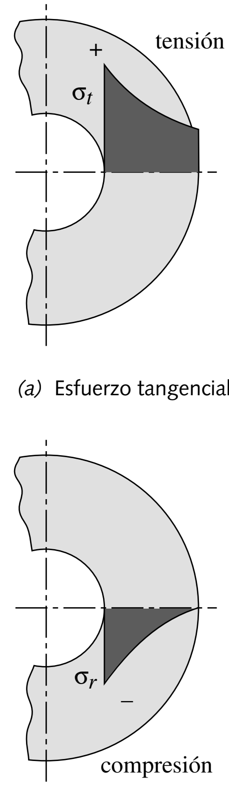
$$\sigma_t = \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right) \tag{2.48a}$$

$$\sigma_r = \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right) \tag{2.48b}$$

y para extremos cerrados:

$$\sigma_a = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \tag{2.48c}$$

En la figura 2-46, se muestran las distribuciones de estos esfuerzos a través del espesor de la pared para $p_o = 0$. Con presión interna, ambos son máximos en la superficie interior. El esfuerzo tangencial (aro) es de tensión y el esfuerzo radial es de compresión. Cuando dos piezas en interferencia se presionan o se encogen para ajustarse, los esfuerzos desarrollados en las dos piezas se definen usando las ecuaciones 2.47. Sus deflexiones elásticas mutuas crean presión interna sobre la parte exterior, y presión externa sobre la parte interior. Hay más análisis de los ajustes por interferencia en la sección 6.12.



(a) Esfuerzo tangencial

(b) Esfuerzo radial

FIGURA 2-46

Distribuciones de esfuerzos tangencial y radial en la pared de un cilindro con presión interna

2

Cilindros de pared delgada

Cuando el espesor de la pared es menor que 1/10 aproximadamente del radio, se puede considerar un cilindro de pared delgada. La distribución de esfuerzos a través de la pared delgada es casi uniforme y la expresión del esfuerzo se simplifica a

$$\sigma_t = \frac{pr}{t} \tag{2.49a}$$

$$\sigma_r = 0 \tag{2.49b}$$

y para extremos cerrados:

$$\sigma_a = \frac{pr}{2t} \tag{2.49c}$$

Todas estas ecuaciones son válidas únicamente en ubicaciones eliminadas de cualquier concentración de esfuerzos local o cambios de sección. Para el diseño real de recipientes a presión, consulte el Código de Calderas de ASME para obtener información más completa y lineamientos para un diseño seguro. Los recipientes a presión llegan a ser extremadamente peligrosos, incluso a presiones relativamente bajas, si el volumen almacenado es grande y el medio presurizado es compresible. En una falla se podrían liberar repentinamente grandes cantidades de energía, lo cual es un riesgo de lesiones muy serias.

2.18 ESTUDIOS DE CASO DE ESFUERZO ESTÁTICO Y ANÁLISIS DE DEFLEXIÓN

Se presentará ahora la continuación del estudio de algunos casos de diseño para dispositivos cuyas fuerzas se analizaron en los estudios de caso del capítulo 1. Para un diseño determinado se usará el mismo número del estudio de caso a lo largo del texto, y los agregados sucesivos se identificarán por sufijos alfabéticos. Por ejemplo, en el capítulo 1 se presentaron seis estudios de caso identificados como 1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 5B. Este capítulo continuará los estudios de caso 1 a 4 como 1B, 2B, 3B y 4B. Algunos de éstos continuarán en capítulos posteriores y se les asignarán letras identificadoras sucesivas, de modo que el lector pueda revisar los temas anteriores de cualquier estudio de caso, remitiéndose a su número de caso común. Para localizar cada parte, véase la lista de estudios de caso en la tabla de contenido.

Puesto que los esfuerzos sobre una pieza varían continuamente, se deben hacer algunos juicios de ingeniería para verificar dónde van a estar los más grandes y calcularlos para dichas ubicaciones. No se tiene tiempo para calcular los esfuerzos en un número de

ubicaciones infinito. Puesto que las geometrías de tales piezas son bastante complicadas, lejos de hacer un análisis de esfuerzo completo de elementos finitos, se debe hacer una simplificación razonable para modelarlas. El objetivo consiste en generar rápidamente alguna información acerca del estado de esfuerzos del diseño, para determinar su viabilidad antes de invertir más tiempo en un análisis completo.

ESTUDIO DE CASO 1B

Esfuerzo en la palanca del freno de una bicicleta y análisis de deflexión

Problema **Determine los esfuerzos y las deflexiones en los puntos críticos en la palanca del freno que se muestra en las figuras A-1 (repetidas aquí) y la 2-47.**

Se proporciona **La geometría y la carga se conocen por el estudio de caso 1A (p. 9). El perno del pivote tiene 8 mm de diámetro. La mano humana promedio desarrolla una fuerza de sujeción de alrededor de 267 N (60 lb), en la posición de la palanca mostrada.**

Suposiciones **Los puntos de falla más probables son los dos orificios donde se insertan los pernos y la raíz de la viga en voladizo que representa la palanca manual. La sección transversal de la palanca manual es esencialmente circular.**

Solución **Véase las figuras 2-47 a 2-48.**

1. Se puede modelar una porción de la palanca de 14.3 mm de diámetro, como una viga en voladizo con una carga concentrada intermedia, como se ilustra en la figura 2-48, si se supone que el bloque más masivo en el extremo izquierdo sirve como "suelo plano". La ubicación más probable de falla es la raíz de la porción manual redonda, donde el cortante y el momento son máximos, como se indica en la figura 2-24 (p. 98) de este modelo que se analizó para reacciones, momentos y deflexiones en los ejemplos 1-3 y 2-5. A partir de $\Sigma F = 0$ y $\Sigma M = 0$, se encuentra que $R_1 = 267$ N y $M_1 = 20.34$ N-m. El esfuerzo de flexión a la tensión en la raíz de la viga en voladizo es máximo en la fibra más externa (en el punto P, como se muestra en la figura 2-47) y se obtiene con la ecuación 2.11b:

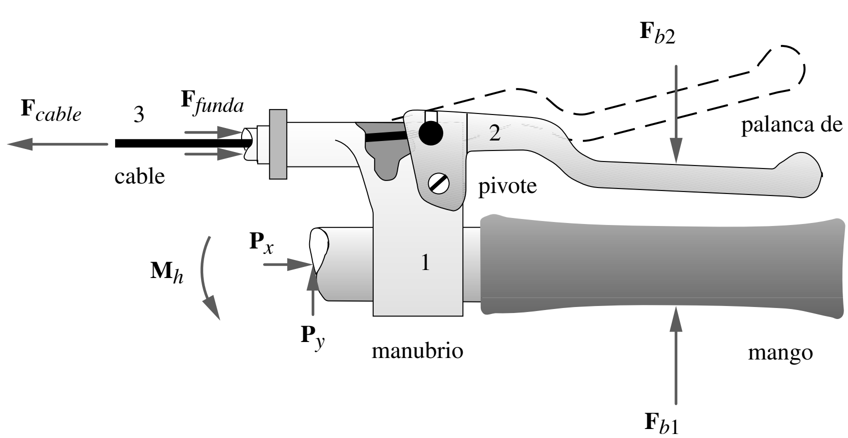


FIGURA 1-1 Repetida

Montaje de la palanca de frenos de una bicicleta

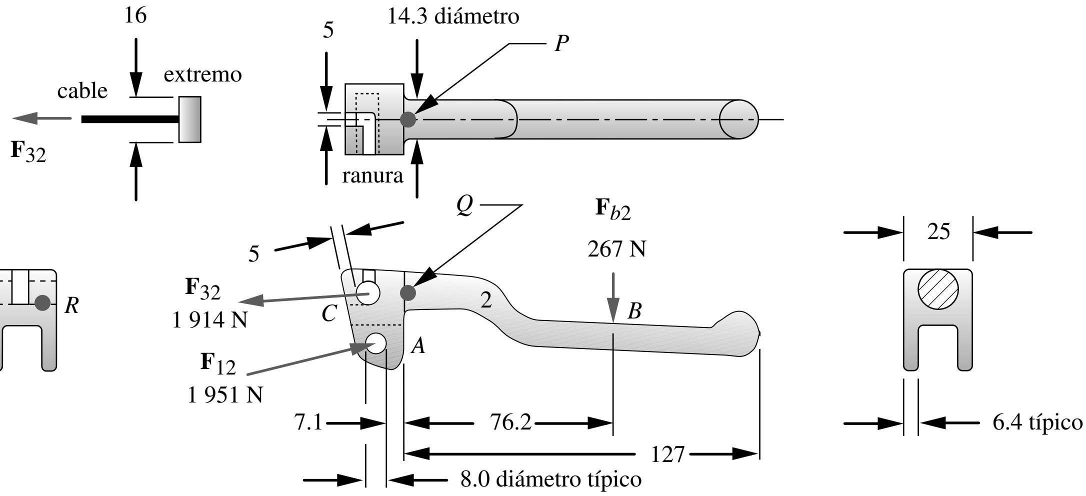


FIGURA 2-47

Diagrama de cuerpo libre de la palanca del freno de una bicicleta con fuerzas en N y dimensiones en mm

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(F \cdot a)c}{I} = \frac{(267\ \text{N} \cdot 0.0762\ \text{m})\left(\dfrac{0.0143}{2}\right)\text{m}}{\dfrac{\pi(0.0143)^4}{64}\ \text{m}^4} = 70.9\ \text{MPa} \qquad (a)$$

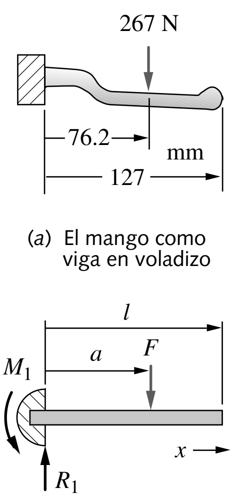
Éste es un esfuerzo relativamente bajo para este material. Existen algunas concentraciones de esfuerzos debidas al radio pequeño en la raíz de la viga; no obstante, como ésta es de un material fundido marginalmente dúctil (5% de elongación a la fractura) se ignorarán las concentraciones de esfuerzos confiando en que la fluencia local los mitigará.

2. La razón longitud/profundidad efectiva de esta viga es pequeña e igual a 76.2/14.3 = 5.3. Puesto que esta razón es menor que 10, se calculará el esfuerzo cortante debido a la carga transversal. Para esta sección circular sólida, al aplicar la ecuación 2.15*c* (p. 91) se obtiene:

$$\tau_{xy} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(267)\ \text{N}}{\dfrac{3\pi(14.3)^2}{4}\ \text{mm}^2} = 2.22\ \text{MPa} \qquad (b)$$

El esfuerzo cortante es máximo en el eje neutro (punto *Q*) y el esfuerzo normal de flexión es máximo en la fibra externa (punto *P*). El mayor esfuerzo principal (ecuación 2.6, p. 75) en la fibra externa más alta es, entonces, $\sigma_1 = \sigma_x = 70.9$ MPa, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, y $\tau_{máx} = 35.45$ MPa. El círculo de Mohr para este elemento de esfuerzo se ve como el de la figura 2-8 (que se reproduce en la página siguiente por conveniencia).

3. El cálculo de la deflexión para el mango es difícil por su geometría curva y su ligero estrechamiento desde la raíz hasta el extremo. Se puede obtener una primera aproximación de la deflexión simplificando el modelo como una viga recta con sección transversal constante, como se muestra en la figura 2-48*b*. La deflexión debida al cortante transversal también se despreciará. Esto llevará a un ligero error en una dirección no conservadora, pero dará una indicación del orden de la magnitud de la deflexión. Si el resultado descubre algún problema de deflexión excesiva, será necesario mejorar el modelo. La ecuación (*i*) del ejemplo 2-5 proporciona la ecuación de deflexión para el modelo simple. En este caso, $l = 127$ mm, $a = 76.2$ mm y $x = l$ para la deflexión máxima en el extremo de la viga.



(*a*) El mango como viga en voladizo

(*b*) Modelo de la viga en voladizo

FIGURA 2-48

Modelo del mango como viga en voladizo

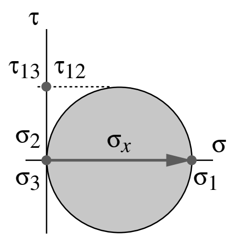


FIGURA 2-8 Repetida

Círculos de Mohr para esfuerzos de tensión unidireccional (dos círculos coinciden y el tercero es un punto, ya que $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$y = \frac{F}{6EI}\left[x^3 - 3ax^2 - \langle x - a\rangle^3\right]$$
$$= \frac{267}{6(71.7E3)(2.04E3)}\left[127^3 - 3(76.2)127^2 - (127 - 76.2)^3\right] \qquad (c)$$
$$= -0.54 \text{ mm}$$

Esto es aproximadamente 0.02 in de deflexión en el extremo del mango, el cual no se considera excesivo en esta aplicación. Véase la figura 2-24 (p. 98) de la gráfica en la forma general de esta curva de deflexión de la viga, si bien los valores de este ejemplo son diferentes.

4. Deben verificarse también otras ubicaciones con fallas probables. El material alrededor de los dos orificios podría experimentar cualquiera de los modos de falla debidos a un esfuerzo de contacto, un esfuerzo cortante directo o un desgarramiento. El orificio en el punto A de la figura 2-47 contiene un perno de pivote, el cual se presiona contra el mango con una fuerza de 1 951 N que se muestra en la figura. Se verificará esto para los tres modelos mencionados anteriormente.

5. El esfuerzo de contacto es compresivo y se considera que actúa sobre el área proyectada del orificio, el cual, en este caso, es el diámetro del orificio de 8 mm por la longitud total de contacto (dos veces el espesor de las pestañas de 6.4 mm).

$$A_{contacto} = \text{dia} \cdot \text{espesor} \quad = 8(2)(6.4) = 102.4 \text{ mm}^2$$
$$\sigma_{contacto} = \frac{F_{12}}{A_{contacto}} = \frac{1\,951 \text{ N}}{102.4 \text{ mm}^2} = 19.1 \text{ MPa} \qquad (d)$$

6. El desgarramiento en este caso requiere que (4)6.4 mm del espesor de las secciones fallen al cortante a través de los 5 mm del material entre el orificio y el extremo. (Vea también la figura 2-13, p. 85, para la definición del área de desgarramiento).

$$A_{desgarramiento} = \text{longitud} \cdot \text{espesor} = 7.1(4)(6.4) = 181.8 \text{ mm}^2$$
$$\tau_{desgarramiento} = \frac{F_{12}}{A_{desgarramiento}} = \frac{1\,951 \text{ N}}{181.8 \text{ mm}^2} = 10.7 \text{ MPa} \qquad (e)$$

7. Estos esfuerzos son muy pequeños para el material especificado; sin embargo, recuerde que la fuerza aplicada que se usa está basada en la capacidad de fuerza de la mano de un ser humano promedio y no prevé el abuso debido al impacto u otros medios.

8. El extremo del cable se inserta en un orificio ciego, el cual está medio ranurado para permitir que el cable pase a través del ensamble, como se muestra en la figura 2-47. Tal ranura debilita la pieza y hacen a la sección C la ubicación más probable de falla en esta unión. Se supondrá que la falla de la mitad abierta (ranurada) del material alrededor del orificio es suficiente para deshabilitar la pieza, ya que el cable puede deslizarse hacia afuera. La pequeña sección que retiene el cable se puede modelar en una primera aproximación como una viga en voladizo con una sección transversal de (25 – 5) / 2 = 10 mm de ancho y una profundidad de 5 mm. Ésta es una suposición conservadora, ya que ignora el aumento de la profundidad debido al radio del orificio. Se supondrá que el brazo del momento de la fuerza es igual al radio del perno, es decir, 4 mm. Se toma la fuerza sobre la mitad ranurada como la mitad de la fuerza total de 1 914 N sobre el cable. El esfuerzo flexionante sobre la fibra más externa en el punto C es, entonces,

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{\frac{1\,914}{2}\left(\frac{5}{2}\right)(4)}{\frac{10(5)^3}{12}} = 91.9 \text{ MPa} \qquad (f)$$

y el cortante debido a la carga transversal en el eje neutro es (ecuación 2.14*b*, p. 91)

$$\tau_{xy} = \frac{3V}{2A} = \frac{3(957)}{2(10)(5)} = 28.7 \text{ MPa} \tag{g}$$

9. El esfuerzo normal es principal aquí, como se indica en la figura 2-8 (p. 82) y el esfuerzo cortante máximo es entonces la mitad del esfuerzo normal principal. Éstos son los mayores esfuerzos encontrados para las tres secciones revisadas. Se realizará un análisis de falla de esta pieza en la continuación de este estudio de caso, en el siguiente capítulo.

10. Este análisis preliminar demuestra que algunas áreas podrían beneficiarse con más investigación. En el apéndice C se hace un análisis más completo del esfuerzo de este estudio de caso, usando el análisis de elementos finitos (FEA). El lector puede examinar el modelo de este estudio de caso abriendo el archivo CASE1B en el programa de su elección.

ESTUDIO DE CASO 2B

Análisis de esfuerzo y deflexión de una pinza de presión

Problema — **Determine los esfuerzos y las deflexiones en los puntos críticos de la pinza de presión mostrada en las figuras 1-3 (repetida aquí) y 2-49.**

Se proporciona — **Se conocen la geometría y la carga por el estudio de caso 2A de la página 14. El espesor del eslabón 1 es 0.313 in, el de los eslabones 2 y 3 es de 0.125 in y del eslabón 4, 0.187 in. Todo el material es acero 1095 con E = 30 Mpsi.**

Suposiciones — **Los puntos de falla más probable se encuentran en el eslabón 3 considerado como columna, los orificios donde se insertan los pernos, los pernos conectores expuestos al cortante y el eslabón 4 en flexión. El número de ciclos esperado durante la vida de la herramienta es bajo, de modo que es aceptable un análisis estático. Se puede ignorar la concentración de esfuerzos debido a la ductilidad del material, así como la carga estática supuesta.**

Solución — **Véase las figuras 1-3 y 2-49 a 2-51.**

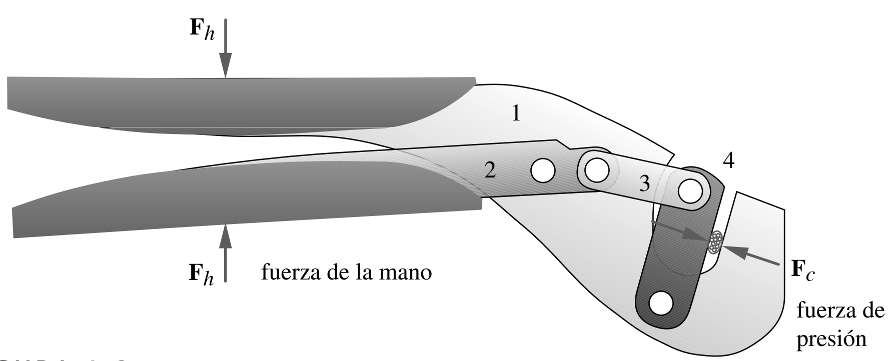


FIGURA 1-3 Repetida

Pinzas de presión para conectar alambre

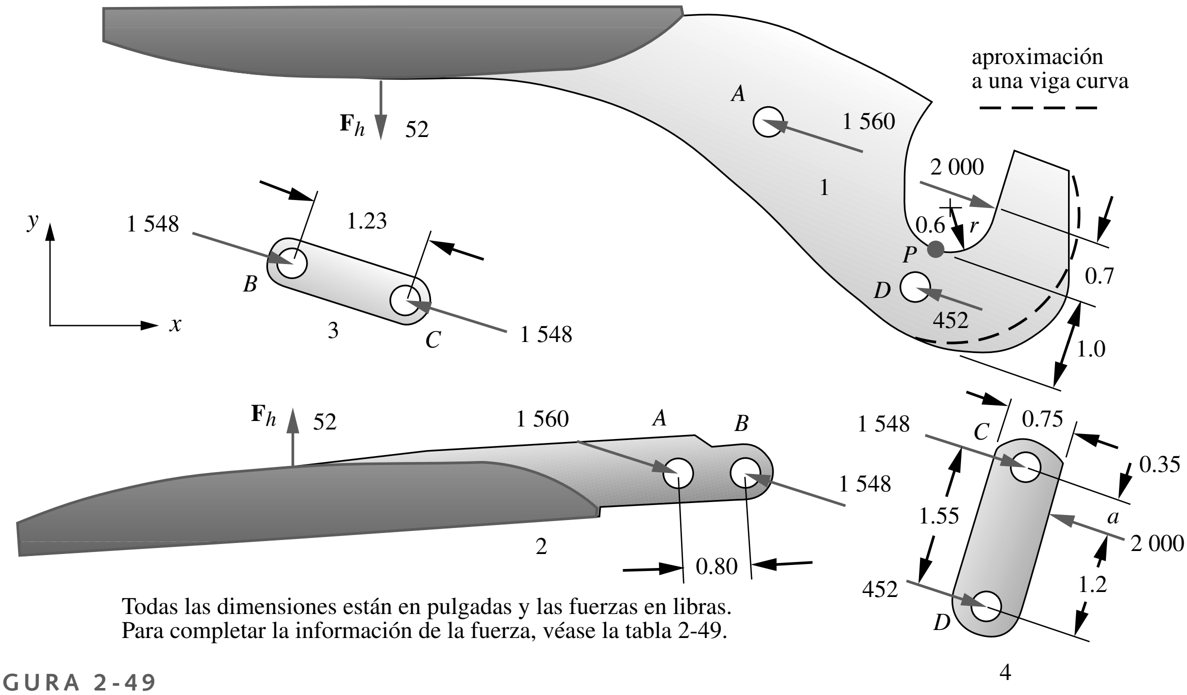


FIGURA 2-49

Diagramas de cuerpo libre, dimensiones y magnitudes de fuerza de una pinza de presión para conectar alambres

1. El eslabón 3 es una columna articulada-articulada cargada con F_{43} = 1 548 lb como se calculó en el estudio de caso 2A (p. 14) y mostrada en la figura 2-49. Advierta que $l_{ef} = l$ de la tabla 2-4. Primero se necesita verificar su razón de esbeltez (ecuación 2.41). Esto requiere el radio de giro (ecuación 2.34, p. 123) en la dirección de pandeo más débil (la dirección z, en este caso).*

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3/12}{bh}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \sqrt{\frac{0.125^2}{12}} = 0.036 \text{ in} \qquad (a)$$

La relación de esbeltez en la dirección z de pandeo es entonces

$$S_r = \frac{l_{ef}}{k} = \frac{1.228}{0.036} = 34 \qquad (b)$$

la cual es > 10, haciéndola otra columna corta. Calculamos la razón de esbeltez del punto tangente entre las líneas de Johnson y de Euler de la figura 2-42 (p. 127).

$$\left(S_r\right)_D = \pi\sqrt{\frac{2E}{S_y}} = \pi\sqrt{\frac{2(30E6)}{83E3}} = 84.5 \qquad (c)$$

La razón de esbeltez de esta columna es menor que la del punto tangente entre las líneas de Johnson y de Euler de la figura 2-42. Se trata por lo tanto de una columna intermedia y se debería usar la fórmula de la columna de Johnson (ecuación 2.43, p. 128) para encontrar la carga crítica.

* Incluso un pequeño claro en los orificios evitará que los remaches provoquen un momento a lo largo de sus ejes, creando así una conexión bidimensional articulada-articulada.

$$P_{cr} = A\left[S_y - \frac{1}{E}\left(\frac{S_y S_r}{2\pi}\right)^2\right]$$
$$= 0.125(.5)\left[83\,000 - \frac{1}{30E6}\left(\frac{83\,000(34)}{2\pi}\right)^2\right] = 4\,765 \text{ lb} \qquad (d)$$

La carga crítica es 3.1 veces más grande que la carga aplicada. Ésta es segura contra el pandeo. El eslabón 2 es una columna más corta y más ancha que el eslabón 3, y tiene menores fuerzas axiales, de modo que se puede suponer segura contra el pandeo con base en los cálculos del eslabón 3.

2. Puesto que no se pandea, la deflexión a la compresión axial del eslabón 3 es (ecuación 2.7, p. 82):

$$x = \frac{Pl}{AE} = \frac{1\,548(1.23)}{0.0625(30E6)} = 0.001 \text{ in} \qquad (e)$$

3. Cualquiera de los eslabones podría fallar por contacto en los orificios de 0.25 in de diámetro. La mayor fuerza sobre cualquier perno es de 1 560 lb. El esfuerzo de contacto más severo es (ecuaciones 2.7 y 2.10, p. 84), entonces,

$$\sigma_b = \frac{P}{A_{contacto}} = \frac{P}{longitud(dia)} = \frac{1\,560}{0.125(0.25)} = 49\,920 \text{ psi} \qquad (f)$$

No existe riesgo de falla por desgarramiento en los eslabones 2 o 3, ya que la carga está dirigida hacia el centro del eslabón. El eslabón 1 tiene bastante material alrededor de los orificios como para prevenir el desgarramiento.

4. Los pernos de 0.25 in de diámetro están expuestos a cortante simple. El peor caso de esfuerzo cortante directo remite a la ecuación 2.9 (p. 83):

$$\tau = \frac{P}{A_{corte}} = \frac{1\,560}{\frac{\pi(0.25)^2}{4}} = 31\,780 \text{ psi} \qquad (g)$$

5. El eslabón 4 es una viga de 1.55 in de largo, simplemente soportada en los pernos y cargada con una fuerza de presión de 2 000 lb a 0.35 in del punto C. Escriba las ecuaciones de carga, cortante, momento, pendiente y deflexión usando funciones de singularidad, considerando que las constantes de integración C_1 y C_2 son iguales a cero:

$$\begin{aligned} q &= R_1\langle x-0\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1} + R_2\langle x-l\rangle^{-1} \\ V &= R_1\langle x-0\rangle^{0} - F\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-l\rangle^{0} \\ M &= R_1\langle x-0\rangle^{1} - F\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-l\rangle^{1} \end{aligned} \qquad (h)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{2}\langle x-0\rangle^2 - \frac{F}{2}\langle x-a\rangle^2 + \frac{R_2}{2}\langle x-l\rangle^2 + C_3\right) \\ y &= \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle x-0\rangle^3 - \frac{F}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{R_2}{6}\langle x-l\rangle^3 + C_3x + C_4\right) \end{aligned} \qquad (i)$$

6. Las fuerzas de reacción se obtienen a partir de $\Sigma M = 0$ y $\Sigma F = 0$. (Véase el apéndice F).

$$R_1 = \frac{F(l-a)}{l} = \frac{2\,000(1.55-0.35)}{1.55} = 1\,548 \text{ lb} \qquad (j)$$

$$R_2 = \frac{Fa}{l} = \frac{2\,000(0.35)}{1.55} = 452 \text{ lb} \qquad (k)$$

El momento máximo es de 1 548(0.35) = 541.8 lb-in donde se aplica la carga. En la figura 2-50, se muestran los diagramas de cortante y de momento del eslabón 4.

7. La profundidad de la viga en el punto de momento máximo es de 0.75 in y el espesor es de 0.187. Entonces el esfuerzo flexionante es

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{541.8\left(\frac{0.75}{2}\right)}{\frac{0.187(0.75)^3}{12}} = 30\,905 \text{ psi} \qquad (l)$$

8. Las funciones de pendiente y deflexión de la viga requieren que se calculen las constantes de integración C_3 y C_4, las cuales se obtienen al sustituir las condiciones de frontera $x = 0, y = 0$ y $x = l, y = 0$ en la ecuación de deflexión.

$$0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle 0-0\rangle^3 - \frac{F}{6}\langle 0-a\rangle^3 + \frac{R_2}{6}\langle 0-l\rangle^3 + C_3(0) + C_4\right)$$
$$C_4 = 0 \qquad (m)$$

$$0 = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_1}{6}\langle l-0\rangle^3 - \frac{F}{6}\langle l-a\rangle^3 + \frac{R_2}{6}\langle l-l\rangle^3 + C_3(l)\right)$$
$$C_3 = \frac{1}{6l}\left[F(l-a)^3 - R_1 l^3\right] = \frac{1}{6(1.55)}\left[2\,000(1.55-0.35)^3 - 1548(1.55)^3\right] = -248.4 \qquad (n)$$

9. La ecuación de deflexión se obtiene combinando las ecuaciones *i*, *j*, *k*, *m* y *n*:

$$y = \frac{F}{6lEI}\left\{(l-a)\left(x^3 + \left[(l-a)^2 - l^2\right]x\right) - l\langle x-a\rangle^3 + a\langle x-l\rangle^3\right\} \qquad (o)$$

y la deflexión máxima en $x = 0.68$ in es

$$y_{máx} = \frac{Fa(l-a)}{6lEI}\left(a^2 + (l-a)^2 - l^2\right)$$
$$= \frac{2\,000(0.35)(1.55-0.35)}{6(1.55)(30E6)(0.006\,6)}\left[0.35^2 + (1.55-0.35)^2 - 1.55^2\right] = 0.000\,5 \text{ in} \qquad (p)$$

Sólo se permite aquí una deflexión muy pequeña para garantizar el golpe de presión adecuado y esta cantidad es aceptable. Los diagramas de la pendiente y la deflexión se muestran en la figura 2-50. También véase el archivo CASE2B-1.

10. El eslabón 1 es relativamente masivo comparado con los otros y la única área de interés es la mandíbula, la cual se carga con 2 000 lb de fuerza de presión y tiene un orificio en la sección transversal de la raíz. En tanto que la forma de este elemento no es exactamente la de una viga curva con radios exterior e interior concéntricos, esta suposición será aceptablemente conservadora, si se emplea un radio exterior igual a la dimensión de la sección más pequeña, como se ilustra en la figura 2-49 (p. 140). Esto hace el radio interior igual a 0.6 in y su radio exterior igual a 1.6 in. La excentricidad *e* del eje neutro de la viga curva contra el eje centroidal de la viga r_c se obtiene de la ecuación 2.12*a* (p. 87), tomando en cuenta el orificio de la sección en la integración.

$$e = r_c - \frac{A}{\int_0^{r_o}\frac{dA}{r}} = 1.1 - \frac{0.313(1-0.25)}{0.313\left(\int_{0.600}^{0.975}\frac{dr}{r} + \int_{1.225}^{1.600}\frac{dr}{r}\right)} = 0.103 \qquad (q)$$

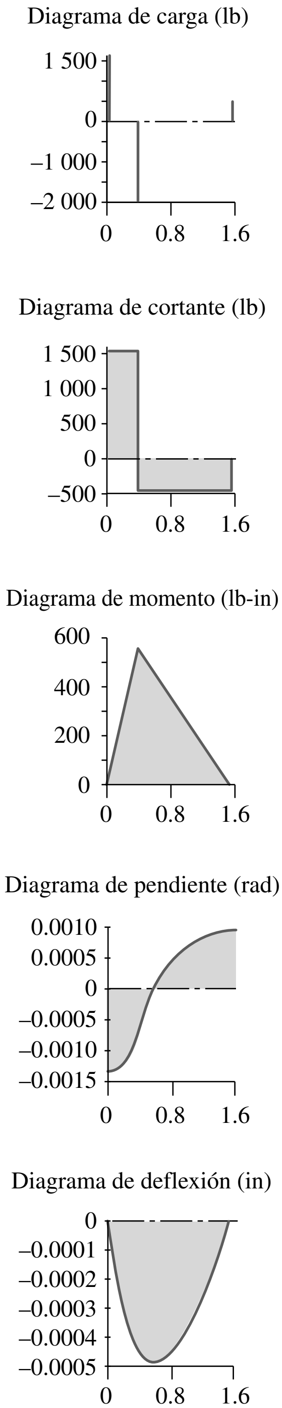


FIGURA 2-50
Diagramas de la parte 4; caso 2B

El radio del eje neutro (r_n) y las distancias (c_i y c_o) desde los radios interior y exterior (r_i y r_o) de la fibra al eje neutro son, entonces (véase la figura 2-16, p. 87),

$$\begin{aligned} r_n &= r_c - e = 1.10 - 0.103 = 0.997 \\ c_i &= r_n - r_i = 0.997 - 0.600 = 0.397 \\ c_o &= r_o - r_n = 1.600 - 0.997 = 0.603 \end{aligned} \tag{r}$$

11. El momento flexionante aplicado sobre la sección de la viga curva se toma como la carga aplicada por la distancia al eje centroidal de la viga.

$$M = Fl = 2\,000(0.7 - 0.6 + 1.1) = 2\,400 \text{ lb - in} \tag{s}$$

12. Determine los esfuerzos de las fibras interior y exterior con las ecuaciones 2.12*b* y 2.12*c* (p. 88). Reduzca el área de la sección transversal de la viga mediante el área del orificio.

$$\begin{aligned} \sigma_i &= +\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right) = \frac{2\,400}{0.103\left[(1.0-0.25)(0.313)\right]}\left(\frac{0.397}{0.60}\right) = 65 \text{ kpsi} \\ \sigma_o &= -\frac{M}{eA}\left(\frac{c_o}{r_o}\right) = -\frac{2\,400}{0.103\left[(1.0-0.25)(0.313)\right]}\left(\frac{0.603}{1.60}\right) = -37 \text{ kpsi} \end{aligned} \tag{t}$$

13. Éste también es un esfuerzo directo axial por tensión, el cual se suma al esfuerzo flexionante de la fibra interior en el punto P:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{F}{A} = \frac{2\,000}{(1.0-0.25)(0.313)} = 8.5 \text{ kpsi} \\ \sigma_{máx} &= \sigma_a + \sigma_i = 65 + 8.5 = 74 \text{ kpsi} \end{aligned} \tag{u}$$

Éste es el esfuerzo principal en el punto P, ya que no existe cortante aplicado ni otro esfuerzo normal en este punto extremo. El esfuerzo cortante máximo en el punto P es la mitad de este esfuerzo principal, es decir, 37 kpsi. El esfuerzo flexionante en la fibra exterior es compresivo y, por lo tanto, se resta del esfuerzo de tensión axial para un esfuerzo neto de $-37 + 8.5 = -28.5$ kpsi.

14. Existe una concentración de esfuerzos significativa en el orificio. El factor de concentración del esfuerzo teórico para el caso de un orificio circular en una placa infinita es $K_t = 3$, como se definió en la ecuación 2.32*a* (p. 119) y en la figura 2-35 (p. 118). Para un orificio circular en una placa finita, K_t es una función de la razón entre el diámetro del orificio y el ancho de la placa. Peterson ofrece una gráfica de factores de concentración de esfuerzos para un orificio redondo en una placa bajo tensión,[5] donde se encuentra que $K_t = 2.42$ para la razón diámetro/ancho = 1/4. El esfuerzo de tensión axial local en el orificio es entonces de 2.42(8.5) = 20.5 kpsi, el cual es menor que el esfuerzo a la tensión en la fibra interior.

15. Esto está lejos de un análisis completo de esfuerzo y deflexión; los cálculos realizados llevan a revisar las áreas definidas como las más probables para fallar o tener problemas con la deflexión. Los esfuerzos y las deflexiones en el eslabón 1 también se calcularon usando un programa de análisis de elementos finitos llamado ABAQUS, el cual dio un esfuerzo principal máximo estimado en el punto P de 81 kpsi, en vez del estimado de 74 kpsi. La maya del FEA y la distribución de esfuerzos calculada por el modelo de FEA se ilustran en la figura 2-51. El estudio del caso 2D del apéndice C presenta el análisis completo de FEA para este montaje.

El análisis simplificó la geometría de la parte con la finalidad de permitir el uso del conocido modelo de forma cerrada (la viga curva); mientras que en el modelo de FEA se consideró todo el material de la pieza real, aunque una distinta geometría. Ambos análisis se deberían considerar tan sólo como estimaciones del estado de esfuerzos en las piezas, no como soluciones exactas.

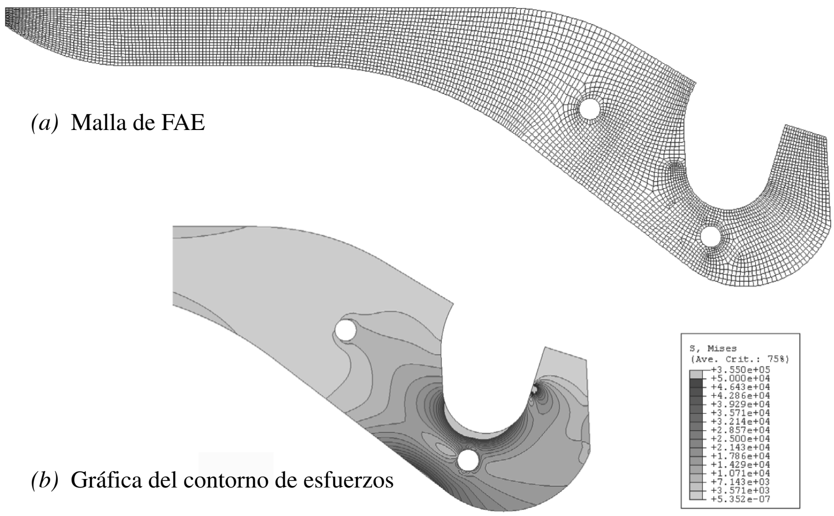


FIGURA 2-51

Análisis de elementos finitos de los esfuerzos en la pinza de presión del estudio de caso 2B

16. Quizá se necesite un rediseño para reducir estos esfuerzos y deflexiones, con base en un análisis de fallas. Este estudio de caso se retomará en el siguiente capítulo, después de que se presenten varias teorías de fallas. El lector puede revisar el modelo de este estudio de caso, abriendo los archivos CASE2B-1, CASE2B-2 en el programa de su preferencia. En el apéndice C se realiza el análisis de esfuerzos de este estudio de caso, usando el análisis de elementos finitos (FEA).

ESTUDIO DE CASO 3B

Análisis de esfuerzos y deflexiones en un gato de tijera para automóvil

Problema — **Determine los esfuerzos y las deflexiones en puntos críticos en el montaje del gato de tijera mostrado en las figuras 1-5 (repetida de nuevo aquí) y 2-52.**

Se proporciona — **La geometría y la carga se conocen a partir del estudio de caso 3A (p. 18). La carga de diseño es de 2 000 lb en total, es decir, 1 000 lb por lado. El ancho de los eslabones es de 1.032 in y su espesor es de 0.15 in. El tornillo tiene una cuerda UNC 1/2-13 con un diámetro en la raíz de 0.406 in. El material de todas las partes es acero dúctil con E = 30E6 psi y S_y = 60 000 psi.**

Suposiciones — **Los puntos de falla más probable son los eslabones como columnas, orificios donde se insertan los pernos —expuestos a la carga—, pernos conectores expuestos al cortante, dientes de engranes en flexión y tornillo en tensión. Existen dos conjuntos de eslabones, uno de cada lado. Suponga que los dos lados comparten la carga en partes iguales. El gato se usa normalmente muy pocos ciclos durante su tiempo de vida, por lo que un análisis estático es adecuado.**

Solución — **Véase las figuras 2-52 y 2-53, así como los archivos CASE3B-1 y CASE3B-2.**

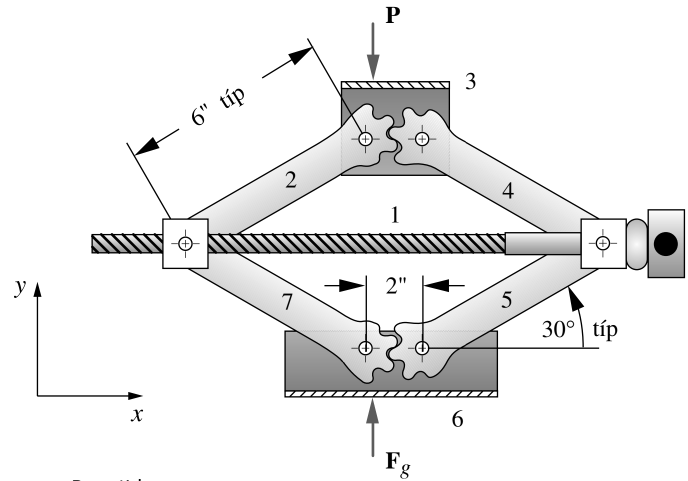


FIGURA 1-5 Repetida

Gato de tijera para automóvil

1. Las fuerzas sobre el ensamble del gato para la posición mostrada en la figura se calcularon en la primera parte de este estudio de caso (3A) en el capítulo 1 (p. 18). Por favor, consulte la sección y tabla 1-4 (pp. 20-22) para datos adicionales de fuerza.

2. La fuerza en el tornillo del gato es cuatro veces la componente de fuerza F_{21x} de 878 lb en el punto A debido a que la fuerza en la mitad superior del gato se encuentra sólo en un plano. La mitad inferior ejerce una fuerza igual sobre el tornillo y el lado de atrás duplica la suma. Estas fuerzas ponen al tornillo en tensión axial. Tal esfuerzo de tensión se calcula con la ecuación 2.7 (p. 82), usando el diámetro en la raíz de la cuerda de 0.406 in para calcular el área de la sección transversal. Se trata de una suposición conservadora, como se verá cuando se analicen los sujetadores de rosca en el capítulo 11.

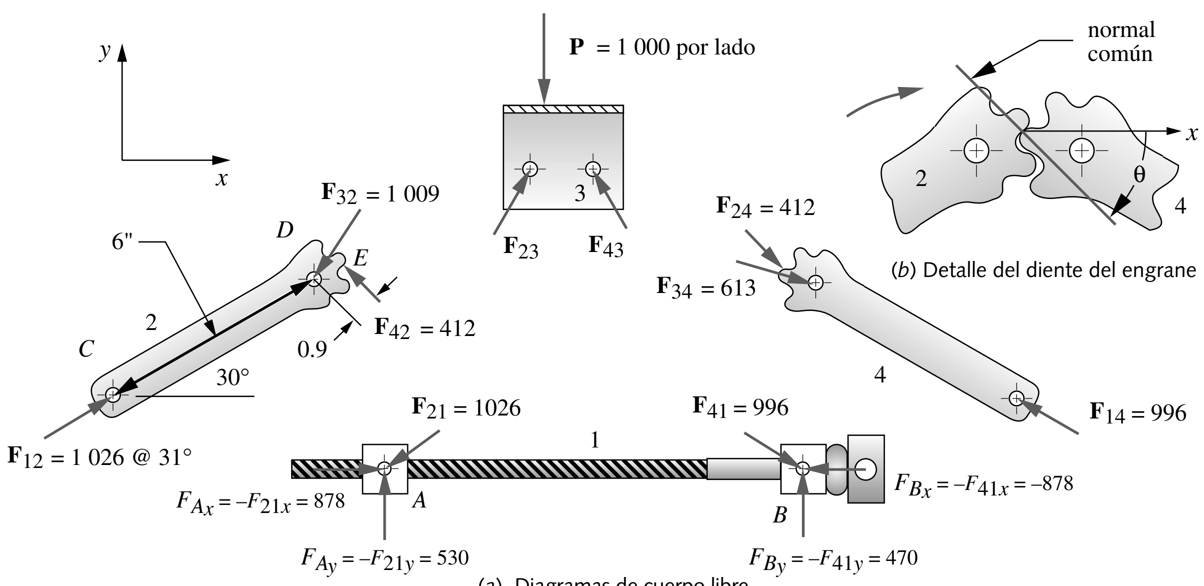


FIGURA 2-52

Diagramas de cuerpo libre, dimensiones y fuerzas de los elementos del gato de tijera

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{4(878)}{\frac{\pi(0.406)^2}{4}} = \frac{3512}{0.129} = 27\,128 \text{ psi} \qquad (a)$$

La deflexión axial del tornillo se obtiene con la ecuación 2.8 (p. 82).

$$x = \frac{Pl}{AE} = \frac{4(878)(12.55)}{0.129(30E6)} = 0.011 \text{ in} \qquad (b)$$

3. El eslabón 2 es el más fuertemente cargada de los eslabones debido a que la carga aplicada P se desvía ligeramente a la izquierda del centro, de modo que se calcularán sus esfuerzos y deflexiones. Este eslabón está cargado como una viga-columna con una fuerza P de compresión axial entre los puntos C y D, y un par flexionante aplicado entre D y E. Observe que la fuerza F_{12} es prácticamente colineal con el eje del eslabón. La carga axial es igual a $F_{12}\cos(1°) = 1\,026$ lb y el par flexionante creado por F_{42}, que actúa alrededor del punto D, es $M = 412(0.9) = 371$ in-lb. Este par es equivalente a la carga axial excéntrica en el punto D por la distancia $e = M/P = 371 / 1026 = 0.36$ in.

   Se puede usar la fórmula de secante de columna (ecuación 2.46*c*, p. 132) con esta excentricidad efectiva e considerada para el par aplicado en el plano flexionante; c es 1/2 de 1.032 in de ancho del eslabón. Puesto que se trata de una columna articulada-articulada, $l_{ef} = l$ de la tabla 2-4. El radio de giro k se toma, para este cálculo, en el plano flexionante xy (ecuación 2.34, p. 123):

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \sqrt{\frac{0.15(1.032)^3}{12(0.15)(1.032)}} = 0.298 \qquad (c)$$

   La razón de esbeltez es $l_{ef} / k = 20.13$. Ahora se aplica la fórmula de secante y se itera para el valor de P (véase la figura 2-53).

$$\frac{P}{A} = \frac{S_{yc}}{1 + \left(\frac{ec}{k^2}\right)\sec\left(\frac{l_{ef}}{k}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)} = 18\,975 \text{ psi}$$

$$P_{crit} = 0.155(18\,975) = 2\,937 \text{ lb} \qquad (d)$$

   La columna también debe revisarse para el pandeo en columna concéntrica en la dirección más débil (z) con $c = 0.15 / 2$. El radio de giro en la dirección z se obtiene de

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \sqrt{\frac{1.032(0.15)^3}{12(1.032)(0.15)}} = 0.043 \qquad (e)$$

   La razón de esbeltez en la dirección z es

$$S_r = \frac{l_{ef}}{k} = \frac{6}{0.043} = 138.6 \qquad (f)$$

   Esto se debe comparar con la razón de esbeltez $(S_r)_D$ en la tangencia entre las líneas de Euler y de Johnson, para determinar cuál ecuación de pandeo debería usarse para esta columna:

$$(S_r)_D = \pi\sqrt{\frac{2E}{S_y}} = \pi\sqrt{\frac{2(30E6)}{60\,000}} = 99.3 \qquad (g)$$

La S_r de esta columna es mayor que $(S_r)_D$, lo cual la hace una columna de Euler (véase la figura 2-53). Entonces se obtiene la carga crítica de Euler con la ecuación 2.38*a* (p. 124).

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2(30E6)(1.032)(0.15)^3}{12(6)^2} = 2\,387 \text{ lb} \qquad (h)$$

Por lo tanto, es más probable el pandeo en la dirección *z* más débil, que en el plano del momento aplicado. El factor de seguridad contra el pandeo es 2.3.

4. Todos los pernos tienen 0.437 in de diámetro. El esfuerzo de contacto en el orificio más fuertemente cargado en *C* es

$$\sigma_{contacto} = \frac{P}{A_{contacto}} = \frac{1\,026}{0.15(0.437)} = 15\,652 \text{ psi} \qquad (i)$$

Los pasadores están expuestos a cortante simple y el peor esfuerzo cortante es

$$\tau = \frac{P}{A_{cortante}} = \frac{1\,026}{\frac{\pi(0.437)^2}{4}} = 6\,841 \text{ psi} \qquad (j)$$

5. El diente del engrane en el eslabón 2 está sometido a una fuerza de 412 lb aplicadas en un punto a 0.22 in de la raíz del diente en voladizo. El diente tiene 0.44 in de profundidad en la raíz y 0.15 de espesor. El momento flexionante es de 412(0.22) = 91 in-lb y el esfuerzo flexionante en la raíz es

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{91(0.22)}{\frac{0.15(0.44)^3}{12}} = 18\,727 \text{ psi} \qquad (k)$$

6. Este análisis podría continuar, revisando otros puntos del montaje y, lo más importante, los esfuerzos cuando el gato se ubica en diferentes posiciones. Se ha usado una posición arbitraria para este estudio de caso, pero conforme el gato se mueve a una posición más baja, las fuerzas en el eslabón y el perno se incrementan debido a los ángulos de transmisión tan deficientes. Se debería hacer un análisis de esfuerzos completo para múltiples posiciones.

Este estudio de caso se revisará en el siguiente capítulo con el objetivo de hacer un análisis de fallas. El lector puede examinar los modelos de este estudio de caso abriendo los archivos CASE3B-1 y CASE3B-2 en el programa de su preferencia.

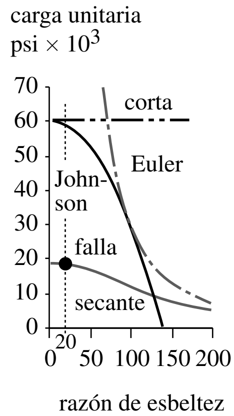


FIGURA 2-53

Solución para la columna excéntrica del estudio de caso 3B

2

ESTUDIO DE CASO 4B

Análisis de esfuerzo en el brazo del freno de una bicicleta

Problema **Determine los esfuerzos en los puntos críticos del brazo del freno de la bicicleta de las figuras 1-9 (repetida aquí) y 2-54.**

Se proporciona **La geometría y la carga se conocen por el estudio de caso 4A (p. 24) y se muestran en la tabla 1-5 (p. 27). El brazo de aluminio fundido tiene la sección T de una viga curva, cuyas dimensiones se muestran en la figura 2-54. El perno del pivote es de acero dúctil. La carga es tridimensional.**

Suposiciones **Los puntos de falla más probable son el brazo como viga en voladizo doble (un extremo de los cuales es curvo), el orificio en contacto y el pasador de la conexión en flexión como una viga en voladizo. Puesto**

2

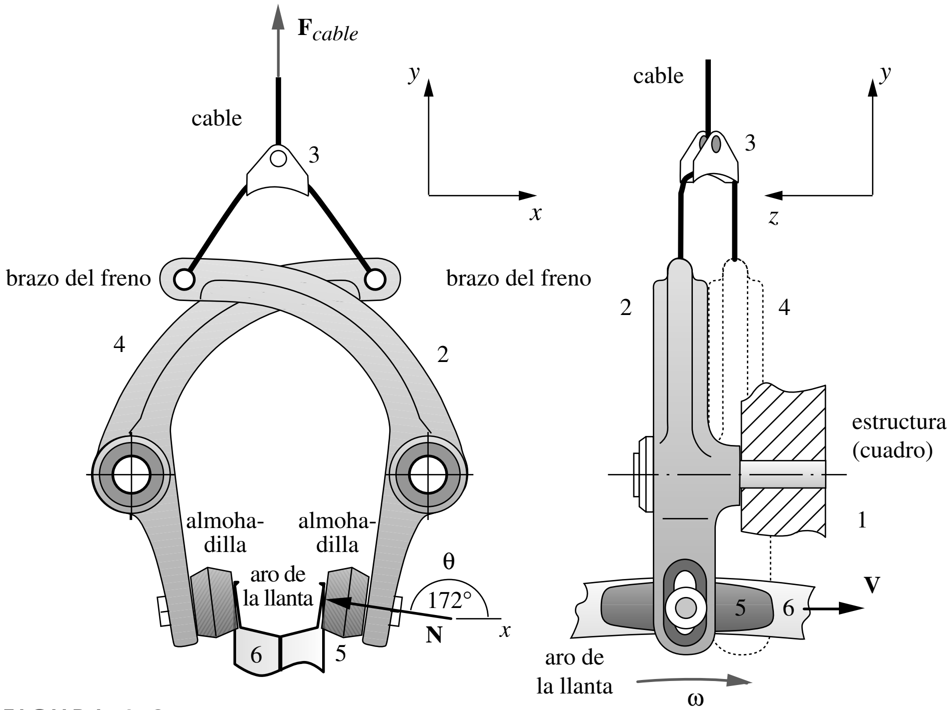


FIGURA 1-9 Repetida

Montaje del brazo del freno de una bicicleta jalado por el centro

que éste es un material fundido marginalmente dúctil (5% de elongación a la fractura), se puede ignorar la concentración de esfuerzos sobre la base de que la fluencia local la mitigará.

Solución **Véase las figuras 2-54 a 2-56.**

1. El brazo del freno es una viga en voladizo doble. Cada extremo se puede tratar por separado. La porción curva de la viga tiene una sección transversal en forma de T, como se ilustra en la sección X-X de la figura 2-54. El eje neutro de una viga curva cambia del eje centroidal hacia el centro de curvatura una distancia *e*, como se describió en la sección 2.9 y en la ecuación 2.12*a* (p. 87). Para encontrar *e* se requieren tanto la integración de la sección transversal de la viga, como conocer su radio centroidal. La figura 2-55 muestra la sección T descompuesta en dos segmentos rectangulares, la brida y el patín. El radio del centroide de la T se obtiene sumando los momentos del área de cada segmento con respecto al centro de curvatura:

$$\sum M = A_1 r_{c_1} + A_2 r_{c_2} = A_t r_{c_t}$$

$$r_{c_t} = \frac{A_1 r_{c_1} + A_2 r_{c_2}}{A_t} = \frac{A_1(r_i + y_1) + A_2(r_i + y_2)}{A_1 + A_2} \tag{a}$$

$$r_{c_t} = \frac{(20)(7.5)(58+3.75)+(10)(7.5)(58+11.25)}{(20)(7.5)+(10)(7.5)} = 64.25 \text{ mm}$$

Consulte las figuras 2-53 y 2-54 para conocer las dimensiones y los nombres de las variables. La integral *dA*/*r* de la ecuación 2.12*a* se determina, en este caso, sumando las integrales del patín y la brida.

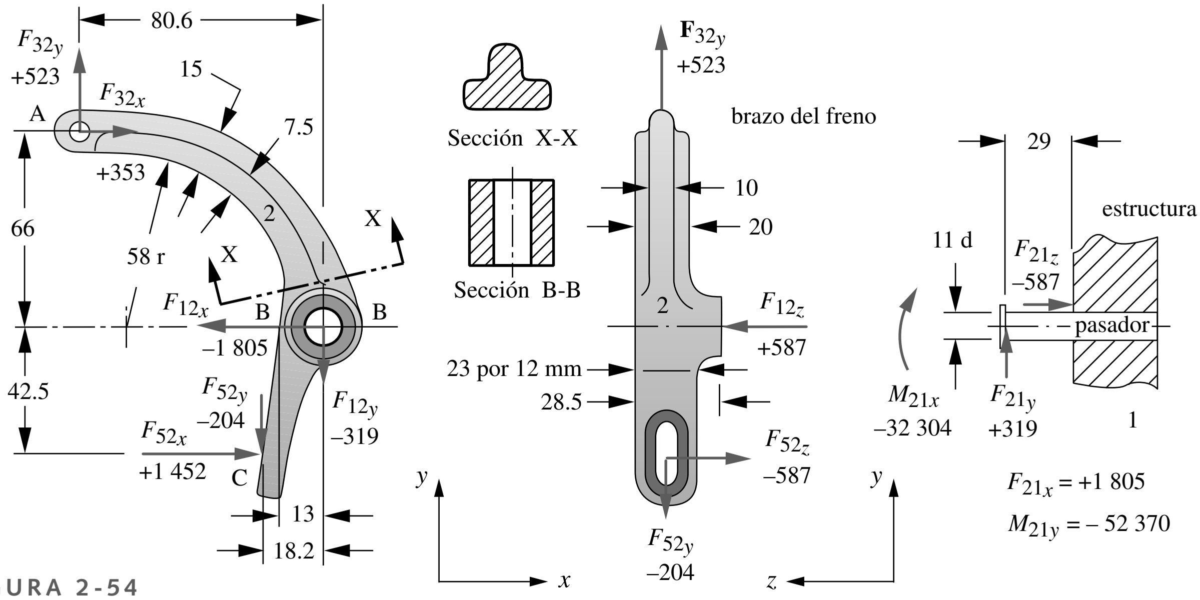


FIGURA 2-54

Diagramas de cuerpo libre del brazo del freno, fuerzas en Newtons, momentos en N-mm, y dimensiones en mm

$$\int_0^{r_o}\frac{dA}{r}=\frac{A_1}{r_{c_1}}+\frac{A_2}{r_{c_2}}=\frac{(20)(7.5)}{58+3.75}+\frac{(10)(7.5)}{58+11.25}=3.51\text{ mm}\qquad(b)$$

El radio del eje neutro y la distancia son, entonces,

$$r_n=\frac{A_t}{\displaystyle\int_0^{r_o}\frac{dA}{r}}=\frac{225}{3.51}=64.06\text{ mm}$$

$$e=r_c-r_n=64.25-64.06=0.187\text{ mm}\qquad(c)$$

L'a magnitud del momento flexionante que actúa sobre la sección curva de la viga en la sección X-X se aproxima tomando el producto cruz de la fuerza F_{32} y el vector de posición R_{AB} referenciado al pivote en A en la figura 2-54.

$$\left|M_{AB}\right|=\left|R_{AB_x}F_{32_y}-R_{AB_y}F_{32_x}\right|=\left|-80.6(523)-66(353)\right|=65\,452\text{ N - mm}\qquad(d)$$

Los esfuerzos en las fibras internas y externas se determinan ahora usando las ecuaciones 2.12b y 2.12c (p. 88) (con longitudes en mm y momentos en N-mm para un equilibrio adecuado):

$$\sigma_i=+\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right)=\frac{65\,452(6.063)}{(0.1873)(225)(58)}=162\text{ MPa}$$

$$\sigma_o=-\frac{M}{eA}\left(\frac{c_o}{r_o}\right)=\frac{65\,452(8.937)}{(0.1873)(225)(73)}=-190\text{ MPa}\qquad(e)$$

2. La sección transversal de la maza o el cubo, que se muestra como la sección B-B en la figura 2-54, es una ubicación con posibilidad de falla, ya que ahí existe una combinación de esfuerzos a la tensión axial y de flexión, en tanto que el orificio del perno elimina una cantidad sustancial de material. El esfuerzo flexionante se debe al momento máximo que actúa sobre la raíz de la viga curva, y el esfuerzo de tensión se debe a la componente y de la fuerza A. También existe un esfuerzo cortante

debido a la carga transversal, pero ésta será cero en la fibra exterior, donde la suma de los esfuerzos flexionante y axial es máxima. Se necesita el área y el momento de inercia del área de la sección transversal del cubo o la maza:

$$A_{central} = longitud\left(d_{ext} - d_{int}\right) = 28.5(25-11) = 399 \text{ mm}^2$$
$$I_{central} = \frac{longitud\left(d_{ext}^3 - d_{int}^3\right)}{12} = \frac{28.5\left(25^3 - 11^3\right)}{12} = 33\,948 \text{ mm}^4 \qquad (f)$$

El esfuerzo sobre la mitad izquierda de la sección F-B es la suma de los esfuerzos flexionante y axial:

$$\sigma_{central} = \frac{Mc}{I_{central}} + \frac{F_{32_y}}{A_{central}} = \frac{65\,452(12.5)}{33\,948} + \frac{523}{399} = 25.4 \text{ MPa} \qquad (g)$$

El esfuerzo sobre la mitad derecha de la sección B-B es menor, ya que la compresión debida a la flexión se reduce por la tensión axial.

3. La porción recta del brazo del freno es una viga en voladizo cargada en dos direcciones, en el plano xy y en el plano yz. Los módulos de sección y los momentos son diferentes en estas direcciones de flexión. El momento z en el plano xy es igual y opuesto al momento sobre la sección curva. La sección transversal en la raíz del voladizo es un rectángulo de 23 por 12 mm, como se indica en la figura 2-54. El esfuerzo flexionante en la fibra exterior del lado de 23 mm debida a este momento es

$$\sigma_{y_1} = \frac{Mc}{I} = \frac{65\,452\left(\frac{12}{2}\right)}{\frac{23(12)^3}{12}} = 118.6 \text{ MPa} \qquad (h)$$

El momento x se debe a la fuerza F_{52z} que actúa en el radio de 42.5, flexionando el eslabón en la dirección z. El esfuerzo flexionante en la superficie del lado de 12 mm es

$$\sigma_{y_2} = \frac{Mc}{I} = \frac{589 \cdot 42.5\left(\frac{23}{2}\right)}{\frac{12(23)^3}{12}} = 23.7 \text{ MPa} \qquad (i)$$

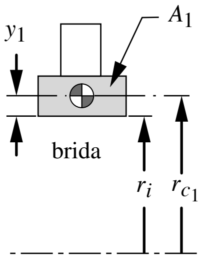
Estos dos esfuerzos normales en la dirección y se suman en las esquinas de las dos caras para dar

$$\sigma_y = \sigma_{y_1} + \sigma_{y_2} = 118.6 + 23.7 = 142.2 \text{ MPa} \qquad (j)$$

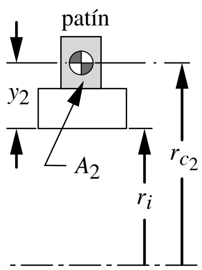
4. Otro punto de falla posible es la ranura en el brazo voladizo. Aun cuando el momento es cero ahí, la fuerza cortante está presente y puede causar desgarramiento en la dirección z. El área de desgarramiento es el área cortante entre la ranura y el borde.

$$A_{desgarramiento} = espesor(ancho) = 8(4) = 32 \text{ mm}^2$$
$$\tau = \frac{F_{52_z}}{A_{desgarramiento}} = \frac{589}{32} = 18.4 \text{ MPa} \qquad (k)$$

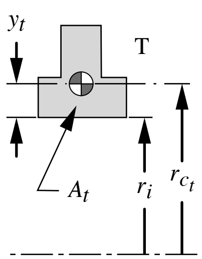
5. El pasador del pivote está sometido a la fuerza F_{21}, la cual tiene las componentes x y y, y al momento M_{21} debido a las fuerzas F_{12z} y F_{52z}. La fuerza F_{21} genera un momento de flexión que tiene componentes $F_{21x}l$ y $F_{21y}l$ en los planos yz y xz, respectivamente, donde l = 29 mm es la longitud del perno.



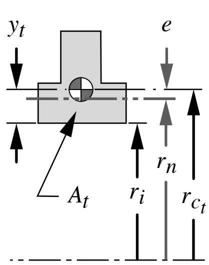
(a) Centroide de la brida



(b) Centroide del patín



(c) Centroide de la T



(d) Eje neutral de la T

FIGURA 2-55

Determinación del eje neutral de la sección T en una viga curva

$$
\begin{aligned}
M_{perno} &= \sqrt{\left(M_{21_x} - F_{12_y} \cdot l\right)^2 + \left(-M_{21_y} + F_{12_x} \cdot l\right)^2} \\
&= \sqrt{(-32\,304 + 319 \cdot 29)^2 + (52\,370 - 1805 \cdot 29)^2} \\
&= \sqrt{(-32\,304 + 9\,251)^2 + (52\,370 - 52\,345)^2} \qquad (l) \\
&= \sqrt{(-23\,053)^2 + (25)^2} = 23\,053 \text{ N - mm}
\end{aligned}
$$

$$
\theta_{M_{perno}} = \tan^{-1}\left(\frac{25}{-23\,053}\right) \cong 0° \qquad (m)
$$

La figura 2-56*a* muestra el momento del par M_{21} y la figura 2-56*b* muestra el momento de la fuerza F_{21}. Su combinación se ilustra en la figura 2-56*c*.

Es este momento combinado el que crea los mayores esfuerzos flexionantes en el perno en 0° y 180° alrededor de su circunferencia. El esfuerzo flexionante máximo en el perno (con longitudes en mm y momentos en N-mm para equilibrio unitario) es:

$$
\sigma_{perno} = \frac{M_{perno} c_{perno}}{I_{perno}} = \frac{23\,053\left(\frac{11}{2}\right)}{\frac{\pi(11)^4}{64}} = \frac{23\,053(5.5)}{718.7} = 176 \text{ MPa} \qquad (n)
$$

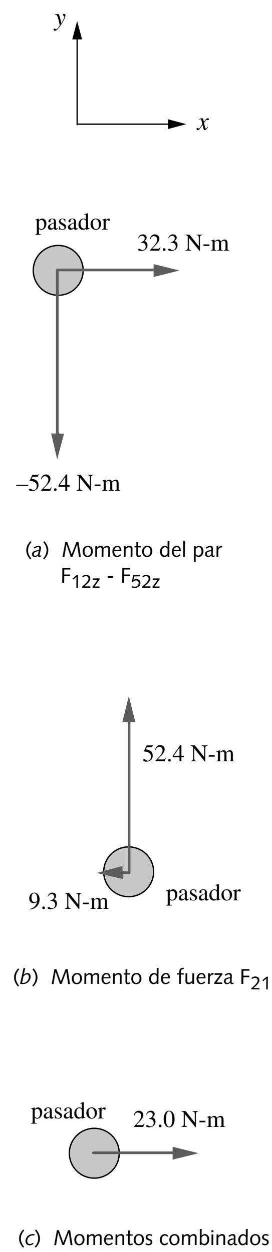
6. Es posible hacer un análisis más completo usando métodos de elementos finitos para determinar los esfuerzos y las deformaciones en muchas otras ubicaciones de la pieza. El lector podrá examinar el modelo de este estudio de caso abriendo el archivo CASE4B en el programa de su preferencia. El análisis de esfuerzo de este estudio de caso se hace también en el apéndice C mediante el análisis de elementos finitos (FEA).

2.19 RESUMEN

Las ecuaciones que se utilizan para el análisis de esfuerzos son relativamente pocas y bastante fáciles de recordar. (Véase más adelante el resumen de ecuaciones de esta sección). El origen principal de la confusión entre los estudiantes parece ser entender cuándo usar las ecuaciones de esfuerzo y cómo determinar dentro del continuo de la parte dónde calcular los esfuerzos, puesto que varían de acuerdo con la geometría interna de la parte.

Existen dos tipos de esfuerzos aplicados que nos interesan, el **esfuerzo normal** σ y el **esfuerzo cortante** τ. Cada uno de ellos se podría presentar en el mismo elemento, y combinarse para crear un conjunto de esfuerzos normales principales y un esfuerzo cortante máximo, como se evidencia en el círculo de Mohr. Finalmente, son estos esfuerzos principales los que se necesitan para determinar la seguridad del diseño. De esta manera, sin importar el origen de la carga o el tipo de esfuerzo que se aplique a la pieza, el lector debería determinar los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo que producen sus combinaciones. (Véase las secciones 2.3 y 2.5).

Existen sólo unos cuantos tipos de carga que se presentan comúnmente sobre las piezas de una máquina, aunque pueden actuar combinadas sobre la misma pieza. Los tipos de carga que crean **esfuerzos normales aplicados** son **cargas de flexión, cargas axiales** y **cargas de compresión.** Las cargas de flexión siempre crean esfuerzos



(*a*) Momento del par F_{12z} - F_{52z}

(*b*) Momento de fuerza F_{21}

(*c*) Momentos combinados

FIGURA 2-56

Momentos de flexión sobre el pasador del pivote; estudio de caso 4B

2

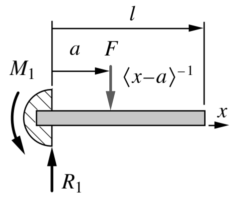


FIGURA 2-57

Viga en voladizo con carga concentrada

normales de tensión y compresión en diferentes posiciones en la pieza. Las vigas son los ejemplos más comunes de cargas de flexión. (Véase la sección 2.9). Las cargas axiales crean esfuerzos normales que pueden ser de tensión o compresión (pero no ambos a la vez), dependiendo de si la carga axial es de tensión o compresión. (Véase la sección 2.7). Los sujetadores como los tornillos frecuentemente tienen cargas axiales de tensión significativas. Si la carga axial es de compresión, entonces existe el peligro de **pandeo de columna** y deben aplicarse las ecuaciones de la sección 2.16. Las cargas de contacto crean esfuerzos normales de compresión en el eje y la abrazadera (cojinete).

Los tipos de carga que crean **esfuerzos cortantes aplicados** son las **cargas de torsión**, las **cargas de cortante directo** y **las cargas de flexión**. Las cargas de torsión implican el giro de la pieza alrededor de su eje longitudinal por la aplicación de un torque. Un eje de transmisión es un ejemplo común de una pieza con carga de torsión. (En el capítulo 6 se estudia el diseño de ejes de transmisión).

El cortante directo puede originarse debido a cargas que tienden a rebanar transversalmente la pieza. Los sujetadores como los remaches o pernos algunas veces experimentan cargas de cortante directo. Un perno que trata de desgarrar la salida de su orificio también provoca cortante directo sobre el área de desgarramiento. (Véase la sección 2.8). Las cargas de flexión también causan esfuerzos cortantes transversales sobre la sección transversal de la viga. (Véase la sección 2.9).

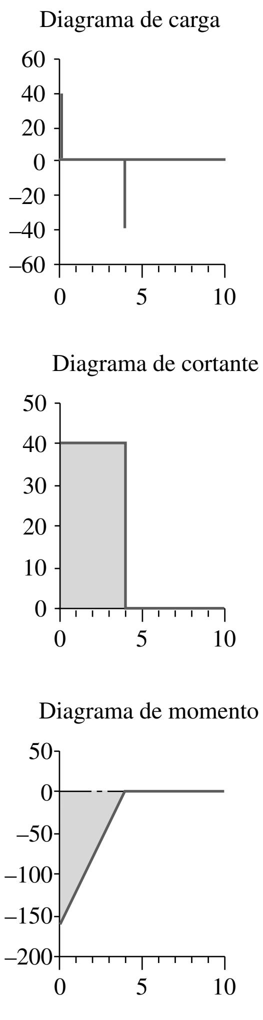


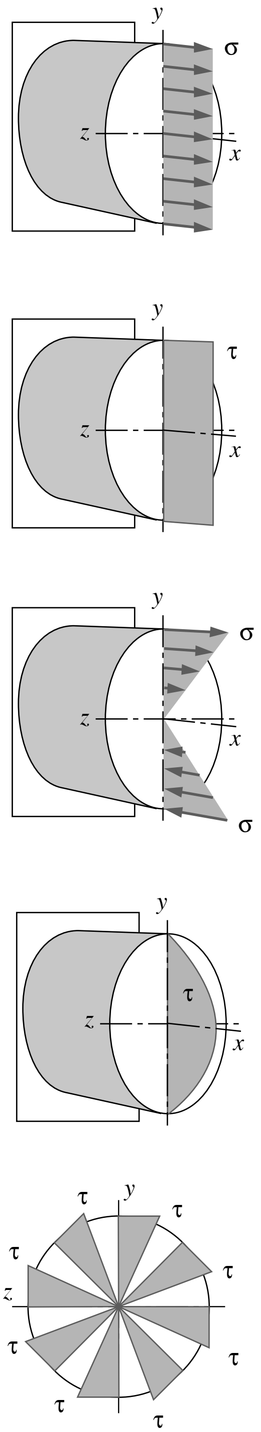
FIGURA 2-58

Distribuciones de carga

Los esfuerzos pueden variar constantemente sobre el continuo interno de la geometría de la pieza y se calculan considerando que actúan en un punto infinitesimalmente pequeño dentro de ese continuo. Para hacer un análisis completo de los esfuerzos en todos los números infinitos de sitios potenciales dentro de la pieza, se requeriría un tiempo infinito, el cual evidentemente no se tiene. Entonces, se debe seleccionar con inteligencia unos cuantos sitios para nuestros cálculos, de modo que representen los peores casos posibles.

El estudiante necesita entender cómo se distribuyen los diversos esfuerzos en el continuo de la pieza cargada. Existen dos aspectos para determinar las posiciones adecuadas sobre una parte específica, sobre la cual hay que realizar los cálculos de esfuerzos. El primer aspecto está relacionado con la distribución de carga sobre la geometría de la pieza; mientras que el segundo se refiere a la distribución de esfuerzos dentro de la sección transversal de la pieza. Considere, por ejemplo, una viga recta en voladizo cargada con una fuerza individual en algún punto a lo largo de su longitud, como se muestra en la figura 2-57. El primer aspecto requiere que se tenga una idea acerca de cómo se distribuyen las cargas sobre la viga en respuesta a la fuerza aplicada. Esto se obtiene mediante el análisis de los diagramas de cortante y momento de la viga, como los que se muestran en la figura 2-58, el cual indica que, en este caso, la sección con la mayor carga está en la pared. Entonces, se concentrará la atención en una "rebanada de mortadela" delgada, tomada de esta viga en la pared. Observe que la presencia de concentraciones de esfuerzos en posiciones que tienen menores esfuerzos nominales también implicaría investigación.

El segundo aspecto consiste en determinar en qué parte de la "rebanada de mortadela" de la sección transversal serán mayores los esfuerzos. Las figuras de las secciones adecuadas de este capítulo muestran las distribuciones de esfuerzos a través de las secciones para varios tipos de cargas. Estos diagramas de distribución de esfuerzos se integraron en la figura 2-59, la cual también muestra las ecuaciones de esfuerzos adecuadas para cada caso. Como la carga en este ejemplo de viga crea esfuerzos flexionantes, se debe deducir que habrá un esfuerzo normal de compresión máxima en la fibra de un extremo de la viga, y de tensión máxima en la fibra del otro extremo, como se muestra en las figuras 2-15 (p. 86) y 2-59*c*. Por lo tanto, se tomaría un elemento de esfuerzo en la fibra externa de esta rebanada de la viga, para calcular el peor caso de esfuerzo flexionante normal con la ecuación 2.11*b* (p. 86).



(a) Tensión uniaxial, distribución de esfuerzos a través de la sección

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \text{ec. 4.7}$$

(b) Cortante directo, distribución de esfuerzos promedio a través de la sección

$$\tau = \frac{P}{A_{cortante}} \qquad \text{ec. 4.9}$$

(c) Flexión, distribución de esfuerzos normales a través de la sección

$$\sigma = \frac{My}{I} \qquad \text{ec. 4.11}a$$

(d) Flexión, distribución de esfuerzos de cortante a través de la sección

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \qquad \text{ec. 4.13}d$$

(e) Torsión, distribución de esfuerzos cortantes a través de la sección

$$\tau = \frac{Tr}{J} \qquad \text{ec. 4.23}b$$

FIGURA 2-59

Distribución de esfuerzos a través de una sección transversal bajo diferentes tipos de carga

Las cargas de flexión también causan esfuerzos cortantes, pero su distribución es máxima en el plano neutro e igual a cero en la fibra exterior, como se indica en las figuras 2-19 (p. 89) y 2-59*d*. Entonces, se toma un elemento de esfuerzo diferente del plano neutro de la rebanada transversal para calcular el esfuerzo cortante debido a la carga transversal, usando la ecuación adecuada, como la ecuación 2.14*b* (p. 91) para una

sección transversal rectangular. Cada uno de estos dos elementos de esfuerzos tendrá su propio conjunto de esfuerzos principales y su esfuerzo cortante máximo, los cuales se calculan con la ecuación 2.6*a* (p. 75) para este caso bidimensional.

Cargas más complicadas sobre geometrías más complicadas pueden tener esfuerzos aplicados múltiples para el mismo elemento de esfuerzo infinitesimal. Es muy común en las piezas tener cargas que crean tanto flexión como torsión sobre la misma pieza. El ejemplo 2-9 se ocupa de este tipo de casos y deberá estudiarse cuidadosamente.

El esfuerzo es sólo una de las consideraciones del diseño. Para un funcionamiento adecuado también deberán controlarse las deflexiones en las piezas. Con frecuencia, un requerimiento de deflexiones pequeñas dominará el diseño y requerirá secciones más gruesas de las que serían necesarias para proteger contra esfuerzos excesivos. Siempre deben verificarse las deflexiones de una pieza diseñada, así como sus esfuerzos. Las ecuaciones de deflexión bajo varias cargas se encuentran en las secciones respectivas y también se agruparon en el apéndice F, para vigas de varios tipos y cargas.

La figura 2-60 es un diagrama de flujo que ilustra un conjunto de pasos que se pueden seguirse para analizar esfuerzos y deflexiones bajo cargas estáticas.

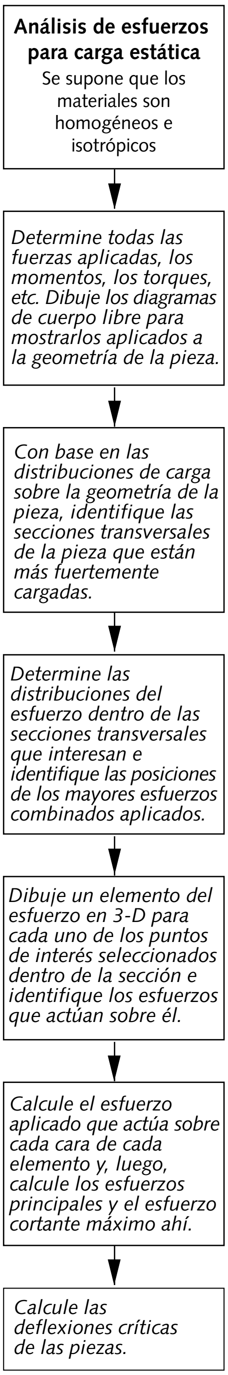


FIGURA 2-60
Diagrama de flujo del análisis de esfuerzos estáticos

Ecuaciones importantes utilizadas en este capítulo

Para información acerca del uso adecuado de estas ecuaciones, consulte las secciones de referencia.

Esfuerzo cúbico: sus raíces son los esfuerzos principales en 3-D (sección 2.3):

$$\sigma^3 - C_2\sigma^2 - C_1\sigma - C_0 = 0 \tag{2.4c}$$

donde

$$C_2 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
$$C_1 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x$$
$$C_0 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2$$

Esfuerzos cortantes máximos (sección 2.3):

$$\tau_{13} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}$$
$$\tau_{21} = \frac{|\sigma_2 - \sigma_1|}{2} \tag{2.5}$$
$$\tau_{32} = \frac{|\sigma_3 - \sigma_2|}{2}$$

Esfuerzos principales bidimensionales (sección 2.3):

$$\sigma_a, \sigma_b = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$\sigma_c = 0 \tag{2.6a}$$

$$\tau_{máx} = \tau_{13} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \tag{2.6b}$$

Esfuerzo de tensión axial (sección 2.7):

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \tag{2.7}$$

Deflexión axial (sección 2.7):

$$\Delta s = \frac{Pl}{AE} \tag{2.8}$$

Esfuerzo cortante directo (sección 2.8):

$$\tau_{xy} = \frac{P}{A_{corte}} \tag{2.9}$$

Área de contacto directa (sección 2.8):

$$A_{presión} = \frac{\pi}{4} l\,d \tag{2.10b}$$

Esfuerzo flexionante máximo: vigas rectas (sección 2.9):

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} \tag{2.11b}$$

Esfuerzo de flexionante máximo: vigas curvas (sección 2.9):

$$\sigma_i = +\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right) \tag{2.12b}$$

Esfuerzo cortante transversal en vigas: fórmula general (sección 2.9):

$$\tau_{xy} = \frac{V}{Ib}\int_{y_1}^{c} y\,dA \tag{2.13f}$$

Esfuerzo cortante transversal máximo: viga rectangular (sección 2.9):

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \tag{2.14b}$$

Esfuerzo cortante transversal máximo: viga redonda (sección 2.9):

$$\tau_{máx} = \frac{4}{3}\frac{V}{A} \tag{2.15c}$$

Esfuerzo cortante transversal máximo: viga-I (sección 2.9):

$$\tau_{máx} \cong \frac{V}{A_{web}} \tag{2.16}$$

Ecuaciones generales de vigas (sección 2.9):

$$\frac{q}{EI} = \frac{d^4 y}{dx^4} \tag{2.18a}$$

$$\frac{V}{EI} = \frac{d^3 y}{dx^3} \tag{2.18b}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad (2.18c)$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} \qquad (2.18d)$$

$$y = f(x) \qquad (2.18e)$$

Esfuerzo cortante máximo a la torsión: sección redonda (sección 2.12):

$$\tau_{máx} = \frac{Tr}{J} \qquad (2.23b)$$

Deflexión máxima a la torsión: sección redonda (sección 2.12):

$$\theta = \frac{Tl}{JG} \qquad (2.24)$$

Esfuerzo cortante máximo a la torsión: sección que no es redonda (sección 2.12):

$$\tau_{máx} = \frac{T}{Q} \qquad (2.26a)$$

Deflexión máxima a la torsión: sección que no es redonda (sección 2.12):

$$\theta = \frac{Tl}{KG} \qquad (2.26b)$$

Razón de resorte o constante de resorte: lineal (*a*), angular (*b*) (sección 2.14):

$$k = \frac{F}{y} \qquad (2.27a)$$

$$k = \frac{T}{\theta} \qquad (2.27b)$$

Esfuerzo con concentración de esfuerzos (sección 2.15):

$$\sigma_{máx} = K_t \, \sigma_{nom}$$
$$\tau_{máx} = K_{ts} \, \tau_{nom} \qquad (2.31)$$

Radio de giro de una columna (sección 2.16):

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}} \qquad (2.34)$$

Razón de esbeltez de una columna (sección 2.16):

$$S_r = \frac{l}{k} \qquad (2.33)$$

Carga unitaria crítica de una columna: Fórmula de Euler

$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{S_r^{\,2}} \qquad (2.38c)$$

Carga unitaria crítica de una columna: Fórmula de Johnson (sección 2.16):

$$\frac{P_{cr}}{A} = S_{yc} - \frac{1}{E}\left(\frac{S_{yc}S_r}{2\pi}\right)^2 \tag{2.43}$$

Carga unitaria crítica de una columna: Fórmula de la secante (sección 2.16):

$$\frac{P}{A} = \frac{S_{yc}}{1+\left(\frac{ec}{k^2}\right)\sec\left(\frac{l_{ef}}{k}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)} \tag{2.46c}$$

Cilindro a presión (sección 2.17):

$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} + \frac{r_i^2 r_o^2 (p_i - p_o)}{r^2\left(r_o^2 - r_i^2\right)} \tag{2.47a}$$

$$\sigma_r = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} - \frac{r_i^2 r_o^2 (p_i - p_o)}{r^2\left(r_o^2 - r_i^2\right)} \tag{2.47b}$$

$$\sigma_a = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \tag{2.47c}$$

2.20 REFERENCIAS

1. **I. H. Shames y C. L. Dym**, *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*. Hemisphere Publishing: Nueva York, secc. 1.6, 1985.
2. **I. H. Shames y F. A. Cossarelli**, *Elastic and Inelastic Stress Analysis*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., pp. 46-50, 1991.
3. **R. E. Peterson**, *Stress Concentration Factors*. John Wiley & Sons: Nueva York, 1974.
4. **R. J. Roark y W. C. Young**, *Formulas for Stress and Strain*. 6a. ed. McGraw-Hill: Nueva York, 1989.
5. **R. E. Peterson**, *Stress Concentration Factors*. John Wiley & Sons: Nueva York, p. 150, 1974.
6. **W. D. Pilkey**, *Peterson's Stress Concentration Factors*, John Wiley & Sons: Nueva York, 1997.
7. **H. T. Grandin y J. J. Rencis**, *Mechanics of Materials*, John Wiley & Sons: Nueva York, pp. 144-147, 2006.
8. **N. Troyani, C. Gomes y G. Sterlacci**, "Theoretical Stress Concentration Factors For Short Rectangular Plates With Centered Circular Holes". *ASME J. Mech. Design*, V. 124, pp. 126-128, 2002.
9. **N. Troyani y otros,** "Theoretical Stress Concentration Factors for Short Shouldered Plates Subjected to Uniform Tensions". *ImechE J. Strain Analysis*, V. 38, pp. 103-113, 2003.
10. **N. Troyani, G. Sterlacci y C. Gomes,** "Simultaneous Considerations of Length and Boundary Conditions on Theoretical Stress Concentration Factors". *Int. J. Fatigue*, V. 25, pp. 353-355, 2003.

2

Tabla P2-0†
Matriz de tema/problema

Secc. 2.1, 2.2 Esfuerzo, deformación
2-55, 2-56, 2-57, 2-58

Secc. 2.5 Círculos de Mohr
2-1, 2-79

Secc. 2.7 Tensión axial
2-2, 2-18, 2-61, 2-74a

Secc. 2.8 Cortante directo, contacto y desgarramiento
2-4, **2-5**, **2-6**, ***2-7***, **2-9**, *2-15*, *2-19*, *2-20*, **2-22**, 2-47, 2-59, 2-60, 2-74f

Secc. 2.9 Vigas rectas
2-10, **2-11**, **2-12**, **2-13**, ***2-14***, **2-27**, *2-40*, 2-43a, 2-64, *2-65*, *2-66*, *2-67*, *2-68*, 2-74b, 2-74c, 2-74g

Secc. 2.9 Vigas curvas
2-17, 2-37, 2-62, 2-63, **2-69 a 2-72**, *2-73*, 2-74e

Secc. 2.10 Deflexión
2-8, **2-16**, **2-23**, **2-24**, **2-25**, **2-26**, ***2-28***, 2-43b, ***2-44***, ***2-48***

Secc. 2.11 Método de Castigliano
2-84, 2-85, 2-86

Secc. 2.12 Torsión
2-21, 2-34, 2-46, 2-74d, 2-74h, 2-81, 2-82

Secc. 2.13 Esfuerzos combinados
2-3, 2-34, 2-46

Secc. 2.14 Razones del resorte
2-29, 2-30, 2-31, 2-32, 2-35, *2-38*, *2-39*

Secc. 2.15 Concentración de esfuerzos
2-36, 2-75 a 2-78

Secc. 2.16 Columnas
2-45, 2-49, 2-50, 2-51, 2-52, *2-53*, 2-54

Secc. 2.17 Cilindros
2-41, 2-42, 2-80, 2-83

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H.

2.21 BIBLIOGRAFÍA

Para información general sobre el análisis de esfuerzos y deflexión, véase:

F. P. Beer y E. R. Johnston, *Mechanics of Materials*, 2a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, 1992.

J. P. D. Hartog, *Strength of Materials*. Dover: Nueva York, 1961.

R. J. Roark y W. C. Young, *Formulas for Stress and Strain*. 6a. ed. McGraw-Hill: Nueva York, 1989.

I. H. Shames, *Introduction to Solid Mechanics*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J. 1989.

I. H. Shames y F. A. Cossarelli, *Elastic and Inelastic Stress Analysis*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1991.

S. Timoshenko y D. H. Young, *Elements of Strength of Materials*. 5a. ed. Van Nostrand: Nueva York, 1968.

2.22 PROBLEMAS

*2-1. Un elemento diferencial de esfuerzo tiene un conjunto de esfuerzos aplicados sobre él, como se indica en cada fila de la tabla P2-1. Para la(s) fila(s) asignada(s), dibuje el elemento de esfuerzo mostrando los esfuerzos aplicados, obtenga analíticamente los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo, y compruebe los resultados dibujando los círculos de Mohr para ese estado de esfuerzos.

2-2. Un candelabro de 400 lb va a colgarse de dos cables sólidos de acero de 10 pies de longitud. Seleccione el diámetro adecuado del cable, que no permita un esfuerzo más allá de 5 000 psi. ¿Cuál será la deflexión en los cables? Indique todas las suposiciones.

†**2-3**. Para el ensamble del brazo del pedal de la bicicleta de la figura P2-1 con una fuerza de 1 500 N aplicada por el conductor al pedal, determine el esfuerzo principal máximo en el brazo del pedal, si su sección transversal tiene 15 mm de diámetro. El pedal está sujeto al brazo del pedal con un tornillo de cuerda de 12 mm. ¿Cuál es el esfuerzo en el tornillo del pedal?

†***2-4**. El enganche del remolque mostrado en las figuras P2-2 y A-1 (p. 857) tiene cargas aplicadas como se definió en el problema 1-4. El peso de 100 kg de la lengua actúa hacia abajo y la fuerza de arrastre de 4 905 N actúa horizontalmente. Usando las dimensiones del soporte de la bola mostradas en la figura A-5 (p. 860), determine:

(*a*) Los esfuerzos principales en la caña de la bola, donde se une con el soporte de la bola.
(*b*) El esfuerzo de contacto en el orificio del soporte de la bola.
(*c*) El esfuerzo de desgarramiento en el soporte de la bola.
(*d*) Los esfuerzos normal y cortante en los tornillos sujetadores, si tienen 19 mm de diámetro.
(*e*) Los esfuerzos principales en el soporte de la bola considerada como viga en voladizo.

†**2-5**. Repita el problema 2-4 con las condiciones de carga del problema 1-5.

†***2-6**. Repita el problema 2-4 con las condiciones de carga del problema 1-6.

†****2-7***. Diseñe el pasador del problema 1-7 para el esfuerzo principal máximo permisible de 20 kpsi, si el pasador es hueco y con carga en cortante doble.

†****2-8***. Un molino de papel procesa rollos de papel que tienen una densidad de 984 kg/m^3. El rollo de papel tiene 1.50 m de diámetro exterior (OD) × 22 cm un diámetro interior (ID) × 3.23 m de largo y se encuentra sobre un eje hueco de acero simplemente apoyado. Calcule el diámetro interior necesario para obtener una deflexión máxima en el centro de 3 mm, si el diámetro exterior del eje es de 22 cm. Suponga que el eje tiene la misma longitud entre los soportes que la del rollo de papel.

† Los números en **negritas** son extensiones de problemas de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

Tabla P2-1 Datos del problema 2-1 (en psi)

Los problemas de las filas *a* a *g* y *k* a *m* son bidimensionales y los otros son en 3-D

Fila	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}
a	1 000	0	0	500	0	0
b	–1 000	0	0	750	0	0
c	500	–500	0	1 000	0	0
d	0	–1 500	0	750	0	0
e	750	250	0	500	0	0
f	–500	1 000	0	750	0	0
g	1 000	0	–750	0	0	250
h	750	500	250	500	0	0
i	1 000	–250	–750	250	500	750
j	–500	750	250	100	250	1 000
k	1 000	0	0	0	0	0
l	1 000	0	0	0	500	0
m	1 000	0	0	0	0	500
n	1 000	1 000	1 000	500	0	0
o	1 000	1 000	1 000	500	500	0
p	1 000	1 000	1 000	500	500	500

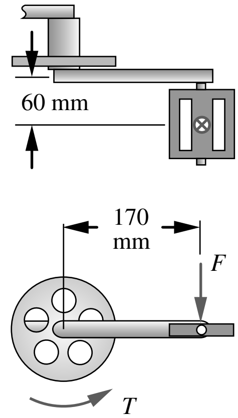


FIGURA P2-1

Problema 2-3 (un modelo en Solidworks de esto se encuentran en el CD)

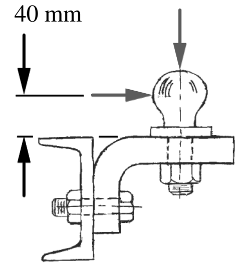


FIGURA P2-2

Problemas 2-4, 2-5, 2-6 (un modelo en Solidworks de esto se encuentran en el CD)

2-9. Para las pinzas de presión ViseGrip® dibujadas a escala en la figura P2-3, para la cual se efectuó un análisis de fuerzas en el problema 1-9, obtenga los esfuerzos en cada perno para una fuerza de apriete $P = 4\ 000$ N en la posición mostrada. Los pernos tienen 8 mm de diámetro y todos están sometidos a cortante doble.

*__2-10__. En la figura P2-4*a* se muestra el trampolín suspendido del problema 1-10. Suponga las dimensiones de 305 mm × 32 mm para la sección transversal. El material tiene $E = 10.3$ GPa. Obtenga el mayor esfuerzo principal en cualquier localización sobre el trampolín, cuando una persona de 100 kg se para en el centro del ancho de la tabla en el extremo libre. ¿Cuál es la deflexión máxima?

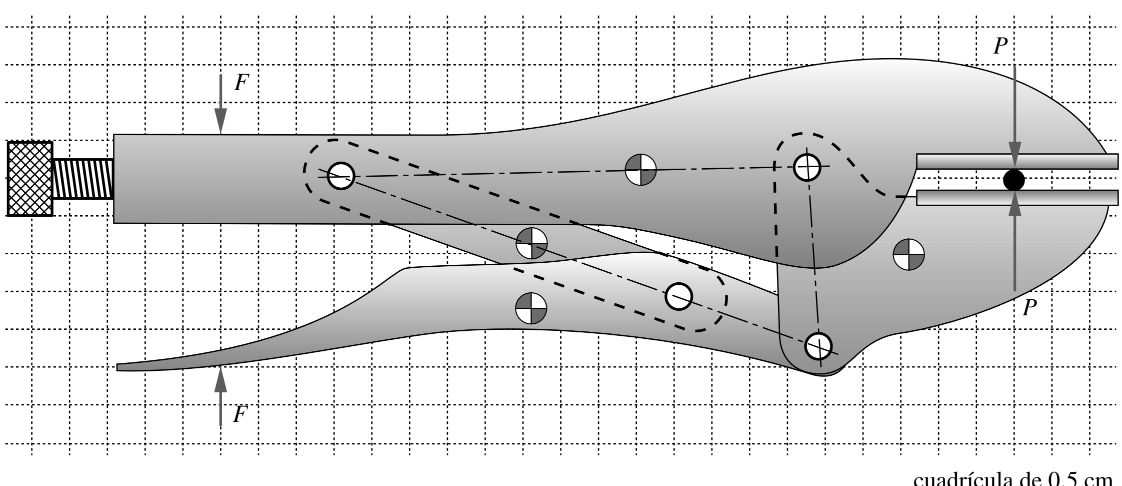


FIGURA P2-3

Problema 2-9 (un modelo en Solidworks de esto se encuentran en el CD)

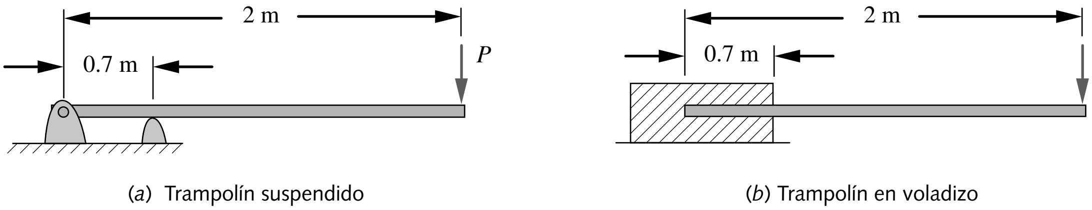


FIGURA P2-4

Problemas 2-10 a 2-13

*__2-11__. Repita el problema 2-10 usando las condiciones de carga del problema 1-11. Suponga que el trampolín pesa 29 kg y se flexiona 13.1 cm estáticamente cuando una persona se para sobre él. Calcule el esfuerzo principal mayor en cualquier localización del trampolín, cuando la persona de 100 kg del problema 2-10 salta 25 cm hacia arriba y cae de nuevo sobre el trampolín. Obtenga la deflexión máxima.

2-12. Repita el problema 2-10 usando el diseño del trampolín en voladizo de la figura P2-4*b*.

2-13. Repita el problema 2-11 usando el diseño del trampolín de la figura P2-4*b*. Suponga que el trampolín pesa 19 kg y se flexiona 8.5 cm estáticamente cuando la persona se para sobre él.

2-14. La figura P2-5 muestra el juguete de un niño llamado *cangurín*. El niño se para sobre las almohadillas, aplicando la mitad de su peso en cada lado. Luego salta hacia arriba del suelo, manteniendo las almohadillas junto a sus pies, y rebota con el resorte que amortigua el impacto y almacena energía para facilitar cada rebote. Suponga un niño de 60 lb y una constante del resorte de 100 lb/in. El cangurín pesa 5 lb. Diseñe las secciones de la viga de aluminio en voladizo, sobre la cual se para el niño para que dure saltando 2 in del suelo. Suponga un esfuerzo permisible de 20 kpsi. Defina la forma y tamaño de la viga.

*_2-15_. Diseñe el perno cortante del eje de la hélice de un motor fuera de borda, si el eje a través de la cual está colocado el perno tiene un diámetro de 25 mm, la hélice tiene 200 mm de diámetro y el perno debe fallar cuando se aplique una fuerza $>$ 400 N al extremo de la hélice. Suponga una resistencia última al corte de 100 Mpa.

2-16. Una pista para guiar las bolas de bolos (boliche) fue diseñada con dos varillas redondas, como se muestra en la figura P2-6. Las varillas no son paralelas entre sí, sino que tienen un pequeño ángulo entre ellas. Las bolas ruedan sobre las varillas hasta que caen entre ellas y llegan a otra pista. El ángulo entre las varillas varía para que la bola caiga en diferentes lugares. La longitud sin soporte de cada varilla es de 30 in y el ángulo entre ellas es de 32°. Las bolas tienen un diámetro de 4.5 in y pesan 2.5 lb cada una. La distancia del centro a las barras de 1 in de diámetro es de 4.2 in en el extremo más estrecho. Calcule el esfuerzo y la deflexión máximos en las varillas.

(*a*) Suponga que las varillas están simplemente soportadas por los extremos.
(*b*) Suponga que las varillas están fijas en cada extremo.

2-17. En la figura P2-7 se muestran unas tenazas para hielo. El hielo pesa 50 lb y tiene 10 in de ancho entre las tenazas. La distancia entre los mangos es de 4 in y el radio medio *r* de un elemento de la tenaza es de 6 in. Las dimensiones de la sección transversal rectangular son 0.75 in de profundidad por 0.312 in de ancho. Obtenga el esfuerzo en las tenazas.

*2-18. Un conjunto de varillas de acero reforzado se estira axialmente a la tensión para crear un esfuerzo a la tensión de 30 kpsi, antes de que sean vaciadas en concreto para formar una viga. Determine cuánta fuerza se requiere para estirarlas la cantidad requerida y cuál es la deflexión necesaria. Son 10 varillas, cada una de 0.75 in de diámetro y 30 ft de largo.

*_2-19_. El dispositivo de presión que se usa para jalar las varillas del problema 2-18 está conectado a un ariete hidráulico por una horquilla, como se ilustra en la figura P2-8. Determine el tamaño necesario del perno de la horquilla para soportar la fuerza aplicada. Suponga un esfuerzo cortante permisible de 20 000 psi y un esfuerzo normal

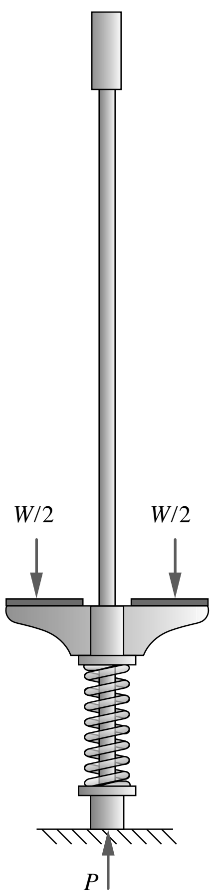


FIGURA P2-5

Problema 2-14

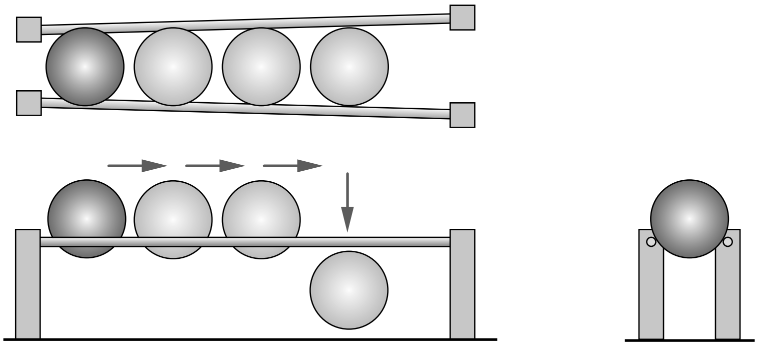


FIGURA P2-6

Problema 2-16

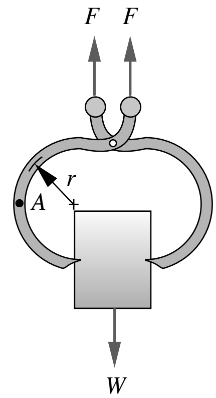


FIGURA P2-7

Problema 2-17

permisible de 40 000 psi. Determine el radio exterior requerido del extremo de la horquilla, para no exceder el esfuerzo permisible anterior, tanto al desgarramiento como al contacto si cada pestaña de la horquilla mide 0.8 in de espesor.

2-20. Repita el problema 2-19 con 12 varillas de 1 cm de diámetro cada una y 10 m de largo. El esfuerzo deseado de la varilla es de 200 Mpa. El esfuerzo normal permisible en la horquilla y el perno es de 280 Mpa y su esfuerzo cortante permisible es de 140 Mpa. Cada pestaña de la horquilla mide 2 cm de ancho.

2-21. La figura P2-9 muestra la rueda de un automóvil con dos estilos comunes de llaves que sirven para apretar los birlos, una llave con un solo extremo en *a*) y una llave con dos extremos en *b*). En los dos casos se requieren ambas manos para proporcionar las fuerzas en *A* y *B*, como se muestra. La distancia entre los puntos *A* y *B* es de 1 ft en ambos casos y el diámetro del mango es de 0.625 in. El birlo requiere un torque de 70 ft-lb. Obtenga el esfuerzo principal máximo y la deflexión máxima para cada diseño de llave.

*__2-22__. En la figura P2-10 se muestra un patín con las ruedas en línea. Las ruedas de poliuretano miden 72 mm de diámetro y sus centros están espaciados 104 mm. La combinación patín-bota-pie pesa 2 kg. La razón del resorte efectiva del sistema persona-patín es de 6 000 N/m. Los ejes de las ruedas tienen 10 mm de diámetro y

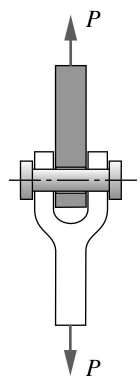


FIGURA P2-8

Problemas 2-19 y 2-20

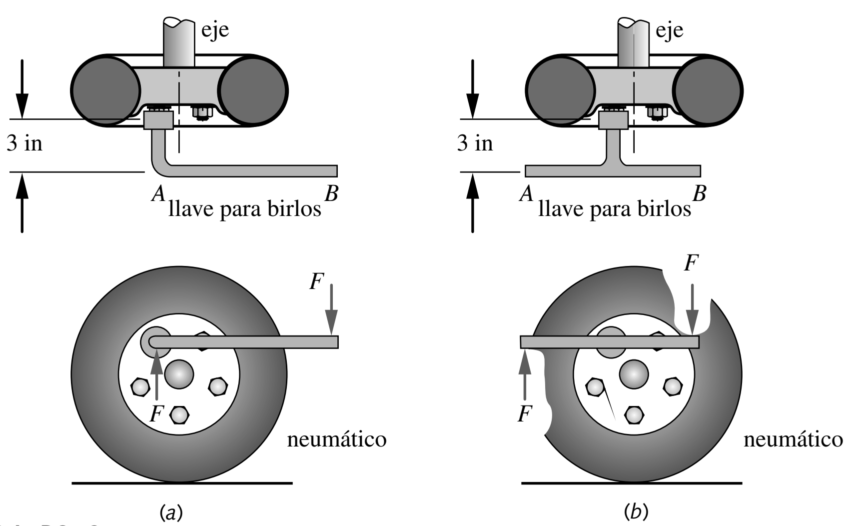


FIGURA P2-9

Problema 2-21

[*] Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problema en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas de capítulos sucesivos también pueden continuar y alargar estos problemas.



FIGURA P2-10

Problema 2-22

son pernos de acero sometidos a cortante doble. Encuentre el esfuerzo en los pernos para una persona de 100 kg que aterriza luego de un salto de 0.5 m sobre un pie. (*a*) Suponga que las cuatro ruedas caen simultáneamente. (*b*) Suponga que una rueda absorbe toda la fuerza del aterrizaje.

*__2-23__. Una viga está soportada y cargada como se muestra en la figura P2-11*a.* Obtenga las reacciones, el cortante máximo, el momento máximo, la pendiente máxima, el esfuerzo flexionante máximo y la deflexión máxima para los datos proporcionados en la(s) fila(s) de la tabla P2-2.

*__2-24__. Una viga está soportada y cargada como se muestra en la figura P2-11*b.* Obtenga las reacciones, el cortante máximo, el momento máximo, la pendiente máxima, el esfuerzo flexionante máximo y la deflexión máxima para los datos proporcionados en la(s) fila(s) de la tabla P2-2.

*__2-25__. Una viga está soportada y cargada como se muestra en la figura P2-11*c.* Obtenga las reacciones, el cortante máximo, el momento máximo, la pendiente máxima, el esfuerzo flexionante máximo y la deflexión máxima para los datos proporcionados en la(s) fila(s) de la tabla P2-2.

*__2-26__. Una viga está soportada y cargada como se muestra en la figura P2-11*d.* Obtenga las reacciones, el cortante máximo, el momento máximo, la pendiente máxima, el esfuerzo flexionante máximo y la deflexión máxima para los datos proporcionados en la(s) fila(s) de la tabla P2-2.

2-27. Se va a diseñar un estante de almacenamiento para mantener los rollos de papel del problema 2-8, como se indica en la figura P2-12. Determine los valores adecuados de las dimensiones *a* y *b* de la figura. Considere los esfuerzos de flexión, cortante y contacto. Suponga un esfuerzo permisible de tensión/compresión de 100 Mpa y un esfuerzo cortante permisible de 50 MPa, tanto para el montante como para el mandril, los cuales son de acero. El mandril es sólido y se inserta a la mitad del rollo de papel. Equilibre el diseño usando toda la resistencia del material. Calcule la deflexión en el extremo del rollo.

†***2-28***. La figura P2-13 muestra un montacargas de horqueta que sube por una rampa de 15° hasta llegar a una plataforma de carga a 4 ft de altura. El montacargas pesa 5 000 lb y tiene una distancia entre ejes de 42 in. Diseñe dos rampas (una de cada lado) de 1 ft de ancho, de acero, para tener no más de 1 in de deflexión, en el peor de los casos de carga, conforme el montacargas sube por ellas. Minimice el peso de las rampas usando una geometría sensible de la sección transversal.

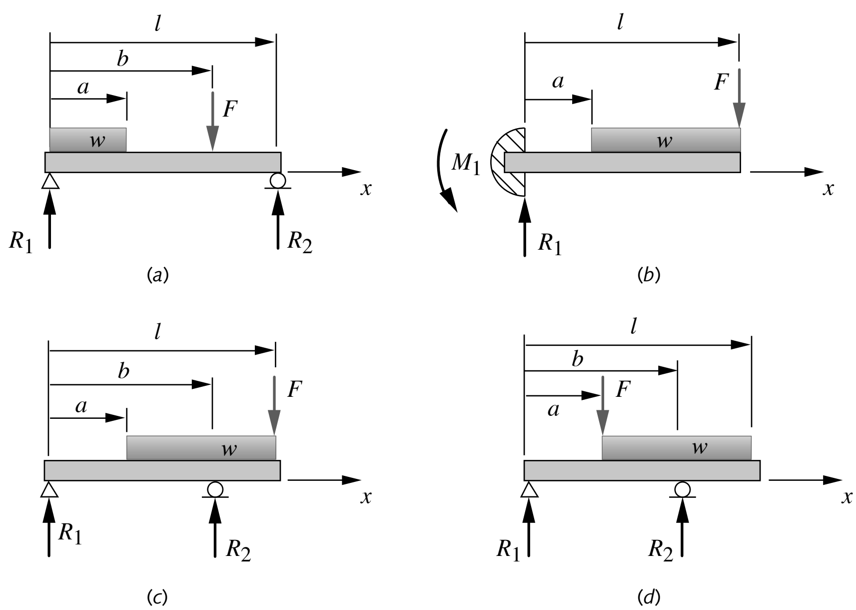


FIGURA P2-11

Vigas y cargas en vigas de los problemas 2-23 a 2-26 y 2-29 a 2-32. Véase la tabla P2-2 para los datos

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problema en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas de capítulos sucesivos también pueden continuar y alargar estos problemas.

Tabla P2-2 Datos para los problemas 2-23 a 2-26 y 2-29 a 2-32

Utilice sólo los datos relevantes para un problema específico. Longitudes en m, fuerzas en N, I en m^4.

Fila	*l*	*a*	*b*	*w**	*F*	*I*	*c*	*E*
a	1.00	0.40	0.60	200	500	2.85*E*–08	2.00*E*–02	acero
b	0.70	0.20	0.40	80	850	1.70*E*–08	1.00*E*–02	acero
c	0.30	0.10	0.20	500	450	4.70*E*–09	1.25*E*–02	acero
d	0.80	0.50	0.60	65	250	4.90*E*–09	1.10*E*–02	acero
e	0.85	0.35	0.50	96	750	1.80*E*–08	9.00*E*–03	acero
f	0.50	0.18	0.40	450	950	1.17*E*–08	1.00*E*–02	acero
g	0.60	0.28	0.50	250	250	3.20*E*–09	7.50*E*–03	acero
h	0.20	0.10	0.13	400	500	4.00*E*–09	5.00*E*–03	alum
i	0.40	0.15	0.30	50	200	2.75*E*–09	5.00*E*–03	alum
j	0.20	0.10	0.15	150	80	6.50*E*–10	5.50*E*–03	alum
k	0.40	0.16	0.30	70	880	4.30*E*–08	1.45*E*–02	alum
l	0.90	0.25	0.80	90	600	4.20*E*–08	7.50*E*–03	alum
m	0.70	0.10	0.60	80	500	2.10*E*–08	6.50*E*–03	alum
n	0.85	0.15	0.70	60	120	7.90*E*–09	1.00*E*–02	alum

* Observe que *w* es una unidad de fuerza en N/m

*2-29. Determine la razón del resorte de la viga del problema 2-23 en el punto de aplicación de la carga concentrada para la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P2-2.

*2-30. Determine la razón del resorte de la viga del problema 2-24 en el punto de aplicación de la carga concentrada para la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P2-2.

*2-31. Determine la razón del resorte de la viga del problema 2-25 en el punto de aplicación de la carga concentrada para la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P2-2.

*2-32. Determine la razón del resorte de la viga del problema 2-26 en el punto de aplicación de la carga concentrada para la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P2-2.

*2-33. Para el soporte mostrado en la figura P2-14 y los datos de la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P2-3, determine el esfuerzo flexionante en el punto A y el esfuerzo cortante debido a la carga transversal en el punto B. También calcule el esfuerzo cortante a la torsión en ambos puntos. Luego determine los esfuerzos principales en los puntos A y B.

*2-34. Para el soporte mostrado en la figura P2-14 y los datos de la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P2-3, determine la deflexión de la carga F.

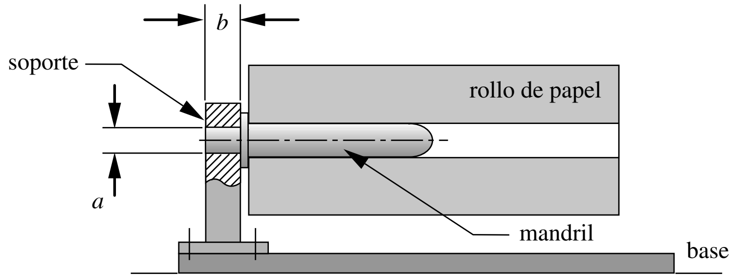


FIGURA P2-12

Problema 2-27

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problema en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas de capítulos sucesivos también pueden continuar y alargar estos problemas.

2

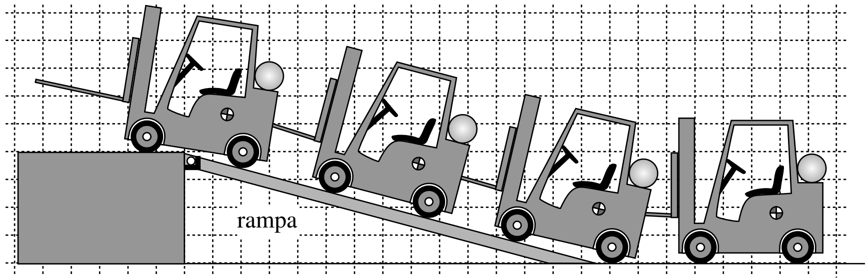


FIGURA P2-13

Problema 2-28

*2-35. Para el soporte mostrado en la figura P2-14 y los datos en la(s) fila(s) asignadas de la tabla P2-3, determine la razón del resorte del tubo en flexión, la razón del resorte del brazo en flexión y la razón del resorte del tubo en torsión. Combine éstas en una razón del resorte integral en términos de la fuerza *F* y la deflexión lineal en el punto de aplicación de la fuerza *F*.

2-36. Para el soporte mostrado en la figura P2-14 y los datos en la(s) fila(s) asignadas de la tabla P2-3, resuelva nuevamente el problema 2-33 considerando la concentración de esfuerzos en los puntos *A* y *B*. Suponga un factor de concentración de esfuerzos de 2.5 in tanto a la flexión como a la torsión.

*2-37. En la figura P2-15 se muestra una viga curva semicircular, que tiene un diámetro exterior de 150 mm, un diámetro interior igual a 100 mm y $t = 25$ mm. Para el par de carga $F = 14$ kN aplicado a lo largo del diámetro, encuentre la excentricidad del eje neutro, así como el esfuerzo en las fibras interior y exterior.

2-38. Diseñe una barra de acero sólida, recta, sometida a torsión para tener una razón del resorte de 10 000 in-lb por radián por pie de longitud. Compare diseños sólidos con sección transversal redonda y cuadrada. ¿Cuál es más eficiente en cuanto al material utilizado?

2-39. Diseñe un resorte en voladizo de 1 pie de largo, cargado en el extremo con una razón de resorte de 10 000 lb/in en la ubicación de la carga. Compare diseños sólidos con sección transversal redonda y cuadrada. ¿Cuál es más eficiente en cuanto al material empleado?

2-40. Rediseñe el soporte del rollo del problema 2-8 para hacerlo como el que se muestra en la figura P2-16. El cabo de los mandriles se inserta un 10% de la longitud del rollo en cada extremo. Seleccione las dimensiones adecuadas *a* y *b* para utilizar completamente la resistencia del material, la cual es la misma del problema 2-27. Para datos adicionales, véase el problema 2-8.

*2-41. Un tubo de acero con un diámetro interior de 10 mm conduce un líquido a 7 MPa. Determine los esfuerzos principales en la pared si el espesor es de: (*a*) 1 mm, (*b*) 5 mm.

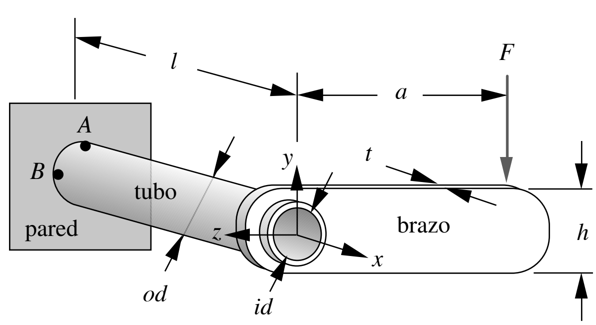


FIGURA P2-14

Problemas 2-33 a 2-36 (un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD).

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

Tabla P2-3 Datos de los problemas 2-33 a 2-36 y 2-49 a 2-52

Use sólo los datos relevantes para un problema específico. Longitudes en m, fuerzas en N.

Fila	*l*	*a*	*t*	*h*	*F*	*OD*	*ID*	*E*
a	100	400	10	20	50	20	14	acero
b	70	200	6	80	85	20	6	acero
c	300	100	4	50	95	25	17	acero
d	800	500	6	65	160	46	22	alum
e	85	350	5	96	900	55	24	alum
f	50	180	4	45	950	50	30	alum
g	160	280	5	25	850	45	19	acero
h	200	100	2	10	800	40	24	acero
i	400	150	3	50	950	65	37	acero
j	200	100	3	10	600	45	32	alum
k	120	180	3	70	880	60	47	alum
l	150	250	8	90	750	52	28	alum
m	70	100	6	80	500	36	30	acero
n	85	150	7	60	820	40	15	acero

2-42. Se requiere un tanque cilíndrico con extremos hemisféricos para mantener 150 psi de aire presurizado a temperatura ambiente. Obtenga los esfuerzos principales en la pared de 1 mm de espesor, si el diámetro del tanque es de 0.5 m y su longitud es de 1 m.

2-43. La figura P2-17 muestra una estación de descarga en el extremo de una máquina de enrollado de papel. Los rollos de papel terminado miden 0.9 m de diámetro exterior, por 0.22 m de diámetro interior, por 3.23 m de largo, y tienen una densidad de 984 kg/m^3. Los rollos se transfieren de la banda transportadora (que no se ve) al montacargas por un eslabón en V de la estación de descarga, el cual gira 90° impulsado por un cilindro de aire. El papel rueda después sobre la horquilla del montacargas. Las horquillas miden 38 mm de espesor por 100 mm de ancho por 1.2 m de largo, y tienen un ángulo de 3° en la punta en relación con la horizontal. Encuentre los esfuerzos en los dos elementos de la horquilla cuando el papel rueda hacia ella bajo dos condiciones diferentes (defina todas las suposiciones):

(*a*) Los dos elementos de la horquilla no tienen soporte en su extremo libre.
(*b*) Los dos elementos de la horquilla tienen contacto con la mesa el punto *A*.

2-44. Determine el espesor adecuado de los eslabones en V de la estación de descarga de la figura P2-17, para limitar sus deflexiones en las puntas a 10 mm en cualquier posición durante la rotación. Suponga que existen dos eslabones en V que soportan el rollo, ubicados a 1/4 y 3/4 a lo largo de la longitud del rollo, y que cada uno de los brazos en V mide 10 cm de ancho y 1 m de largo. Los brazos en V están soldados a un tubo

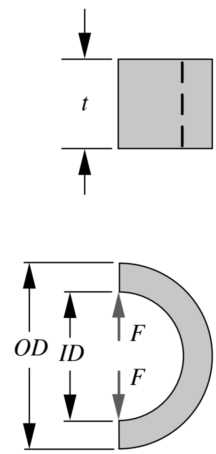


FIGURA P2-15

Problema 2-37 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

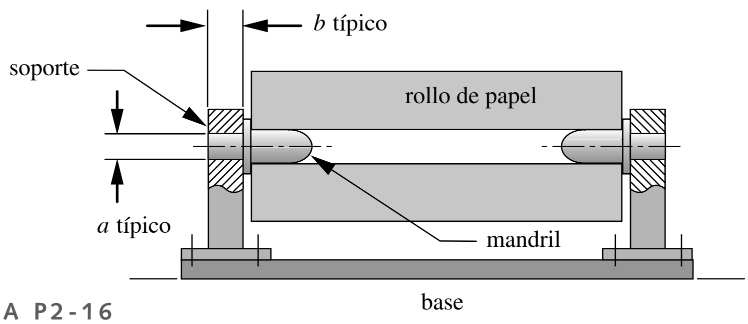


FIGURA P2-16

Problema 2-40 (Un modelo espacial de esto se encuentra en el CD)

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

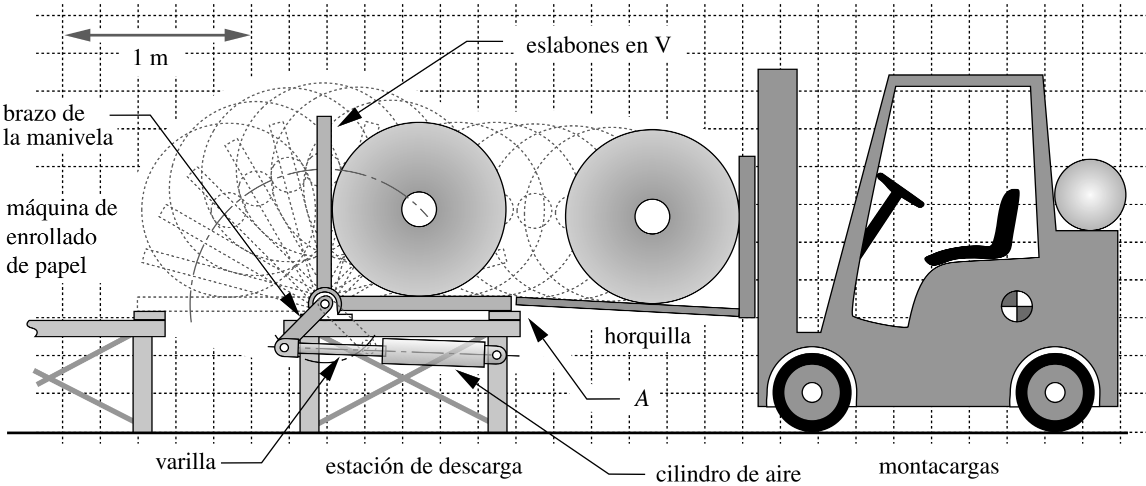


FIGURA P2-17

Problemas 2-43 a 2-47

de acero que gira impulsado por el cilindro de aire. Para más información, véase el problema 2-43.

2-45. Determine la carga crítica sobre la varilla del cilindro de aire de la figura P2-17, si el brazo de la manivela que hace girar mide 0.3 m de largo y la varilla tiene una extensión máxima de 0.5 m. La varilla sólida de acero tiene 25 mm de diámetro y una resistencia a la fluencia de 400 MPa. Defina las suposiciones.

2-46. En la figura P2-17 el brazo de la manivela hace girar los eslabones en V a través de un eje que tiene 60 mm de diámetro por 3.23 m de largo. Determine el torque máximo aplicado a este eje durante el movimiento del eslabón en V, y encuentre el esfuerzo y la deflexión máximos del eje. Para más información, véase el problema 2-43.

2-47. Determine las fuerzas máximas sobre los pernos en cada extremo del cilindro de aire de la figura P2-17. Determine el esfuerzo en estos pasadores si tienen 30 mm de diámetro y están sometidos a cortante simple.

2-48. Un corredor de maratón en silla de ruedas de 100 kg de peso desea una silla que le permita practicar bajo techo en todo tipo de clima. Se propone el diseño mostrado en la figura P2-18. Dos rodillos que giran libremente sobre cojinetes soportan las ruedas traseras. Una plataforma soporta las ruedas frontales. Diseñe los rodillos de 1 m de largo como tubos huecos de aluminio para minimizar la altura de la plataforma y limitar también a 1 mm las deflexiones del rodillo en el peor de los casos. Las ruedas conductoras de la silla tienen un diámetro de 65 cm y están separadas por una pista de 70 cm de ancho. Las pestañas que se encuentran sobre los rodillos limitan el movimiento lateral de la silla mientras dura el ejercicio y, por lo tanto, las ruedas pueden estar en cualquier lugar entre las pestañas. Especifique las dimensiones adecuadas de los ejes de acero para soportar los tubos sobre los cojinetes. Calcule todos los esfuerzos significativos.

*2-49. Una columna hueca, cuadrada, tiene una longitud l y E de material, como se indica en las filas asignadas de la tabla P2-3. Las dimensiones de su sección transversal son de 4 mm en el exterior y de 3 mm en el interior. Utilice una S_y = 150 MPa para aluminio y de 300 MPa para acero. Determine si se trata de una columna Johnson o una columna Euler y encuentre la carga crítica:

(*a*) Si las condiciones limitantes corresponden a articulada-articulada.
(*b*) Si las condiciones limitantes corresponden a fija-articulada.
(*c*) Si las condiciones limitantes corresponden a fija-fija.
(*d*) Si las condiciones limitantes corresponden a fija-libre.

*2-50. Una columna hueca, redonda, tiene una longitud de 1.5 m, E del material y las dimensiones de la sección transversal de su diámetro exterior y diámetro interior se muestran en la fila asignada de la tabla P2-3. Use una S_y = 150 MPa para

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problema en *itálicas* son problemas de diseño.

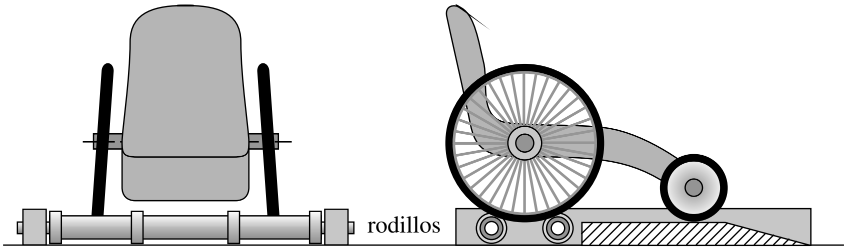


FIGURA P2-18

Problema 2-48

aluminio y 300 MPa para acero. Determine si se trata de una columna de Johnson o una columna de Euler, y encuentre la carga crítica:

(*a*) Si las condiciones limitantes corresponden a articulada-articulada.
(*b*) Si las condiciones limitantes corresponden a fija-articulada.
(*c*) Si las condiciones limitantes corresponden a fija-fija.
(*d*) Si las condiciones limitantes corresponden a fija-libre.

*2-51. Una columna sólida, rectangular, tiene una longitud l y E de material. Las dimensiones de su sección transversal son h y t como se indica en las filas asignadas de la tabla P2-3. Utilice una S_y = 150 MPa para aluminio y 300 MPa para acero. Determine si se trata de una columna de Johnson o una columna de Euler, y encuentre la carga crítica:

(*a*) Si las condiciones limitantes corresponden a articulada-articulada.
(*b*) Si las condiciones limitantes corresponden a fija-articulada.
(*c*) Si las condiciones limitantes corresponden a fija-fija.
(*d*) Si las condiciones limitantes corresponden a fija-libre.

*2.52. Una columna sólida, circular, tiene una longitud l, E de material, diámetro exterior OD y una excentricidad t como se indica en las filas asignadas de la tabla P2-3. Use una S_y = 150 MPa para aluminio y 300 MPa para acero. Determine si se trata de una columna de Johnson o una columna de Euler, y encuentre la carga crítica:

(*a*) Si las condiciones limitantes corresponden a articulada-articulada.
(*b*) Si las condiciones limitantes corresponden a fija-articulada.
(*c*) Si las condiciones limitantes corresponden a fija-fija.
(*d*) Si las condiciones limitantes corresponden a fija-libre.

2-53. Diseñe una columna de aluminio hueca, circular, con los datos siguientes: 3 m de largo, 5 mm de espesor de la pared, 900 N de carga concéntrica, resistencia a la fluencia del material de 150 MPa y un factor de seguridad de 3.

(*a*) Si sus condiciones limitantes corresponden a articulada-articulada.
(*b*) Si sus condiciones limitantes corresponden a fija-libre.

2-54. Tres barras de 1.25 in de diámetro están hechas de acero rolado en caliente SAE 1030 y tienen longitudes de 5 in, 30 in y 60 in, respectivamente. Están cargadas axialmente a la compresión. Compare la capacidad para soportar carga de las tres barras, si se supone que los extremos son:

(*a*) articulada-articulada
(*b*) Fijo-articulada
(*c*) Fijo-fijo
(*d*) Fijo-libre

2-55. La figura P2-19 muestra una barra de acero de 1.5 in de diámetro y 30 in de longitud, sometida a cargas de tensión iguales a P = 10 000 lb aplicadas en cada extremo de la barra, que actúan a lo largo de su eje longitudinal Y y a través del centroide de su sección transversal circular. El punto A se encuentra a 12 in por debajo del extremo superior y el punto B está a 8 in por debajo de A. Para esta barra, con esta carga, encuentre:

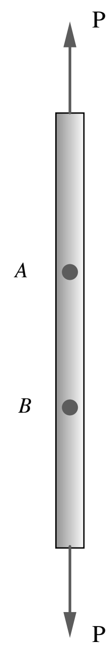


FIGURA P2-19

Problemas 2-55 y 2-56

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problema en *itálicas* son problemas de diseño.

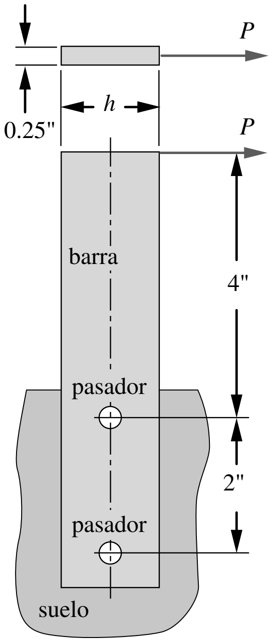


FIGURA P2-20

Problemas 2-57 y 2-58
(Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

(*a*) Todas las componentes de la matriz del esfuerzo tensor (ecuación 2.1*a*) para el punto medio entre *A* y *B*.
(*b*) El desplazamiento del punto *B* en relación con el punto *A*.
(*c*) La deformación elástica en la sección entre *A* y *B*.
(*d*) La deformación total en la sección entre *A* y *B*.

2-56. La varilla de la figura P2-19, con la carga del problema 2-55, está sometida a una reducción de temperatura de 80°F a 20°F, después de que se aplica la carga. El coeficiente de expansión térmica para el acero es aproximadamente de 6 μin/in/°F. Calcule:

(*a*) Todos los componentes de la matriz del esfuerzo tensor (ecuación 2.1*a*) para el punto medio entre *A* y *B*.
(*b*) El desplazamiento del punto *B* en relación con el punto *A*.
(*c*) La deformación unitaria elástica en la sección entre *A* y *B*.
(*d*) La deformación unitaria total en la sección entre *A* y *B*.

2-57. La figura 2-20 muestra una barra de acero sujeta al suelo plano rígido, y tiene pasadores de espiga de acero endurecido de 0.25 in de diámetro. Para $P = 1\,500$ lb encuentre:

(*a*) El esfuerzo cortante en cada pasador.
(*b*) El esfuerzo de contacto y directo en cada pasador y en cada orificio.
(*c*) El valor mínimo de la dimensión de *h* para prevenir una falla por desgarramiento, si la barra de acero tiene una resistencia al corte de 32.5 kpsi.

2-58. Repita el problema 2-57, para $P = 2\,200$ lb.

2-59. La figura P2-21 muestra la sección rectangular de una barra de aluminio sometida a fuerzas $P = 4\,000$ N fuera del centro, aplicadas como se muestra.

(*a*) Obtenga el esfuerzo normal máximo en la región media de la barra, lejos de los ojos donde las cargas se aplican.
(*b*) Grafique la distribución de esfuerzos normales a través de la sección transversal en la región media de la barra.
(*c*) Haga un dibujo "razonable" de la distribución de esfuerzos normales a través de la sección transversal en los extremos, cerca de las cargas aplicadas.

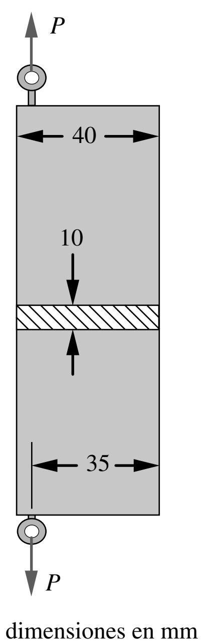


FIGURA P2-21

Problema 2-59 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

2-60. La figura P2-22 muestra el soporte de una máquina, de acero plano de 0.5 in de espesor. Está rígidamente sujeto a un soporte y con una carga de $P = 5\,000$ lb en el punto *D*. Calcule:

(*a*) La magnitud, la posición y el plano de orientación del esfuerzo normal máximo en la sección **E-A**.
(*b*) La magnitud, la posición y el plano de orientación del esfuerzo cortante máximo en la sección **E-A**.
(*c*) La magnitud, la posición y el plano de orientación del esfuerzo normal máximo en la sección **F-B**.
(*d*) La magnitud, la posición y el plano de orientación del esfuerzo cortante máximo en la sección **F-B**.

2-61. Para el soporte del problema 2-60, obtenga la deflexión y la pendiente en el punto *C*.

2-62. La figura P2-23 muestra una barra de acero de 1 in de diámetro soportada y sometida a la carga aplicada $P = 500$ lb. Obtenga la deflexión en la posición de la carga y la pendiente en el rodillo de soporte.

2-63. La figura P2-24 ilustra un eje de acero sólido de 1.25 in de diámetro con varios pares giratorios, aplicados en las direcciones mostradas. Para $T_A = 10\,000$ lb-in, $T_B = 20\,000$ lb-in, $T_C = 30\,000$ lb-in, encuentre:

(*a*) La magnitud y posición del esfuerzo cortante por torsión máximo en el eje.
(*b*) Los esfuerzos principales correspondientes a la posición determinada en el inciso (*a*).
(*c*) La magnitud y posición del esfuerzo de deformación cortante máximo en el eje.

2-64. Si el eje del problema 2-63 estuviera rígidamente sujeta a soportes fijos en cada extremo (*A* y *D*), y cargada sólo con los pares aplicados T_B y T_C, entonces, obtenga:

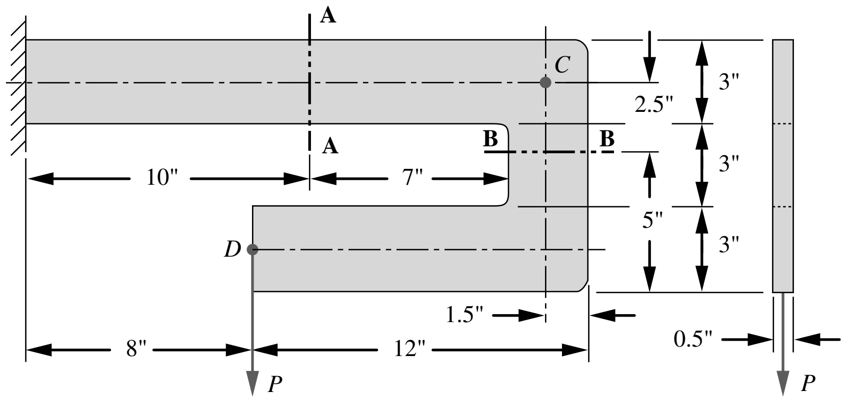


FIGURA P2-22

Problemas 2-60 y 2-61 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

(*a*) Las reacciones T_A y T_D en cada extremo del eje.
(*b*) La rotación de la sección *B* con respecto a la sección *C*.
(*c*) La magnitud y posición de la deformación cortante máxima.

†*2-65*. La figura P2-25 muestra el perno de un pivote sometido a presión por ajuste en la pieza *A* y a deslizamiento en la pieza *B*. Si $F = 100$ lb y $l = 1.5$ in, ¿qué diámetro necesita el pasador para limitar el esfuerzo máximo en el pasador a 50 kpsi?

2-66. La figura P2-25 muestra el perno de un pivote sometido a presión por ajuste en la pieza *A* y a deslizamiento en la pieza *B*. Si $F = 100$ N y $l = 64$ mm, ¿qué diámetro necesita el perno para limitar el esfuerzo máximo en el perno a 250 MPa?

†*2-67*. La figura P2-25 muestra el perno de un pivote sometido a presión por ajuste en la pieza *A* y a deslizamiento en la pieza *B*. Determine la razón *l*/*d* para que el esfuerzo cortante y el esfuerzo flexionante en el perno sean igualmente fuertes, si la resistencia al corte es igual a la mitad de la resistencia a la flexión.

2-68. Escriba un programa de cómputo en cualquier lenguaje, o use un programa solucionador de ecuaciones o una hoja de cálculo, para determinar y graficar la variación del área de la sección transversal, el momento de inercia del área, el radio de giro, la razón de esbeltez y la carga crítica, con respecto al diámetro interior tanto para una columna de Euler como para una de Johnson que tenga secciones transversales huecas redondas. Suponga que el diámetro exterior de cada columna es de 1 in. La longitud efectiva de la columna de Euler es de 50 in. La longitud efectiva de la columna de Johnson es de 10 in. Ambas están fabricadas de acero con $S_y = 36\ 000$ psi. El diámetro interior varía del 10 al 90% del diámetro exterior en

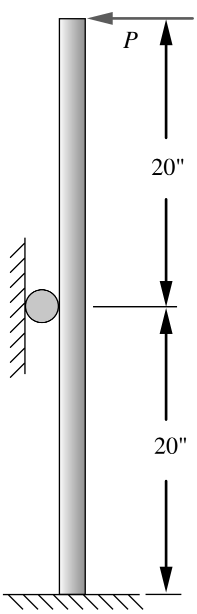


FIGURA P2-23

Problema 2-62

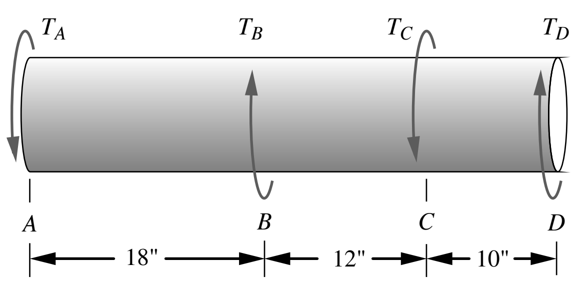


FIGURA P2-24

Problemas 2-63 y 2-64

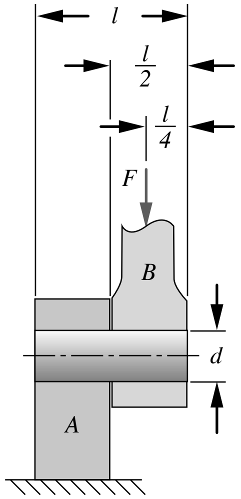


FIGURA P2-25

Problemas 2-65 a 2-67

este estudio paramétrico. Comente las ventajas de las columnas huecas redondas en comparación con las columnas sólidas redondas de cada tipo (de Euler y Johnson) que tienen los mismos diámetros exteriores, longitudes y materiales.

*2-69. La figura P2-26a muestra una prensa-C con un cuerpo elíptico con las dimensiones que se indican. La prensa tiene una sección-T de un espesor uniforme de 3.2 mm en la garganta, como se ilustra en la figura P2-26*b*. Obtenga el esfuerzo flexionante en las fibras interior y exterior de la garganta, si la fuerza de la prensa es de 2.7 kN.

2-70. Una prensa-C como la de la figura P2-26a tiene una sección transversal rectangular como la de la figura P2-26*c*. Obtenga el esfuerzo de flexión en las fibras interior y exterior de la garganta, si la fuerza de la prensa es de 1.6 kN.

2-71. Una prensa-C como la de la figura P2-26*a* tiene una sección transversal elíptica como la de la figura P2-26*d*. Se muestran las dimensiones de los ejes mayor y menor de la elipse. Obtenga el esfuerzo flexionante en las fibras interior y exterior de la garganta, si la fuerza de la prensa es de 1.6 kN.

2-72. Una prensa-C como la de la figura P2-26*a* tiene una sección transversal trapezoidal como la de la figura P2-26*e*. Obtenga el esfuerzo flexionante en las fibras interior y exterior de la garganta, si la fuerza de la prensa es de 1.6 kN.

2-73. Se quiere diseñar una prensa-C con una sección-T similar a las de las figuras P2-26*a* y *b*. La profundidad de la sección será de 31.8 mm, como se observa, pero debe calcularse el ancho de la pestaña (mostrado como 28.4 mm). Suponiendo un espesor uniforme de 3.2 mm y un factor de seguridad contra la fluencia estática de 2, determine un valor adecuado para el ancho de la pestaña, si la prensa-C está hecha de hierro dúctil 60-40-18 y la carga de diseño máxima es de 1.6 kN.

2-74. Una barra redonda de acero tiene 10 in de largo y un diámetro de 1 in.

(*a*) Calcule el esfuerzo en la barra cuando está sometida a una fuerza en tensión de 1 000 lb.
(*b*) Calcule el esfuerzo flexionante en la barra, si está fija por un extremo (como viga en voladizo) y tiene una carga transversal de 1 000 lb en el otro extremo.
(*c*) Calcule el esfuerzo cortante transversal en la barra del inciso (*b*).
(*d*) Determine qué tan corta debe ser la barra cuando se carga como una viga en voladizo para que alcance su máximo esfuerzo flexionante y su máximo esfuerzo cortante transversal, para proporcionar un tendencia igual a la falla. Obtenga la longitud como una fracción del diámetro, si el esfuerzo de falla por cortante es la mitad del esfuerzo de falla por flexión.

† Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

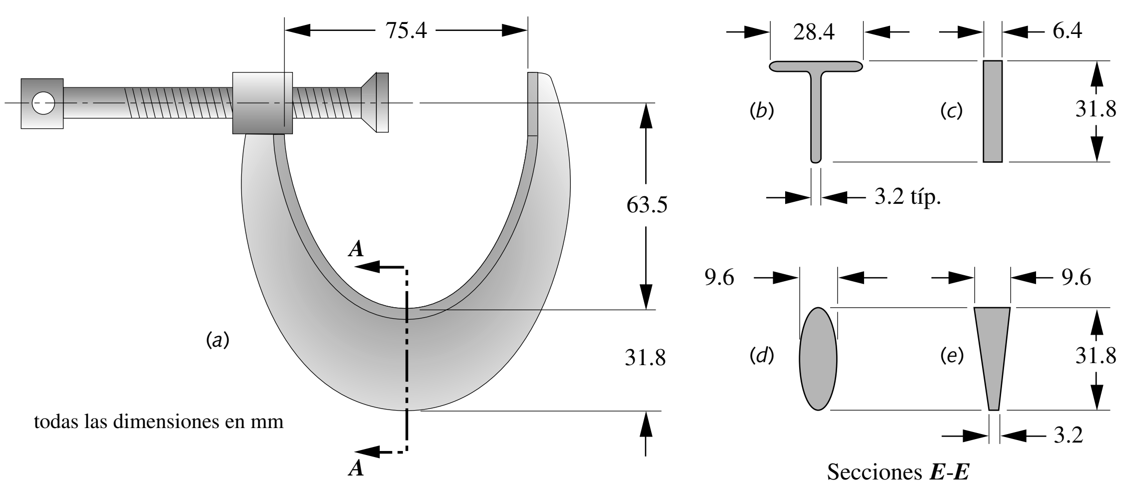


FIGURA P2-26

Problemas 2-69 a 2-73 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

(*e*) Calcule el esfuerzo cortante por torsión cuando se aplica un par de 10 000 in-lb alrededor de la línea central (eje) en el extremo libre de la viga en voladizo.
(*f*) Si la fuerza sobre la viga en voladizo del inciso (*b*) es excéntrica, induciendo así un esfuerzo de torsión y de flexión, ¿qué fracción del diámetro necesitaría ser la excentricidad para proporcionar un esfuerzo de torsión igual al esfuerzo cortante transversal?
(*g*) Calcule el esfuerzo cortante directo resultante sobre la barra del inciso (*a*), si fuera el pasador de una conexión articulada-articulada como en la figura P2-8 que está sometido a un tirón (jalón) de 1 000 lb.
(*h*) Calcule el esfuerzo de contacto directo resultante sobre la barra del inciso (*a*), si fuera el pasador de una conexión articulada-articulada como en la figura P2-8, que está sujeto a un tirón de 1 000 lb si la parte central (el ojo o lengua) tiene 1 in de ancho.
(*i*) Calcule el esfuerzo flexionante máximo en la barra, si tiene la forma de un semicírculo con un radio centroidal de 10/p in y se aplican fuerzas opuestas de 1 000 lb en los extremos y en el plano de los extremos, similar a la figura P2-15. Suponga que no existe distorsión de la sección transversal durante la flexión.

*2-75. Para una barra plana fileteada cargada a la tensión similar a la mostrada en la figura G-9 (apéndice G), así como para los datos de la(s) fila(s) correspondiente(s) de la tabla P2-4, determine los esfuerzos axiales nominal y máximo en la barra.

2-76. Para una barra plana fileteada cargada a la flexión similar a la mostrada en la figura G-10 (apéndice G), así como para los datos de la(s) fila(s) correspondiente(s) de la tabla P2-4, determine los esfuerzos de flexión nominal y máximo en la barra.

2-77. Para un eje, con un hombro fileteado, cargada a la tensión similar a la mostrada en la figura G-1 (apéndice G), así como para los datos de la(s) fila(s) correspondiente(s) de la tabla P2-4, determine los esfuerzos axiales nominal y máximo en el eje.

2-78. Para un eje, con un hombro fileteado, cargada a la flexión similar a la mostrada en la figura G-2 (apéndice G), así como para los datos de la(s) fila(s) correspondiente(s) de la tabla P2-4, determine los esfuerzos de flexión nominal y máximo en el eje.

2-79. Un elemento de esfuerzo diferencial tiene un conjunto de esfuerzos aplicados sobre él, como se muestra en la figura 2-1 (p. 72). Para $\sigma_x = 850$, $\sigma_y = -200$, $\sigma_z = 300$, $\tau_{xy} = 450$, $\tau_{yz} = -300$ y $\tau_{zx} = 0$, obtenga los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo; dibuje también el diagrama del círculo de Mohr para este estado de esfuerzos tridimensional.

2-80. Escriba expresiones para el esfuerzo tangencial normalizado (esfuerzo/presión), como una función del espesor de la pared normalizada (espesor de la pared/radio exterior) en la pared interior de un cilindro de pared gruesa y para un cilindro de pared delgada, ambos con presión interna únicamente. Grafique las diferencias porcentuales entre estas dos expresiones y determine el rango del espesor de la pared, para el cual la

Tabla P2-4 Datos para los problemas 2-75 a 2-78

Utilice sólo datos que sean pertinentes para el problema específico
Las longitudes están en mm, las fuerzas en N, y los momentos en N-m

Fila	*D*	*d*	*r*	*h*	*M*	*P*
a	40	20	4	10	80	8000
b	26	20	1	12	100	9500
c	36	30	1.5	8	60	6500
d	33	30	1	8	75	7200
e	21	20	1	10	50	5500
f	51	50	1.5	7	80	8000
g	101	100	5	8	400	15000

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

† Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

razón de radio exterior del esfuerzo pronosticado por la expresión de pared delgada es, por lo menos, 5% mayor que el pronosticado por la expresión de pared gruesa.

2-81. Una barra hueca, cuadrada, sometida a torsión como se muestra en la tabla 2-3 (p. 109) tiene las dimensiones $a = 25$ mm, $t = 3$ mm y $l = 300$ mm. Si está hecha de acero y tiene un módulo de rigidez $G = 80.8$ GPa, determine el esfuerzo cortante máximo en la barra, así como la deflexión angular bajo la carga de torsión de 500 N-m.

2-82. Diseñe una barra hueca, rectangular, sometida a torsión como se muestra en la tabla 2-3 (p. 109) que tiene las dimensiones $a = 45$ mm, $b = 20$ mm y $l = 500$ mm. Está hecha de acero con una resistencia a la fluencia de corte de 90 MPa y tiene una carga de torsión aplicada de 135 N-m. Utilice un factor de seguridad contra la fluencia de 2.

2-83. Un recipiente a presión con extremos cerrados tiene las siguientes dimensiones: diámetro exterior = 450 mm, y espesor de la pared $t = 6$ mm. Si la presión interna es de 690 kPa, obtenga los esfuerzos principales sobre la superficie interior alejada de los extremos. ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo en el punto analizado?

2-84. Una viga de acero simplemente apoyada de longitud l con una carga concentrada F, que actúa a la mitad de la longitud, tiene una sección transversal rectangular de ancho b y profundidad h. Si la energía de deformación debida a la carga cortante transversal es U_s y la debida a la carga de flexión es U_b, deduzca una expresión para la razón U_s / U_b y grafíquela como una función de h / l en el intervalo de 0.0 a 0.10.

2-85. Una viga está soportada y cargada como se ilustra en la figura P2-27*a*. Calcule las reacciones para los datos proporcionados en la fila *a* de la tabla P2-2.

2-86. Una viga está soportada y cargada como se muestra en la figura P2-27*b*. Obtenga las reacciones para los datos proporcionados en la fila *a* de la tabla P2-2.

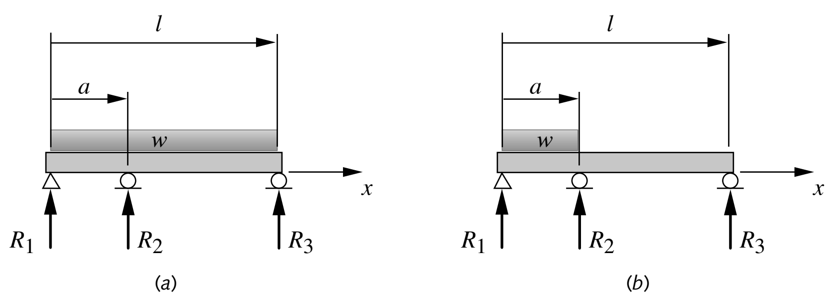
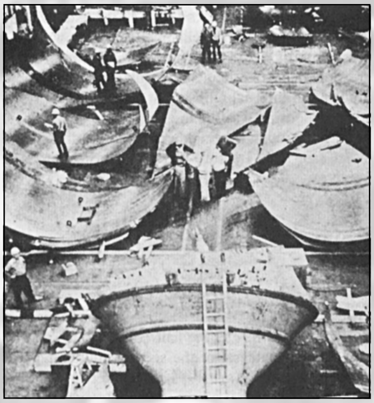


FIGURA P2-27

Cargas de la viga de los problemas 2-85 a 2-86; para los datos véase la tabla P2-2

3



TEORÍAS DE FALLAS ESTÁTICAS

Toda la ciencia no es más que el refinamiento del pensamiento cotidiano.

Albert Einstein

3.0 INTRODUCCIÓN

¿Por qué fallan las piezas? Ésta es una pregunta que ha ocupado a los científicos y a los ingenieros durante siglos. Actualmente se sabe mucho más acerca de varios tipos de fallas, de lo que se sabía incluso hace unas cuantas décadas debido, en gran medida, a la mejora de las pruebas y las técnicas de medición. Si al lector le solicitaran responder a la pregunta anterior según lo aprendido hasta el momento, probablemente diría algo como "las piezas fallan porque sus esfuerzos exceden su resistencia" y estaría en lo correcto, hasta ese punto. La pregunta que sigue es crítica: ¿Qué clases de esfuerzos causan la falla? ¿Tensión? ¿Compresión? ¿Cortante? La respuesta es clásica: "Depende". Depende del material en cuestión y de sus resistencias relativas a la compresión, a la tensión y al cortante. También depende del tipo de carga (ya sea estática o dinámica), y de la presencia o ausencia de grietas en el material.

La tabla 3-0 muestra las variables usadas en este capítulo, así como las referencias de las ecuaciones o secciones donde se utilizan. Al final del capítulo, se incluye un resumen que también agrupa todas las ecuaciones importantes de este capítulo, con la finalidad de consultarlas fácilmente e identificar la sección del capítulo en la cual se encuentra su explicación.

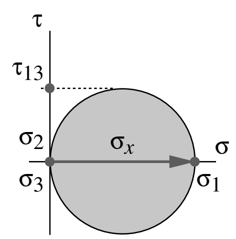
La figura 3-1*a* ilustra el círculo de Mohr para el estado de esfuerzos en una muestra de prueba a la tensión. En la prueba a la tensión (véase la sección B.1) se aplica lentamente a la pieza una carga de tensión pura, que causa un esfuerzo de tensión normal. Sin embargo, el círculo de Mohr muestra que también se presenta un esfuerzo cortante, el cual es exactamente de la mitad de la magnitud del esfuerzo normal. ¿Cuál esfuerzo hace fallar a la pieza, el esfuerzo normal o el esfuerzo cortante?

La figura 3-1*b* ilustra el círculo de Mohr del estado de esfuerzos en una muestra de prueba a la torsión. En la prueba de torsión (véase la sección A.1) se aplica lentamente a la pieza una carga de torsión pura que causa un esfuerzo cortante. Sin embargo, el

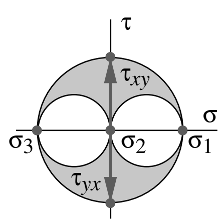
3

Tabla 3-0 Variables que se usan en este capítulo

Símbolo	Variable	Unidades ips	Unidades SI	Véase
a	mitad del ancho de una grieta	in	m	Secc. 3.3
b	mitad del ancho de una placa agrietada	in	m	Secc. 3.3
E	módulo de Young	psi	Pa	Secc. 3.1
K	intensidad del esfuerzo	kpsi-in$^{0.5}$	MPa-m$^{0.5}$	Secc. 3.3
K_c	tenacidad a la fractura	kpsi-in$^{0.5}$	MPa-m$^{0.5}$	Secc. 3.3
N	factor de seguridad	ninguna	ninguna	Secc. 3.1
N_{FM}	factor de seguridad para fallas por fractura mecánica	ninguna	ninguna	Secc. 3.3
S_{uc}	resistencia última a la compresión	psi	Pa	Secc. 3.2
S_{ut}	resistencia última a la tensión	psi	Pa	Secc. 3.2
S_y	resistencia de fluencia por tensión	psi	Pa	Ec. 3.8*a*, 3.9*b*
S_{ys}	resistencia de fluencia por cortante	psi	Pa	Ec. 3.9*b*, 3.10
U	energía de deformación total	in-lb	Joules	Ec. 3.1
U_d	energía de distorsión por deformación	in-lb	Joules	Ec. 3.2
U_h	energía de deformación hidrostática	in-lb	Joules	Ec. 3.2
β	factor geométrico de intensidad del esfuerzo	ninguna	ninguna	Ec. 3.14*c*
ε	deformación	ninguna	ninguna	Secc. 3.1
ν	razón de Poisson	ninguna	ninguna	Secc. 3.1
σ_1	esfuerzo principal	psi	Pa	Secc. 3.1
σ_2	esfuerzo principal	psi	Pa	Secc. 3.1
σ_3	esfuerzo principal	psi	Pa	Secc. 3.1
$\tilde{\sigma}$	esfuerzo efectivo de Mohr modificado	psi	Pa	Ec. 3.12
σ'	esfuerzo efectivo de Von Mises	psi	Pa	Ec. 3.7



(*a*)



(*b*)

FIGURA 3-1

(*a*) Círculos de Mohr para un esfuerzo unidireccional a la tensión y (*b*) torsión pura

círculo de Mohr muestra que también se presenta un esfuerzo normal, el cual es exactamente igual al esfuerzo cortante. ¿Cuál esfuerzo hace fallar la parte, el esfuerzo normal o el esfuerzo cortante?

En general, los materiales dúctiles e isotrópicos con cargas estáticas de tensión están limitados por sus resistencias al cortante; mientras que los materiales frágiles están limitados por sus resistencias a la tensión (aunque hay excepciones a esta regla, cuando los materiales dúctiles se comportan como si fueran frágiles). Esta situación provoca que haya teorías de falla diferentes para las dos clases de materiales, dúctiles y frágiles. Vea en el apéndice B que la ductilidad se define de varias maneras, la más común de las cuales es el porcentaje de elongación en la fractura del material que, si es $> 5\%$, se considera dúctil. La mayoría de los metales dúctiles tienen elongaciones en la fractura $> 10\%$.

Más importante aún es definir con cuidado lo que se quiere decir con falla. Una pieza falla si cede y se distorsiona lo suficiente como para no funcionar adecuadamente. Una pieza también falla cuando se fractura y se parten. Cualquiera de estas condiciones es una falla, pero los mecanismos que las causan llegan a ser muy diferentes. Sólo los materiales dúctiles pueden ceder de manera significativa antes de fracturarse. Los materiales frágiles se fracturan sin cambiar su forma drásticamente. Las curvas de esfuerzo-deformación de cada tipo de material reflejan tal diferencia, como se observa en las figuras B-2 y B-4, las cuales se reproducen aquí por comodidad. Advierta que si hay

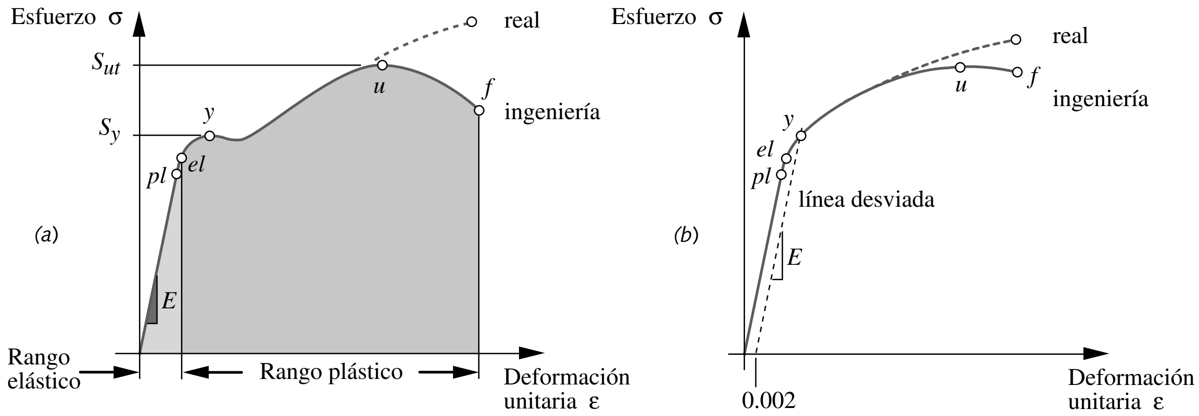


FIGURA B-2 Repetida

Curvas de ingeniería y de esfuerzo-deformación unitaria reales para materiales dúctiles: (*a*) Acero al bajo carbono; (*b*) Acero recocido al alto carbono

grietas en un material dúctil, éste puede fracturarse repentinamente en niveles de esfuerzo nominal muy por debajo de la resistencia a la fluencia, incluso bajo cargas estáticas.

Otro factor relevante en las fallas es el tipo de carga, ya sea estática o dinámica. Las cargas estáticas se aplican lentamente y, en esencia, permanecen constantes en el tiempo. Las cargas dinámicas se aplican repentinamente (cargas de impacto) o con variaciones cíclicas en el tiempo (cargas de fatiga), o ambas. Los mecanismos de falla son muy diferentes en cada caso. En la tabla 1-1 (p. 5) se definieron cuatro clases de cargas con base en el movimiento de las piezas cargadas y la dependencia en el tiempo de la carga. Con esta definición, únicamente la carga de clase 1 es estática. Las otras tres cargas son dinámicas en mayor o menor grado. Cuando la carga es dinámica, la distinción entre el comportamiento de falla de materiales dúctiles y frágiles es menos clara, en tanto que los materiales dúctiles fallan como si fueran “frágiles”. Debido a las grandes diferencias en los mecanismos de falla bajo cargas estáticas y dinámicas, se considerarán por separado, examinando las fallas debidas a cargas estáticas en este capítulo y las fallas ocasionadas por cargas dinámicas en el siguiente capítulo. En el caso de la carga estática (clase 1), se considerarán las teorías de fallas independientemente para cada tipo de material, sea dúctil o frágil.

3.1 FALLA DE MATERIALES DÚCTILES BAJO CARGA ESTÁTICA

Si bien los materiales dúctiles se fracturan si se esfuerzan estáticamente más allá de su resistencia última a la tensión, por lo general se considera que fallan como piezas de una máquina cuando ceden bajo una carga estática. La resistencia a la fluencia de un material dúctil es mucho menor que su resistencia última.

Históricamente, se han formulado varias teorías para explicar esta falla: *la teoría del esfuerzo normal máximo, la teoría de la deformación normal máxima, la teoría de la energía de deformación total, la teoría de la energía de distorsión (de Von Mises-Hencky) y la teoría del esfuerzo cortante máximo*. De éstas, sólo las últimas dos están estrechamente de acuerdo con los datos experimentales y, de ellas, la teoría de Von Mises-Hencky es el enfoque más preciso. Se estudiarán con detalle sólo las últimas dos, empezando con la más precisa (y la preferida).

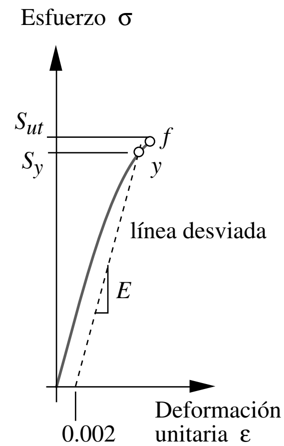


FIGURA B-4 Repetida

Curva de esfuerzo-deformación unitaria de un material frágil

Teoría de Von Mises-Hencky o de energía de distorsión

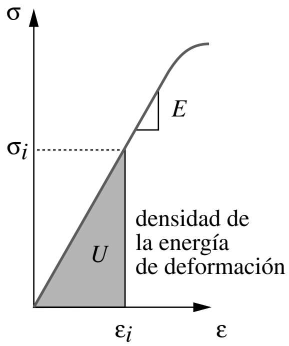


FIGURA 3-2

Densidad de la energía interna de deformación en una pieza flexionada

3

Ahora se sabe que el mecanismo de fluencia microscópico se debe al deslizamiento relativo de los átomos del material dentro de su estructura de entramado. Este deslizamiento es causado por un esfuerzo cortante y está acompañado por la distorsión de la forma de la pieza. La energía almacenada en la pieza por esta distorsión es un indicador de la magnitud del esfuerzo cortante presente.

Energía total de deformación Alguna vez se pensó que la energía de deformación total almacenada en el material era la causa de la falla por fluencia; sin embargo, la evidencia experimental no avaló dicha propuesta. La energía de deformación *U* en una unidad de volumen (densidad de la energía de deformación) asociada con cualquier esfuerzo es el área bajo la curva de esfuerzo-deformación unitaria, hasta el punto donde se aplica el esfuerzo, como se indica en la figura 3-2 para un estado de esfuerzos unidireccional. Suponiendo que la curva de esfuerzo-deformación unitaria sea esencialmente lineal hasta el punto de fluencia, entonces, se expresa la energía de deformación total por unidad de volumen en cualquier punto de ese intervalo como

$$U = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{3.1a}$$

Ampliando esto a un estado de esfuerzos tridimensional,

$$U = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right) \tag{3.1b}$$

usando los esfuerzos principales y las deformaciones principales que actúan sobre los planos de esfuerzo cortante igual a cero.

Esta expresión se plantea tan sólo en términos de esfuerzos principales, sustituyendo las relaciones

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3\right)\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3\right)\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2\right)
\end{aligned} \tag{3.1c}$$

donde ν es la razón de Poisson y da

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)\right] \tag{3.1d}$$

Carga hidrostática En los materiales se pueden almacenar cantidades muy grandes de energía de deformación sin que fallen, cuando están cargados hidrostáticamente para crear esfuerzos uniformes en todas direcciones. En la compresión, esto se logra muy fácilmente colocando la muestra en una cámara de presión. Muchos experimentos han demostrado que los materiales se pueden esforzar hidrostáticamente sin que fallen, a niveles más allá de sus resistencias últimas a la compresión; esto solamente reduce el volumen de la muestra sin cambiar su forma. P. W. Bridgman expuso hielo de agua a una compresión hidrostática de 1 Mpsi sin que hubiera falla. La explicación es que los esfuerzos uniformes en todas direcciones, si bien crean un cambio en el volumen y las energías de deformación potencialmente grandes, no causan distorsión en la pieza y, por lo tanto, no hay esfuerzo cortante. Considere el círculo de Mohr para una muestra sometida a un esfuerzo compresivo $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 1$ Mpsi. El "círculo" de Mohr es un **punto** sobre el eje σ en −1 Mpsi y $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. El esfuerzo cortante es cero, de modo que no hay distorsión ni falla. Esto es verdad para materiales dúctiles o frágiles, cuando los esfuerzos principales son idénticos en magnitud y en signo.

Den Hartog[1] describe la condición de las rocas a gran profundidad de la corteza terrestre, donde soportan esfuerzos compresivos hidrostáticos uniformes de 5 500 psi/milla de profundidad, debidos al peso de las rocas de arriba. Esto supera con mucho los 3 000 psi típicos de su resistencia última a la compresión, medida en una prueba de compresión. Aunque es mucho más difícil crear tensión hidrostática, Den Hartog[1] también describe como tal un experimento realizado por el científico ruso Joffe, en el cual enfrió lentamente un vidrio de mármol en aire líquido, permitiéndole equilibrarse en un estado libre de esfuerzos por la baja temperatura; luego, lo introdujo en un recinto caliente. Conforme el mármol se calentaba de afuera hacia adentro, la diferencial de temperatura contra su núcleo frío creó esfuerzos de tensión uniformes muy por arriba de la resistencia a la tensión del material, pero éste no se agrietó. Por consiguiente, parece que la distorsión también es la responsable de la falla a la tensión.

COMPONENTES DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN Se puede considerar que la energía de deformación total en una pieza cargada (ecuación 3.1*d*) tiene dos componentes: una debida a la carga hidrostática que cambia su volumen, y otra debida a la distorsión que cambia su forma. Si se separan las dos componentes, la **energía de distorsión** dará una medida del esfuerzo cortante presente. Si U_h representa la componente hidrostática o volumétrica y U_d la **componente de energía de distorsión**, entonces,

$$U = U_h + U_d \tag{3.2}$$

También se podría expresar cada uno de los esfuerzos principales en términos de la componente hidrostática (o volumétrica) σ_h que es común a cada cara, y una componente de distorsión σ_{id} que es única en cada cara, donde el subíndice *i* representa la dirección del esfuerzo principal, 1, 2 o 3:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_h + \sigma_{1_d} \\ \sigma_2 &= \sigma_h + \sigma_{2_d} \\ \sigma_3 &= \sigma_h + \sigma_{3_d} \end{aligned} \tag{3.3a}$$

Sumando los tres esfuerzos principales en la ecuación 3.3*a*:

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= \sigma_h + \sigma_{1_d} + \sigma_h + \sigma_{2_d} + \sigma_h + \sigma_{3_d} \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= 3\sigma_h + \left(\sigma_{1_d} + \sigma_{2_d} + \sigma_{3_d}\right) \\ 3\sigma_h &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \left(\sigma_{1_d} + \sigma_{2_d} + \sigma_{3_d}\right) \end{aligned} \tag{3.3b}$$

Para un cambio volumétrico sin distorsión, el término entre paréntesis de la ecuación 3.3*b* debe ser cero, dando así una expresión para la componente volumétrica o hidrostática del esfuerzo σ_h:

$$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \tag{3.3c}$$

en la cual el lector notará que es simplemente el promedio de los tres esfuerzos principales.

Ahora, la energía de deformación U_h asociada con el cambio de volumen hidrostático se determina sustituyendo cada esfuerzo principal en la ecuación 3.1*d* por σ_h:

$$\begin{aligned} U_h &= \frac{1}{2E}\left[\sigma_h^2 + \sigma_h^2 + \sigma_h^2 - 2\nu\left(\sigma_h\sigma_h + \sigma_h\sigma_h + \sigma_h\sigma_h\right)\right] \\ &= \frac{1}{2E}\left[3\sigma_h^2 - 2\nu\left(3\sigma_h^2\right)\right] \\ U_h &= \frac{3}{2}\frac{(1-2\nu)}{E}\sigma_h^2 \end{aligned} \tag{3.4a}$$

y sustituyendo la ecuación 3.3*c*:

$$U_h = \frac{3}{2}\frac{(1-2\nu)}{E}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}\right)^2$$
$$= \frac{1-2\nu}{6E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3)\right] \qquad (3.4b)$$

Energía de distorsión Ahora la energía de distorsión U_d se obtiene restando la ecuación 3.4*b* de la 3.1*d* de acuerdo con la ecuación 3.2:

$$U_d = U - U_h$$
$$= \left\{\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3)\right]\right\}$$
$$-\left\{\frac{1-2\nu}{6E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+2(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3)\right]\right\}$$
$$U_d = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_3\right] \qquad (3.5)$$

Para obtener un criterio de falla, se compara la energía de distorsión por unidad de volumen dada por la ecuación 3.5 con la energía de distorsión por unidad de volumen presente en una muestra de prueba a la tensión en la falla, ya que la prueba a la tensión es nuestra fuente principal de datos de resistencia del material. Aquí el esfuerzo de falla de interés es la resistencia a la fluencia S_y. La prueba de tensión es un **estado de esfuerzo uniaxial** donde, en la fluencia, $\sigma_1 = S_y$ y $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. La energía de distorsión asociada con la fluencia en la prueba de tensión se calcula sustituyendo estos valores en la ecuación 3.5:

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E}S_y^2 \qquad (3.6a)$$

y el criterio de falla se obtiene igualando la ecuación general 3.5 con la expresión de falla específica 3.6*a*, para obtener

$$\frac{1+\nu}{3E}S_y^2 = U_d = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_3\right]$$
$$S_y^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_3 \qquad (3.6b)$$
$$S_y = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2-\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_3}$$

que se aplica para el estado de esfuerzo tridimensional.

Para el estado de esfuerzo bidimensional, $\sigma_2 = 0$* y la ecuación 3.6*b* se reduce a:

$$S_y = \sqrt{\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_3+\sigma_3^2} \qquad (3.6c)$$

La ecuación bidimensional de la energía de distorsión 3.6*c* describe una elipse, la cual, al graficarse sobre los ejes σ_1, σ_3, queda como la de la figura 3-3. El interior de esta elipse define la región segura contra la fluencia bajo carga estática, para los esfuerzos biaxiales combinados.

La ecuación de la energía de distorsión tridimensional 3.6*b* describe un cilindro circular, inclinado en relación con los ejes σ_1, σ_2, σ_3 con cada uno de sus tres ángulos de Euler a 45°, como se muestra en la figura 3-4. El interior de este cilindro define la región segura contra la fluencia para los esfuerzos combinados σ_1, σ_2, σ_3. El eje del cilindro es el lugar geométrico de todos los esfuerzos hidrostáticos y se extiende a ± infinito, una

* Observe que esta suposición es consistente con la directriz convencional de los esfuerzos principales en el caso tridimensional ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), sólo si $\sigma_3 < 0$. Si ambos esfuerzos principales diferentes de cero son positivos, entonces la suposición de que $\sigma_2 = 0$ transgrede tal directriz. Sin embargo, para simplificar su representación en las figuras y en las ecuaciones, se usarán σ_1 y σ_3 para representar los dos esfuerzos principales diferentes de cero en el caso bidimensional, sin importar sus signos.

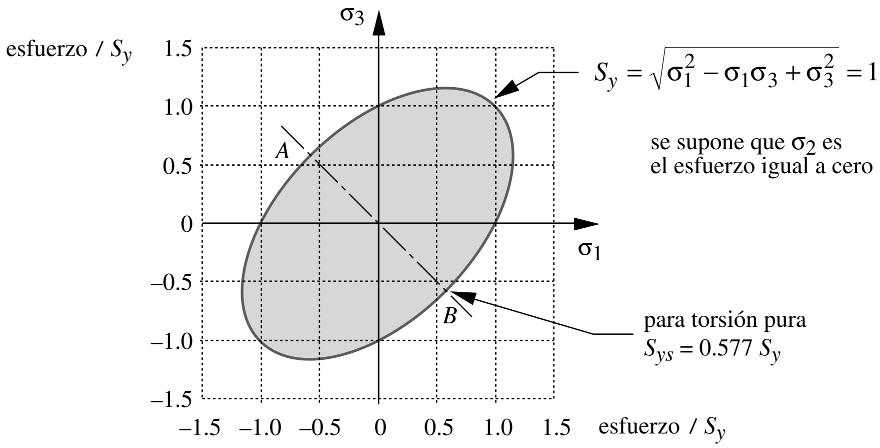


FIGURA 3-3

Elipse normalizada de la energía de distorsión bidimensional para la resistencia a la fluencia del material

señal más de que el esfuerzo hidrostático por sí solo no hará fallar un material dúctil. Las intersecciones de este cilindro con cada uno de los tres planos principales son elipses, como se indica en las figuras 3-3 y 3-4*b*.

ESFUERZO EFECTIVO DE VON MISES Conviene a menudo, en situaciones que implican esfuerzos de tensión y cortante combinados que actúan sobre un mismo punto, definir un esfuerzo efectivo que sirva para representar la combinación de esfuerzos. El enfoque de la energía de distorsión proporciona un buen medio para hacer esto en materiales dúctiles. El **esfuerzo efectivo de Von Mises** σ' se define como *el esfuerzo de tensión uniaxial que crearía la misma energía de distorsión que la combinación real de los esfuerzos aplicados*. Este enfoque permite tratar casos de esfuerzos combinados multiaxiales de tensión y cortante, como si fueran resultado de una carga de tensión pura.

El esfuerzo efectivo de Von Mises σ' para el caso tridimensional es, a partir de la ecuación 3.6*b*:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \tag{3.7a}$$

Esto también se expresa en términos de los esfuerzos aplicados como:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}{2}} \tag{3.7b}$$

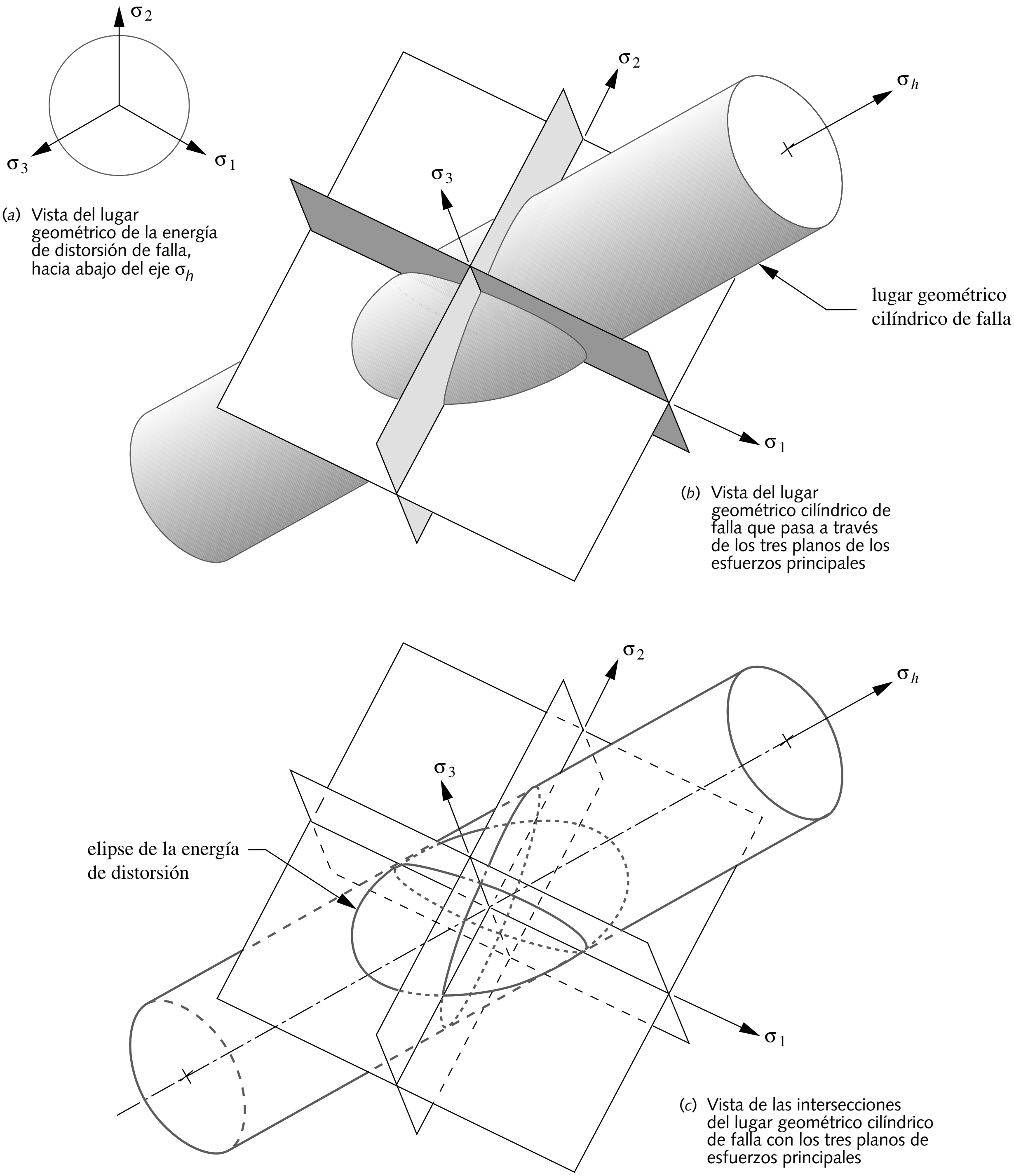
y para el caso bidimensional partiendo de la ecuación 3.6*c* (con $\sigma_2 = 0$):

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} \tag{3.7c}$$

y si se expresa en términos de los esfuerzos aplicados:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \tag{3.7d}$$

Se usan estos esfuerzos efectivos para cualquier situación de esfuerzos combinados. (Véase el ejemplo 3-1 en la p. 186). El esfuerzo efectivo de Von Mises se estudiará más adelante, cuando se vean los ejemplos de esfuerzos combinados.



(*a*) Vista del lugar geométrico de la energía de distorsión de falla, hacia abajo del eje σ_h

(*b*) Vista del lugar geométrico cilíndrico de falla que pasa a través de los tres planos de los esfuerzos principales

(*c*) Vista de las intersecciones del lugar geométrico cilíndrico de falla con los tres planos de esfuerzos principales

FIGURA 3-4

Lugar geométrico de la falla tridimensional para la teoría de la energía de distorsión

Factor de seguridad Las ecuaciones 3.6*b* y 3.6*c* definen las condiciones de falla. Para efectos de diseño, resulta conveniente incluir un factor de seguridad *N* en los cálculos, de modo que el estado de esfuerzos sea seguro dentro de la elipse de falla-esfuerzo de la figura 3-3.

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} \tag{3.8a}$$

Para el caso del esfuerzo tridimensional esto se convierte en

$$\frac{S_y}{N} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \tag{3.8b}$$

y para el caso del esfuerzo bidimensional:

$$\frac{S_y}{N} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} \tag{3.8c}$$

CORTANTE PURO Para el caso de cortante puro como se vio en la carga de torsión pura, los esfuerzos principales se vuelven $\sigma_1 = \tau = -\sigma_3$ y $\sigma_2 = 0$, como se muestra en la figura 3-1*b* (p. 174). La figura 3-3 también ilustra el estado de esfuerzo de torsión pura, graficado sobre los ejes σ_1 y σ_3. El lugar geométrico del esfuerzo cortante a la torsión pura es una línea recta que pasa por el origen a −45°. Esta línea intercepta la elipse de falla en dos puntos, *A* y *B*. Los valores absolutos de σ_1 y σ_3 en estos puntos se obtienen de la ecuación 3.6*c* (p. 178) para el caso bidimensional.

$$S_y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_1 + \sigma_1^2 = 3\sigma_1^2 = 3\tau_{máx}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0.577\,S_y = \tau_{máx} \tag{3.9a}$$

Esta relación define la **resistencia a la fluencia de corte** S_{ys} de cualquier material dúctil, como una fracción de la resistencia a la fluencia en tensión S_y determinada en una prueba a la tensión.

$$S_{ys} = 0.577\,S_y \tag{3.9b}$$

TEORÍA DE LA FALLA DÚCTIL Ahora ya se está en condiciones de contestar la pregunta formulada en el primer párrafo de este capítulo, de cuál, entre el esfuerzo cortante o el esfuerzo a la tensión, era el responsable de la falla de una muestra dúctil en una prueba a la tensión. Con base en experimentos y en la teoría de la energía de distorsión, *la falla en el caso de los materiales dúctiles con carga estática a la tensión es provocada por los esfuerzos cortantes*.

NOTA HISTÓRICA El enfoque de la energía de distorsión para el análisis de fallas tiene muchos padres. De hecho, la ecuación 3.7 se puede deducir de cinco modos diferentes.[2] El método de la energía de distorsión presentado aquí fue propuesto originalmente por James Clerk Maxwell[3] en 1856, pero no tuvo mayor desarrollo sino hasta que se hicieron contribuciones adicionales gracias al trabajo de Hueber (en 1904), Von Mises (en 1913) y Hencky (en 1925). En la actualidad, es más frecuente darle el crédito a Von Mises y a Hencky, y algunas veces sólo a Von Mises. El esfuerzo efectivo definido con las ecuaciones 3.7 se conoce con frecuencia como el esfuerzo de Von Mises o únicamente el esfuerzo de Mises (se pronuncia *meses*). Eichinger (en 1926) y Nadai (en 1937) desarrollaron de manera independiente las ecuaciones 3.7 por un método diferente que implica **esfuerzos octaédricos,** y otros más han llegado al mismo resultado incluso siguiendo caminos diferentes. El número de desarrollos de esta teoría usando enfoques diferentes, en combinación con los resultados experimentales tan cercanos a los pronosticados, hacen de ella la *mejor elección para el pronóstico de fallas, en el caso de cargas estáticas en materiales dúctiles, en los cuales las resistencias de tensión y de compresión son iguales*.

Teoría del esfuerzo cortante máximo

El rol del esfuerzo cortante en fallas estáticas fue reconocido antes del desarrollo del enfoque de Von Mises, para el análisis de fallas de materiales dúctiles con cargas estáticas. La teoría del esfuerzo cortante máximo fue propuesta primero por Coulomb (1736-1806) y descrita más tarde por Tresca en una publicación de 1864. A principios del siglo XX, J. Guest realizó experimentos en Inglaterra que confirmaron la teoría. Se le conoce algunas veces como la teoría de Tresca-Guest.

La **teoría del esfuerzo cortante máximo** (o simplemente **la teoría de cortante máximo**) establece que *la falla ocurre cuando el esfuerzo cortante máximo en una pieza excede el esfuerzo cortante por fluencia en una muestra sujeta a tensión (la mitad de la resistencia de fluencia por tensión*). Esto predice que la resistencia a la fluencia por cortante de un material es

$$S_{ys} = 0.50\,S_y \tag{3.10}$$

Observe que éste es un límite más conservador que el de la teoría de la energía de distorsión dado por la ecuación 3.9*b*.

La figura 3-5 muestra la falla hexagonal encerrada por las dos teorías bidimensionales de cortante máximo, superpuestas sobre la elipse de la energía de distorsión. Se inscribe dentro de la elipse y la toca en seis puntos. Las combinaciones de esfuerzos principales σ_1 y σ_3 que se encuentran dentro de este hexágono se consideran seguras, y se piensa que la falla ocurre cuando el estado de esfuerzos combinados alcanza el límite hexagonal. Evidentemente, se trata de una teoría de falla más conservadora que la de la energía de distorsión, ya que está contenida dentro de la última. Las condiciones para el cortante por torsión (puro) se muestran en los puntos *C* y *D*.

Para el estado de esfuerzos tridimensional, las figuras 3-6*a* y 3-6*b* muestran el prisma hexagonal de la teoría del esfuerzo cortante máximo ajustado al cilindro de la energía de distorsión. Las intersecciones del hexágono del esfuerzo cortante con los tres planos de esfuerzos principales se ilustran en la figura 3-6*c*, inscritas dentro de las elipses de la energía de distorsión.

Para aplicar esta teoría en materiales homogéneos, isotrópicos, dúctiles, con esfuerzos estáticos bidimensionales o tridimensionales, se calculan primero los tres esfuerzos

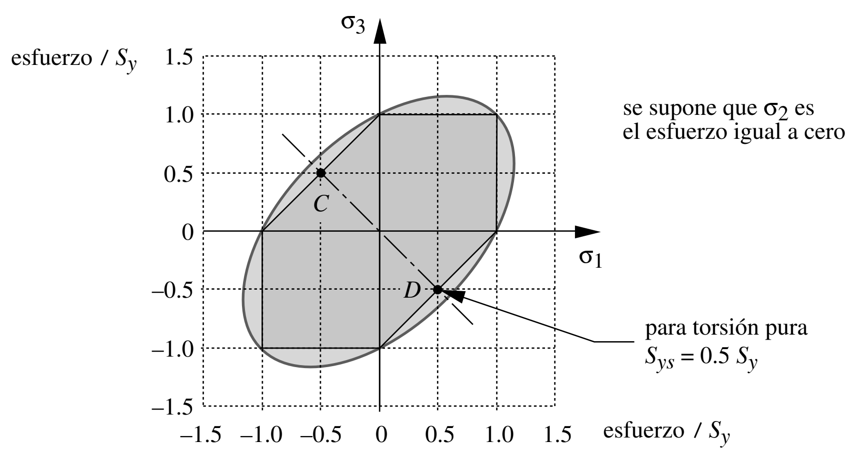


FIGURA 3-5

El hexágono de la teoría del esfuerzo cortante bidimensional inscrito dentro de la elipse de la energía de distorsión

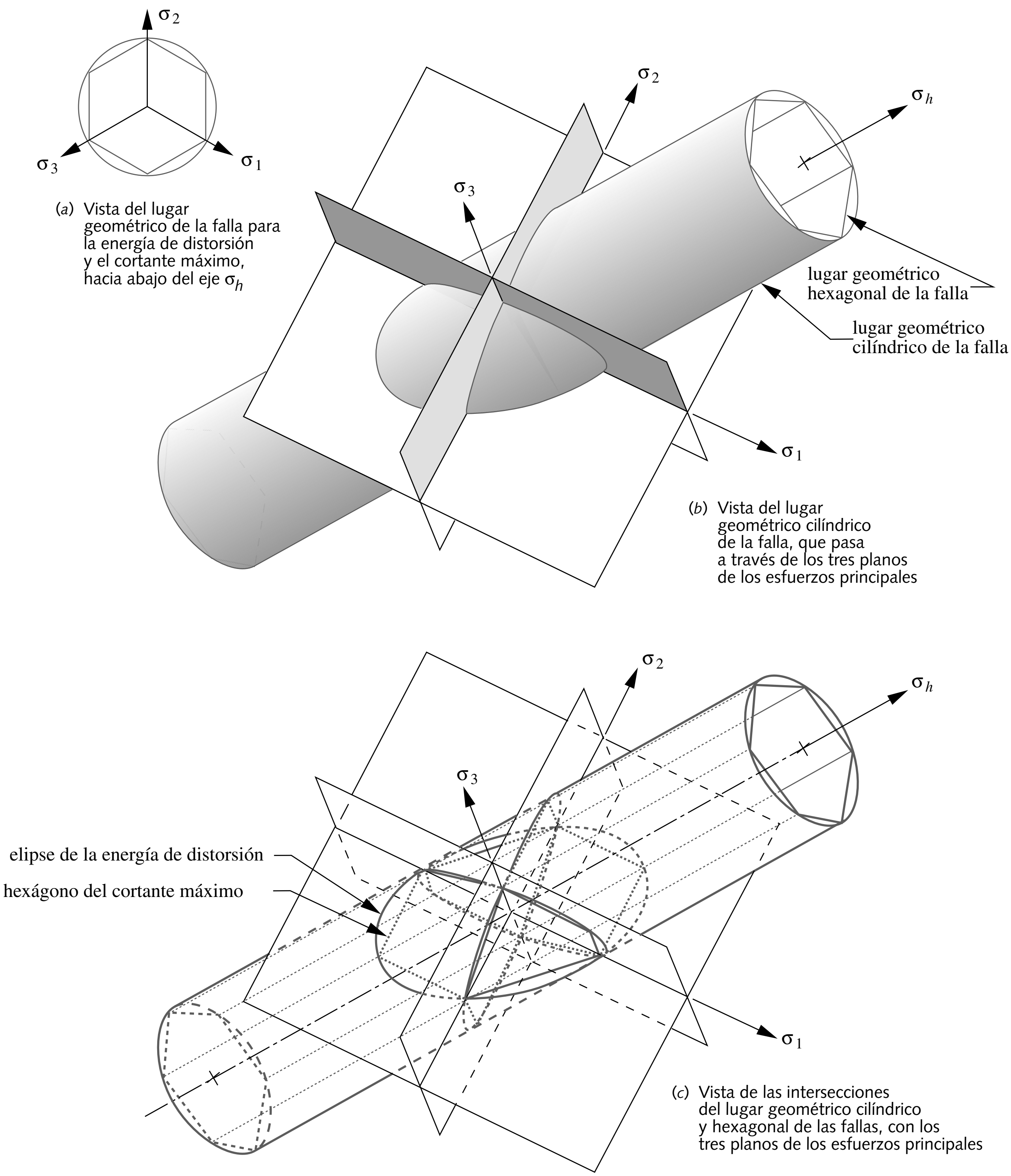


FIGURA 3-6

Lugar geométrico de la falla tridimensional, para las teorías de la energía de distorsión y del esfuerzo cortante máximo

normales principales σ_1, σ_2 y σ_3 (uno de los cuales será cero para el caso bidimensional) y el **esfuerzo máximo cortante**, τ_{13}, de acuerdo con la ecuación 2.5 (p. 74). Luego se compara el esfuerzo cortante máximo con el criterio de falla de la ecuación 3.10. El **factor de seguridad** para la **teoría del esfuerzo cortante máximo** es

$$N = \frac{S_{ys}}{\tau_{máx}} = \frac{0.50\,S_y}{\tau_{máx}} = \frac{S_y/2}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2} = \frac{S_y}{(\sigma_1 - \sigma_3)} \tag{3.11}$$

donde $\tau_{máx}$ es el resultado mayor de la ecuación 2.5. Recuerde que en el caso de un esfuerzo aplicado bidimensional, quizás haya tres esfuerzos cortantes principales, el mayor de los cuales es $\tau_{máx}$.

Teoría del esfuerzo normal máximo

Para concluir, se presenta esta teoría por interés histórico; **sin embargo, debe tenerse en cuenta que no es una teoría segura para usarla en materiales dúctiles**. Se analizarán brevemente las modificaciones a esta teoría, que son válidas y útiles para materiales frágiles, cuyas resistencias últimas a la tensión son más bajas que sus resistencias al cortante y a la compresión. La **teoría del esfuerzo normal máximo** establece que *la falla ocurrirá cuando el esfuerzo normal en la muestra alcance algún límite de resistencia normal, tal como la resistencia a la fluencia por tensión o la resistencia última a la tensión.* En materiales dúctiles, la resistencia a la fluencia es el criterio que se suele emplear.

La figura 3-7 muestra la envoltura de la falla bidimensional en la teoría del esfuerzo normal máximo. Se trata de un cuadrado. Compare esta envoltura cuadrada con la mostrada en la figura 3-5 (p. 182). En el primero y tercer cuadrantes, la envoltura de la teoría del esfuerzo normal máximo coincide con la de la teoría cortante máximo. No obstante, en el segundo y cuarto cuadrantes, la envoltura de la teoría del esfuerzo normal está muy afuera, tanto de la elipse de la energía de distorsión como del hexágono inscrito correspondiente a la teoría de cortante máximo. Como los experimentos muestran que los materiales dúctiles fallan en carga estática cuando sus estados de esfuerzos se encuentran fuera de la elipse, la teoría del esfuerzo normal es un criterio de falla inseguro en el segundo y cuarto cuadrantes. **El diseñador experimentado evitará el uso de la teoría del esfuerzo normal para los materiales dúctiles.**

Comparación de datos experimentales con las teorías de fallas

Se han realizado muchas pruebas de tensión con varios materiales. Los datos indican una dispersión estadística pero, en conjunto, tienden a ajustarse bastante bien a la elipse de la energía de distorsión. La figura 3-8 ilustra los datos experimentales de dos aceros dúctiles, dos aleaciones de aluminio dúctil y un hierro fundido frágil, superpuestos sobre

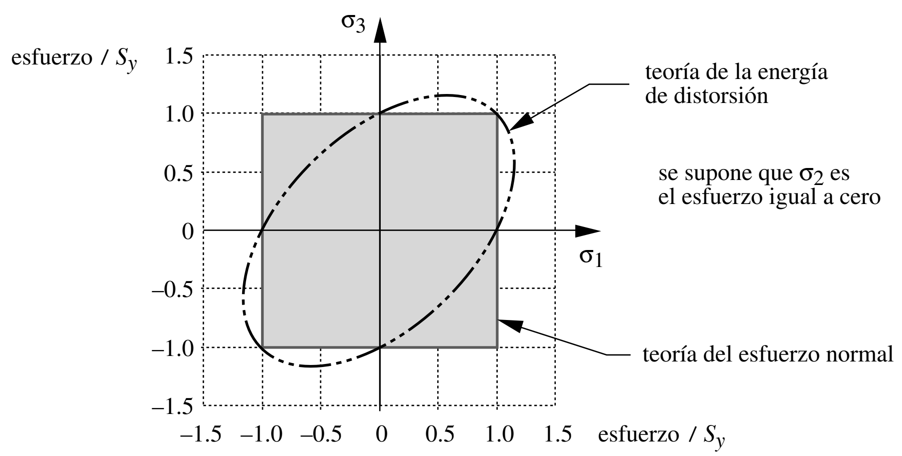


FIGURA 3-7

Teoría del esfuerzo normal máximo; incorrecta para materiales dúctiles en el segundo y cuarto cuadrantes

las envolturas de falla de las tres teorías examinadas anteriormente. Observe cómo los datos de fluencia dúctil se agrupan en la elipse de la energía de distorsión (identificada como *cortante oct*), con unos cuantos datos puntuales que caen entre el hexágono de la teoría de cortante máximo y la elipse, ambos normalizados con la resistencia a la fluencia del material. Los datos de fractura (no de fluencia) del hierro fundido frágil se ven agrupados más estrechamente alrededor de la envoltura (cuadrada) del esfuerzo normal máximo, la cual en esta figura está normalizada por la resistencia última a la tensión, no por la resistencia a la fluencia.

Estos datos son típicos. Gracias a ellos es posible darse cuenta de que la teoría de la energía de distorsión se aproxima más estrechamente a los datos de fluencia dúctil, mientras que la teoría del cortante máximo brinda un criterio más conservador, que es seguro en su interior para casi todos los datos puntuales de fluencia de materiales dúctiles. Puesto que siempre se aplica un factor de seguridad, se esperaría que el estado de esfuerzo real caiga dentro de estas líneas de falla con algún margen.

Antes era común recomendar que se usara, para el diseño, la teoría del cortante máximo en vez de la teoría más exacta de la energía de distorsión, porque se consideraba más fácil realizar los cálculos con la primera. Este argumento podría justificarse (o no) en los días de las reglas de cálculo, pero es indefendible en la era de las calculadoras programables y de las computadoras. El método de la energía de distorsión es muy sencillo de utilizar, incluso con sólo una calculadora de bolsillo, y ofrece un resultado teóricamente más preciso. Sin embargo, como algunos datos experimentales caen dentro de la elipse, pero fuera del hexágono de cortante, algunos diseñadores prefieren el enfoque más conservador de la teoría del cortante máximo. Como ingeniero a cargo, en última instancia la decisión será de usted.

Tanto la teoría de la energía de distorsión como la teoría del cortante máximo son aceptables como criterios de falla, en el caso de carga estática en materiales homogéneos e isotrópicos dúctiles, cuyas resistencias de tensión y compresión sean de la misma magnitud. La mayoría de los metales forjados para ingeniería y algunos polímeros se encuentran en esta categoría: los llamados **materiales uniformes**. Los **materiales no uniformes**, como los metales colados frágiles y los compuestos que no muestran estas propiedades uniformes, requieren teorías de falla más complejas, algunas de las cuales se describen en una sección posterior y algunas en la referencia 4. Para el estudio de materiales uniformes y no uniformes, véase la siguiente sección.

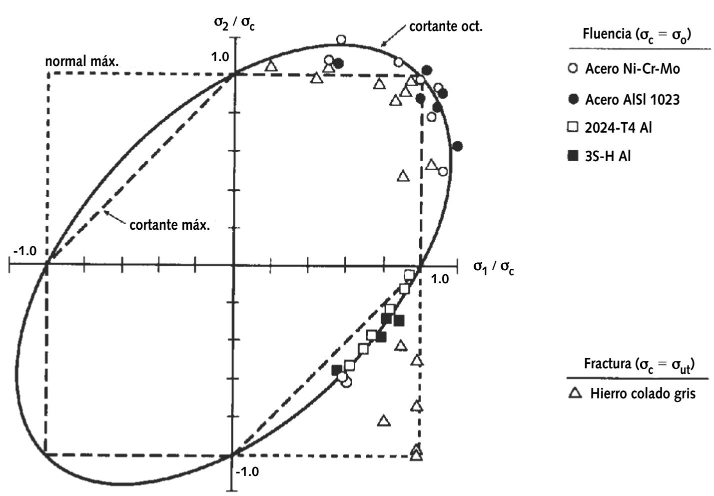


FIGURA 3-8

Datos experimentales de pruebas de tensión superpuestos sobre las tres teorías de fallas *(Reproducido de la fig. 7.11, p. 252, de Mechanical Behavior of Materials de N. E. Dowling, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993)*

EJEMPLO 3-1

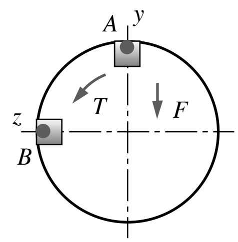
Falla de materiales dúctiles bajo carga estática

Problema **Determine los factores de seguridad de la varilla de soporte mostrada en la figura 3-9, con base tanto en la teoría de la energía de distorsión como en la teoría de cortante máximo, y compárelos.**

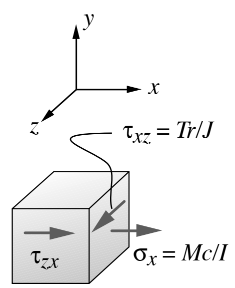
Se proporciona **El material es aluminio 2024-T4 con una resistencia a la fluencia de 47 000 psi. La longitud de la varilla es *l* = 6 in y la del brazo *a* = 8 in. El diámetro exterior de la varilla es *d* = 1.5 in. La carga *F* = 1 000 lb.**

Suposiciones **La carga es estática y el montaje está a temperatura ambiente. Considere el cortante debido a la carga transversal, así como otros esfuerzos.**

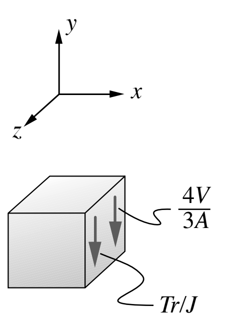
Solución **Véase las figuras 3-9 y 2-33 (repetida aquí), y también el ejemplo 2-9 (p. 110), para una explicación más completa del análisis de esfuerzos en este problema.**



(a) Dos puntos de interés para el cálculo de esfuerzo



(b) Elemento de esfuerzo en el punto *A*



(c) Elemento de esfuerzo en el punto *B*

FIGURA 2-33 Repetida

Elementos de esfuerzo en los puntos *A* y *B* dentro de la sección transversal de la varilla del ejemplo 2-10

1. La varilla está cargada tanto a la flexión (como una viga en voladizo) como a la torsión. El mayor esfuerzo de flexión a la tensión se encuentra en la fibra externa superior en el punto *A*. El mayor esfuerzo cortante por torsión se encuentra alrededor de la circunferencia exterior de la varilla. (Para más detalles, véase el ejemplo 2-9). Primero se toma un elemento diferencial en el punto *A,* donde ambos esfuerzos se combinan como se ilustra en la figura 2-33*b*. Calcule el esfuerzo de flexión normal y el esfuerzo cortante por torsión en el punto *A*, usando las ecuaciones 2.11*b* (p. 86) y 2.23*b* (p. 108), respectivamente.

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(Fl)c}{I} = \frac{1\,000(6)(0.75)}{0.249} = 18\,108 \text{ psi} \tag{a}$$

$$\tau_{xz} = \frac{Tr}{J} = \frac{(Fa)r}{J} = \frac{1\,000(8)(0.75)}{0.497} = 12\,072 \text{ psi} \tag{b}$$

2. Obtenga el esfuerzo cortante máximo y los esfuerzos principales que resultan de esta combinación de esfuerzos aplicados, usando las ecuaciones 2.6 (p. 75).

$$\begin{aligned}
\tau_{máx} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{18\,108 - 0}{2}\right)^2 + 12\,072^2} = 15\,090 \text{ psi} \\
\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \tau_{máx} = \frac{18\,108}{2} + 15\,090 = 24\,144 \text{ psi} \\
\sigma_2 &= 0 \\
\sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \tau_{máx} = \frac{18\,108}{2} - 15\,090 = -6\,036 \text{ psi}
\end{aligned} \tag{c}$$

3. Determine el esfuerzo efectivo de Von Mises a partir de los esfuerzos principales, usando la ecuación 3.7*a* (p. 179) con $\sigma_2 = 0$, que también tiene la forma de la ecuación 3.7*c* (p. 179) para el caso en 2-D.

$$\begin{aligned}
\sigma' &= \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} \\
\sigma' &= \sqrt{24\,144^2 - 24\,144(-6\,036) + (-6\,036)^2} = 27\,661 \text{ psi}
\end{aligned} \tag{d}$$

4. Usando la teoría de la energía de distorsión se obtiene ahora el factor de seguridad, aplicando la ecuación 3.8*a* (p. 181).

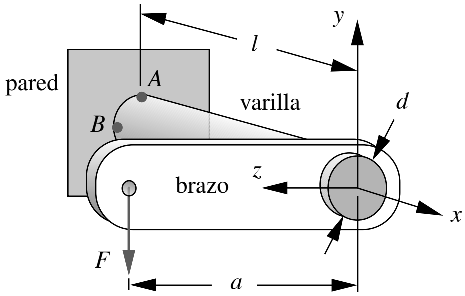


FIGURA 3-9

Soporte de los ejemplos 3-1 y 3-2

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{47\,000}{27\,661} = 1.7 \tag{e}$$

5. Usando la teoría del esfuerzo cortante máximo se obtiene el factor de seguridad, aplicando la ecuación 3.10 (p. 182).

$$N = \frac{0.50\,S_y}{\tau_{máx}} = \frac{0.50(47\,000)}{15\,090} = 1.6 \tag{f}$$

6. La comparación de estos dos resultados muestra la naturaleza más conservadora de la teoría del esfuerzo cortante máximo, la cual da un factor de seguridad ligeramente menor.

7. Como la varilla es una viga corta, es necesario verificar el cortante debido a la carga transversal en el punto *B* sobre el eje neutro. El esfuerzo cortante transversal máximo, en el eje neutro de una varilla redonda, está dado por la ecuación 2.15*c* (p. 91).

$$\tau_{flexión} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(1\,000)}{3(1.767)} = 755 \text{ psi} \tag{g}$$

El punto *B* está en cortante puro. El esfuerzo cortante total en el punto *B* es la suma algebraica del esfuerzo cortante transversal y el esfuerzo cortante por torsión, los cuales actúan sobre los mismos planos del elemento diferencial, en este caso, en la misma dirección que se indica en la figura 2-33*c*.

$$\tau_{máx} = \tau_{torsión} + \tau_{flexión} = 12\,072 + 755 = 12\,827 \text{ psi} \tag{h}$$

8. El factor de seguridad para el punto *B* usando la teoría de la energía de distorsión para cortante puro (ecuación 3.9*b*, p. 181) es

$$N = \frac{S_{ys}}{\tau_{máx}} = \frac{0.577\,S_y}{\tau_{máx}} = \frac{0.577(47\,000)}{12\,827} = 2.1 \tag{i}$$

y aplicando la ecuación 3.10 (p. 182) en la teoría del cortante máximo

$$N = \frac{S_{ys}}{\tau_{máx}} = \frac{0.50\,S_y}{\tau_{máx}} = \frac{0.50(47\,000)}{12\,827} = 1.8 \tag{j}$$

Otra vez, el último es más conservador.

9. Los archivos EX05-01 se encuentran en el CD-ROM.

3.2 FALLA DE MATERIALES FRÁGILES BAJO CARGAS ESTÁTICAS

Los materiales frágiles se fracturan en vez de ceder. *Se considera que la* **fractura frágil por tensión** *se debe únicamente al esfuerzo de tensión normal* y, por lo tanto, en este caso es aplicable la teoría del esfuerzo normal máximo. La **fractura frágil por compresión** *se debe a alguna combinación de un esfuerzo de compresión normal y un esfuerzo cortante,* y requiere una teoría de falla diferente. Para tomar en cuenta todas las condiciones de carga, se utiliza una combinación de teorías.

3

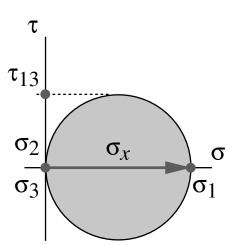
Materiales uniformes y no uniformes

Algunos materiales forjados, como una herramienta de acero totalmente endurecido, llegan a ser frágiles. Estos materiales tienden a presentar resistencias a la compresión iguales a sus resistencias a la tensión y, por consiguiente, se conocen como *materiales uniformes*. Muchos materiales colados, como el hierro colado gris, son frágiles, aunque tienen resistencias a la compresión mucho mayores que sus resistencias a la tensión. Éstos se conocen como *materiales no uniformes*. Su baja resistencia a la tensión se debe a la presencia de defectos microscópicos generados durante el colado, los cuales, cuando están sometidos a cargas de tensión, sirven como núcleos para la formación de grietas. Sin embargo, cuando están sometidos a esfuerzos de compresión, tales defectos se presionan juntos, incrementando así la resistencia al deslizamiento que provoca el esfuerzo de corte. Los hierros colados grises tienen usualmente resistencias a la compresión tres o cuatro veces más grandes que sus resistencias a la tensión, en tanto que las cerámicas tienen incluso razones mayores.

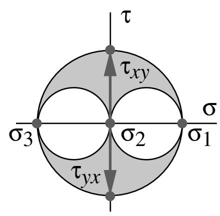
Otra característica de **algunos materiales colados frágiles** es que su *resistencia al cortante puede ser mayor que su resistencia a la tensión*, fallando entre sus valores de compresión y de tensión. Esto es muy diferente en los materiales dúctiles, donde la resistencia al cortante es la mitad de la resistencia a la tensión. En materiales colados, los efectos de la resistencia más fuerte al corte se observan en sus características de falla en las pruebas de tensión y de torsión. La figura B-3 (apéndice B) presenta una muestra de acero dúctil a la tensión, cuyo plano de falla se encuentra a 45° en relación con el esfuerzo de tensión aplicado; esto indica que la falla se debió a un cortante, lo cual se sabe que es verdadero por la teoría de la energía de distorsión. La figura B-5 (apéndice B) presenta una muestra de hierro fundido frágil a la tensión, cuyo plano de falla es normal al esfuerzo de tensión aplicado e indica que ocurrió una falla por la tensión. En la figura 3-1*a*, repetida aquí, se ilustra el círculo de Mohr para este estado de esfuerzos, **y es el mismo para ambas muestras**. La diferencia en el modo de falla se debe a la diferencia relativa entre las resistencias al cortante y a la tensión de los dos materiales.

La figura B-8 (apéndice B) contiene dos muestras de prueba a la torsión. El círculo de Mohr para el estado de esfuerzos en ambas muestras se presenta en la figura 3-1*b*, repetida aquí. La muestra de acero dúctil falla en un plano normal al eje del torque aplicado. El esfuerzo aplicado aquí es cortante puro que actúa en un plano normal al eje. El esfuerzo cortante aplicado también es el esfuerzo cortante máximo, y la falla se encuentra a lo largo del plano de cortante máximo, ya que el material dúctil es más débil al cortante. La muestra frágil de hierro fundido falla de manera espiral a lo largo de planos inclinados 45° en relación con el eje de la muestra. La falla se encuentra sobre los planos del esfuerzo normal (principal) máximo, porque este material es más débil a la tensión.

La figura 3-10 muestra los círculos de Mohr de pruebas a la tensión y a la compresión para un *material uniforme* y un *material no uniforme*. Las líneas tangentes a estos círculos constituyen líneas de falla para todas las combinaciones de esfuerzos aplicados entre los dos círculos. El área encerrada entre los círculos y las líneas de falla representa una zona segura. En el caso de un material uniforme, las líneas de falla son independientes del esfuerzo normal y están definidas por la resistencia al cortante máxima del material. Esto es consistente con la teoría del esfuerzo de cortante máximo para materiales dúctiles (los cuales también suelen ser materiales uniformes). Para materiales no uniformes, las líneas de falla son función tanto del esfuerzo normal σ como del esfuerzo cortante τ.



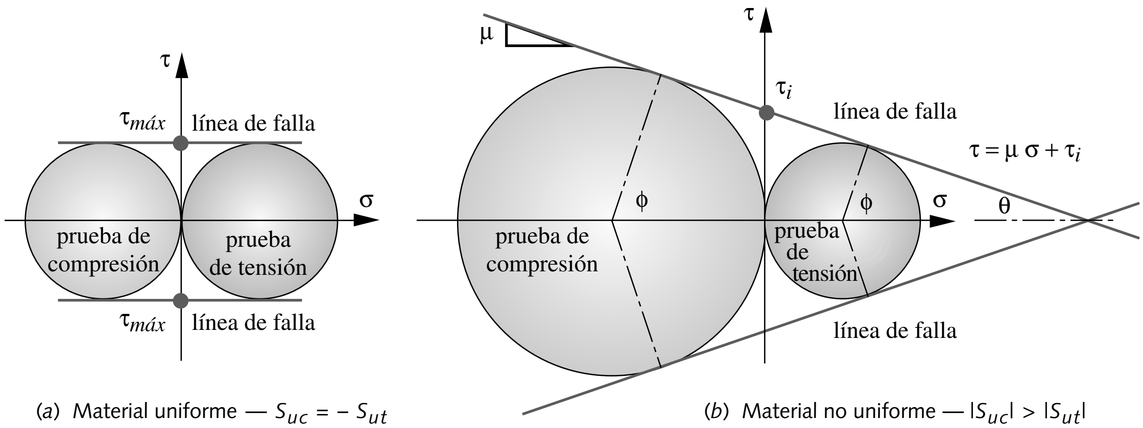
(*a*)



(*b*)

FIGURA 3-1 Repetida

Círculos de Mohr para un esfuerzo de tensión unidireccional (*a*) y para torsión pura (*b*)



3

FIGURA 3-10

Círculos de Mohr para pruebas de tensión y compresión que muestran las envolturas de falla de (*a*) materiales *uniformes* y (*b*) materiales *no uniformes*.

Para el régimen de compresión, conforme el esfuerzo de compresión normal se vuelve cada vez más negativo (es decir, aumenta la compresión), se incrementa la resistencia del material al esfuerzo cortante. Esto es consistente con la idea expresada anteriormente, en el sentido de que la compresión hace más difícil que se presente el deslizamiento por cortante a lo largo de las líneas de falla por los defectos internos del material. A partir de los datos de prueba mostrados en la figura 3-10, se obtiene la ecuación de la línea de falla de cualquier material. La pendiente μ y la intercepción τ_i se determinan a partir de la geometría, usando tan sólo los radios de los círculos de Mohr de las pruebas de tensión y compresión.

La interdependencia entre el esfuerzo normal y el cortante mostrada en la figura 3-10*b* se confirma con los experimentos de casos donde es dominante el esfuerzo de compresión, específicamente cuando el esfuerzo principal que tiene el mayor valor absoluto es de compresión. Sin embargo, los experimentos también muestran que, en situaciones de esfuerzos de tensión dominantes en materiales no uniformes frágiles, la falla se debe únicamente al esfuerzo de tensión. Parece que el esfuerzo cortante no es un factor en materiales no uniformes, si el esfuerzo principal con el mayor valor absoluto es de tensión.

La teoría de Coulomb-Mohr

Estas observaciones conducen a la teoría de Coulomb-Mohr para fallas frágiles, la cual es una adaptación de la teoría del esfuerzo normal máximo. La figura 3-11 ilustra el caso bidimensional graficado sobre los ejes σ_1, σ_3 y normalizado por la resistencia última a la tensión, S_{ut}. La teoría del esfuerzo normal máximo para un *material uniforme* se representa mediante un cuadrado punteado con dimensiones $\pm S_{ut}$ iguales para cada lado. Esto podría utilizarse como el criterio de falla para un material frágil con carga estática, si sus resistencias de tensión y compresión fueran iguales (un material uniforme).

Se muestra también la envoltura de la teoría del esfuerzo normal máximo (sombreada en gris oscuro) de un *material no uniforme,* como el cuadrado asimétrico con dimensiones iguales para cada lado S_{ut}, $-S_{uc}$. Esta envoltura de falla tan sólo es válida en los cuadrantes primero y tercero, ya que no toma en cuenta la interdependencia de los esfuerzos normales y cortantes mostrados en la figura 3-10, la cual afecta los cuadrantes segundo y cuarto. La envoltura de Coulomb-Mohr (área en gris claro) intenta tomar en cuenta la interdependencia, conectando con diagonales las esquinas opuestas de estos dos cuadrantes. Observe la similitud de la forma hexagonal de Coulomb-Mohr con el hexágono de la teoría de cortante máximo para materiales dúctiles en la figura 3-5 (p. 182).

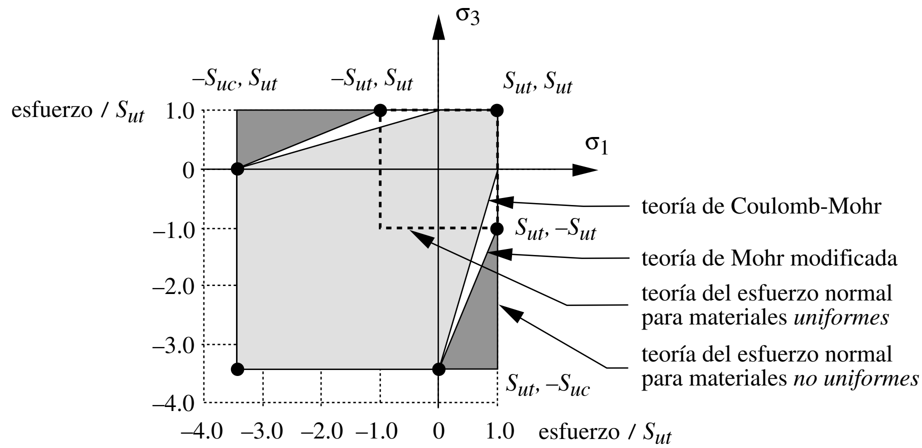


FIGURA 3-11

Teorías de Coulomb-Mohr, de Mohr modificada y esfuerzo máximo normal para materiales no uniformes frágiles

Las únicas diferencias son la asimetría de Coulomb-Mohr debida a las propiedades del material no uniforme y el uso de las resistencias últimas (a la fractura), en vez de las resistencias a la fluencia.

La figura 3-12 muestra los datos de prueba experimentales de una fundición de hierro gris, superpuestos sobre las envolturas de falla teóricas. Observe que las fallas en el primer cuadrante se ajustan a la línea de la teoría del esfuerzo normal máximo (que coincide con las otras teorías). Las fallas en el cuarto cuadrante caen **dentro** de la línea del esfuerzo normal máximo (lo cual indica su inadecuación) y también caen muy afuera de la línea de Coulomb-Mohr (lo que indica su naturaleza conservadora). Esta observación lleva a la modificación de la teoría de Coulomb-Mohr para ajustarla mejor a los datos observados.

La teoría de Mohr modificada

Los datos reales de falla de la figura 3-12 siguen la envoltura de la teoría del esfuerzo normal máximo para materiales uniformes hasta el punto S_{ut}, $-S_{ut}$ por debajo del eje σ_1 y, luego, siguen una línea recta hasta 0, $-S_{uc}$. Este conjunto de líneas mostradas como las porciones sombreadas en tono claro y oscuro combinadas en la figura 3-11 (marcada también con puntos) es la **envoltura de la teoría de Mohr modificada**. *Se trata de la teoría de falla preferida para materiales no uniformes frágiles con carga estática*.

Si los esfuerzos principales en 2-D se ordenan como $\sigma_1 > \sigma_3$, $\sigma_2 = 0$, entonces, tan sólo necesitan dibujarse los cuadrantes primero y cuarto de la figura 3-12, como se indica en la figura 3-13, donde se grafican los esfuerzos normalizados por N/S_{ut}, donde N es el factor de seguridad. La figura 3-13 también describe tres condiciones de esfuerzo plano identificados como A, B y C. El punto A representa cualquier estado de esfuerzos, en el cual los dos esfuerzos principales diferentes de cero σ_1 y σ_3 son positivos. La falla ocurrirá cuando la línea de carga OA cruce la envoltura de falla en A'. El factor de seguridad en esta situación se expresa como

$$N = \frac{S_{ut}}{\sigma_1} \tag{3.12a}$$

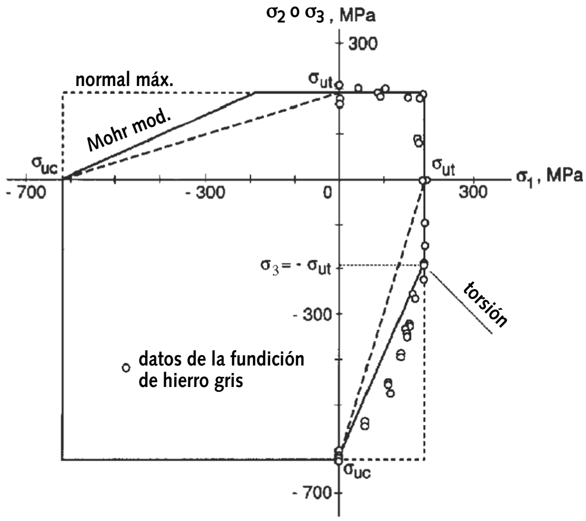


FIGURA 3-12

Datos de fractura biaxial para una fundición de hierro gris comparados con varios criterios de falla *(de la fig. 7.13, p. 255, en Mechanical Behavior of Materials de N. E. Dowling, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993. Datos de R. C. Grassi e I. Cornet, "Fracture of Gray Cast Iron Tubes Under Biaxial Stresses". J. App. Mech, v. 16, p. 178, 1949)*

Si los dos esfuerzos principales diferentes de cero tienen signos opuestos, entonces existen dos posibilidades de falla, como lo describen los puntos *B* y *C* de la figura 3-13. La única diferencia entre estos dos puntos son los valores relativos de sus dos componentes de esfuerzos σ_1, σ_3. La línea de carga *OB* sale de la envoltura de falla en *B'* arriba del punto S_{ut}, $-S_{ut}$, y el factor de seguridad en este caso está dado por la ecuación 3.12*a* de arriba.

Si el estado de esfuerzos es como el descrito por el punto *C*, entonces la intercepción de la línea de carga *OC* y la envoltura de falla se da en *C'* abajo del punto S_{ut}, $-S_{ut}$. El factor de seguridad se determina resolviendo para la intersección entre la línea de carga *OC* y la línea de falla. Se escriben las ecuaciones de estas líneas y se resuelven simultáneamente para obtener la **ecuación de Mohr modificada**.

$$N = \frac{S_{ut}\left|S_{uc}\right|}{\left|S_{uc}\right|\sigma_1 - S_{ut}\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)} \tag{3.12b}$$

Si el estado de esfuerzos está en el cuarto cuadrante, las ecuaciones 3.12*a* y 3.12*b* deberían verificarse y tendría que usarse el factor de seguridad que resulte menor.

Compare la ecuación 3.12*b* con la ecuación menos exacta de la **teoría de Coulomb-Mohr** no modificada (que se recomienda no utilizar).

$$N = \frac{S_{ut}\left|S_{uc}\right|}{\left|S_{uc}\right|\sigma_1 - S_{ut}\sigma_3}$$

Para usar la ecuación 3.12*b* de la teoría de Mohr modificada, es conveniente tener las expresiones de un **esfuerzo efectivo** que tome en cuenta todos los esfuerzos aplicados, y permita la comparación directa con la resistencia del material, como se hizo con el esfuerzo de Von Mises para los materiales dúctiles. Dowling[5] desarrolló un conjunto de expresiones para este esfuerzo efectivo con los tres esfuerzos principales:*

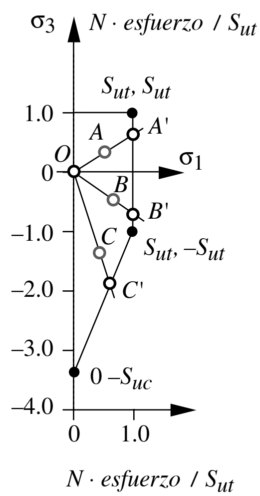


FIGURA 3-13

Teoría de falla de Mohr modificada para materiales frágiles

* Véase la referencia 5 para la deducción completa de las teorías de Coulomb-Mohr y la modificada de Mohr para dos y tres dimensiones, así como la deducción del esfuerzo efectivo.

3

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[\left|\sigma_1 - \sigma_2\right| + \frac{2S_{ut} - \left|S_{uc}\right|}{-\left|S_{uc}\right|}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right) \right]$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left[\left|\sigma_2 - \sigma_3\right| + \frac{2S_{ut} - \left|S_{uc}\right|}{-\left|S_{uc}\right|}\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) \right] \qquad (3.12c)$$

$$C_3 = \frac{1}{2}\left[\left|\sigma_3 - \sigma_1\right| + \frac{2S_{ut} - \left|S_{uc}\right|}{-\left|S_{uc}\right|}\left(\sigma_3 + \sigma_1\right) \right]$$

Como sugirió Dowling, el esfuerzo efectivo deseado es el más grande del conjunto de seis valores (C_1, C_2, C_3, más los tres esfuerzos principales).

$$\tilde{\sigma} = \text{MÁX}\left(C_1, C_2, C_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right)$$
$$\tilde{\sigma} = 0 \quad si \;\; \text{MÁX} < 0 \qquad (3.12d)$$

donde la función señalada con MÁX denota el argumento algebraico más grande de los seis suministrados. Si todos los argumentos son negativos, entonces el esfuerzo efectivo es cero.

Este *esfuerzo efectivo de Mohr modificado* se puede comparar ahora con la resistencia última a la tensión del material, para determinar el factor de seguridad.

$$N = \frac{S_{ut}}{\tilde{\sigma}} \qquad (3.12e)$$

Este enfoque permite la fácil computarización del proceso.

EJEMPLO 3-2

Falla de materiales frágiles bajo carga estática

Problema **Determine los factores de seguridad de la varilla de soporte mostrada en la figura 3-9 (repetida en la siguiente página) con base en la teoría de Mohr modificada.**

Se proporciona **El material es fundición de hierro gris clase 50 con S_{ut} = 52 500 psi y S_{uc} = –164 000 psi. La longitud de la varilla es l = 6 in y la del brazo a = 8 in. El diámetro exterior de la varilla es d = 1.5 in. La carga F = 1 000 lb.**

Suposiciones **La carga es estática y el montaje está a temperatura ambiente. Considere el cortante debido a la carga transversal, así como otros esfuerzos.**

Solución **Véase las figuras 3-9 y 2-33 (página siguiente) y los ejemplos 2-9 (p. 110) y 3-1.**

1. La varilla de la figura 3-9 está cargada tanto a la flexión (como una viga en voladizo) como a la torsión. El mayor esfuerzo de flexión a la tensión se encuentra en la fibra exterior de arriba en el punto A. El esfuerzo cortante por torsión más grande se encuentra alrededor de la circunferencia externa de la varilla. Primero se toma un elemento diferencial en el punto A, donde ambos esfuerzos se combinan. Obtenga el esfuerzo de flexión normal y el esfuerzo cortante por torsión en el punto A mediante las ecuaciones 2.11b (p. 86) y 2.23b (p. 108), respectivamente.

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(Fl)c}{I} = \frac{1\,000(6)(0.75)}{0.249} = 18\,108 \text{ psi} \qquad (a)$$

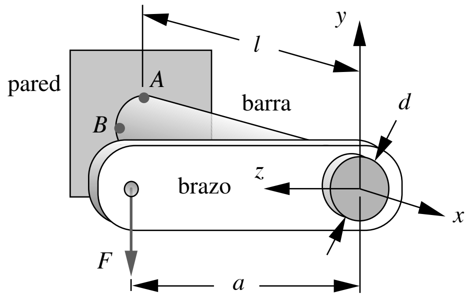


FIGURA 3-9 Repetida

Soporte de los ejemplos 3-1 y 3-2

$$\tau_{xz} = \frac{Tr}{J} = \frac{(Fa)r}{J} = \frac{1\,000(8)(0.75)}{0.497} = 12\,072 \text{ psi} \qquad (b)$$

2. Calcule el esfuerzo cortante máximo, así como los esfuerzos principales que resultan de esta combinación de esfuerzos aplicados, mediante las ecuaciones 2.6.

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{18\,108 - 0}{2}\right)^2 + 12\,072^2} = 15\,090 \text{ psi}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \tau_{\text{máx}} = \frac{18\,108}{2} + 15\,090 = 24\,144 \text{ psi}$$

$$\sigma_2 = 0 \qquad (c)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \tau_{\text{máx}} = \frac{18\,108}{2} - 15\,090 = -6\,036 \text{ psi}$$

Observe que estos esfuerzos son idénticos a los del ejemplo 3-1.

3. Los esfuerzos principales para el punto A ahora se grafican sobre un diagrama de Mohr modificado, como se muestra en la figura 3-14a (p. 194). Esto indica que la línea de carga cruza la envoltura de falla arriba del punto S_{ut}, $-S_{ut}$, haciendo a la ecuación 3.12a (p. 190) adecuada para el cálculo del factor de seguridad.

$$N = \frac{S_{ut}}{\sigma_1} = \frac{52\,400}{24\,144} = 2.2 \qquad (d)$$

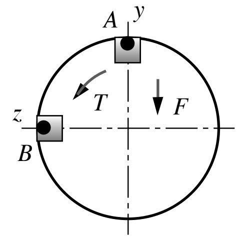
4. Un procedimiento alternativo que no requiere trazar el diagrama de Mohr modificado consiste en obtener los factores de Dowling C_1, C_2, C_3 usando las ecuaciones 3.12c (p. 192).

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[\left|\sigma_1 - \sigma_2\right| + \frac{2S_{ut} - |S_{uc}|}{-|S_{uc}|}(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$

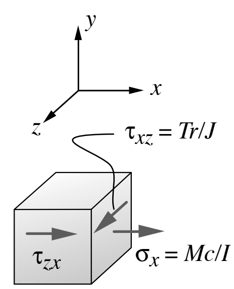
$$= \frac{1}{2}\left[\left|24\,144 - 0\right| + \frac{2(52\,500) - 164\,000}{-164\,000}(24\,144 + 0)\right] = 16\,415 \text{ psi} \qquad (e)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left[\left|\sigma_2 - \sigma_3\right| + \frac{2S_{ut} - |S_{uc}|}{-|S_{uc}|}(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

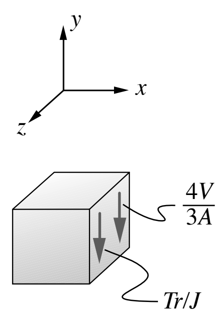
$$= \frac{1}{2}\left[\left|0 - (-6\,036)\right| + \frac{2(52\,500) - 164\,000}{-164\,000}(0 - 6\,036)\right] = 1\,932 \text{ psi} \qquad (f)$$



(a) Dos puntos de interés para los cálculos de esfuerzos



(b) Elemento de esfuerzo en el punto A



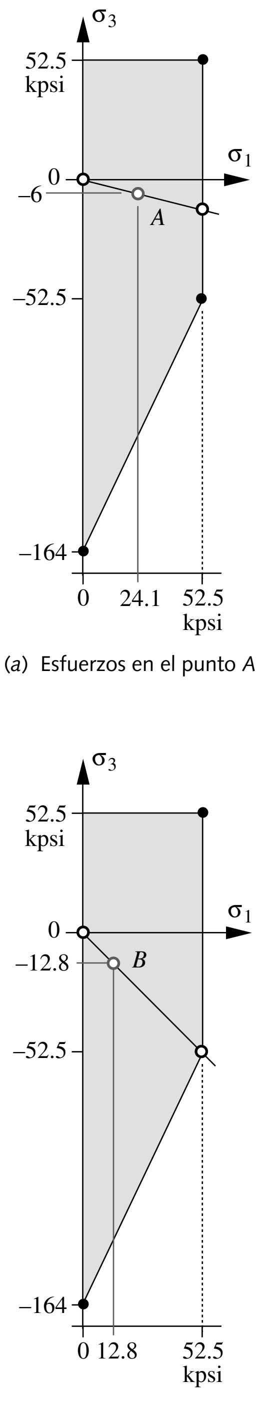
(c) Elemento de esfuerzo en el punto B

FIGURA 2-33 Repetida

Elementos de esfuerzos en los puntos A y B dentro de la sección transversal de la varilla del ejemplo 2-10

$$C_3 = \frac{1}{2}\left[\left|\sigma_3 - \sigma_1\right| + \frac{2S_{ut} - \left|S_{uc}\right|}{-\left|S_{uc}\right|}\left(\sigma_3 + \sigma_1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left|24\,144 - (-6\,036)\right| + \frac{2(52\,500) - 164\,000}{-164\,000}(24\,144 - 6\,036)\right] = 18\,348 \qquad (g)$$



(*a*) Esfuerzos en el punto *A*

(*b*) Esfuerzos en el punto *B*

FIGURA 3-14

Ejemplo 3-2

5. Luego obtenga el mayor de los seis esfuerzos C_1, C_2, C_3, σ_1, σ_2, σ_3:

$$\tilde{\sigma} = \text{MÁX}(C_1, C_2, C_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$
$$\tilde{\sigma} = \text{MÁX}(16\,415,\ 1\,932,\ 18\,348,\ 24\,144,\ 0,\ -6\,036) = 24\,144 \qquad (h)$$

el cual es el esfuerzo efectivo de Mohr modificado.

6. El factor de seguridad para el punto *A* se determina ahora con la ecuación 3.12*e* (p. 192):

$$N = \frac{S_{ut}}{\tilde{\sigma}} = \frac{52\,500}{24\,144} = 2.2 \qquad (i)$$

el cual es el mismo que se obtuvo en el paso 3.

7. Como la varilla es una viga corta, es necesario verificar el esfuerzo cortante, debido a la carga transversal en el punto *B* sobre el eje neutro. El esfuerzo cortante transversal máximo en el eje neutro de una varilla sólida redonda se obtuvo con la ecuación 2.15*c* (p. 91).

$$\tau_{flexión} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(1\,000)}{1.767} = 755 \text{ psi} \qquad (j)$$

El punto *B* está en cortante puro. El esfuerzo cortante total en el punto *B* es la suma algebraica de los esfuerzos cortante transversal y el esfuerzo cortante por torsión, los cuales, en este caso, actúan sobre los mismos planos del elemento diferencial, y actúan en la misma dirección, como se muestra en la figura 2-33*b* (p. 115).

$$\tau_{máx} = \tau_{torsión} + \tau_{flexión} = 12\,072 + 755 = 12\,827 \text{ psi} \qquad (k)$$

8. Obtenga los esfuerzos principales para esta carga de cortante puro:

$$\sigma_1 = \tau_{máx} = 12\,827 \text{ psi}$$
$$\sigma_2 = 0 \qquad (l)$$
$$\sigma_3 = -\tau_{máx} = -12\,827 \text{ psi}$$

9. Estos esfuerzos principales en el punto *B* se grafican ahora sobre el diagrama de Mohr modificado mostrado en la figura 3-14*b*. Como se trata de una carga de cortante puro, la línea de carga cruza la envoltura de falla en el punto $S_{ut}' - S_{ut}$, haciendo que la ecuación 3.12*a* (p. 190) sea adecuada para calcular el factor de seguridad.

$$N = \frac{S_{ut}}{\sigma_1} = \frac{52\,400}{12\,827} = 4.1 \qquad (m)$$

10. Para evitar trazar el diagrama de Mohr modificado, calcule los factores de Dowling C_1, C_2, C_3, usando las ecuaciones 3.12*c*:

$$C_1 = 8\,721 \text{ psi}$$
$$C_2 = 4106 \text{ psi} \qquad (n)$$
$$C_3 = 12\,827 \text{ psi}$$

11. Y obtenga el mayor de los seis esfuerzos C_1, C_2, C_3, σ_1, σ_2, σ_3:

$$\tilde{\sigma} = 12\,827 \text{ psi} \tag{o}$$

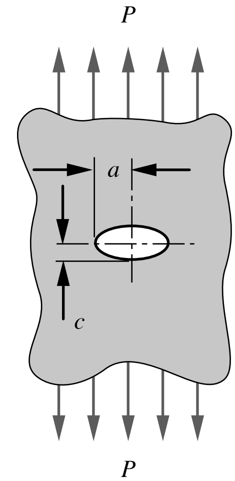
que es el esfuerzo efectivo de Mohr modificado.

12. El factor de seguridad para el punto B se calcula ahora mediante la ecuación 3.12e (p. 192):

$$N = \frac{S_{ut}}{\tilde{\sigma}} = \frac{52\,500}{12\,827} = 4.1 \tag{p}$$

y es el mismo que se obtuvo en el paso 9.

13. Los archivos EX05-02 se encuentran en el CD-ROM.



3.3 MECÁNICA DE LA FRACTURA

En los análisis de las teorías de fallas estáticas realizados hasta ahora, se consideró que el material es perfectamente homogéneo e isotrópico y, por lo tanto, está libre de defectos como grietas, vacíos, inclusiones, los cuales suelen servir como incrementadores de esfuerzos. Esto raras veces es verdad en los materiales reales. En realidad, se considera que todos los materiales tienen microgrietas demasiado pequeñas para verse a simple vista. Dolan[6] señala que "… *cualquier estructura* contiene pequeños defectos, cuyo tamaño y distribución dependen del material y su proceso. Éstos van desde inclusiones no metálicas y microhuecos, hasta defectos de soldadura, grietas de esmerilado, grietas de templado, dobleces en la superficie, etcétera". Las ralladuras o estrías en la superficie, por mal manejo, también llegan a convertirse en grietas incipientes. Los contornos geométricos funcionales que se diseñan en la pieza podrían aumentar los esfuerzos locales de manera predecible, por lo que se deben tomar en cuenta en los cálculos de esfuerzos, como se expuso en el capítulo 2 (y se discutirá aún más en el siguiente capítulo). Las grietas que ocurren espontáneamente durante el servicio, debidas a un daño o a defectos del material, son más difíciles de predecir y de tomar en cuenta.

La presencia de una grieta afilada en un campo de esfuerzos crea concentraciones de esfuerzos que, teóricamente, se aproximan al infinito. Véase la figura 2-35 y la ecuación 2.32a, las cuales se repiten aquí por conveniencia.

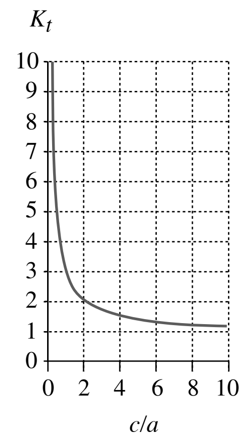


FIGURA 2-35 Repetida

Concentración de esfuerzos en el borde de un orificio elíptico en una placa

$$K_t = 1 + 2\left(\frac{a}{c}\right) \tag{2.32a}$$

Observe que cuando los valores de c tienden a cero, la concentración de esfuerzos y, por ende, el esfuerzo se aproximan al infinito. Como no existe un material que resista esfuerzos tan altos, se presentará fluencia local (materiales dúctiles), microfractura local (materiales frágiles) o cuarteadura local (polímeros) en la punta de la grieta. [7] Si los esfuerzos son lo suficientemente altos en la punta de una grieta de tamaño suficiente, quizás ocurra una falla repentina "en forma frágil", incluso en materiales dúctiles con cargas estáticas. Se ha desarrollado la ciencia de la **mecánica de la fractura,** para explicar y predecir este fenómeno de falla repentina.

Las grietas se presentan comúnmente en estructuras soldadas como puentes, barcos, aviones, vehículos terrestres y recipientes de presión, entre otros. Muchas fallas catastróficas se presentaron en buques cisterna y en los Barcos de la Libertad construidos durante la Segunda Guerra Mundial.*[8] Doce de estas fallas ocurrieron poco después de que las embarcaciones fueran puestas a flote y aun antes de zarpar. Simplemente se partieron por la mitad mientras estaban atracadas en el muelle. Un barco como éstos

* "Cerca de 80 embarcaciones se partieron en dos, y casi a 1000 se les descubrieron grandes fracturas por fragilidad en las placas de cubierta". D. A. Canonico, "Adjusting the Boiler Code", *Mechanical Engineering*, feb. 2000, p. 56.



FIGURA 3-15

Un buque tanque de la Segunda Guerra Mundial se partió en dos, mientras estaba atracado en el muelle para ser puesto en servicio, Portland Oregon, 16 de enero de 1943 (*Cortesía de the Ship Structures Commitee, Gobierno de EUA*)

se muestra en la figura 3-15. El material del casco era acero dúctil, estaba soldado y la embarcación aún no se había cargado dinámicamente a un nivel significativo. Los esfuerzos nominales estaban muy por debajo de la resistencia a la fluencia del material. En este siglo han ocurrido otros ejemplos de falla súbita con esfuerzos por debajo de la resistencia de fluencia, como la ruptura del tanque de melaza en Boston en enero de 1919, por la cual se ahogaron 21 personas y muchos caballos bajo 2.3 millones de galones de líquido pegajoso.[10] Un ejemplo más reciente es el caso de la falla de la carcasa de un motor de un cohete de 22 pies de diámetro, mientras se estaba probando a la presión por parte del fabricante. La figura 3-16 muestra las piezas del caso del cohete después de la falla. "Fue diseñado para soportar presiones de prueba de 960 psi (pero) falló [...] a 542 psi".[11] Estas y otras fallas repentinas "en forma frágil", en materiales dúctiles bajo carga estática, llevaron a los investigadores a buscar mejores teorías de fallas, ya que las que estaban vigentes no eran capaces de explicar adecuadamente los fenómenos observados.

Donde la vida humana está en riesgo, como en puentes y aviones, entre otros, se requieren, por leyes o regulaciones gubernamentales, revisiones periódicas de la seguridad estructural para detectar grietas. Estas revisiones se pueden hacer con rayos X, energía ultrasónica o incluso visualmente. Cuando se descubren las grietas, se debe realizar un estudio de ingeniería para reparar o sustituir la parte defectuosa, retirar el montaje, o bien, para que continúe en servicio un tiempo más, deben efectuarse revisiones más frecuentes. (Muchos aviones comerciales que actualmente se encuentran en servicio tienen grietas estructurales). En la actualidad, tales decisiones se toman con conocimiento de causa aplicando la teoría de la mecánica de fractura.

Teoría de la mecánica de fractura

La teoría de la mecánica de fractura supone la existencia de una grieta. El estado de esfuerzos en la región de la grieta puede ser una deformación plana o un esfuerzo plano (véase la sección 2.4, p. 76). Si *la zona de fluencia alrededor de la grieta es pequeña comparada con las dimensiones de la pieza*, entonces se aplica la teoría de la **mecánica de fractura elástica lineal** (LEFM). La LEFM supone que la mayoría del material se

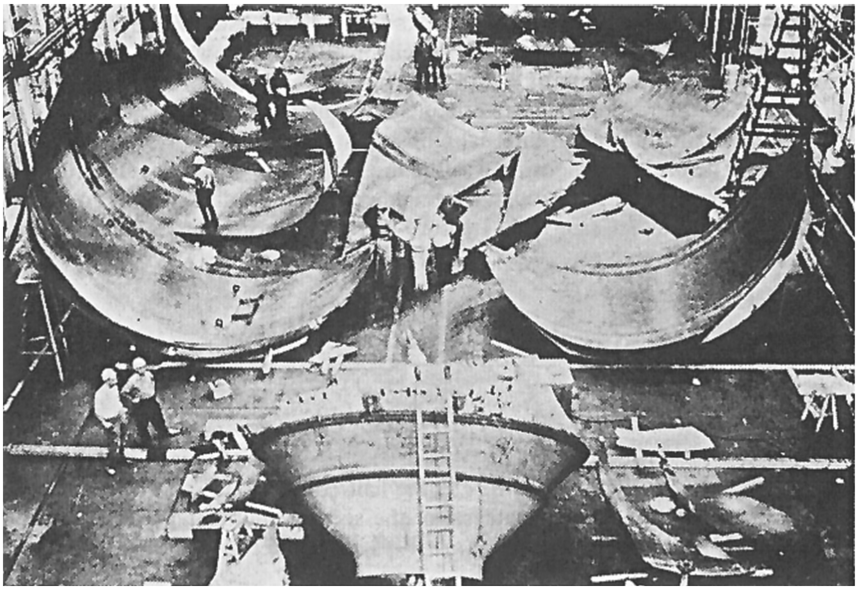
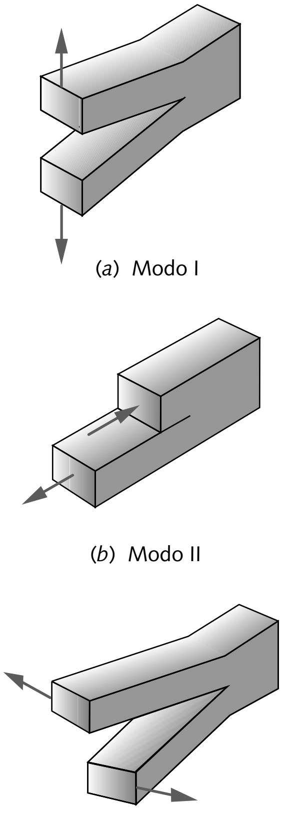


FIGURA 3-16

Carcasa del motor de cohete con falla (*Cortesía de la NASA: Lewis Research Center*)

comporta de acuerdo con la ley de Hooke. Sin embargo, cuando una porción significativa del material se encuentra en la región plástica de su comportamiento esfuerzo-deformación, se requiere un enfoque más complicado que el que se describe aquí. En el análisis siguiente se supondrá que se aplica la LEFM.

Modos de desplazamiento de la grieta Dependiendo de la orientación de la carga contra la grieta, las cargas aplicadas pueden tender a jalar la grieta abierta en tensión (modo I), cortar la grieta en un plano (modo II), o bien, cortarla (desgarrarla) fuera del plano (modo III), como se indica en la figura 3-17. La mayoría de la investigación y prueba de la mecánica de fracturas se ha dedicado al caso de cargas de tensión (modo I), por lo que el estudio se limitará a ellas.



(*a*) Modo I

(*b*) Modo II

(*c*) Modo III

FIGURA 3-17

Los tres modos de desplazamiento de la grieta

Factor de intensidad del esfuerzo K La figura 3-18*a* muestra una placa bajo tensión (no a escala) de 2*b* de ancho, con una grieta directa de 2*a* de ancho en el centro de la placa. Se supone que la grieta está afilada en sus extremos y *b* es mucho más grande que *a*. La sección transversal de la grieta se encuentra en el plano *xy*. También se establece un sistema de coordenadas polares *r*-θ en el plano *xy* con su origen en la punta de la grieta, como se muestra en la figura 3-18*b*. A partir de la *teoría de elasticidad lineal*, para *b* >> *a* los esfuerzos alrededor de la punta de la grieta, expresados como una función de las coordenadas polares, son sin los valores pequeños de los términos de orden

$$\sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right]+\ldots \tag{3.13a}$$

$$\sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1+\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right]+\ldots \tag{3.13b}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+\ldots \tag{3.13c}$$

3

$$\sigma_z = 0 \quad \text{para esfuerzo plano}$$

o bien,
$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad \text{para deformación plana} \tag{3.13d}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \tag{3.13e}$$

superior. Observe que, cuando el radio r es cero, los esfuerzos xy son infinitos, lo cual es consistente con la ecuación 2.32*b* y la figura 2-36 (p. 120). Los esfuerzos disminuyen rápidamente conforme r se incrementa. El ángulo θ define la distribución geométrica de los esfuerzos alrededor de la punta de la grieta en cualquier radio. **La cantidad K se conoce como factor de intensidad del esfuerzo**. (Se puede agregar un subíndice para identificar los modos I, II, III de carga como K_I, K_{II}, K_{III}. Como sólo se está tratando con el modo de carga I, se eliminará el subíndice y se hará $K = K_I$).

Si se toma el caso del esfuerzo plano y se calcula el esfuerzo de Von Mises σ', a partir de los componentes x, y y del cortante (ecuaciones 3.13*a*, *b* y *c*), se puede graficar la distribución de σ' contra θ para cualquier r seleccionada, como se indica en la figura 3-19*a* para r = 1E-5 in y K = 1. El máximo ocurre a 71°. Si se hace θ igual a ese ángulo y se calcula la distribución de σ' como una función de r, aparece como la figura 3-19*b*, la cual grafica r desde 1E-5 hasta 1 in en una escala logarítmica.

Los esfuerzos elevados cerca de la punta de la grieta causan fluencia local y crean una zona plástica de radio r_y, como se muestra en la figura 3-19*c* (que no está a escala). Para cualquier radio r y ángulo θ, el estado de esfuerzos en esta zona plástica en la punta de la grieta es directamente proporcional al **factor de intensidad del esfuerzo K**. Si $b >> a$, entonces K se puede definir para el centro agrietado de la placa como

$$K = \sigma_{nom}\sqrt{\pi a} \qquad a << b \tag{3.14a}$$

donde σ_{nom} es el esfuerzo nominal* en ausencia de la grieta, a es la mitad del ancho de la grieta y b es la mitad del ancho de la placa (véase la figura 3-18). Esta ecuación será exacta dentro de un 10% si $a/b \le 0.4$. Observe que el factor de intensidad del esfuerzo K es directamente proporcional al esfuerzo nominal aplicado y proporcional a la raíz cuadrada del ancho de la grieta. Las unidades de K son Mpa-m$^{0.5}$ o bien, kpsi-in$^{0.5}$.

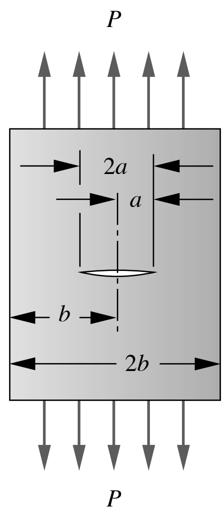
Si el ancho de la grieta a no es pequeño comparado con el ancho b de la placa, y/o si la geometría de la pieza es más complicada que la placa simple agrietada mostrada en la figura 3-18, entonces se necesita un factor adicional β para calcular K.

$$K = \beta\,\sigma_{nom}\sqrt{\pi a} \tag{3.14b}$$

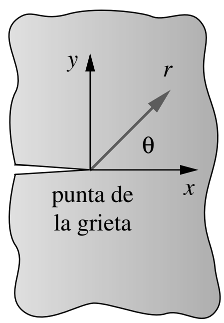
donde β es una cantidad sin dimensión que depende de la geometría de la pieza, el tipo de carga y la razón a / b. Su valor también se afecta por la manera en que se calcula σ_{nom}. Es una costumbre usar el esfuerzo bruto de σ_{nom} calculado a partir de las dimensiones originales de la sección, sin reducirlas por las dimensiones de la grieta. Sería más exacto usar el esfuerzo neto; sin embargo, es menos práctico calcularlo y la diferencia se toma en cuenta cuando se determina el factor β de la geometría. Los valores de β para varias geometrías y cargas se encuentran en manuales, algunos de los cuales están referidos en la bibliografía al final de este capítulo. Por ejemplo, el valor de β para la placa agrietada en el centro de la figura 3-18*a* es

$$\beta = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \tag{3.14c}$$

Esto se aproxima asintóticamente a 1 para valores pequeños de a / b y es ∞ para a / b = 1.



(*a*)

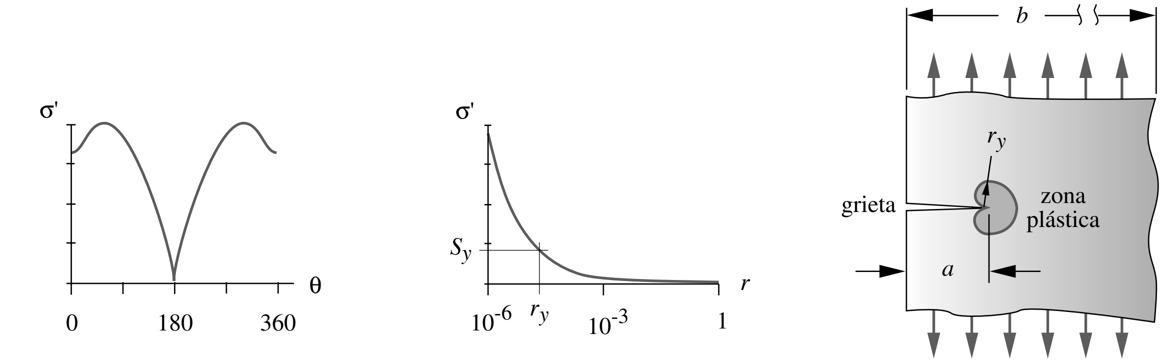


(*b*)

FIGURA 3-18

Grieta directa en una placa en tensión

* El esfuerzo nominal en el análisis mecánico de la fractura se calcula con base en el área bruta de la sección transversal, sin ninguna reducción por el área de la grieta. Observe que este procedimiento es diferente del usado para el cálculo del esfuerzo nominal, cuando se emplean factores de concentración de esfuerzos en un análisis de esfuerzo normal. Entonces, se utiliza la sección transversal neta para obtener el esfuerzo nominal.



(*a*) Esfuerzo de Von Mises como función del ángulo alrededor de la punta de la grieta (r = 1*E*–5 in)

(*b*) Esfuerzo de Von Mises como función de la distancia, a partir de la punta de la grieta (θ = 71°)

(*c*) Zona de fluencia plástica alrededor de la punta de la grieta

FIGURA 3-19

Campo del esfuerzo plano de Von Mises alrededor del borde de la grieta, en una placa sometida a tensión axial para un factor de intensidad del esfuerzo K = 1

Por ejemplo, si la grieta se encuentra en el borde en vez del centro de la placa, como se ilustra en la figura 3-19*c*, el factor $\beta = 1.12$:

$$K = 1.12\sigma_{nom}\sqrt{\pi a} \qquad a << b \tag{3.14d}$$

Esta ecuación será exacta dentro de un 10% si $a / b \leq 0.13$. Esta ecuación también es exacta dentro de un 10% para una placa agrietada en ambos bordes, si $a / b \leq 0.6$, y para una placa en flexión agrietada en el borde si $a / b \leq 0.4$.

Tenacidad a la fractura K_c

Siempre que el factor K de intensidad del esfuerzo está por debajo de un valor crítico llamado **tenacidad a la fractura K_c*** (que es una propiedad del material), se puede considerar que la grieta se encuentra en *modo estable* (si la carga es estática *y* el ambiente no es corrosivo), en modo de *crecimiento lento* (si la carga varía con el tiempo *y* el ambiente no es corrosivo) o en modo de *crecimiento rápido* (si el ambiente es corrosivo).[13] **Cuando K es igual a K_c**, debido a un crecimiento del esfuerzo nominal o por crecimiento del ancho de una grieta, ***la grieta propagará la falla rápidamente***. La razón de esta propagación inestable de la grieta alcanza velocidades tan altas como ¡1 milla/seg![14] La estructura efectivamente "se desarma".† El factor de seguridad de la falla en mecánica de la fractura se define como

$$N_{FM} = \frac{K_c}{K} \tag{3.15}$$

Observe que éste puede ser un objetivo móvil, si las grietas están en modo de crecimiento, porque K es una función del ancho de la grieta. Si se conocen el ancho actual, o el ancho típico, de la grieta para la pieza y la dureza a la fractura K_c del material, entonces el esfuerzo nominal permisible máximo se determina mediante cualquier factor de seguridad que se elija, o viceversa. El esfuerzo permisible para cualquier factor de seguridad calculado a partir de la versión adecuada de la ecuación 3.14*c* será normalmente más bajo que el calculado con base en la resistencia a la fluencia según las ecuaciones 3.8 (p. 181), o bien, la ecuación 3.11 (p. 184). El efecto de esfuerzos que varían con el tiempo (dinámicos) sobre el factor K de intensidad del esfuerzo y sobre la falla se expondrá en el siguiente capítulo.

* Llamado más correctamente K_{Ic}, donde I representa el modo I de carga. Los valores de dureza a la fractura para los otros modos de carga se identifican como K_{IIc} y K_{IIIc}. Como aquí se está analizando sólo el modo I de carga, se abrevia como K_c.

† En ocasión del 75 aniversario de la ruptura del depósito de melaza de Boston, descrita anteriormente, un residente de Boston de 91 años de edad fue entrevistado y describió lo que vio y oyó cuando era un muchacho de 16 años en enero de 1919, al atestiguar la falla del barco desde lo alto de la colina Cobbs en el norte de Boston. Recordó ruidos súbitos, como disparos de ametralladora, seguidos por una fuerte explosión. El "sonido de ametralladora" quizás era el sonido de la propagación de la grieta de hasta 1 milla/segundo a través de la pared del depósito, y la explosión era probablemente la presión de la melaza que saturaba y desintegraba la embarcación, en piezas grandes que destruyeron casas que se encontraban a cientos de yardas.

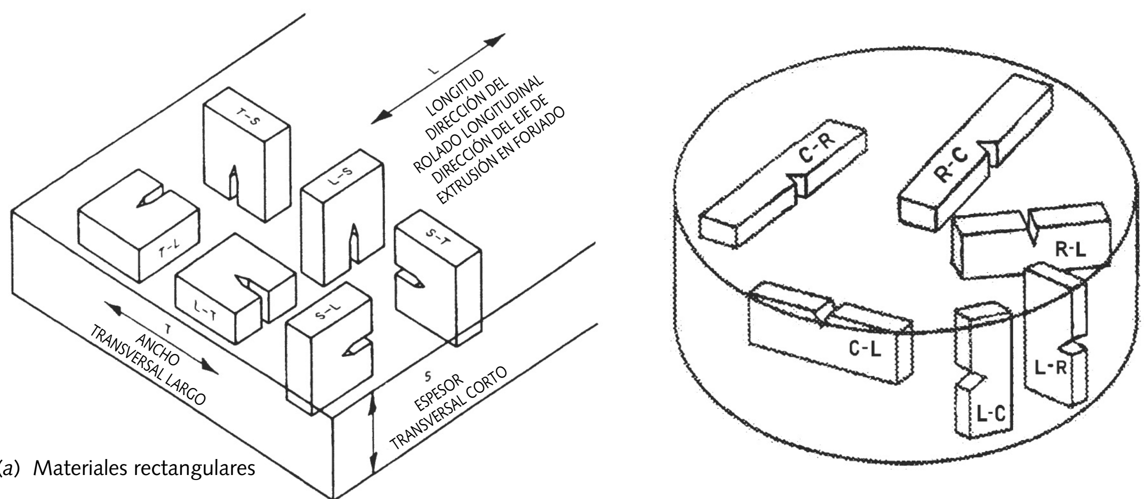
Para determinar la tenacidad a la fractura K_c, se prueban a la falla muestras estandarizadas ASTM,* que contienen una grieta con dimensiones conocidas. En pruebas axiales, la muestra se sujeta con una máquina servo-hidráulica de pruebas, de modo que se aplique una tensión por la grieta. (En las pruebas de flexión, se coloca la grieta sobre el lado de la tensión en la viga). La muestra se carga dinámicamente con desplazamientos crecientes y se monitorea su desplazamiento de carga característico (razón efectiva de resorte). La función de carga-desplazamiento se vuelve no lineal al inicio del crecimiento rápido de la grieta. La tenacidad a la fractura K_c se mide en este punto.

La tenacidad a la fractura K_c para metales de ingeniería se encuentra en el intervalo de 20 a 200 MPa-m$^{0.5}$; en cerámicas y polímeros de ingeniería, K_c se encuentra en el intervalo de 1 a 5 MPa-m$^{0.5}$.[15] *La tenacidad a la fractura generalmente es paralela a la ductilidad* y crece sustancialmente a temperaturas altas. Los aceros de mayor resistencia tienden a ser menos dúctiles y a tener una K_c más baja que los aceros de menor resistencia. La sustitución de un acero de alta resistencia, en vez de un acero de baja resistencia, ha conducido a fallas en algunas aplicaciones, debido a la reducción en la dureza a la fractura que acompaña al cambio de material.

La tenacidad a la fractura de un material usualmente varía con la dirección del grano. La figura 3-20 presenta una muestra y las orientaciones de grietas, así como los símbolos del estándar ASTM E-399. El primer carácter especifica la dirección del grano normal al plano de la grieta; y el segundo carácter, la dirección del grano paralela al plano de fractura. Los datos de prueba de la tenacidad a la fractura normalmente definen la orientación de la muestra por este método, como se ilustra en la tabla 3-1, la cual presenta los valores de tenacidad a la fractura de algunas aleaciones de acero y aluminio usadas en estructuras de aviones.

Otro ejemplo de una falla por fractura mecánica se presenta en la figura 3-21*a*, la cual es una fotografía de la ménsula de rótula de enganche de tráiler, de acero al bajo carbono, de las figuras A-2 a A-6 (pp. 859-861). Esta pieza falló repentinamente mientras se estaba doblando para formarla al rojo vivo. Se observa que la superficie a la fractura está relativamente lisa y los extremos de la grieta son extremadamente afilados. Como el aumento de la temperatura incrementa tanto la ductilidad como la tenacidad a la fractura, una falla frágil repentina no es usual en tales circunstancias. Una revisión

* Véase el ASTM E-399-83 "Standard Test Method for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Materials".



(*a*) Materiales rectangulares

(*b*) Materiales cilíndricos

FIGURA 3-20

Direcciones de trayectoria de una fractura principal común; *fuente*: MIL-HDBK-5J, p. 1-21, 31 de enero de 2003

Tabla 3-1 Valores de tenacidad a la fractura de materiales seleccionados [16]

Valores de los esfuerzos planos a temperatura ambiente

Material	Aleación	Tratamiento térmico	Forma	Orientación	Resistencia a la fluencia kpsi	K_{IC}, kpsi-in$^{0.5}$		
						Máx	Prom	Mín
Acero	AerMet 100	Recocido, HT a 280 kpsi	Barra	L-R	236-281	146	121	100
Acero	AerMet 100	Recocido, HT a 280 kpsi	Barra	C-R	223-273	137	112	90
Acero	AerMet 100	Recocido, HT a 290 kpsi	Barra	L-R	251-265	110	99	88
Acero	AerMet 100	Recocido, HT a 290 kpsi	Barra	C-R	250-268	101	88	73
Acero	A pedido 465	H1000	Barra	L-R	212-227	131	120	108
Acero	A pedido 465	H1000	Barra	R-L	212-225	118	109	100
Acero	9Ni-4Co-0.20C	Revenido y templado (Q&T)	Forjado	L-T	185-192	147	129	107
Acero	D6AC	(Q&T) [véase la ref. 16]	Placa	L-T	217	88	62	40
Aluminio	2024-T351		Placa	L-T		43	31	27
Aluminio	2024-T852		Forjado	T-L		25	19	15
Aluminio	7075-T651		Placa	T-L		27	22	18
Aluminio	7075-T6510		Extrusión	L-T		32	27	23
Aluminio	7075-T6510		Barra forjada	L-T		35	29	24
Aluminio	7475-T651		Placa	T-L		60	47	34

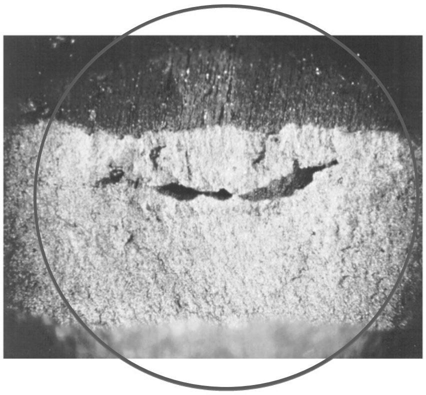
más minuciosa de la superficie de falla (ilustrada con una ampliación de 12.5X en la figura 3-21*b*) muestra una pequeña grieta que aparentemente era un defecto del rolado en caliente de la barra de acero. La intensidad del esfuerzo en la punta de la grieta excedió la tenacidad a la fractura del material a su temperatura elevada, y resultó en una falla frágil repentina.*

Este breve análisis de las fracturas apenas ha *indagado en la superficie* de un tema tan complejo. Se invita al lector a leer más sobre esta materia. Las fuentes de información general sobre mecánica de las fracturas, los factores de intensidad de esfuerzo y la tenacidad a la fractura como propiedades de los materiales se encuentran en la bibliografía de este capítulo.

* Observe que no se puede usar la LEFM para analizar esta falla, porque no estaba en el intervalo elástico lineal. La sección transversal completa se estaba deformando plásticamente en el momento de la falla. Aquí sería necesario un análisis no lineal de la mecánica de fractura.



(*a*) Soporte de bola con falla repentina mientras se doblaba al rojo vivo



(*b*) Ampliación 12.5x de la grieta preexistente dentro del material

FIGURA 3-21

Enganche del tráiler de acero dúctil, fracturado mientras se doblaba al rojo vivo. Note la preexistencia de la grieta y lo afilado de los extremos de la falla. *(Cortesía de Steven Taylor, Mobile Logic Inc., Port Townsend, Wash.)*

3

EJEMPLO 3-3

Falla de materiales agrietados bajo carga estática

Problema **Un tirante de acero, diseñado para soportar una carga estática de 60 000 N en tensión axial, se cortó accidentalmente con una sierra durante la producción y ahora tiene un extremo agrietado. Con base en la fluencia, determine el factor de seguridad del tirante original sin la grieta, así como el nuevo factor de seguridad del tirante "agrietado" con base en la mecánica de fractura. ¿Qué longitud podría haber tenido la grieta antes de fallar? ¿Compensaría un tratamiento térmico de la pieza la pérdida de resistencia debida a la grieta?**

Se proporciona **El material es acero con S_y = 540 MPa y K_c = 66 MPa-m$^{0.5}$. La longitud l = 6 m, el ancho b = 80 mm y el espesor t = 3 mm. El ancho de la grieta es a = 10 mm. La grieta atraviesa completamente el espesor en un extremo de 80 mm de ancho, similar a lo que se observa en la figura 3-19*c* (p. 199).**

Suposiciones **La carga es estática y el ensamble se encuentra a temperatura ambiente. La razón a/b es < 0.13, lo cual permite el uso de la ecuación 3.14*d* (p. 199).**

Solución

1. Primero calcule el esfuerzo nominal en la parte no agrietada con base en la sección transversal total.

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{A} = \frac{60\ 000}{3(80)} = 250 \text{ MPa} \tag{a}$$

2. Éste es un esfuerzo uniaxial, de modo que es un esfuerzo tanto principal como de Von Mises. El factor de seguridad contra la fluencia mediante la teoría de la energía de distorsión es (ecuación 3.8*a*, p. 181):

$$N_{vm} = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{540}{250} = 2.16 \tag{b}$$

3. La intensidad del esfuerzo K en la punta de la grieta se determina, en este caso, con la ecuación 3.14*d* (p. 199), si la razón $a / b < 0.13$:

$$\frac{a}{b} = \frac{10}{80} = 0.125$$

y (*c*)

$$K = 1.12\sigma_{nom}\sqrt{\pi a} = 1.12(250)\sqrt{10\pi} = 49.63 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$$

4. El factor de seguridad contra la propagación repentina de la grieta se obtiene con la ecuación 3.15 (p. 199).

$$N_{FM} = \frac{K_c}{K} = \frac{66}{49.63} = 1.33 \tag{d}$$

Observe que ahora se predice que la falla será repentina con 33% de sobrecarga, punto donde el esfuerzo nominal de la pieza está abajo de la resistencia a la fluencia. Se trata de un factor de seguridad demasiado pequeño, como para permitir que la pieza se utilice para enfrentar posibles fracturas repentinas.

5. El tamaño de la grieta necesario para fallar se calcula aproximadamente al sustituir K_c por K en la ecuación 3.14*b* (p. 198) y despejando a. El resultado es una grieta de alrededor de 18 mm de ancho. Observe, sin embargo, que la razón a / b excede ahora la recomendada para el 10% de exactitud con esta ecuación. Una ecuación más exacta para este caso se obtendría en una de las referencias, si así se desea.

6. Suponiendo que el acero tiene suficiente carbono como para permitir un tratamiento térmico, un endurecimiento completo incrementará la resistencia a la fluencia, aunque la **ductilidad y la tenacidad a la fractura K_c disminuirán**, lo que hará que la pieza sea **menos segura** contra una falla por fractura mecánica.
7. Los archivos EX05-03 se encuentran en el CD-ROM.

3.4 USO DE TEORÍAS DE FALLA POR CARGA ESTÁTICA

No es práctico ni factible probar todos los materiales de ingeniería con todas las combinaciones de esfuerzos aplicados. Las teorías de fallas para carga estática que aquí se presentan brindan un medio para relacionar los estados de esfuerzos, presentes en las piezas sometidas a esfuerzos combinados con el estado de esfuerzos de la prueba a la tensión uniaxial simple. El concepto de esfuerzo efectivo que "convierte" la combinación de esfuerzos aplicados, en un valor equivalente que se puede comparar con el resultado de una prueba a la tensión, es extraordinariamente útil. Sin embargo, el diseñador debe estar consciente de sus limitaciones para aplicar correctamente el concepto de esfuerzo efectivo.

Una suposición fundamental en este capítulo es que los materiales en cuestión son macroscópicamente homogéneos e isotrópicos. En esta categoría se encuentran la mayoría de los metales para ingeniería y muchos polímeros. A menos que se detecten, la suposición de la existencia de grietas microscópicas no excluye el uso de las teorías de falla convencionales, y las grietas macroscópicas están fuera de toda duda. Entonces, se debería usar la teoría de la mecánica de la fractura.

Los materiales compuestos se usan cada vez más en aplicaciones que requieren razones de resistencia/peso altas. Tales materiales son típicamente no homogéneos y anisotrópicos (u ortotrópicos) y, por consiguiente, requieren teorías de fallas diferentes y más complicadas que las presentes aquí. Para mayor información, se remite al lector a la literatura sobre materiales compuestos, alguna de la cual se incluye en la bibliografía de este capítulo.

Otra suposición fundamental de estas teorías de falla estática es que las cargas se aplican con lentitud y permanecen esencialmente constantes a través del tiempo. Es decir, son cargas estáticas. **Cuando las cargas (y, por lo tanto, los esfuerzos) varían con el tiempo o se aplican repentinamente, las teorías de falla de este capítulo quizá no sean el factor límite.** En el siguiente capítulo se analizará otra teoría de fallas adecuada al caso de carga dinámica y una ampliación de la mecánica de fractura para cargas dinámicas. Cuando se aplica la mecánica de fractura para situaciones de cargas dinámicas, se usa el valor de la tenacidad a la fractura dinámica K_d (K_{Id}, K_{IId} o K_{IIId}) en vez de la tenacidad a la fractura estática K_c, estudiada anteriormente.

La CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS debida a las discontinuidades geométricas o contornos afilados se debe tomar en cuenta en algunos casos de carga estática, antes de aplicar la teoría de falla que proceda. El concepto de concentración de esfuerzos se explicó y analizó en la sección 2.15 (p. 116). Se puntualizó que, **bajo carga estática**, la concentración de esfuerzos se puede ignorar si el material es dúctil, debido a que un gran esfuerzo en la discontinuidad causará una fluencia local que reduce su efecto. Sin embargo, es importante repetir que para materiales frágiles bajo carga estática, los efectos de la concentración de esfuerzos deberían incluirse en los esfuerzos que se calculen, antes de convertirlos en esfuerzos efectivos para efectos de comparación con las teorías de fallas que se describen aquí. La única excepción a esto son algunos materiales fundidos (como la fundición hierro gris), en los cuales el número de incrementadores de esfuerzos inherentes dentro del material es tan grande, que se considera que la suma de unos cuantos incrementadores de esfuerzos geométricos más tiene escaso efecto adicional.

La **TEMPERATURA Y LA HUMEDAD** también son factores de falla. La mayoría de los datos de prueba disponibles para materiales se producen a temperatura ambiente y con humedad baja. Casi todas las propiedades de los materiales son una función de la temperatura. Los metales usualmente se vuelven menos fuertes y más dúctiles a temperaturas elevadas. Es común que un material dúctil se vuelva frágil a bajas temperaturas. Los polímeros muestran tendencias similares en intervalos de temperatura mucho menores que los de los metales. El agua hirviendo es lo suficientemente caliente para suavizar algunos polímeros, y un día frío de invierno puede hacerlos extremadamente frágiles. Si su aplicación tiene temperaturas altas o bajas, así como ambientes acuosos/corrosivos, el lector necesita obtener del fabricante del material, los datos para estas condiciones antes de aplicar cualquier teoría de falla.

GRIETAS Si existen grietas macroscópicas, o se presentan anticipadamente durante el servicio, entonces se debe usar la teoría de la mecánica de fractura (FM). Una vez que se descubren en el campo las grietas reales, se debe usar la FM para predecir la falla y determinar la seguridad de la pieza específica. Si experiencias previas con equipo similar indican que el servicio con agrietamiento es un problema, entonces se debería usar la FM en el diseño de ensambles futuros y hacer inspecciones de campo rutinarias para detectar las grietas conforme se presenten.

3.5 ESTUDIOS DE CASO CON ANÁLISIS DE FALLAS ESTÁTICAS

Ahora se continuará con los estudios de casos, cuyas fuerzas se analizaron en el capítulo 1 y cuyos esfuerzos se analizaron en el capítulo 2. A lo largo del texto, se conserva el mismo número del estudio de caso de un diseño determinado y las entregas subsecuentes se designan con un sufijo alfabético. Por ejemplo, en el capítulo 2 se presentaron cuatro estudios de caso identificados como 1B, 2B, 3B y 4B. En este capítulo se continúa con esos estudios de casos como 1C, 2C, 3C y 4C. El lector puede revisar las entregas anteriores de cualquier estudio de caso refiriéndose a su número de caso común. Consulte la lista de estudio de caso en la tabla de contenido para localizar cada pieza. Como los esfuerzos varían continuamente sobre una pieza, se hizo un juicio de ingeniería en el capítulo 2, para saber dónde podrían estar los mayores esfuerzos y calcularlos en esas ubicaciones. Ahora se desea determinar sus factores de seguridad usando las teorías de falla adecuadas.

ESTUDIO DE CASO 1C

Análisis de falla de la palanca del freno de una bicicleta

Problema — **Determine los factores de seguridad en puntos críticos de la palanca del freno mostrada en las figuras 1-1 (repetida aquí) y 3-22.**

Se proporciona — **Los esfuerzos se conocen a partir del estudio de caso 1B (p. 136). El material de la palanca del freno es una aleación de aluminio colado ASTM G8A con S_{ut} = 310 MPa (45 kpsi) y S_y = 186 MPa (27 kpsi). La elongación en la fractura es de 8%, haciendo al material marginalmente dúctil.**

Suposiciones — **Los puntos de falla más probables están en los dos orificios donde se insertan los pernos y en la raíz del manubrio como viga en voladizo.**

Solución — **Véase las figuras 1-1 y 3-22, y el archivo CASE1C.**

1. El esfuerzo de flexión en el punto *P* de la figura 3-22 en la raíz de la viga en voladizo se obtuvo con la ecuación 2.11*b* en el estudio de caso 1B y es

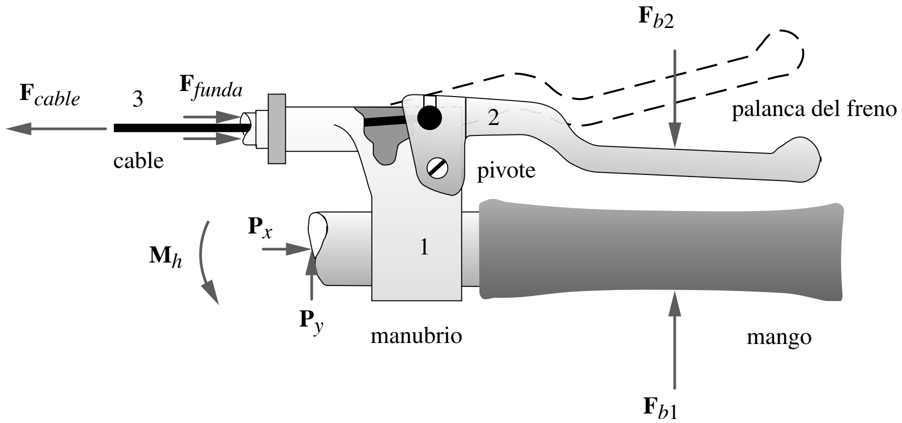


FIGURA 1-1 Repetida

Ensamble de la palanca del freno de una bicicleta

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(267 \text{ N} \cdot 0.0762 \text{ m})\left(\frac{0.0143}{2}\right) \text{m}}{\frac{\pi(0.0143)^4}{64} \text{ m}^4} = 70.9 \text{ MPa} \qquad (a)$$

2. Éste es el único esfuerzo aplicado en este punto, de modo que también es el esfuerzo principal. En este caso, el esfuerzo efectivo de Von Mises $\sigma' = \sigma_1$ (véase la ecuación 3.7*c*, p. 179). El factor de seguridad en contra de la fluencia en el punto *P* es entonces (de la ecuación 3.8*a*, p. 181),

$$N_{fluencia} = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{186}{70.9} = 2.6 \qquad (b)$$

Este diseño es seguro para la carga promedio, aunque no existe mucho margen para protegerlo de sobrecargas. Observe que en esta situación de esfuerzo simple, la teoría de energía de distorsión proporciona resultados idénticos a los de la teoría de cortante máximo, debido a que la elipse y el hexágono coinciden en el punto $x = \sigma_1$, $y = 0$ en la figura 3-5 (p. 182).

3. Como éste es un material colado con ductilidad limitada, sería interesante calcular también el factor de seguridad de Mohr modificado en contra de la fractura frágil con la ecuación 3.12*a* (p. 190). Se afirmaría entonces que se podría usar el freno de mano, a pesar de que ha ocurrido una ligera fluencia:

$$N_{fractura} = \frac{S_{ut}}{\sigma_1} = \frac{310}{70.9} = 4.4 \qquad (c)$$

Advierta que no se han tomado en cuenta las concentraciones de esfuerzos en la raíz del voladizo, las cuales reducirían este factor de seguridad a la fractura. El estudio de caso 1D en el apéndice C determina el factor de concentración de esfuerzos en el punto *P*, usando el análisis de elementos finitos.

4. El esfuerzo de cortante transversal en el punto *Q* de la figura 3-22 se calculó con la ecuación 2.15*c* (p. 91) como

$$\tau_{xy} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(267) \text{ N}}{\frac{3\pi(14.3)^2}{4} \text{ mm}^2} = 2.22 \text{ MPa} \qquad (d)$$

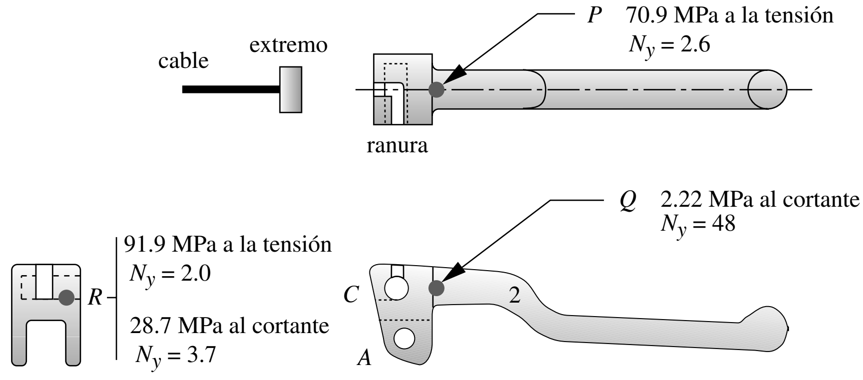


FIGURA 3-22

Esfuerzos y factores de seguridad en puntos seleccionados de la palanca del freno de la bicicleta

Este esfuerzo cortante también es el máximo, ya que ningún otro esfuerzo actúa en ese punto. El factor de seguridad mediante la teoría de la energía de distorsión, para cortante puro en el punto Q, es

$$N_{transversal} = \frac{S_{ys}}{\tau_{máx}} = \frac{0.577S_y}{\tau_{máx}} = \frac{0.577(186)}{2.22} = 48 \tag{e}$$

Se ve claramente que no existe riesgo de falla por cortante transversal en el punto Q.

5. El esfuerzo compresivo por contacto en el orificio del punto A en la figura 3-22 es

$$A_{compresión} = \text{diá} \cdot \text{espesor} = 8(2)(6.4) = 102\,\text{mm}^2$$
$$\sigma_{contacto} = \frac{F_{12}}{A_{contacto}} = \frac{1\,951}{102} = 19.2 \text{ MPa} \tag{f}$$

y este esfuerzo, que actúa solo, es también el esfuerzo principal y el de Von Mises. Suponiendo que la resistencia a la compresión de este material es igual a su resistencia a la tensión (un material uniforme), el factor de seguridad contra la falla por contacto en el orificio es

$$N_{contacto} = \frac{S_{yc}}{\sigma'} = \frac{186}{19.2} = 9.7 \tag{g}$$

6. El desgarramiento en este caso requiere que secciones de (4)6.4 mm fallen al cortante a través del material entre el orificio A y el extremo. (Véase también la figura 2-13 en la p. 85).

$$A_{desgarramiento} = \text{longitud} \cdot \text{espesor} = 7.1(4)(6.4) = 181.8 \text{ mm}^2$$
$$\tau_{desgarramiento} = \frac{F_{12}}{A_{desgarramiento}} = \frac{1\,951}{181.8} = 10.7 \text{ MPa} \tag{h}$$

Éste es un caso de cortante puro y el factor de seguridad se obtiene a partir de

$$N_{desgarramiento} = \frac{S_{ys}}{\tau_{máx}} = \frac{0.577S_y}{\tau_{máx}} = \frac{0.577(186)}{10.7} = 10.0 \tag{i}$$

7. El extremo del cable se inserta en un orificio ciego, el cual tiene una ranura a la mitad para permitir que el cable pase a través del ensamble, como se indica en la figura 3-22. Esta ranura debilita la pieza y hace que la sección R sea la ubicación con más probabilidades de falla en esta junta. El esfuerzo flexionante en la fibra más exterior es

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{\frac{1\,914}{2}\left(\frac{5}{2}\right)(4)}{\frac{10(5)^3}{12}} = 91.9 \text{ MPa} \tag{j}$$

Como es el único esfuerzo aplicado en la fibra exterior de esta sección, también es el esfuerzo principal y el de Von Mises. El factor de seguridad a la flexión en el punto R es

$$N = \frac{S_{yc}}{\sigma'} = \frac{186}{91.9} = 2.0 \tag{k}$$

8. El cortante debido a la carga transversal en el eje neutro en la sección de R es (ecuación 2.14*b*, p. 91):

$$\tau_{xy} = \frac{3V}{2A} = \frac{3(957)}{2(10)(5)} = 28.7 \text{ MPa} \tag{l}$$

Éste es el esfuerzo cortante máximo en el eje neutro y el factor de seguridad al cortante transversal en el punto R es

$$N = \frac{S_{ys}}{\tau_{máx}} = \frac{0.577S_y}{\tau_{máx}} = \frac{0.577(186)}{28.7} = 3.7 \tag{m}$$

Es interesante ver que el factor de seguridad al cortante transversal sólo es de aproximadamente el doble del factor de seguridad a la flexión en el punto R, debido a que la viga es muy corta. Compare este resultado con el del punto P de las ecuaciones (*b*) y (*e*), donde los factores de seguridad a la flexión y al cortante transversal difieren por un factor aproximado de 18 en la viga más larga. Véase la figura 3-22.

9. La aleación de aluminio fundido seleccionada es una de las aleaciones de aluminio más fuertes disponibles. Si se desea protección adicional contra sobrecargas (como en la falla de la bicicleta), se puede hacer un cambio de geometría para aumentar el tamaño de la sección y/o reducir la concentración de esfuerzos, o bien, cambiar de material o el método de manufactura. Una pieza de aluminio forjado sería más fuerte, pero se incrementaría el costo. Secciones más gruesas aumentarían ligeramente el peso, aunque quizá no de manera prohibitiva. El incremento del diámetro del mango en el punto P en un 26% para 18 mm (tal vez también con un radio de transición más generoso) duplicaría aquí el factor de seguridad, ya que el módulo de sección es una función de d^3.

Aun cuando algunos de los otros factores de seguridad parecerían excesivos, sería poco práctico reducir tales secciones debido a las dificultades en las secciones delgadas de fundición. Otras consideraciones toman en cuenta la apariencia de la pieza orientada al consumidor final, como es una bicicleta. Si las dimensiones no lucen “correctas” para el consumidor, éste podría llevarse la desagradable impresión de un artículo de calidad deficiente. Algunas veces, es mejor inversión proporcionar un espesor mayor del requerido por el factor de seguridad, con la finalidad de obtener la apariencia de buena calidad.

ESTUDIO DE CASO 2C

Análisis de falla de una pinza de presión

Problema **Determine los factores de seguridad en puntos críticos en la pinza de presión de las figuras 3-3 (repetida en la página siguiente) y 3-23.**

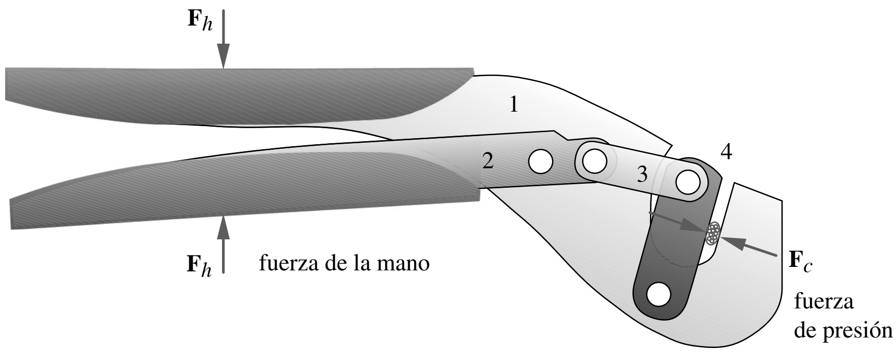


FIGURA 3-3 Repetida

Pinza de presión de conexión de alambres

Se proporcionan **Se conocen los esfuerzos por el estudio de caso 2B en la p. 139. Todo el material es acero AISI 1095 Q & T @ 800 °F con S_y = 112 kpsi (véase la tabla E-9 del apéndice E). Se trata de un material uniforme.**

Suposiciones **Los puntos de falla más probables son el eslabón 3 como columna, los orificios donde se insertan los pernos, los pernos conectores en cortante y el eslabón 4 a flexión.**

Solución **Véase las figuras 1-3 y 3-23, así como los archivos CASE2C-1 y CASE2C-2.**

1. En el estudio de caso previo se encontró que la carga crítica de columna en el eslabón 3 es 3.1 veces mayor que la carga aplicada. Éste es el factor de seguridad contra el pandeo, el cual se expresa en términos de carga en vez de esfuerzo.

2. Cualquier eslabón puede fallar a la compresión en los orificios de 0.25 cm de diámetro. El esfuerzo de compresión (ecuaciones 2.7, p. 82, y 2.10, p. 84) es:

$$\sigma_b = \frac{P}{A_{contacto}} = \frac{1\,560}{0.125(0.25)} = 50 \text{ kpsi} \tag{a}$$

3. Como es el único esfuerzo aplicado a este elemento, es el esfuerzo principal y también el de Von Mises. El factor de seguridad del esfuerzo de compresión por contacto, ya sea en el orificio o en el perno, es entonces

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{112}{50} = 2.2 \tag{b}$$

4. Los pernos de 0.25 in de diámetro están a cortante simple. El peor caso del esfuerzo cortante directo de la ecuación 2.9 (p. 83) es

$$\tau = \frac{P}{A_{cortante}} = \frac{1\,560}{\dfrac{\pi(0.25)^2}{4}} = 32 \text{ kpsi} \tag{c}$$

Como es el único esfuerzo sobre esta sección, éste también es el esfuerzo cortante máximo. El factor de seguridad de los pernos a cortante simple de la ecuación 3.9*a* (p. 181) es

$$N = \frac{0.577 S_y}{\tau_{máx}} = \frac{(0.577)112}{32} = 2.0 \tag{d}$$

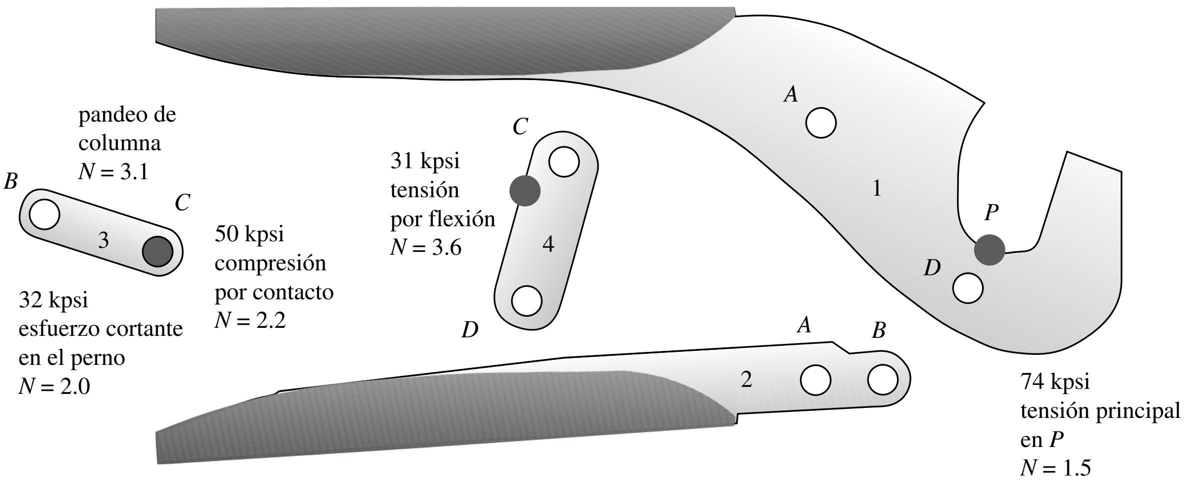


FIGURA 3-23

Esfuerzos relevantes y factores de seguridad (*N*) en puntos críticos de una pinza de presión

5. El eslabón 4 es una viga de 1.55 in de largo, simplemente apoyada en los pernos, y cargada con 2 000 lb de fuerza de presión a 0.35 in del punto *C*. La profundidad de la viga en el punto del momento máximo es de 0.75 in y el espesor es de 0.187. Entonces, el esfuerzo flexionante es

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{541.8\left(\frac{0.75}{2}\right)}{\frac{0.187(0.75)^3}{12}} = 31 \text{ kpsi} \tag{e}$$

Como es el único esfuerzo aplicado en este elemento en la fibra exterior de la viga, éste es el esfuerzo principal y también el de Von Mises. El factor de seguridad para el eslabón 4 a flexión es, entonces,

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{112}{31} = 3.6 \tag{f}$$

6. El eslabón 1 tiene un esfuerzo a la tensión debido a la tensión en la fibra interior en el punto *P* sobre la viga curva, superpuesto sobre el esfuerzo de tensión axial en el mismo punto. Su suma es el esfuerzo máximo principal:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= +\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right) = \frac{2\,400}{0.103[(1.0-0.25)(0.313)]}\left(\frac{0.397}{0.600}\right) = 65 \text{ kpsi} \\ \sigma_a &= \frac{F}{A} = \frac{2\,000}{(1.0-0.25)(0.313)} = 8.5 \text{ kpsi} \\ \sigma_1 &= \sigma_a + \sigma_i = 65 + 8.5 = 74 \text{ kpsi} \end{aligned} \tag{g}$$

No existe esfuerzo cortante aplicado en el punto *P*, de modo que éste es el esfuerzo principal y también el de Von Mises. El factor de seguridad para la flexión en la fibra interna de la viga curva en el punto *P* de la ecuación 3.8*a* (p. 181) es

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{112}{74} = 1.5 \tag{h}$$

7. En el orificio del eslabón 1, existe un esfuerzo axial a la tensión σ_a de la ecuación (*g*) aumentado por el factor de concentración de esfuerzos (véase el estudio de caso 2B, paso 14, p. 143). El factor de seguridad se obtiene de la ecuación 3.8*a*:

$$N = \frac{S_y}{\sigma} = \frac{112}{2.42(8.5)} = 5.4 \qquad (i)$$

Observe que también existe un esfuerzo cortante transversal en el orificio, el cual, combinado con la tensión axial, reduce el factor de seguridad en el orificio a 3.7 aproximadamente.

8. Algunos de estos factores de seguridad, como el de $N = 1.5$ para la flexión en el punto *P* del eslabón 1, son un poco bajos para proteger contra sobrecargas inducidas por el usuario. Los factores de seguridad para los pernos a cortante también deberían aumentarse. Se puede elegir un acero más fuerte como el SAE 4140, o bien, incrementar ligeramente el tamaño de la sección de las piezas. Con un pequeño cambio en el espesor del eslabón, se lograrían factores de seguridad aceptables en el material. Observe que se simplificó la geometría de esta herramienta para este ejemplo, en comparación con la del dispositivo real. Los esfuerzos y factores de seguridad calculados aquí no necesariamente son los mismos que los de la herramienta real, la cual tiene un diseño seguro y bien probado.

ESTUDIO DE CASO 3C

Análisis de fallas de un gato de tijera para automóvil

Problema — **Determine los factores de seguridad en los puntos críticos de un gato de tijera.**

Se proporciona — **Se conocen los esfuerzos por el estudio de caso 3B de la p. 144. La carga de diseño es de 2 000 libras en total, o bien, 1 000 lb por lado. El ancho de los eslabones es de 1.032 in y su espesor es de 0.15 in. El tornillo es de cuerda 1/2-13 UNC con un diámetro en la raíz de 0.406 in. El material de todas las piezas es acero dúctil con E = 30 Mpsi y S_y = 60 kpsi.**

Suposiciones — **Los puntos de falla más probables son los eslabones que funcionan como columnas, los orificios en presión por contacto donde se insertan los pernos, los pernos conectores a cortante, los dientes del engrane a flexión y el tornillo a tensión. Existen dos conjuntos de eslabones, uno en cada lado. Suponga que los dos lados soportan cargas iguales. El gato se usa normalmente muy pocos ciclos durante su tiempo de vida, de modo que lo adecuado será un análisis estático.**

Solución — **Véase las figuras 1-5 (página siguiente) y 3-24, así como el archivo CASE3C.**

1. El esfuerzo sobre el ensamble del gato para la posición mostrada se calculó en la sección anterior de este estudio de caso en el capítulo 2 (p. 144). Por favor, consulte también ese caso.

2. El tornillo del gato está a tensión axial. El esfuerzo de tensión se obtuvo de la ecuación 2.7 (p. 82).

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{4(878)}{0.129} = 27\,128 \text{ psi} \qquad (a)$$

Éste es un esfuerzo uniaxial a tensión, de modo que también es el esfuerzo principal y el de Von Mises. El factor de seguridad es

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{60\,000}{27\,128} = 2.2 \qquad (b)$$

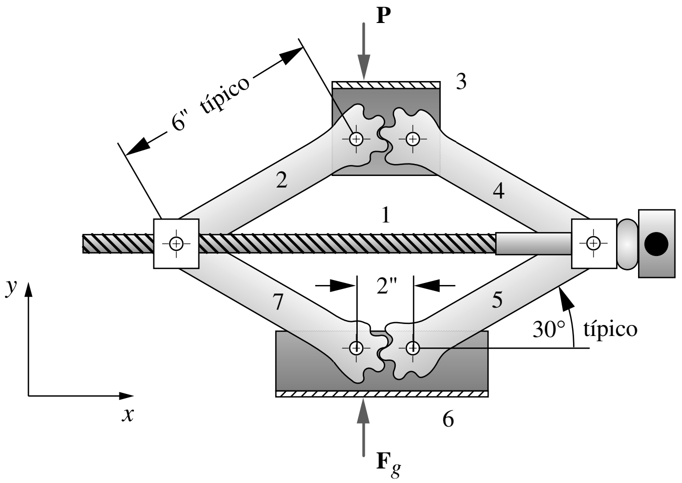


FIGURA 1-5 Repetida

Gato de tijera para automóvil

3. El eslabón 2 está cargado como una viga-columna. Su factor de seguridad contra el pandeo se calculó en la última sección de este estudio de caso y es $N = 2.3$.
4. El esfuerzo de contacto en el orificio más fuertemente cargado en C es

$$\sigma_{contacto} = \frac{P}{A_{contacto}} = \frac{1\,026}{0.15(0.437)} = 15\,652 \text{ psi} \qquad (c)$$

Éste es un esfuerzo de compresión uniaxial, de modo que también es el esfuerzo principal y el de Von Mises. El factor de seguridad es

$$N_{contacto} = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{60\,000}{15\,652} = 3.8 \qquad (d)$$

El esfuerzo cortante en los pernos es

$$\tau = \frac{P}{A_{cortante}} = \frac{1\,026}{\dfrac{\pi(0.437)^2}{4}} = 6\,841 \text{ psi} \qquad (e)$$

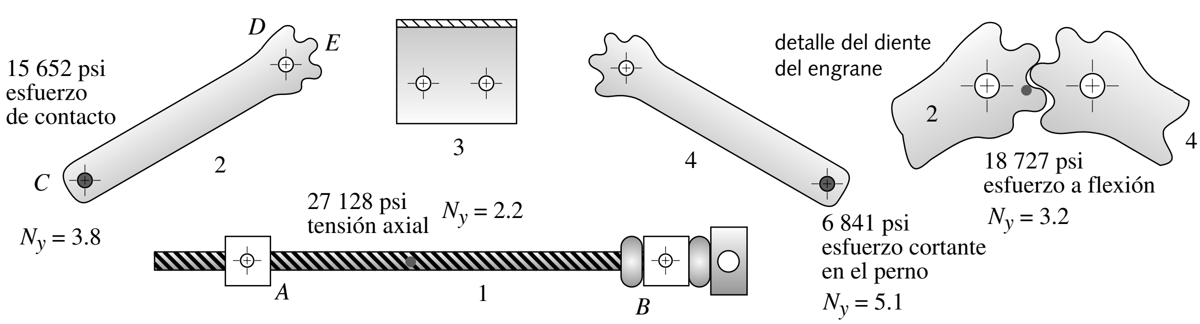


FIGURA 3-24

Esfuerzos y factores de seguridad seleccionados en el montaje de un gato de tijera

Éste es un esfuerzo cortante puro, de modo que también es el esfuerzo cortante máximo. El factor de seguridad es

$$N = \frac{0.577 S_y}{\tau_{máx}} = \frac{0.577(60\,000)}{6\,841} = 5.1 \qquad (f)$$

5. En el eslabón 2, el esfuerzo flexionante en la raíz del diente del engrane es

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{91(0.22)}{\frac{0.15(0.44)^3}{12}} = 18\,727 \text{ psi} \qquad (g)$$

Éste es un esfuerzo flexionante uniaxial, de modo que también es el esfuerzo principal y el de Von Mises. El factor de seguridad es

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{60\,000}{18\,727} = 3.2 \qquad (h)$$

6. Este análisis debería continuar considerando otros puntos del ensamble así como, lo más importante, los esfuerzos y los factores de seguridad cuando el gato se encuentra en posiciones diferentes. Se ha usado una posición arbitraria en este estudio de caso, pero, conforme el gato se mueve hacia una posición más baja, las fuerzas en el eslabón y el perno se incrementarán debido a los ángulos de transmisión deficientes. Se deberían realizar análisis completos de esfuerzos y de factores de seguridad para diversas posiciones. Examine los modelos para este estudio de caso, abriendo los archivos CASE3C-1 y CASE3C-2 en el programa de su preferencia.

ESTUDIO DE CASO 4C

Factores de seguridad para el brazo del freno de una bicicleta

Problema Seleccione las aleaciones del material adecuado para obtener un factor de seguridad contra fractura de, por lo menos, 2 en los puntos críticos del brazo del freno de la bicicleta de las figuras 1-9 (repetida aquí) y 3-25.

Se proporciona Se conocen los esfuerzos por el estudio de caso 4B (p. 147). El brazo es aluminio fundido y el perno del pivote es de acero.

Suposiciones Como el brazo es un material fundido (no uniforme), se usará la teoría de Mohr modificada para obtener un factor de seguridad contra la fractura. El perno es dúctil, de modo que se usará la teoría de energía de distorsión para él.

Solución Véase las figuras 1-9 y 3-25, así como el archivo CASE4C.

1. Se encontró que los esfuerzos flexionantes del brazo σ_i en las fibras interiores (punto A de la figura 3-25) y σ_o en las fibras exteriores (punto B en la figura 3-25) son

$$\sigma_i = +\frac{M}{eA}\left(\frac{c_i}{r_i}\right) = \frac{65\,452(6.063)}{(0.1873)(225)(58)} = 162 \text{ MPa}$$

$$\sigma_o = -\frac{M}{eA}\left(\frac{c_o}{r_o}\right) = \frac{65\,452(8.937)}{(0.1873)(225)(73)} = -190 \text{ MPa} \qquad (a)$$

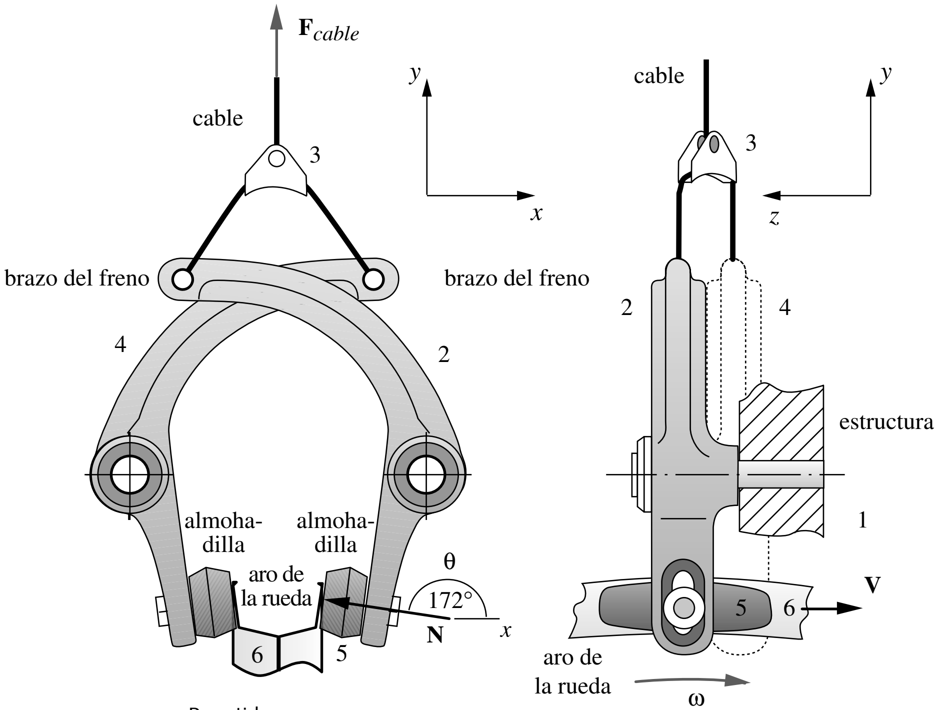


FIGURA 1-9 Repetida

Montaje del brazo del freno de una bicicleta, jalado desde el centro

Para un factor de seguridad igual a 2 en este punto, se necesita un material con una resistencia última a la tensión de, por lo menos, 325 MPa y una resistencia a la compresión de al menos 380 MPa.

2. El esfuerzo en la mitad izquierda de la sección B-B en el punto *C* de la figura 3-25 es la suma del esfuerzo flexionante más el esfuerzo de tensión axial:

$$\sigma_{maza} = \frac{Mc}{I_{maza}} + \frac{F_{32_y}}{A_{maza}} = \frac{65\,452(12.5)}{33\,948} + \frac{523}{399} = 25.4 \text{ MPa} \qquad (b)$$

Esto necesita un material con resistencia a la tensión de aproximadamente 52 MPa para tener un factor de seguridad igual a 2.

3. El esfuerzo flexionante en la fibra exterior del lado de 23 mm de la porción recta del brazo del freno (punto *D* en la figura 3-25) es

$$\sigma_y = \sigma_{y_1} + \sigma_{y_2} = 118.6 + 23.7 = 142 \text{ MPa} \qquad (c)$$

Para un factor de seguridad de 2 en este punto, se necesita un material con una S_{ut} de, por lo menos, 284 MPa.

4. Otro punto de falla posible es la ranura en el brazo (punto *E* en la figura 3-25). El esfuerzo de desgarramiento por corte es

$$\tau = \frac{F_{52_z}}{A_{desgarramiento}} = \frac{589}{32} = 18.4 \text{ MPa} \qquad (d)$$

Para un esfuerzo cortante uniaxial aplicado, todos los esfuerzos se encuentran en el primer cuadrante de la figura 3-11 (p. 190) y la teoría de Mohr modificada es idéntica a la teoría del esfuerzo normal máximo. El esfuerzo a tensión equivalente es, entonces, el doble del esfuerzo cortante máximo, el cual requiere una resistencia última a la tensión mayor que 75 MPa, para un factor de seguridad de 2 en este caso.

5. El caso del peor de los esfuerzos entre los puntos calculados sobre el brazo es el punto A con σ_y = 162 MPa. Éste es un esfuerzo uniaxial, de modo que también es el principal. La tabla E-3 del apéndice E muestra una aleación de aluminio A-132 fundida con moldeado permanente, tratada térmicamente a 340°F, con una S_{ut} de 324 MPa. Este material satisface el requerimiento de un factor de seguridad a la fractura ≥ 2, en este caso.

$$N_f = \frac{S_{ut}}{\sigma_{b_A}} = \frac{324 \text{ MPa}}{162 \text{ MPa}} = 2.0 \qquad (e)$$

6. El desplazamiento de 0.2% de la resistencia de fluencia a la tensión de este material fundido está dado como 296 MPa. Como el punto A tiene un esfuerzo uniaxial, el esfuerzo de Von Mises efectivo es $\sigma' = \sigma_y$. El factor de seguridad contra la fluencia a la tensión en el punto A es

$$N_y = \frac{S_y}{\sigma'_A} = \frac{296 \text{ MPa}}{162 \text{ MPa}} = 1.8 \qquad (f)$$

7. El diámetro de 11 mm del perno del pivote de acero tiene un esfuerzo a la fluencia máximo en el punto F de

$$\sigma_{perno} = \frac{M_{perno} c_{perno}}{I_{perno}} = \frac{23\,053\left(\frac{11}{2}\right)}{\frac{\pi(11)^4}{64}} = 176 \text{ MPa} \qquad (g)$$

Para un factor de seguridad igual a 2 contra la fluencia dúctil, se requiere un acero con una resistencia a la fluencia de, por lo menos, 352 MPa. Un acero AISI 1040 tiene una S_y = 372 MPa en condición normalizada. Éste proporciona el factor de seguridad apenas arriba de 2.

8. La figura 3-25 muestra un resumen de los esfuerzos de diversos puntos críticos en la pieza. El lector puede examinar el modelo de este estudio de caso, abriendo el archivo CASE4C en el programa de su preferencia.

Observe que, en la mayoría de estos estudios de caso, se realizó algún rediseño después de (y sólo después de) obtener la "línea más baja", en la determinación de los factores de seguridad para la geometría y la carga asumida desde el principio. Se encontró que algunos de estos factores de seguridad eran bajos. Esto es típico en los problemas

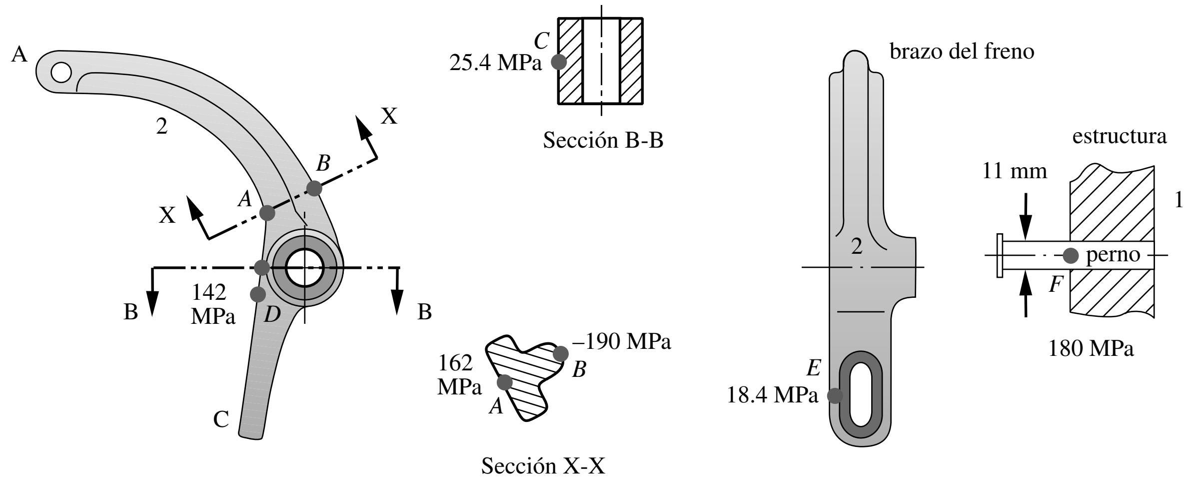


FIGURA 3-25

Esfuerzos del brazo del freno en puntos seleccionados

de diseño y demuestra su naturaleza iterativa. No se puede saber si las suposiciones son válidas, sino hasta que se invierta tiempo y energía considerables para revisar minuciosamente el diseño propuesto. No se debe decepcionar demasiado cuando se encuentra con que el primer diseño no funciona. Esto no por fuerza es un reflejo de las habilidades del diseñador. Ésta es justamente la “naturaleza de la bestia”. Lo valioso de incorporar el modelo analítico en una herramienta de cómputo, como una hoja de cálculo o un resolvedor de ecuaciones, resulta muy evidente ahora. El análisis de la geometría rediseñada, como se propuso antes en este último estudio de caso, puede realizarse literalmente en minutos, si se invirtió el tiempo inicial para computarizar el modelo. Si no, uno se enfrentará a una cantidad de trabajo muy grande para volver a analizar el diseño modificado.

3.6 RESUMEN

Este capítulo presentó varias teorías de falla para materiales bajo carga estática. Dos de estas teorías parecen ajustarse mejor a los datos experimentales. Ambas suponen que el material es razonablemente homogéneo e isotrópico a nivel macro. Asimismo, se analizó el mecanismo de propagación de grietas con base en la teoría de la mecánica de fractura.

La **teoría de la energía de distorsión**, también conocida como **teoría de Von Mises**, es mejor para materiales dúctiles uniformes, cuyas resistencias a la tensión y a la compresión son aproximadamente las mismas, y cuyas resistencias cortantes son menores que sus resistencias a la tensión. Se considera que estos materiales fallan con el esfuerzo cortante, y la teoría de la energía de distorsión es la que predice mejor sus fallas.

Los materiales frágiles no uniformes, como el hierro fundido, normalmente tienen resistencias a la tensión que son muchos menores que sus resistencias a la compresión y sus resistencias cortantes se encuentran entre estos dos valores. Son los más débiles a la tensión, y la **teoría de Mohr modificada** es la que mejor predice sus fallas.

Observe que cuando la carga no es estática, sino que varía con el tiempo, *entonces ninguna de estas teorías es adecuada para describir la falla*. En el próximo capítulo se analizará un conjunto de criterios diferentes para cargas que varían con el tiempo. Si se sabe que existen grietas, se debe investigar, usando la teoría de la mecánica de fractura, la posibilidad de una falla repentina debido a la propagación de la grieta. En algunas circunstancias, la grieta se puede abrir repentinamente a niveles de esfuerzos mucho menores que la resistencia a la fluencia del material.

ESFUERZO EFECTIVO En situaciones de cargas con esfuerzos combinados (como esfuerzos de tensión y cortante aplicados en el mismo punto), ¿cuál esfuerzo se debería utilizar para compararlo con la resistencia de un material y así calcular un factor de seguridad? ¿Se debe comparar el esfuerzo cortante aplicado con una resistencia cortante, o el esfuerzo normal aplicado con una resistencia a la tensión? La respuesta es: ninguno. Se tiene que calcular un **esfuerzo efectivo** que combine los efectos de todos los esfuerzos combinados aplicados en el punto, con la finalidad de compararse con el estado del esfuerzo normal “puro” de la muestra de prueba a la tensión. Tales esfuerzos efectivos son medios útiles para formarse un criterio del esfuerzo-carga por comparación con datos publicados sobre resistencia de materiales en un criterio de “manzanas con manzanas”, incluso cuando la situación del esfuerzo aplicado es diferente de la carga de la muestra de prueba. El enfoque del esfuerzo efectivo también es válido cuando sólo se aplica un esfuerzo en el punto y, por ello, se puede usar universalmente. Sin embargo, el cálculo del esfuerzo efectivo difiere dependiendo de si el tipo de material es dúctil o frágil.

Para materiales dúctiles uniformes, el **esfuerzo de Von Mises** se calcula directamente a partir de los esfuerzos aplicados (ecuaciones 3.7*b* y 3.7*d*, p. 179), o a partir de los

esfuerzos principales que resultan de los esfuerzos aplicados (ecuaciones 3.7*a* y 3.7*c*, p. 179). Observe que el cálculo de este esfuerzo efectivo convierte **cualquier combinación** de esfuerzos aplicados, en 2-D o 3-D, en cualquier punto, en un **valor de esfuerzo simple** σ' que se puede comparar con un criterio de resistencia adecuado, para así obtener un factor de seguridad. Para materiales dúctiles bajo cargas estáticas, el criterio de resistencia deseado es la **resistencia a la fluencia por tensión**. (Véase la sección 3.1, p. 175).

3

Para materiales frágiles no uniformes, se calcula un **esfuerzo efectivo de Mohr modificado** mediante los esfuerzos principales que resultan de la combinación específica de esfuerzos aplicados en el punto en cuestión (ecuaciones 3.12*a*-*d*, pp. 190-192). El esfuerzo efectivo resultante se compara con la resistencia última a la tensión del material (no la resistencia a la fluencia), para así obtener el factor de seguridad. (Véase la sección 3.2, p. 188).

MECÁNICA DE LA FRACTURA Además de una posible falla por fluencia o rompimiento, una pieza podría fallar con esfuerzos mucho menores por la propagación de grietas, si se presenta una grieta de tamaño suficiente. La teoría de la mecánica de la fractura brinda un medio para predecir tales fallas repentinas, con base en el cálculo de un **factor de intensidad del esfuerzo,** comparado con un criterio de prueba de **tenacidad a la fractura** para el material. (Véase las secciones 3.3, p. 195).

El proceso de análisis de falla para carga estática se resume en una serie de pasos, como se indica en el diagrama de flujo de la figura 3-26. Observe que los primeros cinco pasos son los mismos que los de la gráfica de la figura 2-60 (p. 154).

Ecuaciones importantes usadas en este capítulo

Consulte las secciones referenciadas para información sobre el uso adecuado de estas ecuaciones.

Esfuerzo de Von Mises efectivo para tres dimensiones (sección 3.1):

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \qquad (3.7a)$$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}{2}} \qquad (3.7b)$$

Esfuerzo de Von Mises efectivo para dos dimensiones (sección 3.1):

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} \qquad (3.7c)$$

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \qquad (3.7d)$$

Factor de seguridad en materiales dúctiles bajo carga estática (sección 3.1):

$$N = \frac{S_y}{\sigma'} \qquad (3.8a)$$

Resistencia a la fluencia por cortante, como una función de la resistencia a la fluencia por tensión (sección 3.1):

$$S_{ys} = 0.577\,S_y \qquad (3.9b)$$

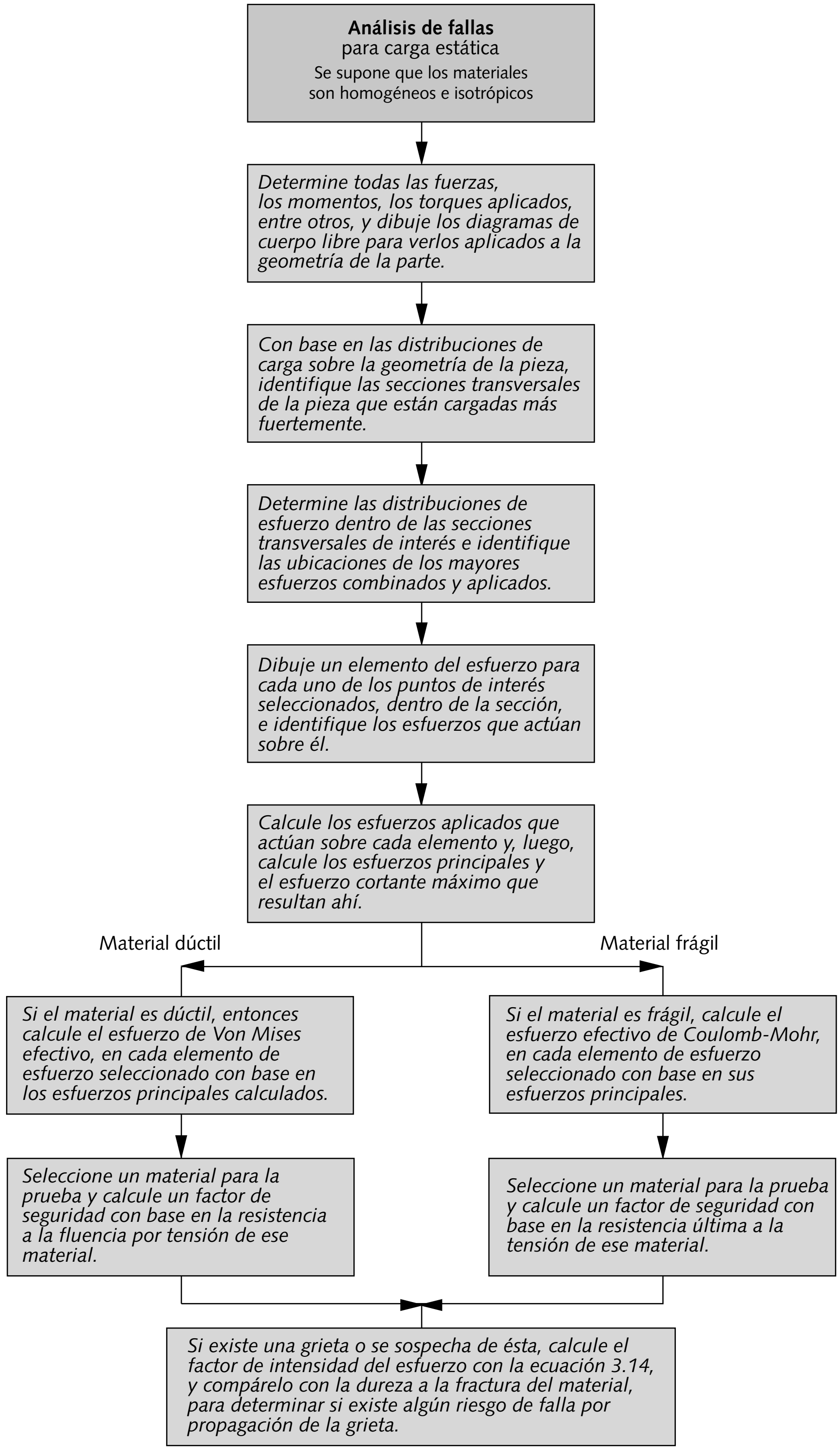


FIGURA 3-26

Diagrama de flujo del análisis de fallas estáticas

3

Esfuerzo efectivo de Mohr modificado para 3 dimensiones (sección 3.2):

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[\left|\sigma_1 - \sigma_2\right| + \frac{2S_{ut} - \left|S_{uc}\right|}{-\left|S_{uc}\right|}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right]$$
$$C_2 = \frac{1}{2}\left[\left|\sigma_2 - \sigma_3\right| + \frac{2S_{ut} - \left|S_{uc}\right|}{-\left|S_{uc}\right|}\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] \quad (3.12c)$$
$$C_3 = \frac{1}{2}\left[\left|\sigma_3 - \sigma_1\right| + \frac{2S_{ut} - \left|S_{uc}\right|}{-\left|S_{uc}\right|}\left(\sigma_3 + \sigma_1\right)\right]$$

$$\tilde{\sigma} = \text{MÁX}\left(C_1, C_2, C_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right)$$
$$\tilde{\sigma} = 0 \quad si\ \text{MÁX} < 0 \quad (3.12d)$$

Factor de seguridad de materiales frágiles bajo carga estática (sección 3.2):

$$N = \frac{S_{ut}}{\tilde{\sigma}} \quad (3.12e)$$

Factor de intensidad del esfuerzo (sección 3.3):

$$K = \beta\,\sigma_{nom}\sqrt{\pi a} \quad (3.14b)$$

Factor de seguridad para propagación de la grieta (sección 3.3):

$$N_{FM} = \frac{K_c}{K} \quad (3.15)$$

3.7 REFERENCIAS

1. **J.P. D. Hartog**, *Strength of Materials*. Dover Press: Nueva York, p. 222, 1961.
2. **J. Marin**, *Mechanical Behavior of Engineering Materials*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., pp. 117-122, 1962.
3. **S. P. Timoshenko**, *History of Strength of Materials*. McGraw-Hill: Nueva York, 1953.
4. **N. E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., p. 252, 1993.
5. ***Ibid.***, pp. 262-264.
6. **T. J. Dolan**, *Preclude Failure: A Philosophy for Material Selection and Simulated Service Testing*. SESA J. Exp. Mech., enero de 1970.
7. **N. E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., p. 280, 1993.
8. *Interim Report of a Board of Investigation to Inquire into the Design and Methods of Construction of Welded Steel Merchant Vessels*, USCG Ship Structures Committee, Wash., D.C. 20593-0001, 3 de junio, 1944.
9. **C. F. Tipper**, *The Brittle Fracture Story*, Cambridge University Press: Nueva York, 1962.
10. **R. C. Juvinall**, *Engineering Considerations of Stress, Strain, and Strenght*. McGraw-Hill: Nueva York, p. 71, 1967.
11. **J. M. Barsom y S. T. Rolfe**, *Fracture and Fatigue Control in Structures*, 2a. ed., Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., p. 203, 1987.

12. **J. A. Bannantine, J. J. Comer y J. L. Handrock**, *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., p. 94, 1990.

13. **D. Broek**, *The Practical Use of Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Países Bajos, pp. 8-10, 1988.

14. ***Ibid.***, p. 11.

15. **N. E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., pp. 306-307, 1993.

16. *Metallic Materials and Elements for Aerospace Vehicle Structures*, Department of Defense Handbook MIL-HDBK-5J, 31 de enero de 2003.

3.8 BIBLIOGRAFÍA

Para información adicional sobre mecánica de fractura, véase:

J. M. Barsom y S. T. Rolfe, *Fracture and Fatigue Control in Structures*, 2a. ed., Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1987.

D. Broek, *The Practical Use of Fracture Mechanics*. Kluwer: Dordrecht, Países Bajos, 1988.

R. C. Rice, ed. *Fatigue Design Handbook*. 2a. ed., SAE: Warrendale, PA. 1988.

Para información sobre factores de intensidad del esfuerzo, véase:

Y. Murakami, ed. *Stress Intensity Factors Handbook*. Pergamon Press: Oxford, U.K., 1987.

D. P. Rooke y D. J. Cartwright, *Compendium of Stress Intensity Factors*. Her Majesty's Stationery Office: Londres, 1976.

H. Tada, P. C. Paris y G. R. Irwin, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 2a. ed., Paris Productions Inc: 226 Woodbourne Dr., San. Luis, Mo., 1985.

Para información sobre tenacidad a la fractura de materiales, véase:

Battelle, *Aerospace Structural Metals Handbook*. Metals and Ceramics Information Center, Battelle Columbus Labs: Columbus Ohio, 1991.

J. P. Gallagher, ed. *Damage Tolerant Design Handbook*. Metals and Ceramics Information Center, Battelle Columbus Labs: Columbus Ohio, 1983.

C. M. Hudson y S. K. Seward, *A Compendium of Sources of Fracture Toughness and Fatigue Crack Growth Data for Metallic Alloys*. Int. J. of Fracture, **14**(4): R151-R184, 1978.

B. Marandet y G. Sanz, *Evaluation of the Toughness of Thick Medium Strength Steels*, en *Flaw Growth and Fracture*. Am. Soc. for Testing and Materials: Filadelfia, Pa., pp. 72-95, 1977.

Para información sobre falla de materiales compuestos, véase:

R. Juran, ed. *Modern Plastic Encyclopedia*. McGraw-Hill: Nueva York, 1992.

A. Kelly, ed., *Concise Encyclopedia of Composite Materials*. Pergamon Press: Oxford, U.K., 1989.

M. M. Schwartz, *Composite Materials Handbook*. McGraw-Hill: Nueva York, 1984.

Tabla P3-0†
Matriz tema/problema

3.1 Materiales dúctiles

3-1, *3-2*, **3-3, 3-4, 3-6**, ***3-7***, 3-8, **3-9**, ***3-14***, 3-15, **3-16, 3-17**, *3-19*, *3-20*, 3-21, **3-22**, ***3-27a,*** ***3-28***, 3-29, *3-31*, **3-33, 3-34, 3-36, 3-41, 3-42, 3-43,** ***3-44,*** **3-45, 3-46, 3-47, 3-48, 3-49, 3-56, 3-57, 3-58, 3-60, 3-67,** ***3-68, 3-73,*** **3-74, 3-78, 3-79, 3-80, 3-81**

3.2 Materiales frágiles

3-10, 3-11, 3-12, 3-13, 3-18, 3-23, 3-24, 3-25, 3-26, ***3-27b***, 3-30, 3-32, **3-35, 3-37**, *3-40,* 3-59, 3-61, 3-62, 3-63, 3-64, 3-65, 3-66, **3-69, 3-70, 3-71, 3-72**, *3-75, 3-82, 3-83, 3-84, 3-85*

3.3 Mecánica de la fractura

3-38, 3-39, 3-50, 3-51, 3-52, 3-53, 3-54, 3-55, 3-76, 3-77

3.9 PROBLEMAS

*†**3-1**. Un elemento de esfuerzo diferencial tiene un conjunto de esfuerzos aplicados sobre sí, como se indica en cada fila de la tabla P3-1. Para la(s) fila(s) asignada(s), dibuje un elemento de esfuerzo que muestre los esfuerzos aplicados. Calcule los esfuerzos principales y los esfuerzos de Von Mises.

3-2. Un candelabro de 400 lb se va a colgar de dos cables sólidos de 10 pies de largo, de acero al bajo carbono, en tensión. Dimensione los cables para un factor de seguridad de 4. Defina todas las suposiciones.

3-3. Para el ensamble del brazo del pedal de la bicicleta de la figura P3-1 con una fuerza aplicada por el ciclista de 1 500 N en el pedal, determine el esfuerzo de Von Mises en el brazo del pedal de 15 mm de diámetro. El pedal se sujeta al brazo con una cuerda de 12 mm. Obtenga el esfuerzo de Von Mises en el tornillo. Calcule el factor de seguridad contra carga estática, si el material tiene una S_y = 350 MPa.

***3-4**. El gancho del remolque mostrado en la figura P3-2 y en la figura A-1 (p. 857) tiene cargas aplicadas como se indica. El peso de la lengüeta de 100 kg actúa hacia abajo, y la fuerza con que jala horizontalmente es de 4 905 N. Usando las dimensiones del soporte de bola mostrado en la figura A-5 (p. 860) y una S_y = 300 MPa para acero dúctil, determine el factor de seguridad estático para

a) La caña de la bola donde se une con el soporte de bola.
b) La falla por contacto en el orificio del soporte de la bola.
c) La falla por desgarramiento en el soporte de bola.
d) La falla por tensión en los tornillos de sujeción, si tienen un diámetro de 19 mm.
e) La falla por flexión en el soporte de la bola como viga en voladizo.

3-5. Repita el problema 3-4 para las condiciones de carga del problema 1-5 en la p. 57.

***3-6**. Repita el problema 3-4 para las condiciones de carga del problema 1-6 en la p. 57.

***3-7**. Diseñe el buje del problema 1-7 (p. 57) para un factor de seguridad = 3.0, si la S_y = 100 kpsi.

***3-8**. Un molino procesa rollos de papel que tienen una densidad de 984 Kg/m^3. El rollo de papel tiene 1.50 m de diámetro exterior (*OD*) × 0.22 de diámetro interior (*ID*) × 3.23 m de largo, y está simplemente apoyada por un eje hueco de acero con una S_y = 300 kpsi. Obtenga el diámetro interior del eje, que se necesita para obtener un factor de seguridad estático de 5, si el diámetro exterior del eje es de 22 cm.

3-9. Para las pinzas de presión ViseGrip® dibujadas a escala en la figura P3-3, cuyas fuerzas se analizaron en el problema 1-9 y sus esfuerzos en el problema 2-9, obtenga los factores de seguridad para cada perno para una fuerza de presión supuesta P = 4 000 N en la posición mostrada. Los pernos tienen 8 mm de diámetro, S_y = 400 MPa y todos están sometidos a cortante doble.

Tabla P3-1 Datos del problema 3-1
Las filas *a* a *g* son problemas bidimensionales, las otras son de problemas tridimensionales

Fila	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}
a	1 000	0	0	500	0	0
b	–1 000	0	0	750	0	0
c	500	–500	0	1 000	0	0
d	0	–1 500	0	750	0	0
e	750	250	0	500	0	0
f	–500	1 000	0	750	0	0
g	1 000	0	–750	0	0	250
h	750	500	250	500	0	0
i	1 000	–250	–750	250	500	750
j	–500	750	250	100	250	1 000

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problema en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas de capítulos sucesivos también pueden ser continuación y ampliar estos problemas.

[*]**3-10**. En la figura P3-4*a* se muestra un trampolín sobresaliente. Suponga dimensiones de la sección transversal de 305 mm × 32 mm. Determine el mayor esfuerzo principal en el trampolín, cuando una persona de 100 kg se para en el extremo libre. ¿Cuál es el factor de seguridad estático, si el material es de fibra de vidrio frágil con S_{ut} = 130 MPa en dirección longitudinal?

[*]**3-11**. Repita el problema 3-10, suponiendo que la persona de 100 kg salta 25 cm hacia arriba y cae sobre la tabla. Suponga que la tabla pesa 29 kg y se flexiona 13.1 cm estáticamente cuando la persona se para sobre ella. ¿Cuál es el factor de seguridad estático del material, si el material es fibra de vidrio frágil con S_{ut} = 130 MPa en dirección longitudinal?

3-12. Repita el problema 3-10 usando el diseño en voladizo del trampolín de la figura P3-4*b*.

3-13. Repita el problema 3-11 usando el diseño del trampolín mostrado en la figura P3-4*b*. Suponga que la tabla pesa 19 kg y se flexiona estáticamente 8.5 cm cuando la persona se para sobre ella.

3-14. La figura P3-5 muestra un juguete infantil llamado *cangurín*. El niño se para sobre las almohadillas, aplicando la mitad de su peso sobre cada lado. Luego, salta hacia arriba manteniendo las almohadillas contra sus pies, y rebota con el resorte que amortigua el impacto y almacena energía para facilitar cada rebote. Suponga un niño de 60 lb de peso y una constante de resorte de 100 lb/in. El cangurín pesa 5 lb. Diseñe las secciones de la viga en voladizo de aluminio, sobre las cuales el niño se mantiene saltando 2 in arriba del suelo, con un factor de seguridad de 2. Use aluminio de la serie 1100. Defina el perfil y el tamaño de la viga.

[*]**3-15**. ¿Cuál es el factor de seguridad del perno sometido a cortante definido en el problema 2-15?

3-16. Se diseñó una pista para guiar bolas de boliche, con dos varillas redondas, como se ilustra en la figura P3-6. Las varillas forman un pequeño ángulo entre sí. Las bolas ruedan sobre las varillas hasta que caen entre ellas y llegan a otra pista. Cada porción sin soporte de la varilla tiene 30 in de longitud y el ángulo entre ellas es de 3.2°. Las bolas tienen un diámetro de 4.5 in y pesan 2.5 lb cada una. La distancia entre los centros de las varillas es de 4.2 in en el extremo más angosto. Obtenga el factor de seguridad estático de las varillas de acero normalizado SAE 1045 de 1 in de diámetro.

a) Suponga que las varillas están simplemente apoyadas en cada extremo.
b) Suponga que las varillas están empotradas en cada extremo.

[*]**3-17**. En la figura P3-7 se muestran unas tenazas para hielo. El hielo pesa 50 lb y tiene 10 in de ancho entre las tenazas. La distancia entre los mangos es de 4 in y el radio medio *r* de un elemento de la tenaza es de 6 in. Las dimensiones de la sección transversal rectangular son 0.750 in de profundidad × 0.312 in de ancho. Calcule el factor de seguridad de las tenazas, si su S_y = 30 kpsi.

3-18. Repita el problema 3-17, si las tenazas están hechas de hierro fundido gris clase 20.

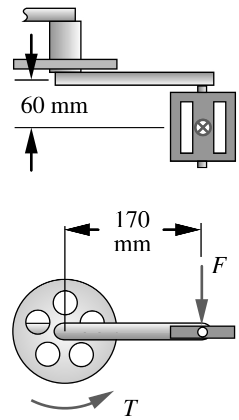


FIGURA P3-1

Problema 3-3 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

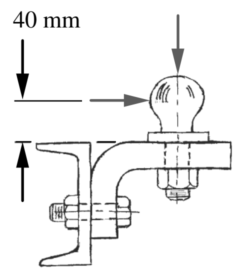
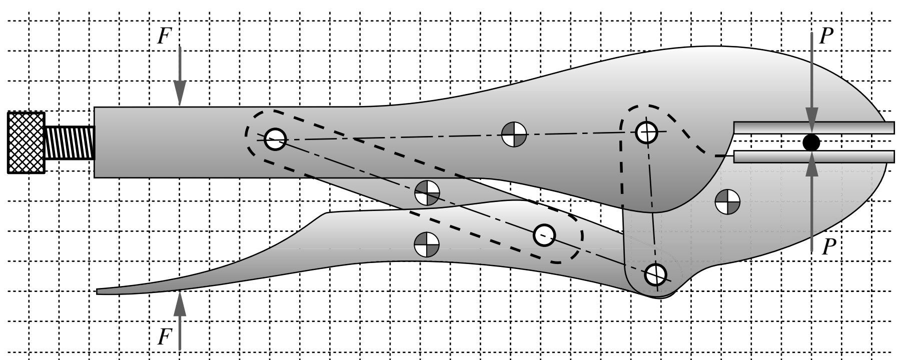


FIGURA P3-2

Problemas 3-4, 3-5 y 3-6 (un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

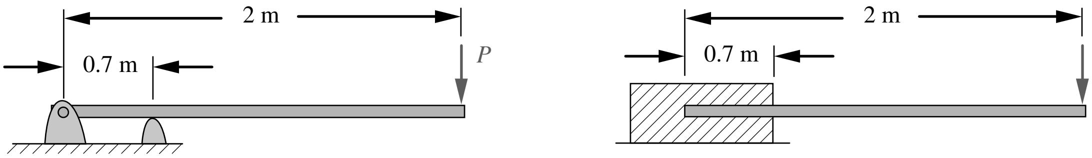


Cuadrícula de 0.5 cm

FIGURA P3-3

Problema 3-9 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

[*] Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas en capítulos subsecuentes también pueden continuar y ampliar esos problemas.



(*a*) Trampolín suspendido (*b*) Trampolín en voladizo

FIGURA P3-4
Problemas 3-10 a 3-13

****3-19***. Determine las dimensiones necesarias del perno de la horquilla de la figura P3-8, para resistir una fuerza aplicada de 130 000 lb. También determine el radio exterior del extremo de la horquilla, de manera que no falle al desgarramiento ni a la presión por contacto, si las pestañas de la horquilla tienen 2.5 in de espesor cada una. Use un factor de seguridad de 3 para todos los modos de falla. Suponga una S_y = 89.3 kpsi para el perno y una S_y = 35.5 kpsi para la horquilla.

3-20. Se aplica un torque de 100 N-m a un eje sólido, redonda, de 1 m de largo. Diséñela para limitar su deflexión angular a 2° y seleccione una aleación de acero para obtener un factor de seguridad a la fluencia igual a 2.

3-21. La figura P3-9 muestra una rueda de automóvil con dos estilos de llave para birlos: (*a*) una llave con un solo extremo y (*b*) una llave con dos extremos. La distancia entre los puntos *A* y *B* es de 1 pie en ambos casos, en tanto que el diámetro del brazo es de 0.625 in. ¿Cuál es la fuerza máxima posible antes de que ceda el brazo, si la S_y del material = 45 kpsi?

***3-22**. En la figura P3-10 se muestran unos patines con ruedas en línea. Las ruedas de poliuretano tienen un diámetro de 72 mm y tienen un espacio de 104 mm entre sus centros. La combinación patín-pie-bota pesa 2 kg. La razón de resorte efectiva del sistema persona-patín es de 6 000 N/m. Los ejes son pernos de acero de 10 mm de diámetro en cortante doble, con una S_y = 400 MPa. Calcule el factor de seguridad para los pernos, cuando una persona de 100 kg aterriza de un salto de 0.5 m sobre un pie.

a) Suponga que las cuatro ruedas aterrizan simultáneamente.
b) Suponga que una rueda absorbe toda la fuerza del aterrizaje.

***3-23**. Una viga está apoyada y cargada como se indica en la figura P3-11*a*. Para los datos que se dan en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P3-2, obtenga el factor de seguridad estático:

a) Si la viga es un material dúctil con una S_y = 300 MPa.
b) Si la viga es de un material frágil-colado con una S_{ut} = 150 MPa y una S_{uc} = 570 MPa.

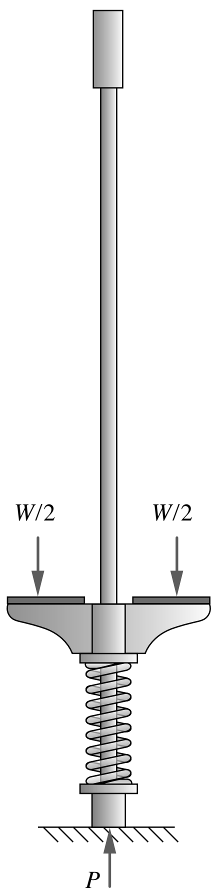


FIGURA P3-5
Problema 3-14

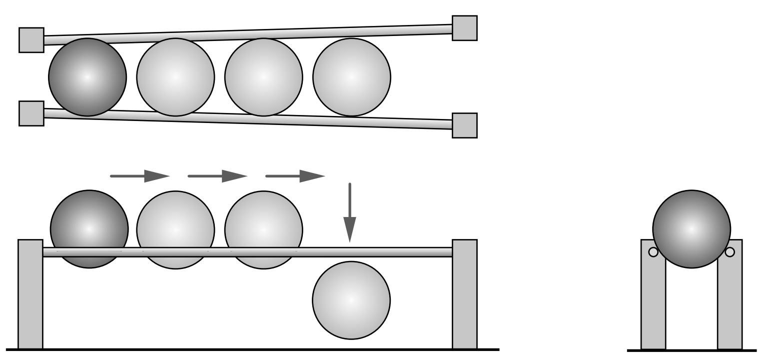


FIGURA P3-6
Problema 3-16

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas en capítulos subsecuentes también pueden continuar y ampliar esos problemas.

[*]**3-24**. Una viga está apoyada y cargada como se indica en la figura P3-11*b*. Para los datos que se dan en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P3-2, calcule el factor de seguridad estático:

a) Si la viga es un material dúctil con una S_y = 300 MPa.
b) Si la viga es de un material frágil-fundido, con una S_{ut} = 150 MPa y una S_{uc} = 570 MPa.

[*]**3-25**. Una viga está apoyada y cargada como se indica en la figura P3-11*c*. Para los datos que se dan en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P3-2, calcule el factor de seguridad estático:

a) Si la viga es un material dúctil con una S_y = 300 MPa.
b) Si la viga es de un material frágil-fundido con una S_{ut} = 150 MPa y una S_{uc} = 570 MPa.

[*]**3-26**. Una viga está apoyada y cargada como se indica en la figura P3-11*d*. Para los datos que se dan en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P3-2, calcule el factor de seguridad estático:

a) Si la viga es un material dúctil con una S_y = 300 MPa.
b) Si la viga es de un material frágil-fundido con una S_{ut} = 150 MPa y una S_{uc} = 570 MPa.

[*]***3-27.*** Se diseñó un estante de almacenamiento para colocar el rollo de papel del problema 3-8, como se muestra en la figura P3-12. Determine los valores adecuados de *a* y *b* de la figura. Haga el factor de seguridad estático, por lo menos, igual a 1.5. El mandril es sólido y se inserta hasta la mitad del rollo de papel.

a) La viga es un material dúctil con S_y = 300 MPa.
b) La viga es un material frágil fundido con S_{ut} = 150 MPa y S_{uc} = 570 MPa.

3-28. La figura P3-13 muestra un montacargas que sube por una rampa de 15° hasta la plataforma de carga a 4 pies de altura. El montacargas pesa 5 000 lb y tiene un eje de 42 in entre las ruedas. Diseñe dos rampas de acero de un pie de ancho (una por cada lado), para obtener un factor de seguridad de 3 en el peor de los casos de carga, conforme el montacargas sube por ellas. Minimice el peso de las rampas usando una geometría de sección transversal sensible. Seleccione una aleación de acero o de aluminio adecuada.

3-29. Un elemento diferencial está sometido a los esfuerzos (en kpsi): σ_1 = 10, σ_2 = 0, σ_3 = −20. El material es dúctil y tiene resistencias (en kpsi): S_{ut} = 50, S_y = 40, S_{uc} = 50. Calcule el factor de seguridad y elabore los diagramas $\sigma_1 - \sigma_3$ de cada teoría que muestre el estado de esfuerzos:

a) Usando la teoría del esfuerzo cortante máximo
b) Usando la teoría de la energía de distorsión

3-30. Un elemento diferencial está sometido a los esfuerzos (en kpsi): σ_1 = 10, σ_2 = 0, σ_3 = −20. El material es frágil y tiene resistencias (en kpsi): S_{ut} = 50, S_{uc} = 90. Calcule el factor de seguridad y elabore los diagramas $\sigma_1 - \sigma_3$ de cada teoría que muestre el estado de esfuerzos:

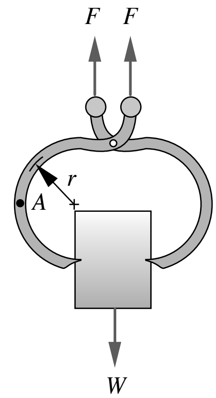


FIGURA P3-7

Problema 3-17

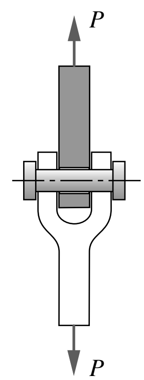


FIGURA P3-8

Problema 3-19

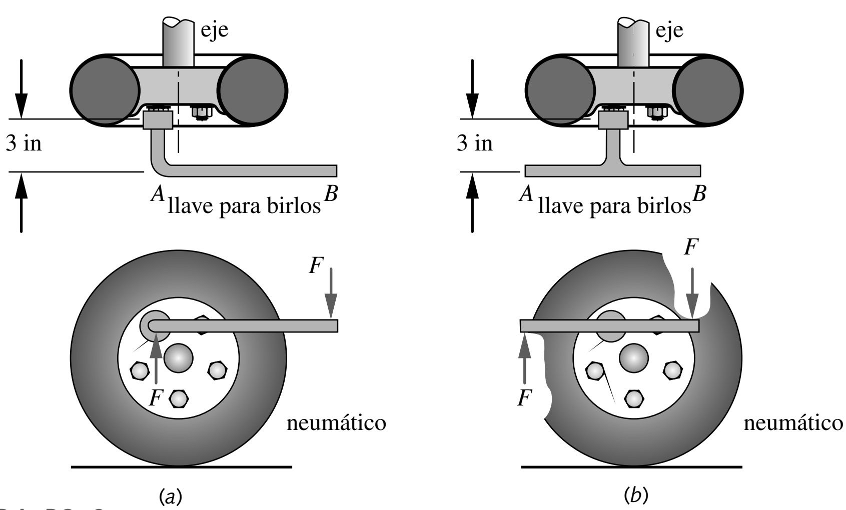


FIGURA P3-9

Problema 3-21

[*] Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas en capítulos subsecuentes también pueden continuar y ampliar estos problemas.



3

FIGURA P3-10

Problema 3-22

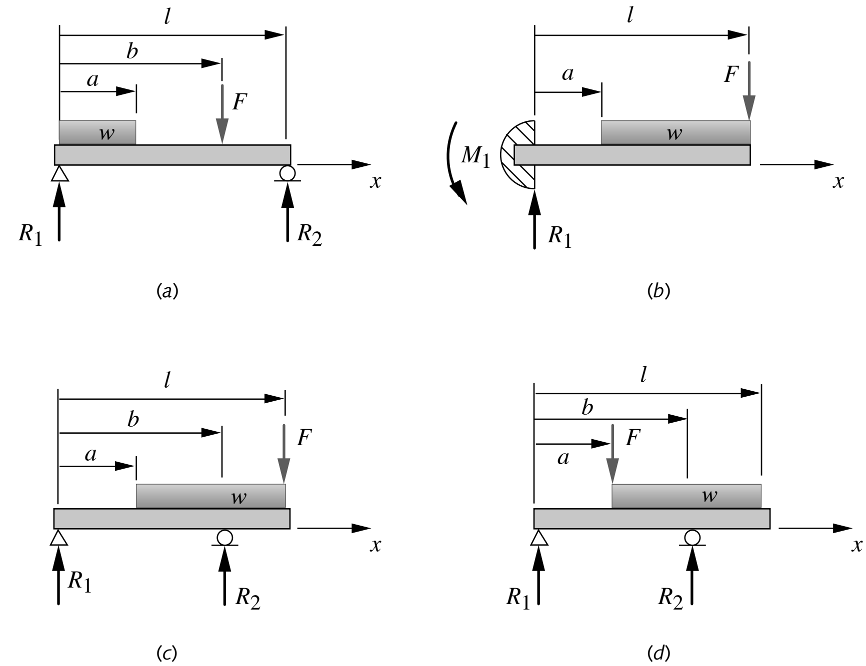


FIGURA P3-11

Vigas y cargas en vigas de los problemas 3-23 a 3-26; para los datos véase la tabla P3-2

a) Usando la teoría de Coulomb-Mohr
b) Usando la teoría de Mohr modificada

3-31. Diseñe un gato fijo de trípode que debe soportar 2 toneladas de carga, con un factor de seguridad de 3. Use acero SAE 1020 y minimice su peso.

Tabla P3-2 Datos de los problemas 3-23 a 3-26

Use tan sólo datos relevantes para el problema específico. Longitudes en m, fuerzas en N, I en m^4.

Fila	l	a	b	w*	F	I	c	E
a	1.00	0.40	0.60	200	500	2.85*E*–08	2.00*E*–02	acero
b	0.70	0.20	0.40	80	850	1.70*E*–08	1.00*E*–02	acero
c	0.30	0.10	0.20	500	450	4.70*E*–09	1.25*E*–02	acero
d	0.80	0.50	0.60	65	250	4.90*E*–09	1.10*E*–02	acero
e	0.85	0.35	0.50	96	750	1.80*E*–08	9.00*E*–03	acero
f	0.50	0.18	0.40	450	950	1.17*E*–08	1.00*E*–02	acero
g	0.60	0.28	0.50	250	250	3.20*E*–09	7.50*E*–03	acero
h	0.20	0.10	0.13	400	500	4.00*E*–09	5.00*E*–03	alum
i	0.40	0.15	0.30	50	200	2.75*E*–09	5.00*E*–03	alum
j	0.20	0.10	0.15	150	80	6.50*E*–10	5.50*E*–03	alum
k	0.40	0.16	0.30	70	880	4.30*E*–08	1.45*E*–02	alum
l	0.90	0.25	0.80	90	600	4.20*E*–08	7.50*E*–03	alum
m	0.70	0.10	0.60	80	500	2.10*E*–08	6.50*E*–03	alum
n	0.85	0.15	0.70	60	120	7.90*E*–09	1.00*E*–02	alum

* Note que *w* es una fuerza unitaria en N/m

Los números de problema en *itálicas* son problemas de diseño.

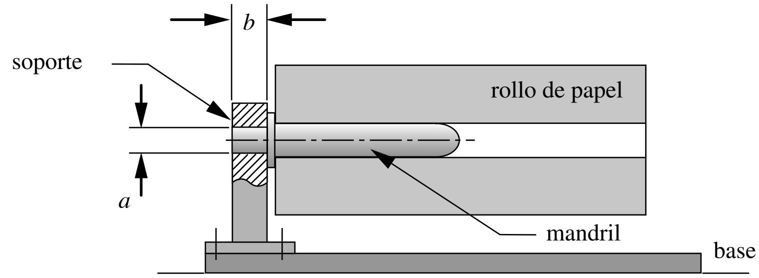


FIGURA P3-12

Problema 3-27

*3-32. Una pieza tiene un estado de esfuerzos y resistencias combinados (en kpsi) de: σ_x = 10, σ_y = 5, τ_{xy} = 4.5, S_{ut} = 20, S_{uc} = 80 y S_y = 18. Elija una teoría de falla adecuada con base en los datos proporcionados; calcule el esfuerzo efectivo y el factor de seguridad contra falla estática.

***3-33**. Para el soporte mostrado en la figura P3-14, así como los datos de la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P3-3, determine los esfuerzos de Von Mises en los puntos *A* y *B*.

***3-34**. Calcule el factor de seguridad para el soporte del problema 3-33 mediante las teorías de la energía de distorsión, del esfuerzo cortante máximo y del esfuerzo normal máximo. Comente sobre su aplicación. Suponga un material dúctil con resistencia S_y = 400 MPa (60 kpsi).

***3-35**. Calcule el factor de seguridad para el soporte del problema 3-33 usando las teorías de Coulomb-Mohr y del esfuerzo efectivo de Mohr modificado. Comente sobre su aplicación. Suponga un material frágil con resistencia S_{ut} = 350 MPa (50 kpsi) y S_{uc} = 1 000 MPa (150 kpsi).

3-36. Para el soporte mostrado en la figura P3-14 y los datos de la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P3-3, vuelva a resolver el problema 3-33, considerando la concentración de esfuerzos en los puntos *A* y *B*. Suponga un factor de concentración de esfuerzos de 2.5 tanto a la flexión como a la torsión.

***3-37**. En la figura P3-15 se muestra una viga curva semicircular que tiene un diámetro exterior de 150 mm, un diámetro interior de 100 mm y t = 25 mm. Para el par de cargas F = 14 kN aplicado a lo largo del diámetro, obtenga el factor de seguridad en las fibras interior y exterior: (*a*) Si la viga es un material dúctil con S_y = 700 MPa, (*b*) si la viga es un material frágil-fundido con S_{ut} = 420 MPa y S_{uc} = 1 200 MPa.

*3-38. Suponga que la viga curva del problema 3-37 tiene una grieta en la superficie interior con la mitad del ancho a = 2 mm y una tenacidad a la fractura de 50 MPa-m$^{0.5}$. ¿Cuál es el factor de seguridad contra fractura repentina?

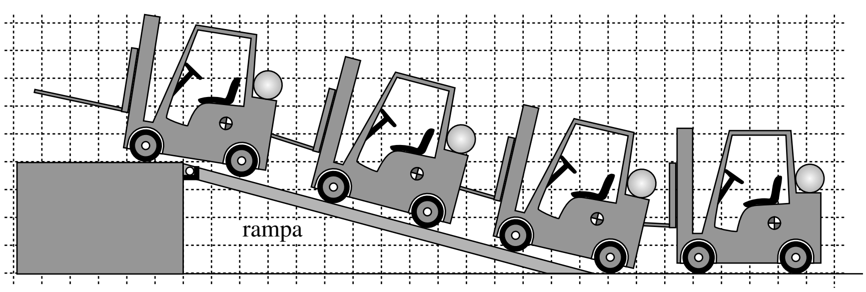


FIGURA P3-13

Problema 3-28

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas en capítulos subsecuentes también pueden continuar y ampliar esos problemas.

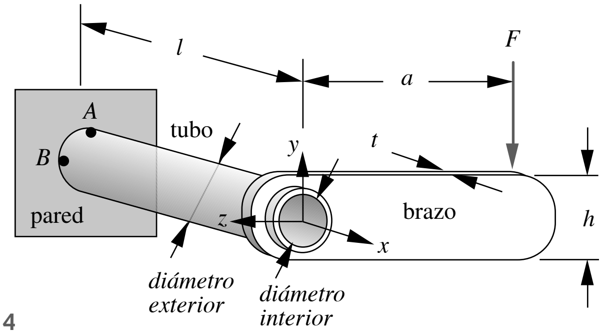


FIGURA P3-14

Problemas 3-33 a 3-36 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

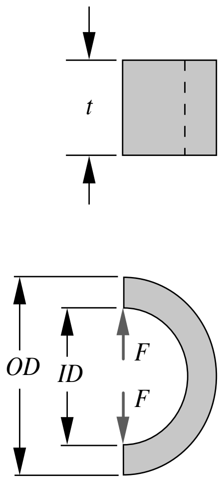


FIGURA P3-15

Problema 3-37 (Un modelo en Soliworks de esto se encuentra en el CD)

*3-39. Considere la falla en el caso del cohete con 260 in de diámetro por 0.73 in en la pared (figura 3-16). El acero tenía una $S_y = 240$ kpsi y una tenacidad a la fractura $K_c = 79.6$ kpsi-in$^{0.5}$. Fue diseñado para una presión interna de 960 psi pero falló a 542 psi. La falla se atribuyó a una pequeña grieta, que precipitó una falla mecánica de fractura repentina y frágil. Obtenga los esfuerzos nominales en la pared y el factor de seguridad a la fluencia en las condiciones de falla, y calcule el tamaño de la grieta que causó la explosión. Suponga que $\beta = 1.0$.

3-40. Rediseñe el soporte del rollo del problema 3-8, para que sea como el de la figura P3-16. El mandril se inserta a 10% de la longitud del rollo. Diseñe las dimensiones *a* y *b* para un factor de seguridad igual a 2.

a) Si la viga es de un material dúctil con $S_y = 300$ MPa.
b) Si la viga es de un material frágil fundido con $S_{ut} = 150$ MPa y $S_{uc} = 1\,200$ MPa.

***3-41**. Un tubo de acero con 10 mm de diámetro interior transporta un líquido a 7 MPa. El acero tiene una $S_y = 400$ MPa. Determine el factor de seguridad para la pared, si su espesor es de (*a*) 1 mm, (*b*) 5 mm.

3-42. Se requiere un tanque cilíndrico con extremos hemisféricos para almacenar aire presurizado a 150 psi y a temperatura ambiente. El acero tiene una $S_y = 400$ MPa. Determine el factor de seguridad, si el diámetro del tanque es de 0.5 m con una pared de 1 mm de espesor y una longitud de 1 m.

Tabla P3-3 Datos de los problemas 3-33 a 3-36

Use tan sólo datos relevantes para el problema específico. Longitudes en m, y fuerzas en N.

Fila	*l*	*a*	*t*	*h*	*F*	*OD*	*ID*	*E*
a	100	400	10	20	50	20	14	acero
b	70	200	6	80	85	20	6	acero
c	300	100	4	50	95	25	17	acero
d	800	500	6	65	160	46	22	alum
e	85	350	5	96	900	55	24	alum
f	50	180	4	45	950	50	30	alum
g	160	280	5	25	850	45	19	acero
h	200	100	2	10	800	40	24	acero
i	400	150	3	50	950	65	37	acero
j	200	100	3	10	600	45	32	alum
k	120	180	3	70	880	60	47	alum
l	150	250	8	90	750	52	28	alum
m	70	100	6	80	500	36	30	acero
n	85	150	7	60	820	40	15	acero

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas en capítulos subsecuentes también pueden continuar y ampliar esos problemas.

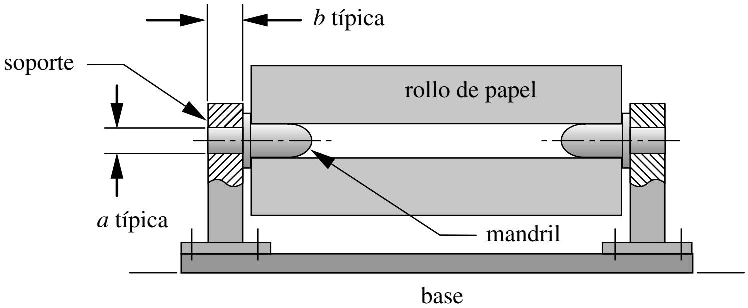


FIGURA P3-16

Problema 3-40 (Un modelo espacial de esto se encuentra en el CD)

3-43. Los rollos de papel de la figura P3-17 tienen 0.9 m de diámetro exterior × 0.22 m de diámetro interior × 3.23 de largo, y su densidad es de 984 kg/m^3. Los rollos se transfieren desde la banda transportadora de la máquina (que no se muestra) hasta el montacargas, mediante un eslabón V de la estación de descarga, el cual gira 90° por la acción de un cilindro de aire. El papel rueda hacia la horquilla del montacargas. Las cuchillas de la horquilla tienen 38 mm de espesor por 100 mm de ancho por 1.2 m de largo, y en la punta forman ángulos de 3° con la horizontal y su S_y = 600 MPa. Obtenga el factor de seguridad, en dos condiciones diferentes, para las dos cuchillas de la horquilla sobre el montacargas, cuando el papel rueda hacia él (establezca las suposiciones):

a) Las dos cuchillas de la horquilla no están soportadas en su extremo libre.
b) Las dos cuchillas están en contacto con la tabla en el punto *A*.

3-44. Determine un espesor adecuado para los eslabones V de la estación de descarga de la figura P3-17, para limitar sus flexiones a 10 mm en las puntas, en cualquier posición durante la rotación. Dos eslabones V soportan el rollo en los puntos a 1/4 y 3/4 a lo largo de la longitud del rollo, y cada uno de los brazos en V mide 10 cm de ancho por 1 m de longitud. ¿Cuál es el factor de seguridad contra la fluencia, si se diseñaron para limitar la deflexión como antes? S_y = 400 MPa. Para mayor información, véase el problema 3-43.

3-45. Determine el factor de seguridad, con base en la carga crítica, sobre la varilla del cilindro de aire de la figura P3-17. El brazo de la manivela que la hace girar es de 0.3 m de largo y la varilla tiene una extensión máxima de 0.5 m. La varilla de 25 mm

Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas en capítulos subsecuentes también pueden continuar y ampliar esos problemas.

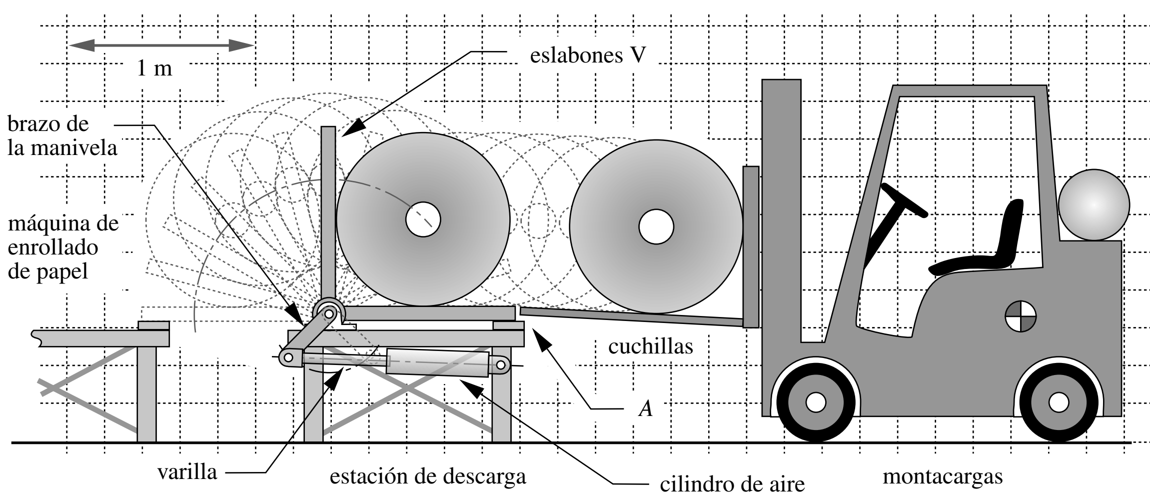


FIGURA P3-17

Problemas 3-43 a 3-47

de diámetro es de acero sólido con una resistencia a la fluencia de 400 MPa. Defina todas las suposiciones.

3-46. Los eslabones V de la figura P3-17 son girados por el brazo de la manivela con un eje de 60 mm de diámetro y 3.23 m de largo. Determine el torque máximo aplicado a este eje durante el movimiento del eslabón V, y encuentre, para el eje, el factor de seguridad estático contra la fluencia, si su S_y = 400 MPa. Para mayor información, véase el problema 3-43.

3-47. Determine las fuerzas máximas sobre los pernos en cada extremo del cilindro de aire de la figura P3-17. Determine el factor de seguridad para estos pernos, si tienen 30 mm de diámetro y están a cortante simple. S_y = 400 MPa.

3-48. La figura P3-18 muestra la silla de entrenamiento de un corredor de 100 kg en silla de ruedas. Las ruedas de la silla tienen 65 cm de diámetro y están separadas por una pista con 70 cm de ancho. Dos rodillos giran libremente sobre cojinetes que soportan las ruedas traseras. El movimiento lateral de la silla está limitado por las bridas. Diseñe los rodillos de 1 m de largo, como tubos de aluminio huecos (seleccione una aleación), para minimizar la altura de la plataforma y limitar, también, las deflexiones del rodillo a 1 m, en el peor de los casos. Especifique las dimensiones adecuadas de los ejes de acero para soportar los tubos sobre cojinetes. Calcule todos los factores de seguridad relevantes.

3-49. Una pieza fabricada de acero dúctil que tiene una S_y = 40 kpsi está sometida a un estado de esfuerzo tridimensional $\sigma_1 = -80$ kpsi, $\sigma_2 = -80$ kpsi, $\sigma_3 = -80$ kpsi. ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo? ¿Fallará la pieza?

3-50. Se va a fabricar un componente en forma de una hoja larga de aluminio 7075-T651, la cual tiene una tenacidad a la fractura K_c = 24.2 MPa-m$^{0.5}$ y una resistencia de fluencia por tensión de 495 MPa. Determine la grieta más grande que puede tolerarse en el borde de la hoja, si el esfuerzo nominal no excede la mitad de la resistencia a la fluencia.

3-51. Se va a fabricar un componente en forma de una hoja grande de acero 4340, el cual tiene una tenacidad a la fractura K_c = 98.9 MPa-m$^{0.5}$ y una resistencia de fluencia por tensión de 860 MPa. Las hojas se inspeccionan después de la fabricación para detectar defectos por grietas; sin embargo, la inspección no puede detectar defectos menores de 3 mm. La pieza es muy pesada por efectos de diseño. Un ingeniero ha sugerido que se reduzca el espesor y que el material se trate térmicamente, para incrementar su resistencia a la tensión a 1 515 MPa, lo cual redundaría en una disminución de la tenacidad a la fractura de 60.4 MPa-m$^{0.5}$. Suponiendo que el nivel de esfuerzos no excede la mitad de la resistencia a la fluencia, ¿la sugerencia es factible? Si no es así, ¿por qué?

3-52. Una placa grande está sometida a un esfuerzo de tensión nominal de 350 MPa. La placa tiene una grieta, en el centro, de 15.9 mm de longitud. Calcule el factor de intensidad del esfuerzo en la punta de la grieta.

3-53. Una escena de cine necesita un doble acróbata para colgarse de una cuerda, que está suspendida a 3 m por encima de una fosa que alberga arañas venenosas. La cuerda está sujeta a una hoja de vidrio que mide 3 000 mm de largo por 100 mm de ancho, y 1.27 mm de espesor. El acróbata sabe que la hoja de vidrio tiene una grieta en el centro de 16.2 mm de longitud total que está orientada de forma paralela al suelo.

Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas en capítulos subsecuentes también pueden continuar y ampliar esos problemas.

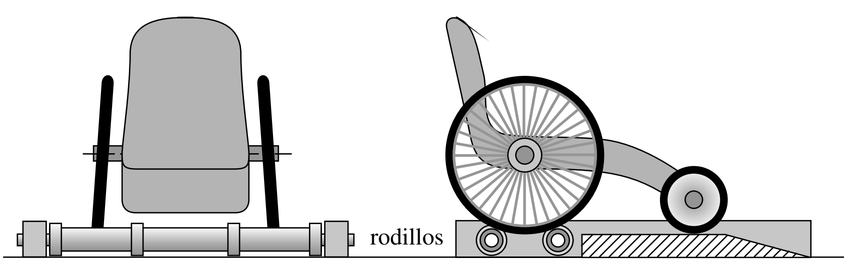


FIGURA P3-18
Problema 3-48

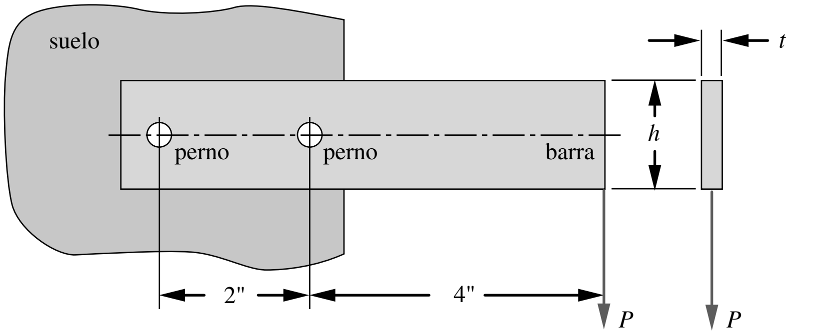


FIGURA P3-19

Problemas 3-56 y 3-57 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

La tenacidad a la fractura del vidrio es de 0.83 MPa-m$^{0.5}$. ¿Debería hacer la maniobra? Muestre todas las suposiciones y cálculos para avalar su respuesta.

3-54. Un material tiene una tenacidad a la fractura de 50 MPa-m$^{0.5}$ y una resistencia a la fluencia de 1 000 MPa y está hecho como un panel grande. Si al panel se le aplica un esfuerzo de la mitad del esfuerzo a la fluencia, ¿cuál será el tamaño máximo de una grieta en el centro que pueda tolerar sin fallar catastróficamente?

3-55. Un material tiene una dureza a la fractura de 33 MPa-m$^{0.5}$ y está hecho como un panel grande de 2 000 mm de longitud por 250 mm de ancho y 4 mm de espesor. Si la longitud mínima total permisible para una grieta es de 4 mm, ¿cuál es la carga máxima de tensión que se puede aplicar a lo largo del panel, sin falla catastrófica con un factor de seguridad de 2.5?

3-56. La figura P3-19 muestra una barra de acero SAE 1020 rolada en frío que está sujeta a un plano rígido con dos pasadores de espiga de acero de 0.25 in de diámetro, endurecidos a HRC52. Para $P = 1\,500$ lb y $t = 0.25$ in encuentre:

a) El factor de seguridad para cada perno.
b) El factor de seguridad para el esfuerzo de presión por contacto en cada orificio.
c) El factor de seguridad para la falla por desgarramiento si $h = 1$ in.

3-57. Repita el problema 3-56 para una pieza hecha de hierro colado clase 50.

3-58. La figura P3-20 muestra un soporte maquinado de acero SAE 1045 rolado en frío de 0.5 in de espesor con 0.25 in de radio en las esquinas interiores. Está rígidamente sujeto a un soporte y cargado con $P = 5\,000$ lb en el punto D. Encuentre:

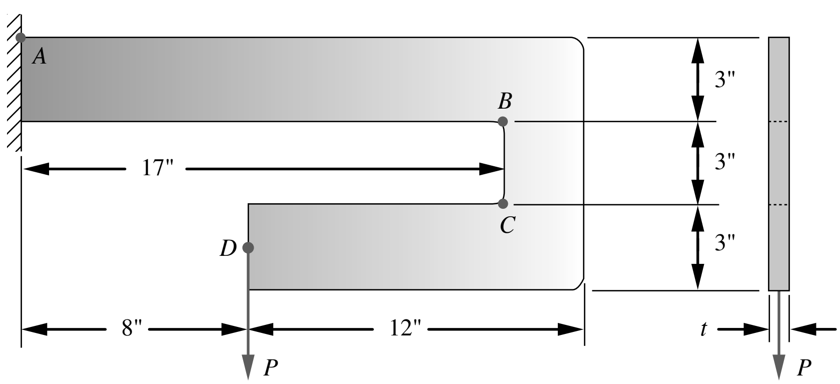


FIGURA P3-20

Problemas 3-58 y 3-59 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas en capítulos subsecuentes también pueden continuar y ampliar esos problemas.

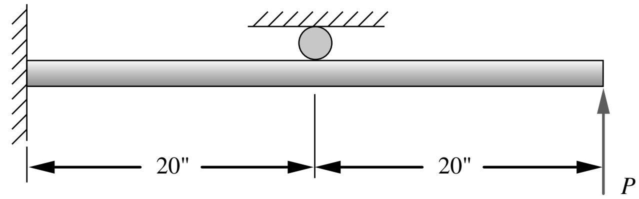


FIGURA P3-21

Problema 3-60

a) El factor de seguridad contra falla estática en el punto *A*.
b) El factor de seguridad contra falla estática en el punto *B*.

3-59. Repita el problema 3-58 para la parte construida de hierro fundido clase 60 de 1 in de espesor.

3-60. La figura P3-21 muestra una barra de acero normalizado SAE 1040 rolado en caliente de 1 in de diámetro, apoyada y cargada con $P = 500$ lb. Obtenga el factor de seguridad contra falla estática.

3-61. Repita el problema 3-60 para la pieza construida de hierro fundido clase 60 con un diámetro incrementado a 1.5 in.

3-62. La figura P3-22 muestra un perno de pivote que tiene presión por contacto en la parte *A* y una corredera en la pieza *B*. Si $F = 100$ lb, $l = 2$ in y $d = 0.5$ in, ¿cuál es el factor de seguridad del perno contra la fluencia, si está hecho de acero SAE 1020 rolado en frío?

3-63. La figura P3-22 muestra un perno de pivote que tiene presión por contacto en la parte *A* y una corredera en la pieza *B*. Si $F = 100$ N, $l = 50$ mm y $d = 16$ mm, ¿cuál es el factor de seguridad del perno contra la fractura, si está hecho de hierro fundido clase 50?

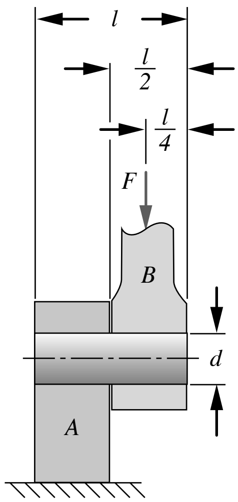


FIGURA P3-22

Problemas 3-62 y 3-63

3-64. Un elemento diferencial está sometido a los esfuerzos (en kpsi): $\sigma_x = 10$, $\sigma_y = -20$, $\tau_{xy} = -20$. El material es no uniforme y tiene resistencias (en kpsi): $S_{ut} = 50$, $S_y = -40$ y $S_{uc} = 90$. Calcule el factor de seguridad y dibuje los diagramas de $\sigma_a - \sigma_b$ que muestren los límites de cada teoría con el estado de esfuerzos y la línea de carga mediante:

a) la teoría de Coulomb-Mohr y
b) la teoría de Mohr modificada.

*3-65. Un elemento diferencial está sometido a los esfuerzos (en kpsi): $\sigma_x = 10$, $\sigma_y = -5$, $\tau_{xy} = 15$. El material es no uniforme y tiene resistencias (en kpsi): $S_{ut} = 50$, $S_y = 40$ y $S_{uc} = 90$. Calcule el factor de seguridad y dibuje los diagramas de $\sigma_a - \sigma_b$ que muestren el límite de cada teoría con el estado de esfuerzos y la línea de carga mediante:

a) la teoría de Coulomb-Mohr y
b) la teoría de Mohr modificada.

3-66. Un elemento diferencial está sometido a los esfuerzos (en kpsi): $\sigma_x = -20$, $\sigma_y = -15$, $\tau_{xy} = 15$. El material es no uniforme y tiene resistencias (en kpsi): $S_{ut} = 50$, $S_y = 40$ y $S_{uc} = 90$. Calcule el factor de seguridad y dibuje los diagramas de $\sigma_a - \sigma_b$ que muestren el límite de cada teoría con el estado de esfuerzos y la línea de carga mediante:

a) la teoría de Coulomb-Mohr y
b) la teoría de Mohr modificada.

3-67. Deduzca la ecuación 3.7*d* del esfuerzo de Von Mises efectivo para el caso bidimensional.

**3-68*. La figura P3-23 muestra una bomba de óleo (o de varilla). El eje de la manivela conductora en O_2 está cargado a la torsión y a la flexión, con valores máximos de 6500 in-lb y 9800 in-lb, respectivamente. El punto sobre el eje con esfuerzo máximo se localiza lejos de la cuña que conecta al eje con la manivela. Usando un factor de seguridad de 2 contra la fluencia estática, determine un diámetro apropiado para el eje, si se hace con acero SAE 1040 rolado en frío.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas en capítulos subsecuentes también pueden continuar y ampliar estos problemas.

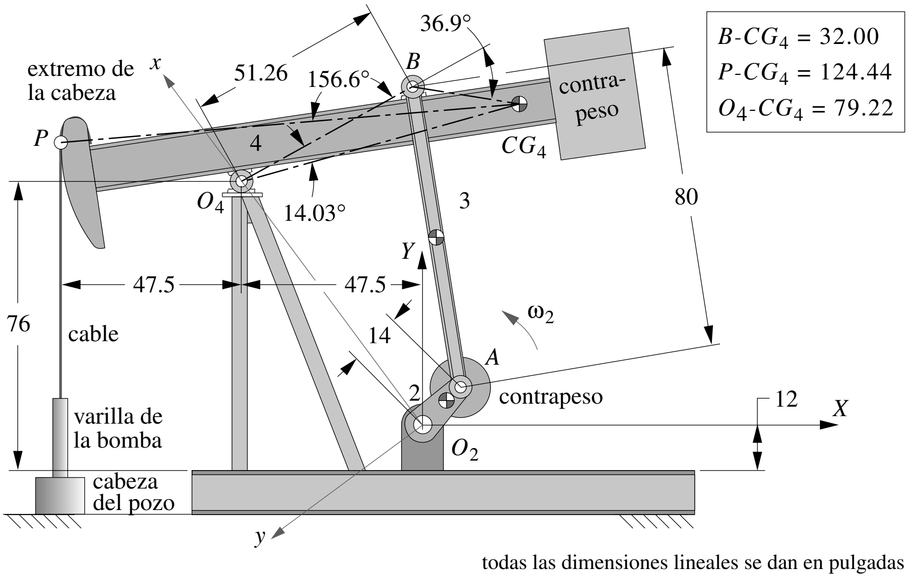


FIGURA P3-23

Problemas 3-68 y 3-69

3-69. La figura P3-24*a* presenta un tornillo de banco de cuerpo elíptico con las dimensiones que se muestran. El tornillo de banco tiene una sección T con un espesor uniforme de 3.2 mm en la garganta, como se muestra en la figura P3-24*b*. Calcule el factor de seguridad estático, si la fuerza de sujeción es de 2.7 kN y el material es hierro fundido gris clase 40.

3-70. Un tornillo de banco, como el mostrado en la figura P3-24*a*, tiene una sección transversal rectangular, como la de la figura P3-24*c*. Calcule el factor de seguridad estático, si la fuerza de sujeción es de 1.6 kN y el material es hierro fundido gris clase 50.

3-71. Un tornillo de banco como el mostrado en la figura P3-24*a* tiene una sección transversal elíptica, como la de la figura P3-24*d*. Se proporcionan las dimensiones de los ejes mayor y menor de la elipse. Calcule el factor de seguridad estático, si la fuerza de sujeción es de 1.6 kN y el material es hierro fundido gris clase 60.

Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas en capítulos subsecuentes también pueden continuar y ampliar esos problemas.

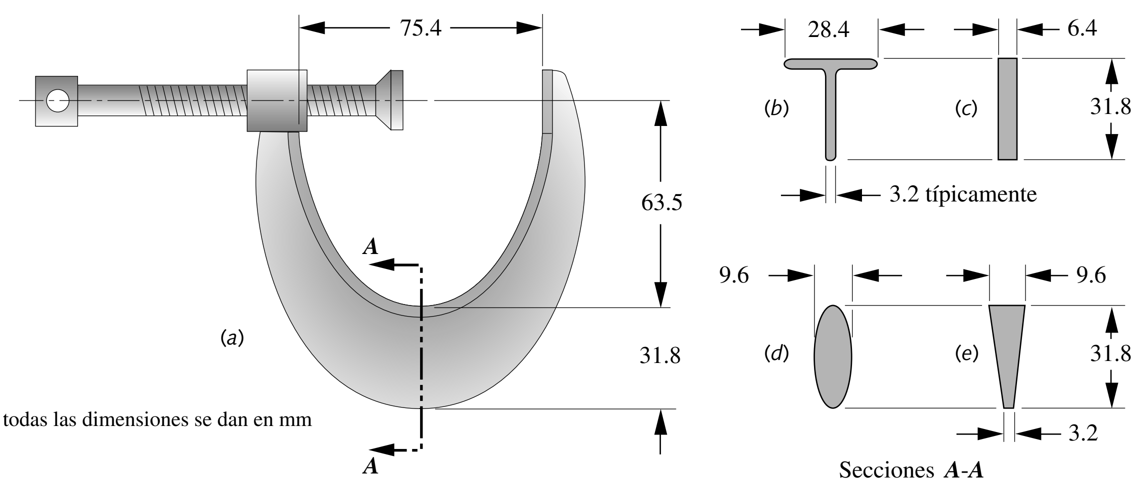


FIGURA P3-24

Problemas 3-69 a 3-72 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

3

3-72. La figura P3-24*a* presenta un tornillo de banco con sección transversal trapezoidal, como se muestra en la figura P3-24*e*. Obtenga el factor de seguridad estático, si la fuerza de sujeción es de 2.7 kN y el material es hierro fundido gris clase 40.

3-73. La biela (3) de la bomba de óleo mostrada en la figura P3-23 está formada, de hecho, con dos varillas, una en cada lado de la viga (4) que se mueve. Determine el ancho apropiado de la barra de material SAE 1020 rolado en frío, si tiene un espesor de 1/2 pulgada, y la carga de tensión máxima en cada una de las barras es de 3500 lb. Use un factor de seguridad de 4 contra la fluencia estática.

3-74. Una plataforma de trabajo se eleva sobre el extremo de una grúa que tiene la capacidad de extender su longitud y variar su ángulo con respecto al suelo. El ancho de la plataforma es grande comparado con el diámetro de la grúa, de modo que es posible cargar la grúa excéntricamente dando como resultado una combinación de flexión, torsión y compresión directa en la base de la grúa. En la base de la grúa hay un tubo hueco con un diámetro exterior de 8 in y un espesor de pared de 0.75 in. Está hecha de acero SAE 1030 CR. Determine el factor de seguridad contra falla estática, si la carga en un punto de la base de la grúa es $M = 600\,000$ lb-in, $T = 76\,000$ lb-in y la compresión axial es de 4800 lb.

3-75. Repita el problema 3-74 para una grúa que está hecha de hierro fundido gris clase 20. En la base de la grúa hay un tubo hueco con un diámetro exterior de 10 in y un espesor de pared de 1 in.

3-76. Suponga que la viga curva del problema 3-70 tiene una grieta en su superficie interior de la mitad del ancho $a = 1.5$ mm y una tenacidad a la fractura de 35 Mpa-m$^{0.5}$. ¿Cuál es el factor de seguridad contra una falla repentina?

3-77. Se va a hacer un panel grande de avión a partir de una barra de aluminio 7075-T651. En los datos de prueba se encontró que el esfuerzo nominal a la tensión en el panel es de 200 MPa. ¿Cuál es el tamaño promedio máximo de una grieta en el centro, que se puede tolerar sin falla catastrófica?

3-78. Diseñe la biela (eslabón 3) del problema 1-50 para un factor de seguridad de 4, si el eslabón está hecho de una hoja de acero SAE 1010 rolada en caliente, el diámetro del orificio del perno en cada extremo es de 6 mm y la carga de tensión máxima aplicada es de 2000 N. Existen dos eslabones que soportan la carga.

3-79. Diseñe el ariete compacto (eslabón 4) del problema 1-50, para un factor de seguridad de 4, si el ariete se hace de una barra de acero SAE 1010 rolado en caliente, el diámetro del orificio del perno en la junta que une al eslabón 3 es de 6 mm y la carga aplicada $F_{com} = 2000$ N. El diámetro del pistón es de 35 mm.

3-80. Un elemento diferencial está sometido a los esfuerzos (en MPa): $\sigma_1 = 70$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -140$. El material es dúctil y tiene resistencias (en MPa): $S_{ut} = 350$, $S_y = 280$ y $S_{uc} = 350$. Calcule el factor de seguridad y dibuje los diagramas de $\sigma_1 - \sigma_3$ de cada teoría, mostrando el estado de esfuerzos mediante:

a) la teoría del esfuerzo de corte máximo y
b) teoría de energía de distorsión.

3-81. Una pieza tiene el estado de esfuerzos y resistencias combinados dados (en MPa) por $\sigma_x = 70$, $\sigma_y = 35$, $\tau_{xy} = 31.5$, $S_{ut} = 140$, $S_y = 126$ y $S_{uc} = 140$. Mediante la teoría de falla de la energía de distorsión, obtenga el esfuerzo de Von Mises efectivo y el factor de seguridad contra falla estática.

3-82. Repita el problema 3-78 para la biela hecha de hierro fundido clase 20.

3-83. Repita el problema 3-79 para la parte hecha de hierro fundido clase 20.

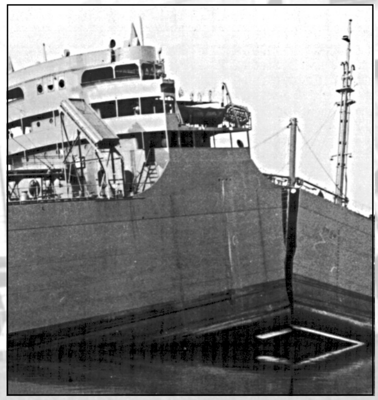
3-84. Un elemento diferencial está sometido a los esfuerzos (en MPa): $\sigma_1 = 70$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -140$. El material es frágil y tiene resistencias (en MPa): $S_{ut} = 350$ y $S_{uc} = 630$. Calcule el factor de seguridad y dibuje los diagramas de $\sigma_1 - \sigma_3$ de cada teoría con el estado de esfuerzos mediante:

a) la teoría de Coulomb-Mohr y
b) la teoría de Mohr modificada.

3-85. Una pieza tiene un estado de esfuerzos y resistencias combinados dados (en MPa) por $\sigma_x = 70$, $\sigma_y = 35$, $\tau_{xy} = 31.5$, $S_{ut} = 140$, $S_y = 126$ y $S_{uc} = 560$. Mediante la teoría de falla modificada de Mohr, obtenga el esfuerzo efectivo y el factor de seguridad contra falla estática.

Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas en capítulos subsecuentes también pueden continuar y ampliar esos problemas.

4



TEORÍAS DE FALLA POR FATIGA

La ciencia es un mueble de primera categoría para el piso superior de un hombre, si tiene sentido común en la planta baja.

Oliver Wendell Holmes

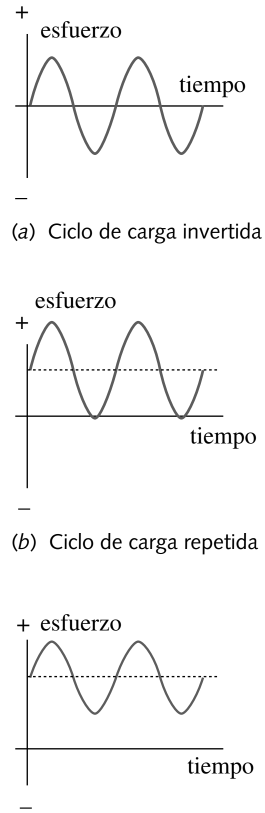
4.0 INTRODUCCIÓN

La mayoría de las fallas en las máquinas son consecuencia de cargas que varían con el tiempo en lugar de cargas estáticas. Tales fallas ocurren normalmente a niveles de esfuerzos significativamente menores que las resistencias a la fluencia de los materiales. Por ello, utilizar sólo las teorías de falla estática del capítulo anterior puede llevar a diseños inseguros cuando haya cargas dinámicas.

La tabla 4-0 muestra las variables que se usan en este capítulo, así como las referencias de ecuaciones, tablas o secciones donde se emplean. Al final del capítulo se incluye un resumen que también reúne las ecuaciones importantes del capítulo, con la finalidad de consultarlas fácilmente e identificar la sección del capítulo en la cual se encuentra su explicación.

Historia de las fallas por fatiga

Este fenómeno se advirtió por primera vez en el siglo XIX, cuando los ejes de carros de ferrocarril empezaron a fallar después de tan sólo un tiempo limitado en servicio. Estaban hechos de acero dúctil, pero presentaban fallas repentinas, como si fueran materiales frágiles. Rankine publicó, en 1843, el estudio *Sobre las causas de rupturas inesperadas en la sección giratoria de los ejes de ferrocarril*, donde postuló que el material se había “cristalizado” y se volvió frágil debido a la fluctuación de los esfuerzos. Los ejes se diseñaron con toda la experiencia de ingeniería de la época, la cual tenía como base la experiencia con estructuras cargadas estáticamente. En ese entonces, las cargas dinámicas eran un fenómeno nuevo, derivado de la introducción de maquinaria que funcionaba con vapor. Tales ejes estaban fijos a las ruedas y giraban con ellas, de modo que el esfuerzo de flexión, en cualquier punto sobre la superficie del eje, variaba en forma cíclica de positivo a negativo, como se muestra en la figura 4-1*a*. A dicha carga se le llama ciclo de carga invertida. El ingeniero alemán August Wohler efectuó la primera investigación científica (durante un periodo de 12 años) sobre lo que se conoce como *falla por fatiga*,



(*a*) Ciclo de carga invertida

(*b*) Ciclo de carga repetida

(*c*) Fluctuante

FIGURA 4-1

Esfuerzos variables con el tiempo

Tabla 4-0 Variables utilizadas en este capítulo

Símbolo	Variable	unidades ips	unidades del SI	Véase
A	razón de amplitud	ninguna	ninguna	Ec. 4.1*d*
a	mitad del ancho de la grieta	in	m	Ec. 4.3
A_{95}	95% del área sometida a esfuerzo	in^2	m^2	Ec. 4.7*c*
C_{carga}	factor de carga	ninguna	ninguna	Ec. 4.7*a*
C_{conf}	factor de confiabilidad	ninguna	ninguna	Tabla 4-4
$C_{tamaño}$	factor de tamaño	ninguna	ninguna	Ec. 4.7*b*
C_{sup}	factor de superficie	ninguna	ninguna	Ec. 4.7*e*
C_{temp}	factor de temperatura	ninguna	ninguna	Ec. 4.7*f*
d_{equiv}	diámetro equivalente de la muestra de prueba	in	m	Ec. 4.7*d*
K	intensidad del esfuerzo	kpsi-$in^{0.5}$	MPa-$m^{0.5}$	Secc. 4.1
K_c	tenacidad a la fractura	kpsi-$in^{0.5}$	MPa-$m^{0.5}$	Secc. 4.1
ΔK	rango del factor de intensidad del esfuerzo	kpsi-$in^{0.5}$	MPa-$m^{0.5}$	Ec. 4.3
ΔK_{th}	factor del de intensidad umbral del esfuerzo	kpsi-$in^{0.5}$	MPa-$m^{0.5}$	Secc. 4.5
K_f	factor de concentración del esfuerzo de fatiga	ninguna	ninguna	Ec. 4.11
K_{fm}	factor de concentración del esfuerzo medio de fatiga	ninguna	ninguna	Ec. 4.17
N	número de ciclos	ninguna	ninguna	Fig. 4-2, Secc. 4.2
N_f	factor de seguridad en fatiga	ninguna	ninguna	Ec. 4.14, 4.18
q	sensibilidad a la muesca del material	ninguna	ninguna	Ec. 4.13, Fig. 4-36
R	razón de esfuerzo	ninguna	ninguna	Ec. 4.1*d*
S_e	límite de resistencia corregido	psi	Pa	Ec. 4.6
$S_{e'}$	límite de resistencia sin corregir	psi	Pa	Ec. 4.5
S_f	resistencia a la fatiga corregida	psi	Pa	Ec. 4.6
S_f'	resistencia a la fatiga sin corregir	psi	Pa	Ec. 4.5
S_m	resistencia media en 10^3 ciclos	psi	Pa	Ec. 4.9
$S(N)$	resistencia a la fatiga en cualquier N	psi	Pa	Ec. 4.10
S_{yc}	resistencia a la fluencia en compresión	psi	Pa	Fig. 4-44, Ec. 4.16*a*
β	factor geométrico de intensidad del esfuerzo	ninguna	ninguna	Ec. 4.3
σ	esfuerzo normal	psi	Pa	
$\sigma_{1, 2, 3}$	esfuerzos principales	psi	Pa	Secc. 4.10
σ_a	esfuerzo normal alternativo	psi	MPa	Secc. 4.4
σ_m	esfuerzo normal medio	psi	MPa	Secc. 4.4
σ'	esfuerzo efectivo de von Mises	psi	Pa	Secc. 4.10
σ_a'	esfuerzo de von Mises alternativo	psi	Pa	Secc. 4.11
σ_m'	esfuerzo de von Mises medio	psi	Pa	Secc. 4.11
$\sigma_{máx}$	esfuerzo normal máximo aplicado	psi	MPa	Secc. 4.4
$\sigma_{mín}$	esfuerzo normal mínimo aplicado	psi	MPa	Secc. 4.4

La fotografía de inicio del capítulo es del barco estadounidense *Liberty*, que se fracturó en la ciudad de *Schenectady*, cortesía del Ship Structures Committee del gobierno de Estados Unidos.

haciendo fallar ejes en el laboratorio sujetos a ciclos de carga invertida. Publicó sus descubrimientos en 1870; en ellos identificaba el número de ciclos de esfuerzos variables con el tiempo como el responsable; además, descubrió la existencia de un *límite de resistencia* para los aceros, es decir, un nivel de esfuerzo que sería tolerable para millones

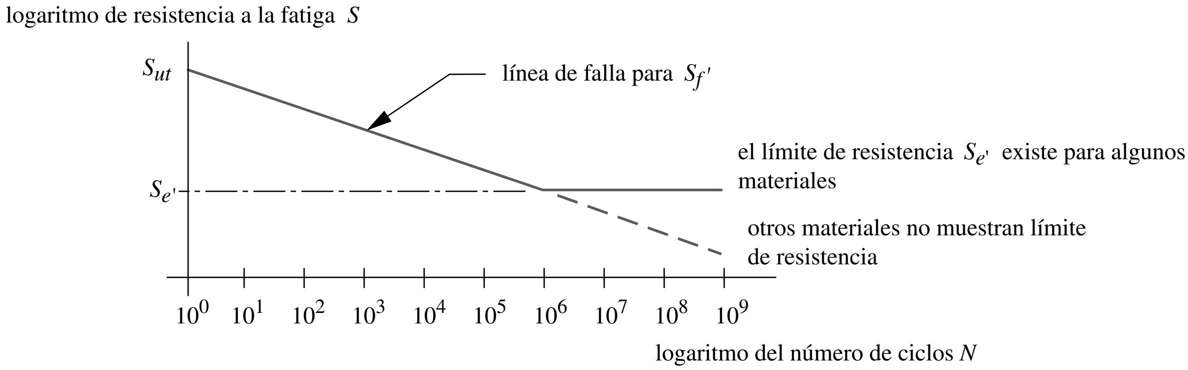


FIGURA 4-2

Diagrama de resistencia-vida de Wohler o diagrama *S-N*

de ciclos de carga invertida. El diagrama *S-N* —o diagrama de Wohler—, que se ilustra en la figura 4-2, se convirtió en el estándar para representar el comportamiento de materiales sometidos a ciclos de carga completamente invertida y todavía está en uso, aun cuando en la actualidad existen también otras medidas de la resistencia de materiales sujetos a cargas dinámicas.

En 1839, Poncelet fue el primero en aplicar el término "fatiga" a esta situación. El mecanismo de falla no se comprendía todavía, mientras la apariencia frágil de la superficie de falla, en un material dúctil, generaba especulación en cuanto a que el material de alguna manera "se había cansado" y vuelto frágil debido a las cargas oscilantes. Más tarde, Wohler demostró que las mitades de los ejes rotos eran tan fuertes y dúctiles, en pruebas a la tensión, como lo era el material original. Sin embargo, el término *falla por fatiga* se mantuvo y se usa aún para describir cualquier falla como consecuencia de los ciclos de carga invertida.

Las fallas por fatiga representan un costo económico muy alto. Con base en los datos de un informe del gobierno de Estados Unidos en Reed y otros,[1] Dowling sugiere que:

> El costo anual en dólares por fatiga de materiales para la economía estadounidense, en 1982, fue de alrededor de $100 mil millones, correspondientes a aproximadamente 3% del producto interno bruto (PIB). Tales costos provienen de la incidencia o la prevención de fallas por fatiga para vehículos terrestres, trenes, aviones de todo tipo, puentes, grúas, equipo de plantas de energía, estructuras marítimas de pozos petroleros, así como una gran variedad de maquinaria y equipo, que incluye aparatos domésticos de uso diario, juguetes y equipo deportivo.[2]

El costo implica, asimismo, vidas humanas. El primer jet comercial de pasajeros, el *Comet* británico, tuvo dos accidentes fatales en 1954 debido a fallas por fatiga en el fuselaje a causa de los ciclos de presurización/despresurización de la cabina.* Más recientemente (1988), un Boeing 737, de Hawaiian Airlines, perdió alrededor de un tercio de la parte superior de su cabina cuando volaba a 25 000 pies de altura. Aterrizó a salvo con el menor número de vidas perdidas. Existen otros muchos ejemplos recientes de fallas por fatiga catastróficas. En los últimos 150 años se ha efectuado un gran trabajo para determinar el mecanismo real de las fallas por fatiga. A partir de la Segunda Guerra Mundial, los requerimientos exigidos a los materiales en las aplicaciones para aviones y naves espaciales motivaron el incremento de la inversión en la investigación científica sobre el tema, de manera que ahora se entiende bastante bien. No obstante, los investigadores continúan buscando respuestas a preguntas acerca de los mecanismos de fatiga. La tabla 4-1 presenta la cronología de eventos significativos en la historia de la investigación de fatiga-falla.

* Por lo general, se acepta que las fallas del *Comet* también costaron al Reino Unido su industria aérea comercial. Gran Bretaña salió del campo durante un tiempo; sin embargo, los recursos perdidos por la suspensión de vuelos y por el rediseño de sus aviones dieron a la industria aeronáutica estadounidense la oportunidad de tomar el liderazgo, el cual mantiene hasta hoy. Gran Bretaña sólo recientemente empezó a tener una participación significativa en el mercado con el consorcio europeo que desarrolló el Airbus.

4

Tabla 4-1 Cronología de eventos en la investigación y los logros de fallas por fatiga
Fuente: "Fracture Mechanics & Fatigue", Union College, 1992, con autorización

Año	Investigador	Suceso o logro
1829	Albert	El primero en documentar fallas debidas a cargas repetidas.
1839	Poncelet	El primero en utilizar el término fatiga.
1837	Rankine	Estudio de la teoría de cristalización por fatiga.
1849	Stephenson	Estudio de los productos asociados con las fallas por fatiga de los ejes de ferrocarril.
1850	Braithwaite	El primero en usar el término fatiga en una publicación en inglés y en estudiar la teoría de la cristalización.
1864	Fairbairn	Informa sobre los primeros experimentos con cargas repetidas.
1871	Wohler	Publica los resultados de muchos años de investigación sobre fallas en ejes, desarrolla las pruebas de flexión giratorias y el diagrama *S-N*, y también define el límite de resistencia.
1871	Bauschinger	Desarrolla el extensómetro de espejo con una sensibilidad de 10^{-6} y estudia el esfuerzo-deformación inelástico.
1886	Bauschinger	Propone un "límite elástico natural" cíclico, abajo del cual no ocurrirá la fatiga.
1903	Ewing/Humfrey	Descubren las líneas de deslizamiento, grietas por fatiga y crecimiento de la grieta por falla, refutando así la teoría de la cristalización.
1910	Bairstow	Verifica la teoría de Bauschinger de un límite elástico natural y el límite de resistencia de Wohler.
1910	Basquin	Desarrolla la ley exponencial de pruebas de resistencia (la ecuación de Basquin).
1915	Smith/Wedgewood	Separan la deformación plástica cíclica de la deformación plástica total.
1921	Griffith	Desarrolla criterios de fractura y relaciona la fatiga con el crecimiento de la grieta.
1927	Moore/Kommers	Cuantifica los datos de ciclos altos de fatiga para muchos materiales en "The Fatigue of Metals".
1930	Goodman/Soderberg	Determinan independientemente la influencia de los esfuerzos medios en la fatiga.
1937	Neuber	Publica la ecuación de Neuber para la concentración de deformaciones en muescas (traducida al inglés en 1946).
1953	Peterson	Publica "Stress Concentration Design Factors", que ofrece un buen enfoque para justificar las muescas.
1955	Coffin/Manson	Publican independientemente la ley de la fatiga con pocos ciclos con base en la deformación (ley de Coffin-Manson).
1961	Paris	Publica la ley de Paris de mecánica de la fractura del crecimiento de la grieta por fatiga.

4.1 MECANISMO DE LA FALLA POR FATIGA

Las fallas por fatiga comienzan siempre como una grieta, la cual quizás haya estado presente en el material desde su manufactura, o tal vez se desarrolló con el paso del tiempo debido a la deformación cíclica alrededor de las concentraciones de esfuerzos. Fischer y Yen[3] han demostrado que prácticamente todos los miembros estructurales tienen discontinuidades, que van desde microscópicas (<0.010 in) hasta macroscópicas, introducidas en la manufactura o el proceso de fabricación. Las grietas por fatiga por lo general inician como una muesca u otro concentrador de esfuerzos. (Se utilizará el término general *muesca* para representar cualquier contorno geométrico que incremente el esfuerzo local.) Las fallas frágiles de algunos de los buques-cisterna de la Segunda Guerra Mundial (véase la figura 3-15 en la p. 196) estaban trazadas como grietas que iniciaban en un arco a la izquierda de una soldadura mal aplicada. Las fallas del avión *Comet* iniciaron en grietas menores de 0.07 in de largo, cerca de las esquinas de ventanas que eran casi cuadradas, provocando así altas concentraciones de esfuerzos. **De modo que resulta crítico que las piezas cargadas dinámicamente sean diseñadas para minimizar las concentraciones de esfuerzos**, **como se describió en la sección 2.15 (p. 116)**.

Hay tres fases o etapas de fallas por fatiga: *inicio de la grieta, propagación de la grieta y fractura repentina debida al crecimiento inestable de la grieta.* La primera etapa puede ser de corta duración, la segunda implica la mayoría de la vida de la pieza y la tercera es instantánea.

Fase de inicio de la grieta

Suponga que el material es un metal dúctil y no presenta grietas en su fabricación, aunque tiene la colección usual de partículas, inclusiones, etcétera, comunes en materiales para ingeniería. A nivel microscópico, los metales no son homogéneos ni isotrópicos.* Suponga, de igual manera, que hay algunas regiones de concentración de esfuerzos geométricos (muescas) en ubicaciones de esfuerzos significativos que varían con el tiempo y tienen una componente (positiva) de tensión, como se indica en la figura 4-1 (p. 234). Conforme oscilan los esfuerzos en la muesca, puede ocurrir una fluencia local por la concentración de esfuerzos, aun cuando el esfuerzo nominal en la sección esté muy por debajo de la resistencia a la fluencia del material. La fluencia plástica local provoca distorsión y crea bandas de deslizamiento (regiones de deformación intensa debidas al movimiento cortante), a lo largo de los límites de cristal del material. Conforme el esfuerzo oscila, se presentan bandas de deslizamiento adicionales y se fusionan en grietas microscópicas. Incluso en ausencia de una muesca (como en las muestras de prueba lisas), este mecanismo funciona siempre que se exceda la resistencia a la fluencia del material en algún sitio. Los vacíos o las inclusiones preexistentes servirán como incrementadores de esfuerzos para iniciar la grieta.

Los materiales menos dúctiles no cuentan con la misma capacidad para ceder como dúctiles, por lo que tenderán a desarrollar grietas más rápidamente. Son más *sensibles a la muesca*. Los materiales frágiles (en especial los fundidos) que no ceden pueden saltarse la fase inicial, así como proceder directamente a la propagación de la grieta en sitios donde haya vacíos o inclusiones que sirven como microgrietas.

Fase de propagación de la grieta

Una vez que se ha formado una microgrieta (o está presente desde el principio), el mecanismo de mecánica de la fractura que se describió en la sección 3.3 (p. 195) se vuelve factible. La grieta afilada crea una concentración de esfuerzos más grande que la de la muesca original, por lo que se desarrolla una zona plástica en la punta de la grieta cada vez que un esfuerzo de tensión abre la grieta, lo cual achata su punta y reduce la concentración del esfuerzo efectiva. La grieta crece una pequeña cantidad. Cuando el esfuerzo oscila hacia un régimen de esfuerzo compresivo, hasta cero, o lo suficientemente menor que el esfuerzo de tensión, como se muestra en las figuras 4-1*a* a 4-1*c* (p. 234), respectivamente, la grieta se cierra, la fluencia cesa en forma momentánea y la grieta se vuelve afilada de nuevo, pero ahora es más grande. Este proceso continúa siempre que el esfuerzo local oscile de un valor por abajo de la fluencia a la tensión, a un valor por arriba de la fluencia a la tensión en la punta de la grieta, de modo que **el crecimiento de la grieta se debe al esfuerzo de tensión** y la grieta crece a lo largo de los planos normales al esfuerzo de tensión máximo. Por lo anterior, las fallas de fatiga se consideran una consecuencia del esfuerzo de tensión, aun cuando el esfuerzo cortante inicia el proceso en materiales dúctiles, como se describió anteriormente. Los esfuerzos cíclicos, que siempre son de compresión, no causarán el crecimiento de la grieta, puesto que tienden a cerrarla.

La tasa de crecimiento de propagación de la grieta es muy pequeña, del orden de 10^{-8} a 10^{-4} in por ciclo;[5] no obstante, se suma en un gran número de ciclos. Si se amplifica la superficie que falla, las *estrías* debidas a cada ciclo de esfuerzo se observan en la figura 4-3, con 12 000x de amplificación, la cual presenta la superficie agrietada de una muestra de aluminio que falló, junto con una representación del patrón de esfuerzo-ciclo que la hizo fallar. La gran amplitud ocasional de los ciclos de esfuerzo muestra unas estrías más grandes que las amplitudes pequeñas más comunes; lo anterior indica que las mayores amplitudes de esfuerzos causan un crecimiento más grande de la grieta en un ciclo.

Corrosión Otro mecanismo de propagación de la grieta es la corrosión. **Si una pieza que contiene una grieta se encuentra en un ambiente corrosivo, la grieta crecerá con un esfuerzo estático**. La combinación de un esfuerzo y un ambiente corrosivo

* "Cuando se ven a una escala lo suficientemente pequeña, todos los materiales son anisotrópicos y no homogéneos. Los metales para ingeniería, por ejemplo, están compuestos de un agregado de granos de cristal pequeños. Dentro de cada grano, el comportamiento es anisotrópico debido a los planos del cristal, por lo que si se cruza el límite de un grano, la orientación de estos planos se modifica. La falta de homogeneidad existe no sólo por la estructura del grano, también a consecuencia de la presencia de vacíos minúsculos, o a partículas de una composición química diferente al grueso del material masivo, como inclusiones de silicato o alúmina en el acero".[3]

tiene un efecto sinérgico y el material se corroe más rápidamente que sin el esfuerzo. Esta situación combinada algunas veces se conoce como **esfuerzo por corrosión o agrietamiento asistido ambientalmente**.

Si la pieza se *esfuerza cíclicamente en un ambiente corrosivo*, la grieta crecerá más rápido que si estuviera sometida a un solo factor. Lo anterior también se conoce como **fatiga por corrosión**; mientras que la frecuencia cíclica del esfuerzo (a diferencia del número de ciclos) no parece surtir un efecto nocivo en el crecimiento de la grieta en un ambiente no corrosivo, en tanto que en un ambiente corrosivo sí lo tiene. Las menores frecuencias cíclicas le dan al ambiente más tiempo para actuar sobre la punta de la grieta sujeta al esfuerzo, mientras se mantiene abierta por el esfuerzo de tensión, lo cual incrementa en forma sustancial la razón de crecimiento por ciclo de la grieta.

Fractura

La grieta continuará creciendo siempre que haya un esfuerzo de tensión cíclica y/o factores de corrosión de severidad suficiente. En algún punto, el tamaño de la grieta se vuelve lo suficientemente grande como para aumentar el factor de intensidad K del esfuerzo, en la punta de la grieta (ecuación 3.14), hasta el nivel de la tenacidad a la fractura K_c del material, y ocurra instantáneamente una falla repentina (como se describió en la sección 3.3 (p. 195) de mecánica de fractura) en el siguiente ciclo de esfuerzo a la tensión. El mecanismo de falla es el mismo, ya sea que se cumpla la condición $K = K_c$ por la propagación de un tamaño lo suficientemente grande de la grieta (que incrementa a en la ecuación 3.14, p. 198) o porque el valor del esfuerzo nominal creció lo suficiente (lo que incrementa σ_{nom} en la ecuación 3.14). El primero es el caso común de carga dinámica, en tanto que el último es más frecuente en carga estática. El resultado es el mismo: falla repentina y catastrófica, sin advertencia.

El examen minucioso a simple vista de las piezas que fallan por cargas de fatiga muestra un patrón típico, como se observa en la figura 4-4. Hay una región que aparece pulida, emanada del sitio original de la microgrieta, así como otra región separada que aparece áspera y sin pulir, parecida a una fractura frágil. La región pulida era la grieta y con frecuencia muestra *marcas de playa*, llamadas así porque parecen ondas dejadas en la arena por la retirada de las olas. Las marcas de playa (no confundir con las estrías de la figura 4-3, las cuales son menores e imperceptibles para el simple ojo humano) se deben

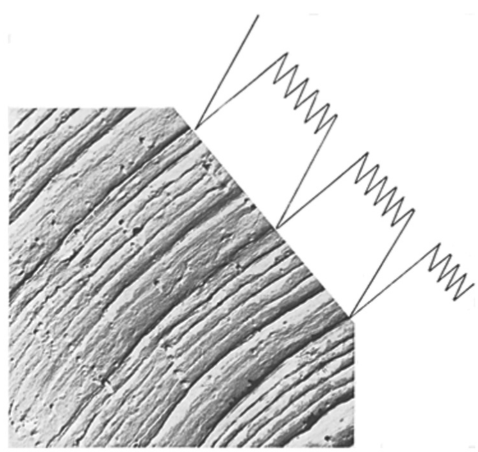
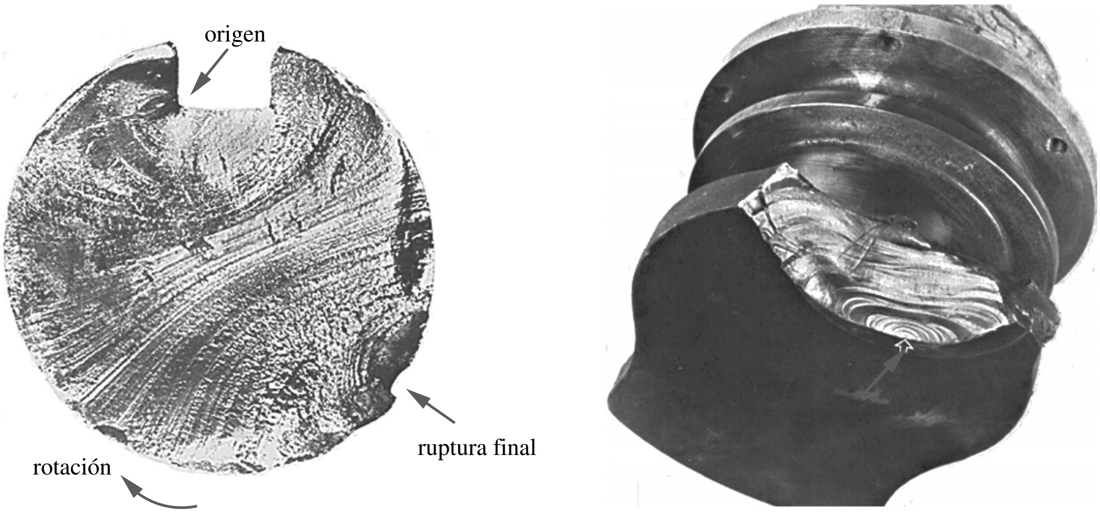


FIGURA 4-3

Estrías por fatiga sobre la superficie agrietada de una aleación de aluminio. El espaciado entre las estrías corresponde al patrón de carga cíclica (de la fig. 1.5, p. 10, D. Broek, en *The Practical Use of Fracture Mechanics*, Kluwer Publishers, Dordrecht, 1988)



(*a*) (*b*)

FIGURA 4-4

Dos piezas que fallaron a la fatiga. Observe las marcas de playa: (*a*) El cuñero en el eje de acero 1040 falló por flexión giratoria. La grieta inició en el cuñero. (*b*) Cigüeñal de un motor diesel con falla combinada por flexión y torsión. La grieta en la flecha (Fuente: D.J. Wulpi, *Understanding How Components Fail*, Am. Soc. for Metals: Metals Park, Ohio, 1990, fig. 22, p. 149, y fig. 25, p. 152)

al inicio y final del crecimiento de la grieta, y rodean el sitio del origen de la grieta, que suele ser una muesca o un incrementador de esfuerzos interno. Algunas veces, si hubo mucha fricción en las superficies agrietadas, las marcas de playa serán oscuras. La zona de falla frágil es la porción que falló de repente, cuando la grieta alcanzó su tamaño límite. La figura 4-5 muestra los diagramas de superficies de falla para varias geometrías de piezas, cargadas de diferentes modos y a diferentes niveles de esfuerzo. Las marcas de playa se observan en las zonas de grietas. La zona de fractura frágil puede ser un pequeño remanente de la sección transversal original.

4.2 MODELOS DE FALLA POR FATIGA

Hoy se utilizan tres modelos de falla por fatiga, cada uno de los cuales tiene un lugar y un propósito. Ellos son: el procedimiento de *esfuerzo-vida* (*S-N*), el procedimiento *deformación-vida* (ε-*N*) y el procedimiento de la *mecánica de fractura lineal elástica* (LEFM). Se estudiará primero su aplicación, así como sus ventajas y desventajas, luego se compararán de un modo general para después analizar algunas de ellas con mayor detalle.

Regímenes de fatiga

Con base en el número de ciclos de esfuerzos o deformaciones, a los cuales se espera que se someta la pieza durante su tiempo de vida, se clasifica como régimen de **fatiga de ciclo bajo (LCF)** o régimen de **fatiga de ciclo alto (HCF)**. No hay una línea divisoria clara entre ambos regímenes, pero varios investigadores sugieren divisiones ligeramente diferentes. Dowling[6] define el régimen de ciclo alto como aquel de 10^2 a 10^4 ciclos de variación esfuerzo/deformación, con cambio en el número de ciclos de acuerdo con el tipo de material. Juvinall[7] y Shigley[8] sugieren 10^3 ciclos y Madayag[9] lo define

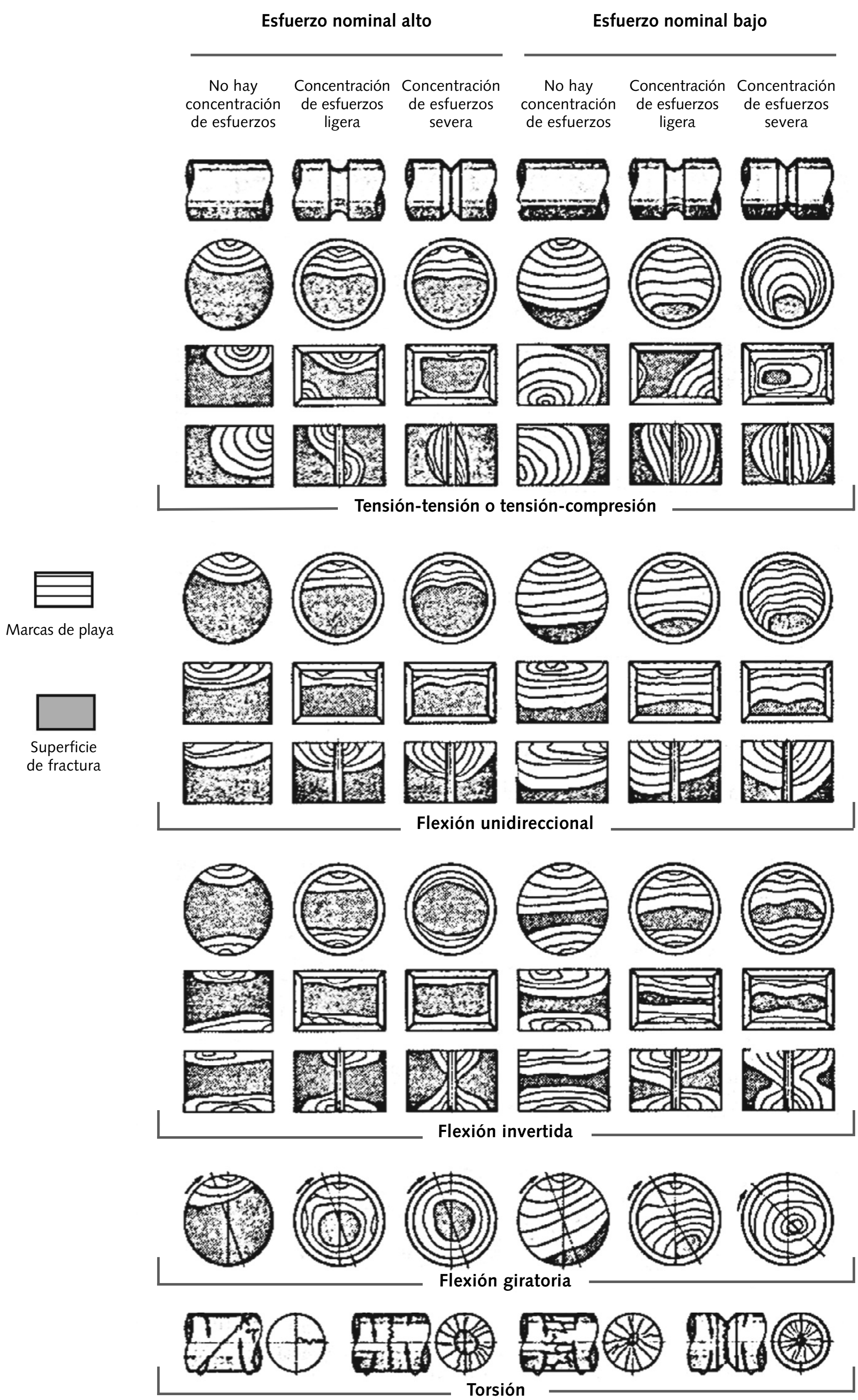


FIGURA 4-5

Representación esquemática de las superficies de fatiga por fractura de varias secciones transversales lisas y con muesca, bajo condiciones de carga y niveles de esfuerzo diversos (del *Metals Handbook*, Am. Soc. for Metals, Metals Park, Ohio, vol. 10, 8a. ed., 1975, p. 102, con autorización)

de 10^3 a 10^4 ciclos como límite. En este texto se supondrá que $N = 10^3$ ciclos es una aproximación razonable para dividir el LCF del HCF.

El procedimiento de esfuerzo-vida

Éste es el más antiguo de los tres modelos y es el que se utiliza con más frecuencia en aplicaciones de fatiga de ciclo alto (HCF), donde se espera que el ensamble dure por más de aproximadamente 10^3 ciclos de esfuerzo. El modelo funciona mejor cuando las amplitudes de la carga son predecibles y consistentes durante la vida de la pieza. Se trata de un **modelo con base en el esfuerzo**, el cual busca determinar una **resistencia de fatiga** y/o un **límite de resistencia** a la fatiga para el material, de modo que los esfuerzos cíclicos se mantengan por debajo de ese nivel y se elimine la falla para el número de ciclos requerido. Luego se diseña la pieza con base en la resistencia a la fatiga del material (o el límite de resistencia a la fatiga) y un factor de seguridad. En efecto, dicho procedimiento intenta mantener tan bajos los esfuerzos locales en las muescas que *nunca comience* la fase inicial de la grieta. La premisa (y meta del diseño) es que los esfuerzos y las deformaciones dondequiera que se encuentren permanezcan en la región elástica y que no ocurra la fluencia local que inicie la grieta.

El enfoque es muy fácil de implementar y hay grandes cantidades de datos relevantes sobre resistencia, debido a su largo tiempo de uso. Sin embargo, es el más empírico y el menos preciso de los tres modelos, en términos de la definición de los estados reales locales de esfuerzo/deformación en la pieza, sobre todo en los casos de vida finita a la fatiga de ciclo bajo, donde se espera que el número total de ciclos sea menor de 10^3 aproximadamente y los esfuerzos sean tan altos como para causar fluencia local. Por otro lado, en ciertos materiales, el enfoque esfuerzo-vida permite el diseño de piezas de **vida infinita** bajo carga cíclica.

El procedimiento deformación-vida

Como el inicio de una grieta implica fluencia, el enfoque con base en el esfuerzo no es capaz de modelar adecuadamente esta fase del proceso. El **modelo basado en la deformación** brinda una imagen razonablemente precisa de la **fase de inicio de la grieta**. También toma en cuenta el daño acumulativo debido a las variaciones en el ciclo de carga durante la vida de la pieza, como las sobrecargas que pueden introducir esfuerzos residuales favorables o desfavorables en la zona de falla. Las combinaciones de cargas de fatiga y temperaturas altas se manejan mejor con este método, ya que se pueden incluir los efectos de arrastre. Este método se aplica con mayor frecuencia en problemas de **LCF**, de **vida finita**, donde los esfuerzos cíclicos son lo suficientemente altos como para causar fluencia local. Es el más complicado de los tres modelos y requiere una solución asistida por computadora. Todavía se están desarrollando datos de prueba sobre el comportamiento de la deformación cíclica de varios materiales para ingeniería.

El procedimiento de LEFM

La teoría de mecánica de la fractura ofrece el mejor modelo de la **fase de propagación de la grieta** del proceso. Este método se aplica a problemas de **LCF**, **de vida finita**, donde se sabe que los esfuerzos cíclicos son lo suficientemente altos como para causar la formación de grietas, y es más útil en la predicción de la vida restante de piezas agrietadas en servicio. Se utiliza en forma frecuente junto con pruebas no destructivas (NDT) en un programa periódico de inspección en servicio, sobre todo en la industria aeronáutica/aeroespacial. Su aplicación es bastante clara y concisa, pero depende de la exactitud de la expresión del factor geométrico de la intensidad del esfuerzo β (ecuación 3.14*b*, p. 198), así como del tamaño estimado a de la grieta inicial requerido para el cálculo. En ausencia de una grieta detectable, el procedimiento para iniciar el cálculo consiste en suponer que ya existe una grieta más pequeña que la menor grieta detectable. Esto da resultados más precisos cuando ya existe una grieta detectable y mesurable.

4.3 CONSIDERACIONES DEL DISEÑO DE MÁQUINAS

La selección de modelos de fatiga-falla, para efectos del diseño de máquinas, depende del tipo de maquinaria que se diseña y del uso que se le dará. El modelo de esfuerzo-vida (S/N) se aplica con frecuencia a la clase más grande de **maquinaria giratoria** (estacionaria o móvil), porque las vidas de servicio requeridas se encuentran generalmente en el intervalo del HCF. Por ejemplo, considere el número de ciclos de carga (revoluciones) que se requieren de un cigüeñal de un motor para automóvil durante su vida útil. Suponga que se desea una vida de 100 000 millas sin que falle el cigüeñal. El radio de rodamiento promedio de un neumático de automóvil es aproximadamente de 1 ft y, por lo tanto, su circunferencia es de 6.28 ft. El eje impulsor de las ruedas girará entonces 5 280/6.28 = 841 rev/mi, o bien, 84E6 rev/100 000 millas. Una razón final típica del diferencial para un auto de pasajeros es de aproximadamente 3:1, lo cual significa que el eje de salida de la transmisión gira a 3x la rapidez del eje impulsor. Si se supone que la mayoría de su vida, el auto la pasa sobre el engrane superior (1:1), entonces la rapidez del motor también promedia 3x la rapidez del eje impulsor. Esto significa que el cigüeñal y la mayoría de otras componentes giratorias y oscilatorias del motor alcanzarán alrededor de 2.5E8 ciclos en 100 000 millas (el tren de válvulas hará la mitad de esa cantidad), lo cual se encuentra claramente en el régimen de HCF, sin tomar en cuenta el funcionamiento del tiempo de marcha en vacío. Las cargas cíclicas también son razonablemente predecibles y consistentes, de modo que el enfoque de *esfuerzo-vida* resulta adecuado aquí.

Como otro ejemplo, considere una máquina automática de producción típica como las que se utilizan en la industria estadounidense. Quizás esté fabricando pilas o pañales desechables, o bien, llenando latas con una bebida gaseosa. Suponga que la rapidez de su eje de transmisión principal es de 100 rpm (un estimado conservador). Suponga además un solo turno de operación (también conservador, puesto que muchas máquinas trabajan dos o tres turnos). ¿Cuántos ciclos (revoluciones) alcanzarán el eje de transmisión y todos los engranes, levas, etcétera, impulsados por él en un año? En un día de ocho horas gira 100(60)(8) = 480 000 rev/turno-día. En 260 días de trabajo al año, girará 125E6 rev/turno-año. De nueva cuenta, se está en el régimen de HCF, mientras las cargas son usualmente muy predecibles y consistentes en amplitud.

Una clase de maquinaria que típicamente opera en la fatiga de bajo ciclo (LCF) es la de transporte (servicio). El bastidor de una aeronave, el casco de una embarcación y el chasis de un vehículo terrestre alcanzan una historia de tiempo de carga que es muy variable debido a las tormentas, ráfagas/olas, aterrizajes/atracamientos difíciles (para aviones/barcos) y sobrecargas, baches (para vehículos terrestres), etcétera. El número total de ciclos de carga alcanzados en su vida también es menos predecible, por las circunstancias de su uso. Aun cuando el número de ciclos de esfuerzos de baja magnitud sea potencialmente grande (y esté en el régimen de HCF) durante su tiempo de vida potencial, siempre está presente el riesgo de cargas más altas que las de diseño que causan fluencia local. Una serie de ciclos de esfuerzos altos, aun si su número es menor de 10^3, puede causar el crecimiento significativo de la grieta debido a la fluencia local.

Los fabricantes de este tipo de equipo generan una gran cantidad de datos de carga-tiempo o de deformación-tiempo, al colocar instrumentos en los vehículos reales, mientras los operan en servicio regular o bajo condiciones de prueba controladas. (Véase más adelante la figura 4-7 para ejemplos.) Las simulaciones por computadora también se desarrollan y refinan comparando los datos experimentales. Las historias simuladas y experimentales de carga-tiempo se usan, por lo general, junto con los modelos deformación-vida o LEFM (o ambos), con la finalidad de predecir las fallas de manera más exacta y así mejorar el diseño. Otro ejemplo del uso de los modelos de ε-N y LEFM es el análisis y diseño de los álabes del rotor de una turbina de gas, los cuales operan bajo esfuerzos elevados a altas temperaturas, y pasan a través de ciclos térmicos de LCF cuando arrancan y cuando se apagan.

En este texto el enfoque estará en el **modelo esfuerzo-vida** y también se analizará la aplicación del **modelo** de **LEFM**, en problemas de diseño de máquinas cargadas cícli-

camente. El modelo **deformación-vida** es mejor para describir las condiciones de inicio de la grieta y ofrece el modelo teórico más completo, aunque es menos adecuado en el diseño de piezas para el HCF. Una descripción completa del **modelo deformación-vida** requeriría más espacio del que hay disponible en este libro de introducción al diseño. Se remite al lector a las referencias citadas en la bibliografía de este capítulo, las cuales incluyen exposiciones completas del enfoque deformación-vida (así como de los otros dos procedimientos). El enfoque de la mecánica de fractura permite la determinación del remanente de vida de piezas agrietadas en servicio. El modelo esfuerzo-vida es la elección más apropiada para la mayoría de los problemas de diseño de maquinaria giratoria, debido a la necesidad de ciclos de vida grandes (o vida infinita) en la mayoría de los casos.

4.4 CARGAS POR FATIGA

Las cargas que varían con el tiempo pueden causar fallas por fatiga. El tipo de carga varía sustancialmente de una aplicación a otra. En máquinas rotatorias, las cargas tienden a ser consistentes en amplitud con el transcurso del tiempo y a repetirse con cierta frecuencia. En equipo de servicio (vehículos de todos los tipos), las cargas suelen ser totalmente variables en amplitud y frecuencia durante el tiempo e incluso pueden ser de naturaleza aleatoria. La forma de la onda de la función carga-tiempo no parece surtir ningún efecto significativo sobre la falla por fatiga en ausencia de corrosión, de modo que por lo general se describe la función esquemáticamente como una onda senoidal o de diente de sierra. Asimismo, la presencia o ausencia de periodos de reposo en la historia de la carga no son significativas, siempre que el ambiente no sea corrosivo. (La corrosión provoca el crecimiento continuo de la grieta, incluso en ausencia de cualesquiera fluctuaciones en la carga.) La onda esfuerzo-tiempo o deformación-tiempo tendrá la misma forma y frecuencia generales que la onda carga-tiempo. Los factores significativos son la amplitud y el valor promedio de la onda esfuerzo-tiempo (o deformación-tiempo), así como el número total de ciclos esfuerzo/deformación que haya tenido la pieza.

Carga en máquinas rotatorias

Las funciones comunes de esfuerzo-tiempo, experimentadas en maquinaria rotatoria, se modelan como se indica en la figura 4-6, la cual las muestra de manera esquemática como ondas senoidales. La figura 4-6*a* muestra el caso del **ciclo invertido** donde *el valor medio es cero*. La figura 4-6*b* presenta el caso de un **esfuerzo repetido** donde la curva va desde *cero hasta un máximo con un valor medio igual a la componente alternativa*, mientras la figura 4-6*c* ilustra una versión del caso más general (llamado **esfuerzo fluctuante**) con *todos los valores de las componentes diferentes de cero*. (Observe que

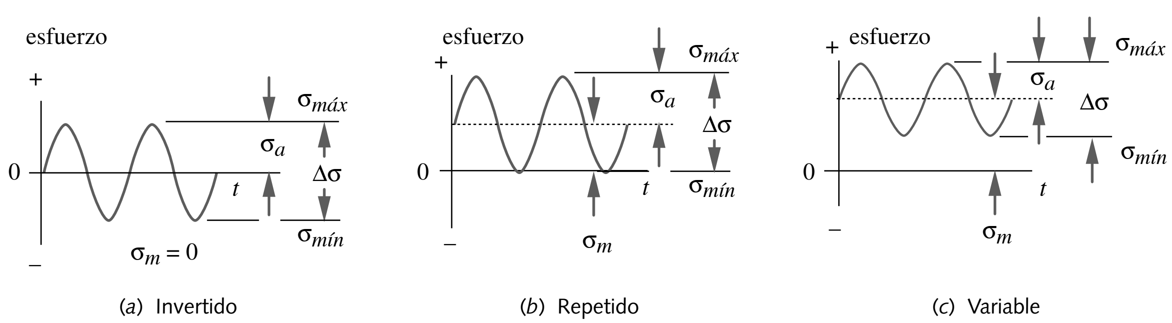


FIGURA 4-6

Valores alternativo, medio y del intervalo del ciclo de esfuerzos invertido, repetido y fluctuante

cualquier porción de la onda podría estar también en régimen de esfuerzo compresivo.) Cualquiera de estas ondas se puede caracterizar por dos parámetros, la media y las componentes alternativas, sus valores máximos y mínimos, o bien, razones de tales valores.

El **intervalo de esfuerzo** $\Delta\sigma$ se define como

$$\Delta\sigma = \sigma_{máx} - \sigma_{mín} \tag{4.1a}$$

La **componente alternativa** σ_a se obtiene de

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} \tag{4.1b}$$

en tanto que la **componente media** σ_m es

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{máx} + \sigma_{mín}}{2} \tag{4.1c}$$

Se pueden formar dos razones:

$$R = \frac{\sigma_{mín}}{\sigma_{máx}} \qquad\qquad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \tag{4.1d}$$

donde R es la **razón del esfuerzo** y A es la **razón de amplitud**.

Cuando el esfuerzo es de ciclo invertido (figura 4-6*a*), $R = -1$ y $A = \infty$. Cuando se repite el esfuerzo (figura 4-6*b*), $R = 0$ y $A = 1$. Cuando los esfuerzos máximo y mínimo tienen el mismo signo, como en la figura 4-6*c*, tanto R como A son positivos y $0 \le R \le 1$. Estos patrones de carga pueden resultar de esfuerzos de flexión, axiales, de torsión o de una combinación de éstos. Se verá que la presencia de una componente de esfuerzo medio llega a tener un efecto significativo sobre la vida de fatiga.

Carga de equipo en servicio

El tipo de la función carga-tiempo del equipo en servicio no se define con facilidad en una máquina giratoria. Los mejores datos resultan de las mediciones reales efectuadas sobre el equipo en servicio o de su operación en condiciones de servicio simuladas. La industria automotriz somete a sus prototipos a pruebas de pista que simulan varias superficies y curvas de rodamiento. Las pruebas de los vehículos son profusamente instrumentadas con acelerómetros, transductores de fuerza, medidores de deformación; mientras que otros instrumentos alimentan grandes cantidades de datos a las computadoras del vehículo o los transmiten a computadoras estacionarias, donde se digitalizan y almacenan para un análisis posterior. La industria de la aviación también realiza las pruebas de aeronaves y registra las fuerzas en vuelo, la aceleración y los datos de deformación. Lo mismo se hace con embarcaciones y plataformas petroleras en ultramar, etcétera.

Algunos ejemplos de estas ondas de esfuerzo-tiempo en servicio se muestran en la figura 4-7, la cual describe el caso general de carga simulada en (*a*), el patrón típico de un barco o una plataforma en alta mar en (*b*), y el patrón típico de un avión comercial en (*c*). Tales patrones son semialeatorios por naturaleza, ya que los eventos no se repiten con una frecuencia específica. Datos como éstos se usan en programas de simulación por computadora que calculan los daños acumulados por fatiga usando un modelo basado en la deformación, en la mecánica de la fractura o una combinación de ambos. El modelo esfuerzo-vida no maneja tan efectivamente este tipo de historia de carga.

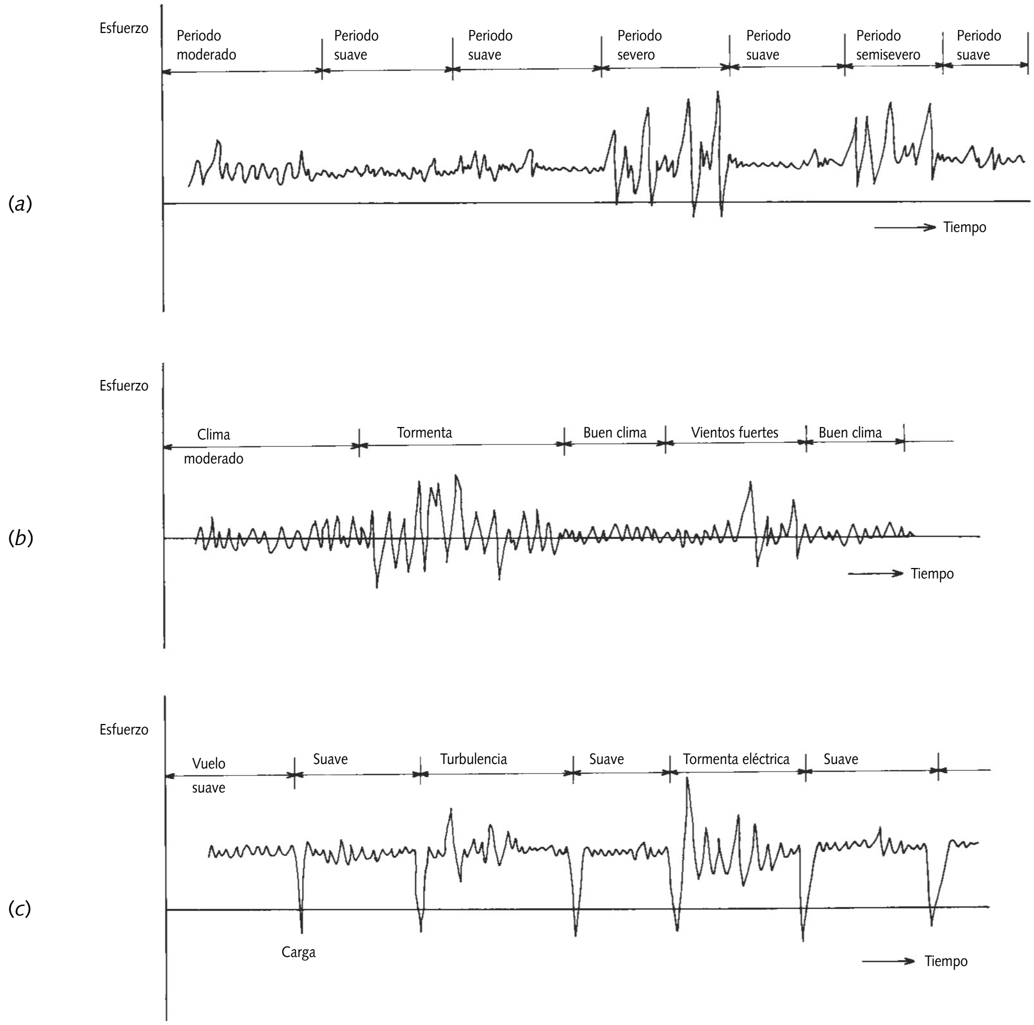


FIGURA 4-7

Carga semialeatoria en diferentes periodos (viajes, meses, vuelos) para (*a*) un caso general, (*b*) un barco o estructura en alta mar, (*c*) un avión comercial (de la fig. 6.10, p. 186, en *The Practical Use of Fracture Mechanics*, de D. Broek, Kluwer Publishers, Dordrecht, 1988)

4.5 CRITERIO DE FALLA PARA MEDICIÓN DE LA FATIGA

Actualmente hay varias técnicas de prueba para medir la respuesta de materiales a esfuerzos y deformaciones que varían con el tiempo. El enfoque más antiguo es el de Wohler, quien aplicó una carga de flexión a una viga giratoria en voladizo, con la finalidad de lograr variaciones del esfuerzo en el tiempo. Posteriormente, R. R. Moore adaptó dicha técnica para una viga giratoria simplemente soportada con ciclos de flexión pura invertida. En los últimos 40 años, la llegada de máquinas de prueba con servo conductores hidráulicos ha permitido mucha mayor flexibilidad en los patrones de esfuerzo o deformación que se pueden aplicar a una muestra de prueba. Los datos de deformación o de mecánica de fractura, así como los datos de esfuerzo, se obtienen gracias a tal método. La mayoría de la información existente de resistencia a la fatiga es de una viga giratoria en ciclo de flexión invertida, con menos información sobre cargas axiales y todavía menos información sobre la torsión, si bien esto va cambiando conforme se generan más datos de fatiga axial. En algunos casos, no hay información acerca de resistencia a la fatiga para el material deseado; por consiguiente, es necesario tener un medio para

estimar un valor a partir de los datos de resistencia estática disponibles. Esto se analizará en la siguiente sección.

Ciclo de esfuerzo invertido

Este caso de carga se obtiene con pruebas de flexión giratoria, fatiga axial, flexión en voladizo, o fatiga por torsión, dependiendo del tipo de carga deseado. La prueba de flexión giratoria, con base en el esfuerzo, es una prueba de HCF de ciclo invertido que intenta calcular la resistencia a la fatiga del material bajo tales condiciones. La prueba de fatiga axial se utiliza para generar datos similares de ciclo invertido de un material determinado en esa prueba de viga giratoria, y también sirve para pruebas de deformación controlada. La ventaja principal de la prueba axial es su capacidad para aplicar cualquier combinación de esfuerzos medios y alternativos. La prueba de flexión en voladizo somete a una viga no giratoria a oscilaciones por esfuerzos de flexión. Esta prueba puede dar como resultado esfuerzos medios y también ciclos de esfuerzo invertido. La prueba de torsión gira alternativamente una barra en direcciones opuestas, aplicando esfuerzos cortantes puros.

PRUEBA CON UNA VIGA GIRATORIA El grueso de los datos existentes de resistencia a la fatiga de ciclo invertido vienen de la prueba de viga giratoria de R. R. Moore, en la cual una muestra muy pulida de aproximadamente 3 in de diámetro se monta en un dispositivo que permite se aplique un momento de flexión pura de magnitud constante, mientras la muestra gira a 1 725 rpm. Esto crea un ciclo de esfuerzo de flexión invertido en cualquier punto de la circunferencia de la muestra, como se expone en la figura 4-6*a* (p. 243). La muestra llega a un nivel de esfuerzo específico donde falla y, después, se registra el número de ciclos y el nivel de esfuerzo al que falla. Toma mediodía, aproximadamente, alcanzar 10^6 ciclos y cerca de 40 días alcanzar 10^8 ciclos sobre una muestra. La prueba se repite con diversas muestras del mismo material, cargadas a diferentes niveles de esfuerzos. Los datos obtenidos se grafican como resistencias a la falla normalizadas, S_f/S_{ut} contra el número de ciclos, N (usualmente sobre coordenadas logaritmo-logaritmo), para obtener un diagrama *S-N*.

La figura 4-8 ilustra los resultados de varias pruebas de viga giratoria sobre aceros forjados de hasta 200 kpsi, aproximadamente, de resistencia a la tensión. Los datos indican que las muestras llegan a la falla en los niveles de esfuerzos invertidos más altos después de unos cuantos ciclos. A menores niveles de esfuerzo, algunos no fallan en absoluto (aquéllos identificados como *sin rotura* en el círculo), antes de que sus pruebas se detengan en algún número determinado de ciclos (10^7 aquí). Observe la gran dispersión de los datos, lo cual es típico de las pruebas de resistencia a la fatiga. Las diferencias entre las múltiples muestras de material, requerido para generar la curva completa pueden ser responsables de la dispersión. Algunas muestras llegan a tener más o menos defectos que sirven como incrementadores de esfuerzos localizados. (Todas las muestras que carecen de muescas y tienen un pulido fino en su acabado, pararon el objetivo de minimizar la posibilidad de defectos superficiales que inicien una grieta.) Las líneas continuas se trazaron como soporte de los datos.

LÍMITE DE RESISTENCIA A LA FATIGA Observe que la resistencia a la fatiga S cae constante y linealmente (en las coordenadas log-log), como una función de N, hasta que alcanza una articulación de rodilla entre aproximadamente 10^6 a 10^7 ciclos. Esta articulación define el **límite de resistencia a la fatiga** $S_{e'}$ del material, el cual es un nivel de esfuerzo por abajo del cual se puede ciclar infinitamente sin falla de por medio. En el límite inferior de la banda de dispersión, más allá de la articulación, se define un límite de resistencia a la fatiga aproximado

$$\text{para aceros:} \qquad S_{e'} \cong 0.5\, S_{ut} \qquad S_{ut} < 200 \text{ ksi} \tag{4.2a}$$

No todos los materiales presentan esta articulación. "*Muchas aleaciones de aceros al carbono y de baja resistencia, algunos aceros inoxidables, hierros, aleaciones de molibdeno, aleaciones de titanio y algunos polímeros*"[10] la tienen. Otros materiales

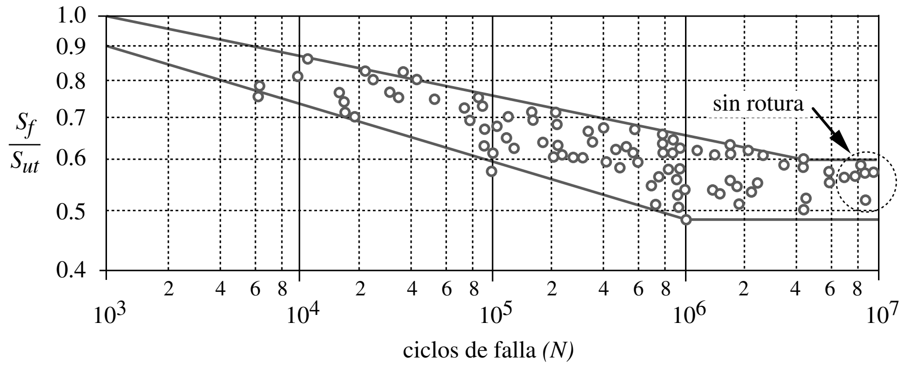


FIGURA 4-8

Gráfica log-log de las curvas compuestas *S-N* para aceros forjados de S_{ut} <200 kpsi (de la fig. 11.7, p. 210, de R. C. Juvinall, *Stress*, *Strain*, *and Strength*, McGraw-Hill, Nueva York, 1967, con autorización)

como "*aluminio, magnesio, cobre, aleaciones de níquel y algunos aceros inoxidables, así como aleaciones de aceros al carbono y de alta resistencia*" [10] muestran curvas *S-N* que continúan cayendo conforme aumenta *N*, aun cuando la pendiente se vuelve más pequeña más allá de aproximadamente 10^7 ciclos. Para aplicaciones que requieren $< 10^6$ ciclos de operación, la **resistencia a la fatiga** $S_{f'}$ (a veces llamada también **resistencia de durabilidad a la fatiga**) se define en cualquier *N* a partir de estos datos. El término **límite de resistencia a la fatiga** *se utiliza para representar la resistencia a la fatiga de vida infinita sólo para aquellos materiales que la tienen*.

Los datos de la figura 4-8 son para aceros de $S_{ut} < 200$ kpsi. Los aceros con mayor resistencia a la tensión no presentan la relación mostrada en la ecuación 4.2*a*. La figura 4-9 muestra el límite de resistencia a la fatiga $S_{e'}$ graficado como una función de S_{ut}. Existe una banda de gran dispersión; no obstante, el comportamiento promedio es una línea de pendiente 0.5 hasta los 200 kpsi. Más allá de ese nivel de resistencia a la fatiga máxima, disminuye la resistencia límite a la fatiga de los aceros. El enfoque usual consiste en suponer que la resistencia límite a la fatiga de los aceros nunca excede el 50% de 200 kpsi.

$$\text{para aceros:} \qquad S_{e'} \cong 100 \text{ ksi} \qquad S_{ut} \quad 200 \text{ ksi} \tag{4.2b}$$

La figura 4-9 ilustra también bandas de dispersión de límites de fatiga para muestras con muescas severas y para muestras en ambientes corrosivos. Estos dos factores tienen un efecto severo sobre la resistencia a la fatiga de cualquier material. El límite de resistencia a la fatiga existe sólo en ausencia de corrosión. Los materiales en ambientes corrosivos tienen curvas *S-N* que continúan cayendo conforme *N* se incrementa. En breve, consideraremos estos factores al determinar las resistencias a la fatiga corregidas de los materiales.

La figura 4-10 presenta los resultados de la banda de dispersión de las pruebas de una viga giratoria en aleaciones de aluminio para varios tipos, incluyendo aleaciones forjadas (con $S_{ut} < 48$ kpsi), piezas fundidas a presión y muestras vaciadas en moldes de arena. Todas éstas están pulidas y no tienen muescas. Observe la falta de una articulación de rodilla distintiva, aunque la pendiente se vuelve más pequeña en aproximadamente 10^7 ciclos. Los aluminios no tienen un límite de resistencia; por lo tanto, su **resistencia a la fatiga** $S_{f'}$ se toma usualmente como el esfuerzo de falla promedio en $N = 5E8$ ciclos o algún otro valor de *N* (el cual debe estar definido en los datos).

La figura 4-11 ilustra la tendencia de las resistencias a la fatiga (en $N = 5E8$) para varias aleaciones de aluminio de resistencias variables a la tensión estática. La resistencia a la fatiga le sigue la pista a las resistencias a la tensión estática a razón de

$$\text{para aluminios:} \qquad S_{f'_{@5x10^8}} \cong 0.4\, S_{ut} \qquad S_{ut} < 48 \text{ kpsi} \tag{4.2c}$$

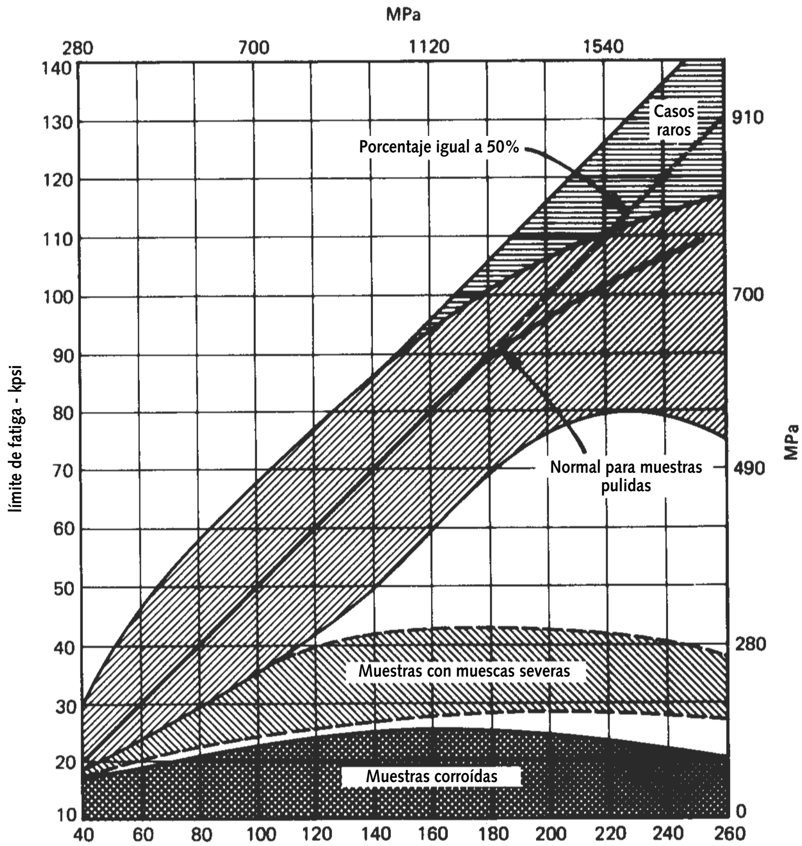


FIGURA 4-9

Relación entre el límite de resistencia a la fatiga y la resistencia última para muestras de acero (de *Steel and Its Heat Treatment*, de D. K. Bullens, John Wiley & Sons, Nueva York, 1948, con autorización del editor)

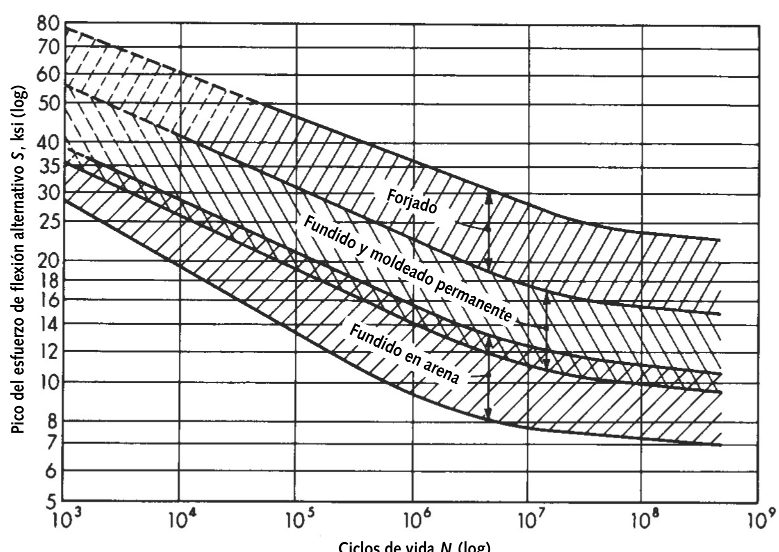


FIGURA 4-10

Bandas *S-N* para aleaciones de aluminio representativas, excluyendo las aleaciones forjadas con S_{ut} 38 kpsi (de la fig. 11.13, p. 216, R. C. Juvinall, *Stress, Strain, and Strength*, McGraw-Hill, Nueva york, 1967, con autorización)

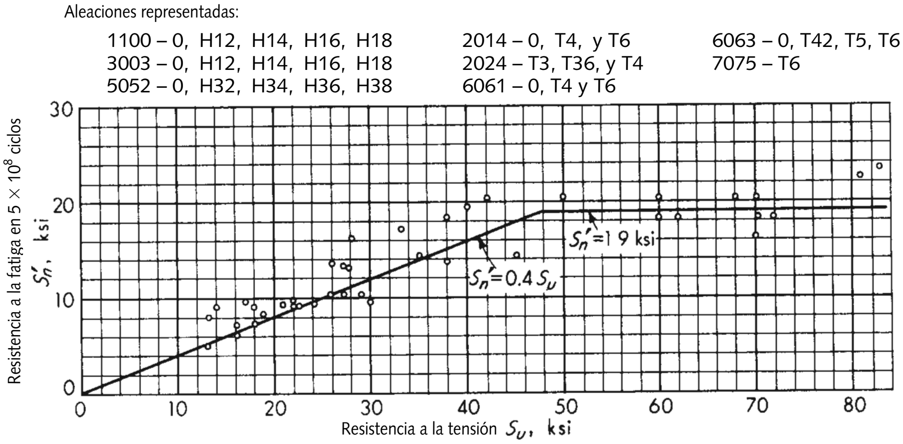


FIGURA 4-11

Resistencia a la fatiga en 5×10^8 ciclos para aleaciones comunes de aluminio forjado (de la fig. 11.12, p. 215, R. C. Juvinall, *Stress, Strain, and Strength*, McGraw-Hill, Nueva York, 1967, con autorización)

hasta una meseta en aproximadamente $S_{f'} = 19$ kpsi, lo cual indica que la aleación de aluminio con $S_{ut} >$ aproximadamente 48 kpsi "llega al tope" en 19 kpsi de resistencia a la fatiga. (La $S_{n'}$ en la figura es la misma que la $S_{f'}$.)

$$\text{para aluminios:} \quad S_{f'_{@5x10^8}} \cong 19 \text{ ksi} \qquad S_{ut} \quad 48 \text{ kpsi} \qquad (4.2d)$$

PRUEBAS DE FATIGA AXIAL El diagrama *S-N* también se puede desarrollar para un material, usando una prueba de fatiga axial, donde una muestra similar a la mostrada en la figura B-1 (repetida aquí) se carga cíclicamente en una máquina de pruebas servohidráulica. La facilidad de tales máquinas para programarse permite cualquier combinación de componentes de esfuerzos medios y alternativos por aplicarse, incluyendo el ciclo de carga invertida ($\sigma_m = 0$). La diferencia principal contra la prueba de la viga giratoria es que la sección transversal completa está uniformemente esforzada en tensión/compresión axial, en vez de tener una distribución lineal de esfuerzos a lo largo de su diámetro, que es máximo en la fibra externa y cero en el centro. Un resultado es que las resistencias a la fatiga mostradas en las pruebas axiales son usualmente menores que las que se obtienen en la prueba de la viga giratoria. Se considera que esto se debe a la probabilidad más alta de hallar una microgrieta en el campo mucho más grande de esfuerzos altos en la muestra axial, que en las regiones exteriores de menor volumen muy esforzadas en la muestra giratoria. El hecho de que resulta difícil crear cargas axiales exactas sin excentricidad también puede ser un factor para obtener menores valores de resistencias, ya que las cargas excéntricas superponen momentos de flexión sobre las cargas axiales.

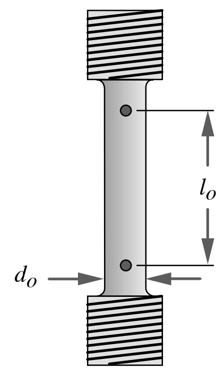


FIGURA B-1 Repetida

Muestra de prueba a la tensión

La figura 4-12 muestra dos curvas *S-N* del mismo material (acero C10), generadas por una prueba de ciclo axial invertida (identificada como de *empuje-tirón*) y una prueba de flexión giratoria. Los datos axiales se ven con valores menores que los datos de la viga giratoria. Varios autores informan que la resistencia a la fatiga en ciclos axiales invertidos puede ser de 10%[11] a 30%[12] más baja, en comparación con los datos de la viga giratoria para el mismo material. Si se sabe que hay flexión, además de la carga axial, entonces la reducción podría ser tan grande como del 40%.[11]

La figura 4-13 presenta los datos de un ciclo de carga axial invertida para un acero AISI 4130, graficados en coordenadas log-log. Observe que la pendiente cambia en aproximadamente 10^3 ciclos, lo cual corresponde casi a la transición desde la región de LCF hasta la región de HCF, y al cambio a prácticamente cero de la pendiente en aproximadamente 10^6 ciclos, correspondientes al límite de resistencia para vida infinita. La resistencia a la fatiga es aproximadamente el 80% de la resistencia estática del material

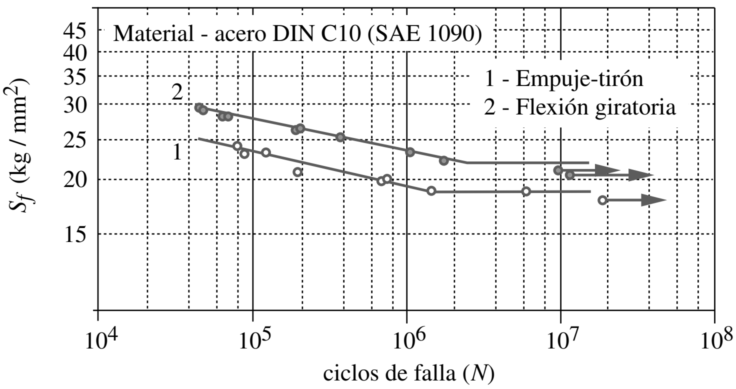


FIGURA 4-12

Comparación de curvas *S-N* de ciclo axial invertido y viga giratoria (de A. Esin, "A Method of Correlating Different Types of Fatigue Curves", *International Journal of Fatigue*, vol. 2, núm. 4, pp. 153-158, 1980)

en aproximadamente 10^3 ciclos y cerca del 40% de su resistencia estática más allá de los 10^6 ciclos, los cuales son un 10% menores que los datos de la viga giratoria de la figura 4-8.

Pruebas de flexión en voladizo Si una viga en voladizo se somete a oscilaciones en su extremo libre usando un mecanismo, se puede lograr cualquier combinación de esfuerzos medios y alternativos, como los que se muestran en la figura 4-6. Dicha prueba no se utiliza con tanta frecuencia como la de la flexión giratoria o la axial, más bien es una alternativa menos costosa que las últimas. En la figura 4-14 se ilustran ejemplos de datos generados por la prueba en voladizo para varios polímeros. Se trata de una gráfica semilogarítmica que muestra aún la presencia de un límite de resistencia a la fatiga para algunos materiales no metálicos.

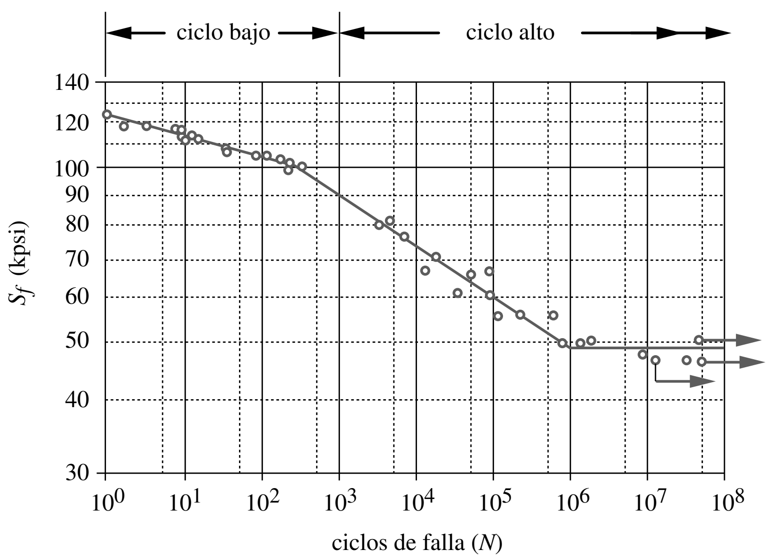


FIGURA 4-13

Curva *S-N* del ciclo axial invertido para un acero AISI 4130, que presenta ruptura en la transición de LCF/HCF, y el límite de resistencia a la fatiga (de la fig 7-3, p. 273, en Singley y Mitchel, *Mechanical Engineering Design*, 4a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1983, con autorización. Datos de NACA Technical Note #3866, dic. de 1966)

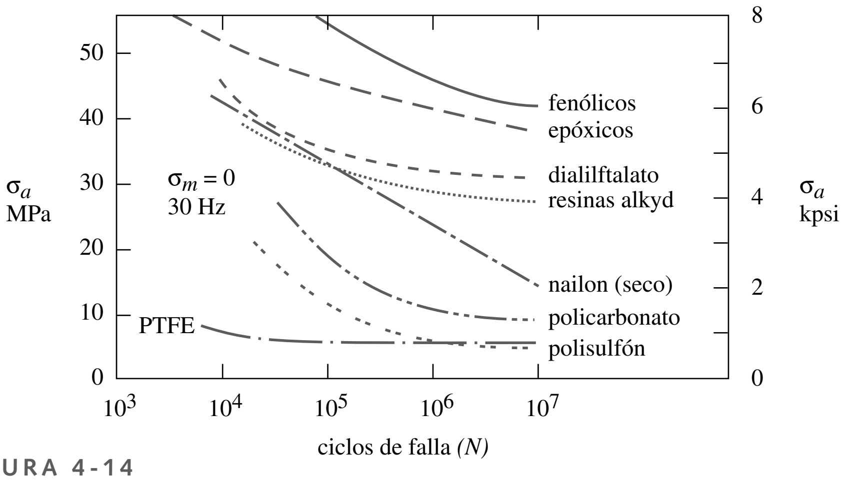


FIGURA 4-14

Curvas de esfuerzo-vida de flexión en voladizo de minerales termoestables rellenos de vidrio (arriba de cuatro líneas) y termoplásticos sin relleno (cuatro líneas de abajo) (de la figura 9-22, p. 362, en N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1996, y con base en los datos de M. N. Riddell, "A Guide to Better Testing of Plastics", *Plastics Engineering*, vol. 30, núm. 4, pp. 71-78, con autorización)

Pruebas de fatiga por torsión Se realizan sobre una muestra cilíndrica sometida a ciclo de carga de torsión invertida. En la figura 4-15, los puntos de falla para pruebas de flexión invertida y de esfuerzos biaxiales de torsión invertida se grafican sobre los ejes σ_1-σ_3. Observe la similitud con la elipse de la energía de distorsión en las figuras 3-3 y 3-8 (pp. 179 y 185), las cuales son para fallas con carga estática. De este modo, en carga cíclica, la relación entre la resistencia a la torsión y la resistencia a la flexión es la misma que en el caso de carga estática. Por consiguiente, se espera que la resistencia de fatiga por torsión (o límite de resistencia a la torsión) para un material dúctil sea de alrededor de 0.577 (58%) de la resistencia de fatiga por flexión (o límite de resistencia a la flexión).

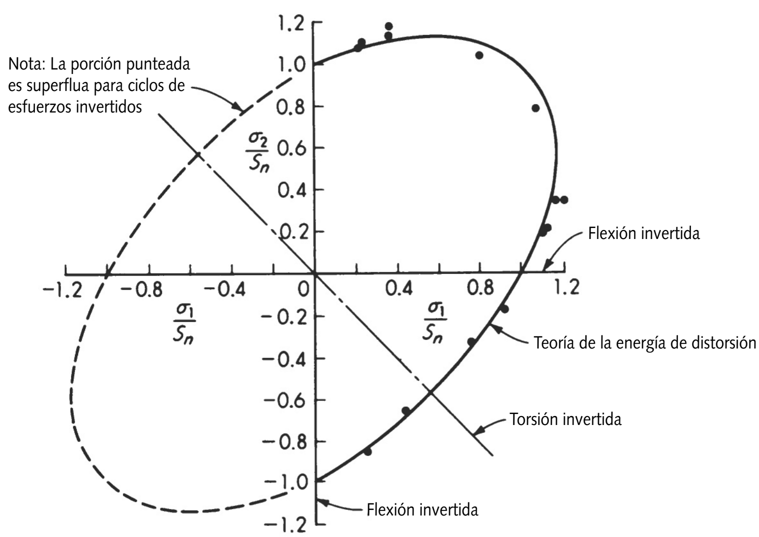


FIGURA 4-15

Fallas de esfuerzos torsionales y biaxiales a flexión combinadas, graficados sobre los ejes σ_1–σ_2 (de *Behavior of Metals under Complex Static and Alternating Stresses*, ed. G. Sines, en *Metal Fatigue*, por G. Sines y J. Waisman, McGraw-Hill, Nueva York, 1959, con datos de W. Savert, Alemania, 1943, para acero recocido suave)

Esfuerzos medio y alternativo combinados

La presencia de una componente de esfuerzo medio tiene un efecto significativo sobre la falla. Cuando la componente media de tensión se suma a la componente alternativa, como se indica en las figuras 4-6*b* y 4-6*c* (p. 243), el material falla a menores esfuerzos alternativos que los ciclos de carga invertida. La figura 4-16 muestra los resultados de pruebas efectuadas con aceros en aproximadamente 10^7 a 10^8 ciclos (*a*) y con aleaciones de aluminio en aproximadamente 5×10^8 ciclos (*b*), para varios niveles de esfuerzos medios y alternativos combinados. Las gráficas fueron normalizadas dividiendo el esfuerzo alternativo σ_a entre la resistencia a la fatiga S_f del material en ciclo de esfuerzo invertido (en el mismo número de ciclos) y dividiendo el esfuerzo medio σ_m entre la resistencia última a la tensión S_{ut} del material. Existe una gran concordancia con la dispersión de

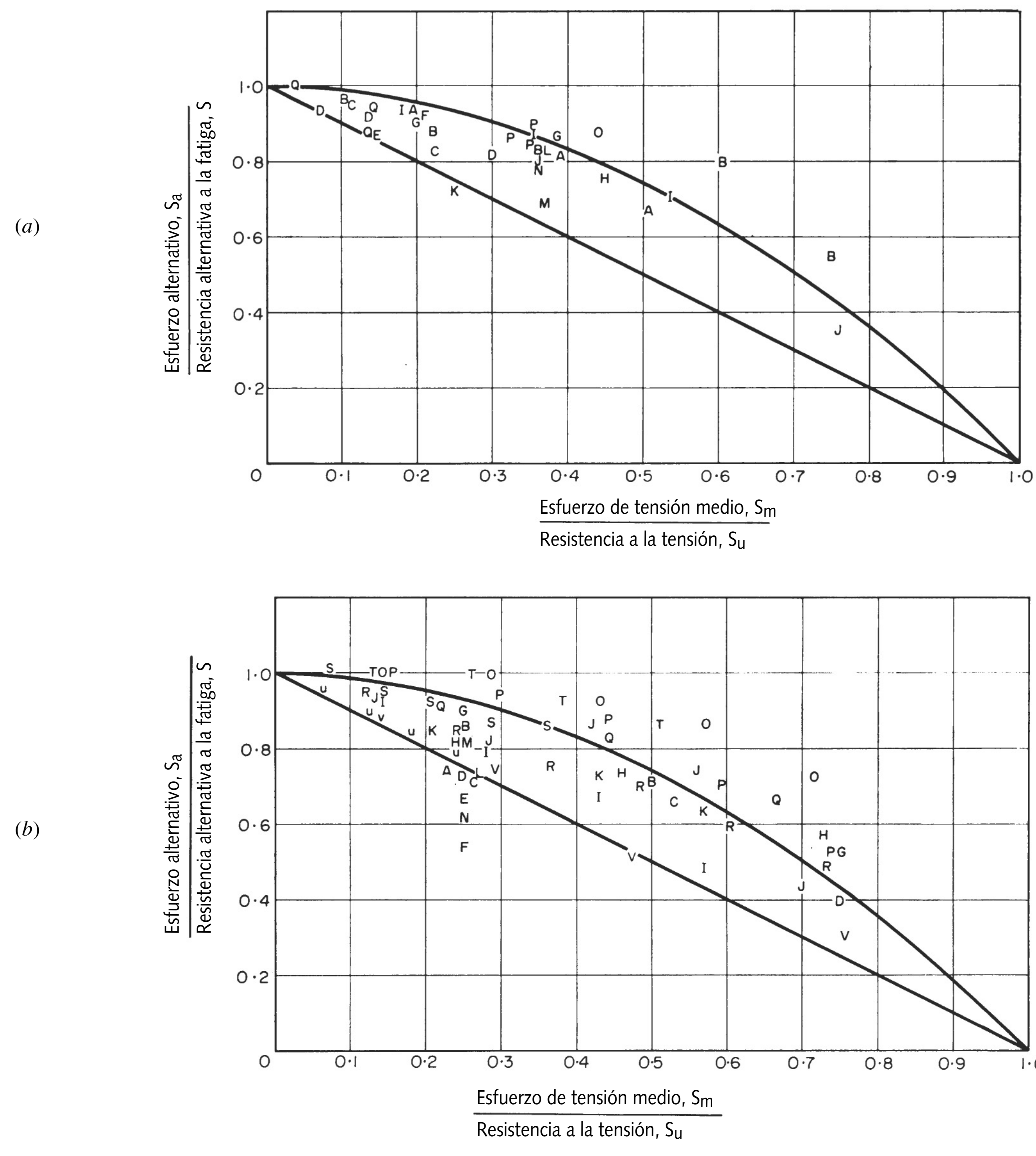


FIGURA 4-16

Efectos del esfuerzo medio sobre la resistencia a la fatiga alternativa en (*a*) aceros de mucha vida con 10^7 a 10^8 ciclos, (*b*) aleaciones de aluminio de mucha vida con 5×10^8 ciclos (de P. G. Forrest, *Fatigue of Metals*, Pergamon Press, Londres, 1962)

datos, pero una parábola con intercepción en el 1 de cada eje, llamada **línea de Gerber**, se puede ajustar a los datos con una precisión razonable. Una línea recta que conecta la resistencia a la fatiga (1 sobre el eje y) con la resistencia última (1 sobre el eje x), llamada la **línea de Goodman**, es un ajuste razonable para la menor envoltura de los datos. La línea de Gerber es una medida del comportamiento promedio de tales parámetros (para materiales dúctiles), en tanto que la línea de Goodman es una medida de su comportamiento mínimo. La línea de Goodman se utiliza con frecuencia como un criterio de diseño, ya que es más segura que la línea de Gerber.

La figura 4-17 muestra los efectos de los esfuerzos medios (que se encuentran entre el régimen de compresión y el régimen de tensión) sobre las fallas cuando se combinan con esfuerzos de tensión alternativos, tanto del aluminio como del acero. Con estos datos se aclara que los esfuerzos de compresión medios tienen un efecto benéfico y los esfuerzos de tensión medios, un efecto nocivo. Este hecho da la oportunidad de mitigar los efectos de los esfuerzos de tensión alternativos introduciendo deliberadamente esfuerzos de compresión medios. Una manera de hacer lo anterior es crear **esfuerzos de compresión residuales** en las regiones del material donde se esperan componentes alternativas grandes. Se investigará cómo se hace en secciones posteriores.

La curva (sobre ejes semilogarítmicos) de la gráfica *S-N*, de la figura 4-18, muestra otra vista del fenómeno para un material hipotético, donde se suman el esfuerzo de compresión medio, no el esfuerzo medio, y el esfuerzo de tensión medio. La resistencia a la fatiga o el límite de resistencia a la fatiga del material se ven efectivamente incrementados por la introducción de un esfuerzo de compresión medio, ya sea aplicado o residual.

Criterio de mecánica de la fractura

La prueba de tenacidad a la fractura estática se describió en la sección 3.3 (p. 195). Para generar datos de resistencia a la fatiga, en términos de la teoría de mecánica de la fractura, se prueban varias muestras del mismo material para que fallen a diversos niveles de esfuerzos cíclicos de rango $\Delta\sigma$. La prueba se hace en una máquina de fatiga axial y el patrón de carga suelen ser esfuerzos de tensión repetidos o variables, como se muestra

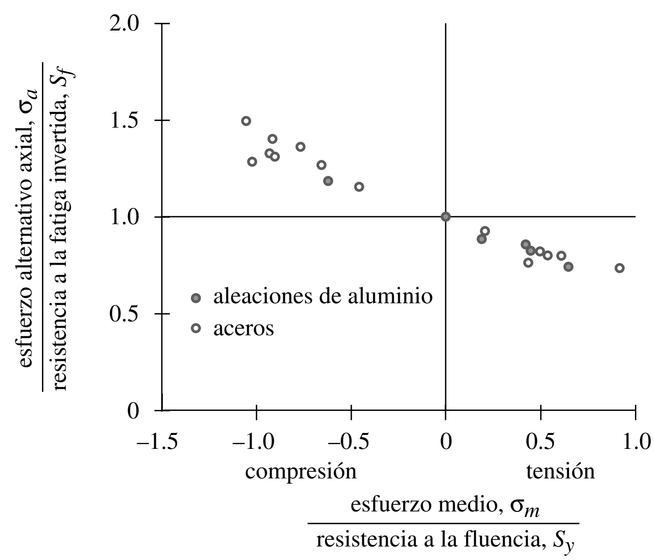


FIGURA 4-17

Efectos de esfuerzos de tensión y compresión medios (de G. Sines, "Failure of Materials Under Combined Repeated Stresses with Superimposed Static Stresses",* NACA Technical Note #3495, 1955)

4

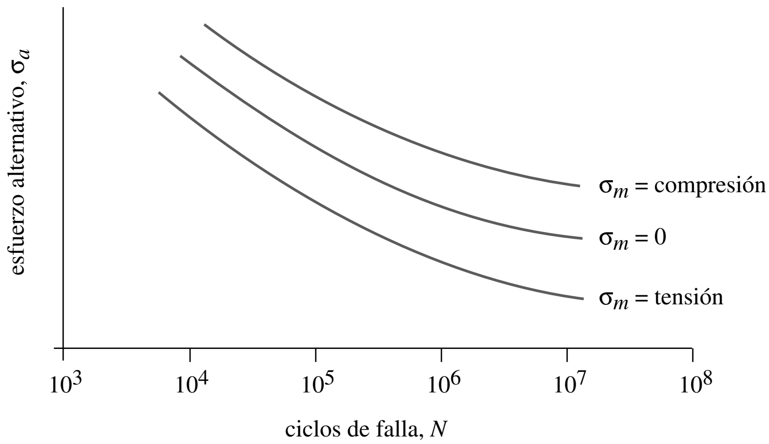


FIGURA 4-18

Efecto del esfuerzo medio sobre la vida en fatiga (de Fuchs y Stephens, *Metal Fatigue in Engineering*, Nueva York, 1980, reimpreso con autorización de John Wiley & Sons, Inc.)

en las figuras 4-6*b* y 4-6*c* (p. 243). Las pruebas de esfuerzo invertido rara vez se hacen con estos datos, ya que los esfuerzos de compresión no favorecen el crecimiento de la grieta. El crecimiento de ésta se mide continuamente durante la prueba. El intervalo de los esfuerzos aplicados es de $\sigma_{mín}$ a $\sigma_{máx}$. **El intervalo del factor de intensidad del esfuerzo** ΔK se calcula para cada condición de esfuerzo fluctuante con

$$\Delta K = K_{máx} - K_{mín} : \qquad \text{si } K_{mín} < 0 \quad \text{entonces} \quad \Delta K = K_{máx} \tag{4.3a}$$

Si se sustituye la ecuación 3.14 adecuada, el resultado será:

$$\begin{aligned} \Delta K &= \beta\sigma_{máx}\sqrt{\pi a} - \beta\sigma_{mín}\sqrt{\pi a} \\ &= \beta\sqrt{\pi a}\left(\sigma_{máx} - \sigma_{mín}\right) \end{aligned} \tag{4.3b}$$

El logaritmo de la razón del crecimiento de la grieta, como una función de los ciclos da/dN, se calcula y se grafica contra el logaritmo del intervalo del factor de intensidad del esfuerzo ΔK (como se muestra en la figura 4-19).

La curva sigmoidal de la figura 4-19 se divide en tres regiones identificadas como I, II y III. La región I corresponde a la fase de inicio de la grieta, la región II a la fase de crecimiento (propagación) de la grieta y la región III a la fractura inestable. La región II es interesante porque predice la vida de fatiga, y esa parte de la curva es una línea recta en coordenadas logarítmicas. Paris[13] definió la relación en la región II como

$$\frac{da}{dN} = A(\Delta K)^n \tag{4.4a}$$

Barsom[14] probó varios aceros y desarrolló valores empíricos del coeficiente A y el exponente n de la ecuación 4.4. Éstos se presentan en la tabla 4-2. El número de ciclos N para el crecimiento de la grieta, a partir de un tamaño inicial a_i hasta un tamaño dado a_f bajo un intervalo de esfuerzo cíclico conocido $\Delta\sigma$ y una geometría β, se pueden estimar a partir de los parámetros de la ecuación de Paris como:*

$$N = \frac{a_f^{(1-n/2)} - a_i^{(1-n/2)}}{A\beta^n \pi^{n/2} \Delta\sigma^n (1 - n/2)} \tag{4.4b}$$

* Para la definición del factor de geometría β, véase la sección 3.3.

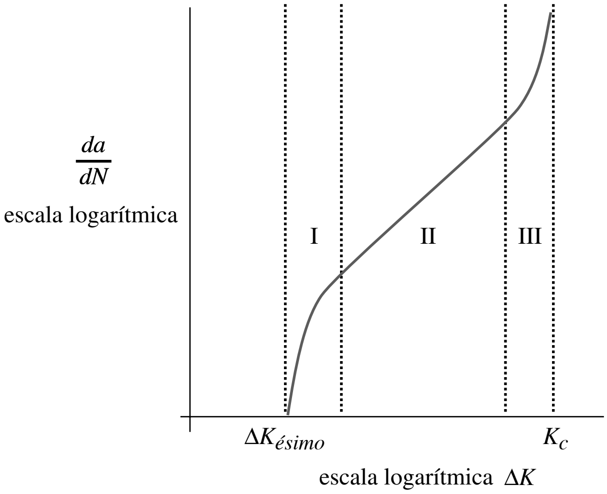


FIGURA 4-19

Las tres regiones de la curva de la tasa de crecimiento de la grieta (de la figura 3-12, p. 102, en Bannantine y otros, *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1990, con autorización)

La vida de crecimiento de la grieta por fatiga se obtiene integrando la ecuación 4.4 entre una longitud inicial de la grieta —conocida o supuesta— y una longitud final aceptable máxima de la grieta, con base en la carga, la geometría y los parámetros específicos del material para la aplicación.

La región I de la figura 4-19 también es de interés, ya que muestra la existencia de un umbral mínimo $\Delta K_{ésimo}$ por debajo del cual no habrá crecimiento de la grieta. Este "umbral del factor de intensidad del esfuerzo $\Delta K_{ésimo}$ se considera a menudo análogo al límite de resistencia a la fatiga sin muesca $S_{e'}$ puesto que el intervalo del factor de intensidad del esfuerzo aplicado ΔK por debajo del $\Delta K_{ésimo}$ no causa crecimiento de la grieta por fatiga."[15]

Estas pruebas de fatiga axial tienen una componente de esfuerzo medio, y el nivel del esfuerzo medio tiene un efecto sobre la razón de propagación de la grieta. La figura 4-20 muestra el esquema de un grupo de curvas da/dN para diferentes niveles de esfuerzo medio, como lo define la razón de esfuerzo R. Cuando $R = 0$, se repite el esfuerzo como en la figura 4-6*b* (p. 243). Conforme R se aproxima a 1, el esfuerzo mínimo se aproxima al esfuerzo máximo (véase la ecuación 4.1*d*, p. 244). La figura 4-20 indica una pequeña variación en las curvas de la región II (crecimiento de la grieta); pero muestra cambios significativos de R en las regiones I y III. Por lo tanto, la iniciación de la grieta se ve afectada por el nivel de esfuerzo medio. El factor del umbral de intensidad del esfuerzo $\Delta K_{ésimo}$ puede reducirse en un factor de 1.5 a 2.5, cuando R se incrementa de 0 a 0.8[18]. Esto es consistente con los efectos del esfuerzo medio sobre los datos *S-N* del

Tabla 4-2 Parámetros de la ecuación de Paris para varios aceros
Fuente: J. M. Barsom,[14] con autorización

	unidades SI		unidades estadounidenses (ips)	
Acero	*A*	*n*	*A*	*n*
Ferrítico-perlítico	6.90*E*–12	3.00	3.60*E*–10	3.00
Martensítico	1.35*E*–10	2.25	6.60*E*–09	2.25
Austenítico inoxidable	5.60*E*–12	3.25	3.00*E*–10	3.25

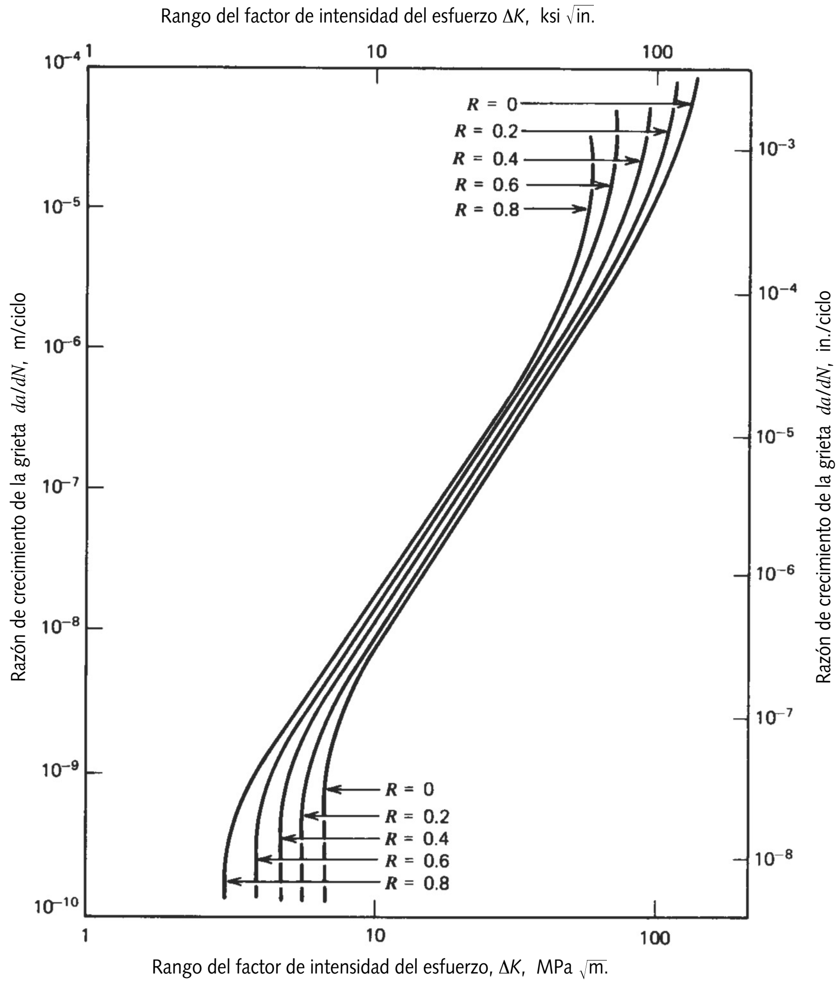


FIGURA 4-20

Esquema de los efectos del esfuerzo medio sobre la curva de la razón de crecimiento de la grieta (de Fuchs y Stephens, *Metal Fatigue in Engineering*, Nueva York, 1980, reimpreso con autorización de John Wiley & Sons, Inc.)

modelo de esfuerzo-vida ya estudiado (véase la figura 4-16, p. 252). La figura 4-21 de la referencia 19 presenta datos de prueba sobre el efecto de la razón de esfuerzo R en el intervalo del factor del umbral de intensidad del esfuerzo $\Delta K_{ésimo}$ para varios aceros.

Pruebas en montajes reales

En tanto que muchos datos de resistencia se generan a partir de las pruebas sobre una muestra, y el ingeniero utiliza tales datos como punto de arranque para estimar la resistencia de una parte determinada, los mejores datos se obtienen probando el diseño real bajo cargas, temperatura y condiciones ambientales reales. Ésta es una propuesta costosa y únicamente se lleva a cabo cuando la cantidad del costo del diseño o la amenaza a la seguridad humana lo requieren. La figura 4-22 muestra un dispositivo complicado construido para probar a la fatiga los ensambles del ala y el fuselaje del Boeing 757 durante su producción. Se coloca el avión completo en el dispositivo y se aplican cargas variables en el tiempo a varios elementos, mientras se realizan las mediciones

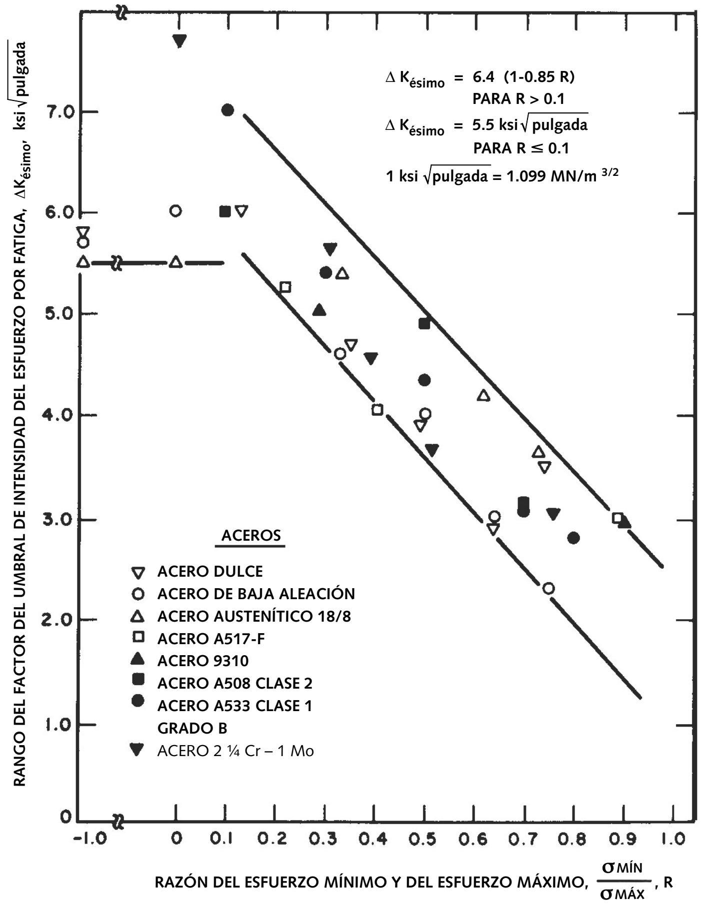


FIGURA 4-21

Efecto del esfuerzo medio sobre el rango del factor del umbral de intensidad del esfuerzo (de la fig. 9.6, p. 285, en *Fracture and Fatigue Control in Structures*, de Barsom y Rolfe, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987, con autorización)

de deformaciones, deflexiones, etcétera. Evidentemente se trata de un proceso costoso, pero que sirve para obtener los datos más realistas posibles, aplicando la prueba a las formas, las dimensiones y los materiales reales, en vez de muestras de laboratorio.

4.6 ESTIMACIÓN DEL CRITERIO DE FALLA POR FATIGA

La mejor información de resistencia a la fatiga de un material, en alguna parte de su vida finita o de su límite de resistencia a la fatiga en vida infinita, proviene de las pruebas en montajes prototipo o reales del diseño, como ya se comentó. Si ello no resulta práctico o factible, la siguiente mejor información se genera en pruebas a la fatiga de muestras tomadas del material específico, tal como se fabrica para la pieza (es decir, fundido, forjado, maquinado, etcétera). Si esto falla, es probable que haya datos acerca de la resistencia a la fatiga en la literatura del tema o de los fabricantes del material; no obstante, tales datos son de prueba de muestras pequeñas y pulidas, en ambientes controlados.



FIGURA 4-22

Dispositivo de prueba a la fatiga del ensamble del ala y el fuselaje en un Boeing 757 (*Cortesía de Boeing Comercial Airplane Co., Seattle, Wash.*)

Incluso en ausencia de tales datos, es necesario hacer alguna estimación del límite de resistencia a la fatiga o resistencia de fatiga del material, según los datos disponibles de pruebas monótonas, que se pueden limitar a información sobre la resistencia última del material S_{ut} y la resistencia a la fluencia S_y.

Estimación de la resistencia a la fatiga teórica $S_{f'}$ o el límite de resistencia a la fatiga $S_{e'}$

Si hay datos publicados de la resistencia a la fatiga $S_{f'}$ o del límite de resistencia a la fatiga $S_{e'}$ del material, se deberían utilizar y aplicar los factores de corrección que se estudiarán en la siguiente sección. Los datos de resistencia a la fatiga publicados son usualmente de pruebas de ciclo de carga de flexión o axial invertida, sobre muestras pequeñas y pulidas. Si no hay datos de resistencia a la fatiga, es posible hacer un estimado burdo aproximado de $S_{f'}$ o $S_{e'}$ a partir de la resistencia última a la tensión publicada del material. La figura 4-23 indica las relaciones entre la S_{ut} y la S_f de aceros forjados (*a*), hierros forjados y fundidos (*b*), aleaciones de aluminio (*c*) y aleaciones de cobre forjadas (*d*). Existe una dispersión considerable y las líneas se ajustan aproximadamente a los límites superior e inferior. En resistencias altas a la tensión, las resistencias a la fatiga suelen “llegar al tope”, como se describió anteriormente. A partir de esos datos, se establecen las relaciones aproximadas entre S_{ut} y $S_{f'}$ o $S_{e'}$. Dichas relaciones para aleaciones de acero y aluminio se definieron en la sección anterior como ecuaciones 4.2 y se repiten aquí por comodidad.

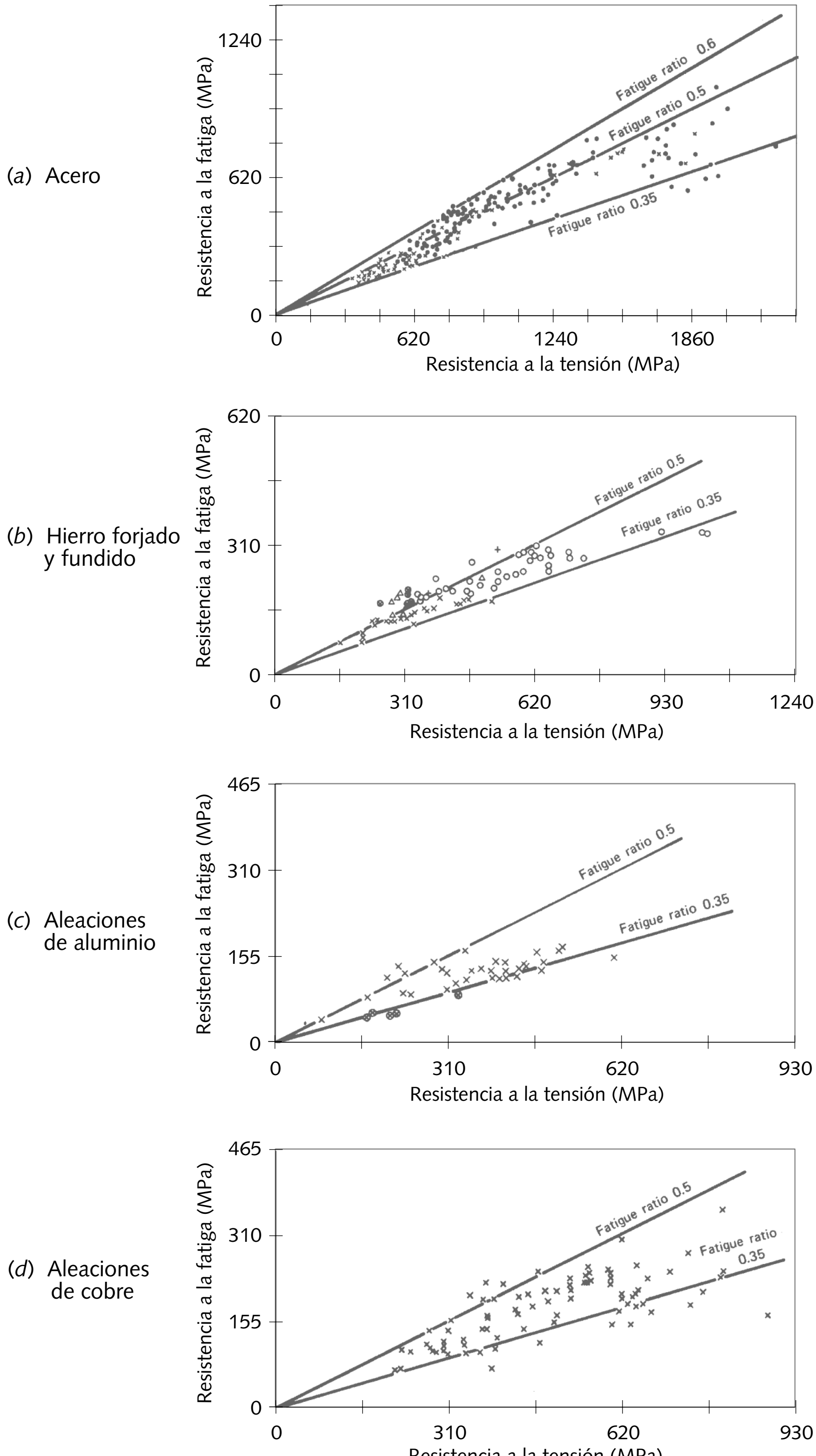


FIGURA 4-23

Relación entre la resistencia a la fatiga sin muesca de la flexión giratoria y la resistencia última
(de P. G. Forrest, *Fatigue of Metals*, Pergamon Press, Londres, 1962)

$$\text{aceros:} \quad \begin{cases} S_{e'} \cong 0.5\, S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 200 \text{ kpsi } (1\,400 \text{ MPa}) \\ S_{e'} \cong 100 \text{ kpsi } (700 \text{ MPa}) & \text{para } S_{ut} \quad 200 \text{ kpsi } (1\,400 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{4.5a}$$

$$\text{hierros:} \quad \begin{cases} S_{e'} \cong 0.4\, S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 60 \text{ kpsi } (400 \text{ MPa}) \\ S_{e'} \cong 24 \text{ kpsi } (160 \text{ MPa}) & \text{para } S_{ut} \quad 60 \text{ kpsi } (400 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{4.5b}$$

$$\text{aluminios:} \quad \begin{cases} S_{f'_{@5E8}} \cong 0.4\, S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 48 \text{ kpsi } (330 \text{ MPa}) \\ S_{f'_{@5E8}} \cong 19 \text{ kpsi } (130 \text{ MPa}) & \text{para } S_{ut} \quad 48 \text{ kpsi } (330 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{4.5c}$$

$$\text{aleaciones de cobre:} \quad \begin{cases} S_{f'_{@5E8}} \cong 0.4\, S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 40 \text{ kpsi } (280 \text{ MPa}) \\ S_{f'_{@5E8}} \cong 14 \text{ kpsi } (100 \text{ MPa}) & \text{para } S_{ut} \quad 40 \text{ kpsi } (280 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{4.5d‡}$$

Factores de corrección para la resistencia a la fatiga teórica o el límite de resistencia a la fatiga

Las resistencias a la fatiga o los límites de resistencia a la fatiga que se obtienen de muestras estándar de prueba a la fatiga, o de estimados con base en pruebas estáticas, deben modificarse para justificar las diferencias físicas entre la muestra de prueba y la parte real que se diseña. Las diferencias ambientales y de temperatura entre las condiciones de prueba y las condiciones reales se deben tomar en cuenta. Las diferencias en los modos de carga también se tienen que considerar. Estos y otros factores se incorporan a un conjunto de *factores de reducción de la resistencia*, que se multiplican luego por el estimado teórico, para obtener una resistencia de fatiga o un límite de resistencia a la fatiga corregidos en una aplicación específica.

$$\begin{aligned} S_e &= C_{carga}\, C_{tamaño}\, C_{sup}\, C_{temp}\, C_{conf}\, S_{e'} \\ S_f &= C_{carga}\, C_{tamaño}\, C_{sup}\, C_{temp}\, C_{conf}\, S_{f'} \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde S_e representa el límite de resistencia a la fatiga corregido para un material que tiene una articulación de rodilla en su curva *S-N;* y S_f, la resistencia a la fatiga corregida en cierto número de ciclos N de un material que no presenta articulación de rodilla. Los factores de reducción de la resistencia en la ecuación 4.6 se definirán ahora.

EFECTOS DE LA CARGA Como las razones descritas arriba y la mayoría de los datos de resistencia a la fatiga publicados son los de pruebas de flexión giratoria, se tiene que aplicar un factor de reducción de la resistencia para cargas axiales. Las diferencias entre las pruebas axiales y de flexión giratoria en resistencia a la fatiga se describieron en la sección previa. Con base en ese estudio de pruebas de fatiga axial y de flexión, se define ahora un **factor de carga** C_{carga} de reducción de la resistencia como

$$\begin{aligned} &\text{flexión:} && C_{carga} = 1 \\ &\text{carga axial:} && C_{carga} = 0.70 \end{aligned} \tag{4.7a}$$

Observe que la prueba de fatiga por torsión indica una resistencia que es 0.577 veces la resistencia a la fatiga por flexión giratoria, como se ilustra en la figura 4-15 (p. 251). Para el caso de la fatiga por torsión pura, se compara el esfuerzo aplicado, alternativo cortante por torsión, directamente con la resistencia a la fatiga por torsión. Sin embargo, por lo general se trata el caso de torsión pura (y también los demás casos), al calcular el esfuerzo efectivo de von Mises a partir de los esfuerzos aplicados.* Esto da el valor del *esfuerzo alternativo efectivo por tensión* que se compara en forma directa con la *resistencia a la fatiga por flexión*, de modo que, para casos de torsión pura, se utiliza $C_{carga} = 1$ con este método.

---

* Una excepción son el análisis y el diseño de espiras de resortes del capítulo 9, para los cuales la mayoría de los datos de resistencia disponibles son valores de resistencia de torsión cortante, de manera que tiene más sentido comparar directamente esfuerzos de torsión con resistencias a la torsión, sin convertir a los esfuerzos equivalentes de von Mises.

‡ El profesor Roger J. Hawks, de la Tri-State University, Angola, IN, ha analizado un gran número de datos de resistencia a la fatiga para aleaciones de cobre (incluyendo los datos de la figura 4-23*d*), y encontró que el mejor ajuste de los datos es $S_f = 0.37\, S_{ut}$ para $S_{ut} <$ 75 kpsi y $S_f = 28$ kpsi para $S_{ut} >$ 75 kpsi (comunicación personal, 1 de diciembre de 2004).

EFECTOS DEL TAMAÑO Las muestras de prueba de las vigas giratoria y estática son pequeñas (cerca de 0.3 in de diámetro). Si la pieza es mayor que esa dimensión, se necesita aplicar un **factor de tamaño** de reducción de resistencia, para considerar el hecho de que piezas más grandes fallan con menores esfuerzos, debido a la probabilidad más alta de que se presente un defecto en el volumen más grande sometido al esfuerzo.† Varios autores han sugerido valores diferentes para el factor del tamaño. Shigley y Mitchell[21] presentan una expresión muy simple, que es bastante conservadora.

$$\begin{aligned} &\text{para } d \le 0.3 \text{ in } (8 \text{ mm}): && C_{tama\tilde{n}o} = 1 \\ &\text{para } 0.3 \text{ in} < d \le 10 \text{ in}: && C_{tama\tilde{n}o} = 0.869 d^{-0.097} \\ &\text{para } 8 \text{ mm} < d \le 250 \text{ mm}: && C_{tama\tilde{n}o} = 1.189 d^{-0.097} \end{aligned} \tag{4.7b}$$

Para tamaños más grandes, se usa $C_{tamaño} = 0.6$. (Los datos de prueba sobre los cuales se basan estas ecuaciones son de piezas de acero. La exactitud de la ecuación 4.7*b* para metales no ferrosos es algo cuestionable.)

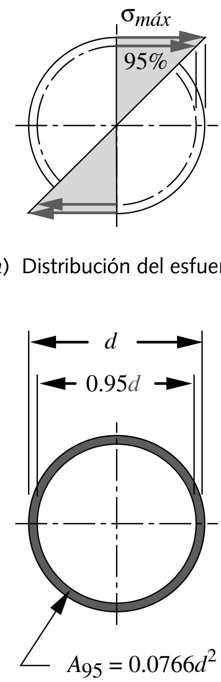
La ecuación 4.7*b* es válida para piezas cilíndricas. Para piezas de otras formas, Kuguel[22] sugiere que, igualando el área de la sección transversal —que no es redonda— de la pieza sometida a un esfuerzo arriba del 95% del esfuerzo máximo, con el área similar sometida a esfuerzo de una muestra de viga giratoria, se obtendría un *diámetro equivalente* para utilizarlo en la ecuación 4.7*b*. Como el esfuerzo está linealmente distribuido a través del diámetro d de una viga en flexión giratoria, el área A_{95} sometida a esfuerzo arriba del 95% del esfuerzo en la fibra exterior es la que se encuentra entre los diámetros de 0.95d y 1.0d en la figura 4-24.

$$A_{95} = \pi \left[\frac{d^2 - (0.95d)^2}{4} \right] = 0.0766\, d^2 \tag{4.7c}$$

El diámetro equivalente de la muestra de la viga giratoria para cualquier sección transversal es, entonces,

$$d_{equiv} = \sqrt{\frac{A_{95}}{0.0766}} \tag{4.7d}$$

donde A_{95} es la porción del área de la sección transversal de la pieza no redonda, sometida a un esfuerzo de entre 95 y 100% de su esfuerzo máximo. Es tarea fácil calcular el valor de A_{95} para cualquier sección transversal para la cual se conoce la carga. Shigley y Mitchell[21] lo han hecho para varias secciones comunes y sus resultados se muestran en la figura 4-25.



(*a*) Distribución del esfuerzo

(*b*) Área por arriba del 95%

FIGURA 4-24

Área de una muestra de viga giratoria sometida a un esfuerzo arriba del 95% del esfuerzo máximo

EFECTOS DE LA SUPERFICIE La muestra de viga giratoria se pule al espejo para excluir las imperfecciones superficiales que actúen como incrementadores de esfuerzo. Por lo general, no es práctico dar un acabado costoso como éste a una pieza real. Los acabados rugosos disminuyen la resistencia a la fatiga debido a la introducción de concentraciones de esfuerzos y/o por la alteración de las propiedades físicas de la capa superficial. Una superficie forjada es áspera y descarburada, en tanto que los niveles de carbono bajos debilitan la superficie donde los esfuerzos suelen ser más altos.[23] El **factor de superficie** de reducción de la resistencia C_{sup} es necesario para tomar en cuenta tales diferencias. Una gráfica de Juvinall[24] (figura 4-26) da algún lineamiento en la selección de un factor de superficie para varios acabados comunes del acero. Observe que la resistencia a la tensión también es un factor, puesto que los materiales con mayor resistencia son más sensibles a las concentraciones de esfuerzos generadas por las irregularidades de la superficie. En la figura 4-26 se aprecia que los ambientes corrosivos reducen drásticamente la resistencia. Estos factores superficiales se han desarrollado para aceros y sólo se deberían aplicar a las aleaciones de aluminio y a otros metales dúctiles tomando la precaución de que se hagan pruebas con las piezas reales, bajo condiciones de carga reales en aplicaciones críticas. A los hierros fundidos se les asigna una $C_{sup} = 1$, ya que sus discontinuidades internas empequeñecen los efectos de una superficie áspera.

† Las secciones cargadas axialmente siempre tienen $C_{tamaño} = 1$, porque las fallas de las muestras de prueba cargadas axialmente no presentan sensibilidad al tamaño de la sección transversal.

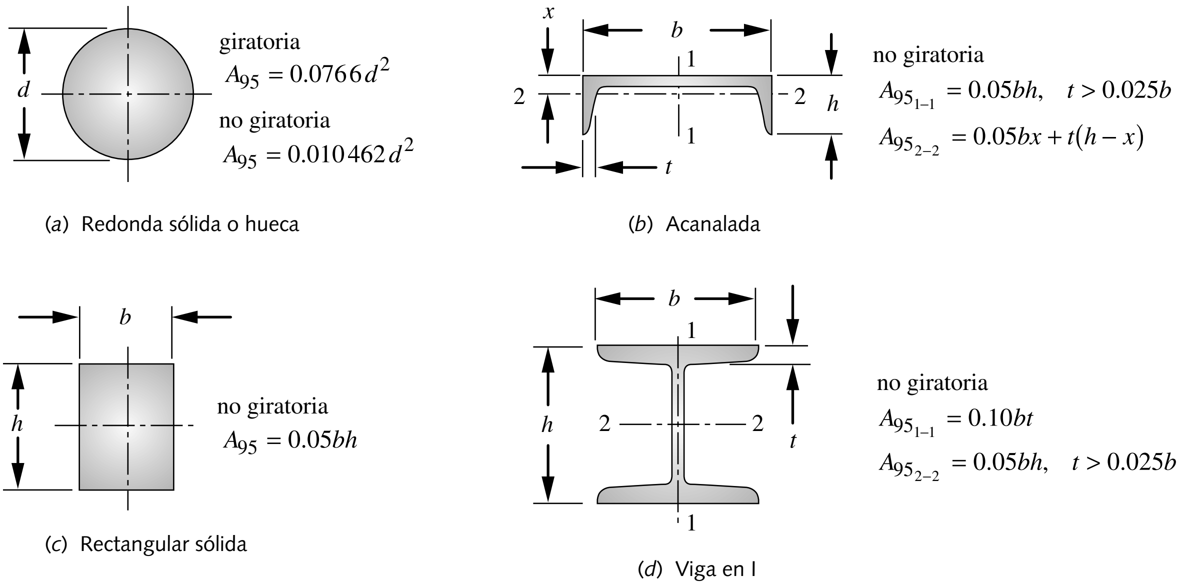


FIGURA 4-25

Fórmulas de áreas sometidas al 95% de esfuerzo de varias secciones cargadas a la flexión (adaptado de Shigley y Mitchell, *Mechanical Engineering Design*, 4a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, con autorización)

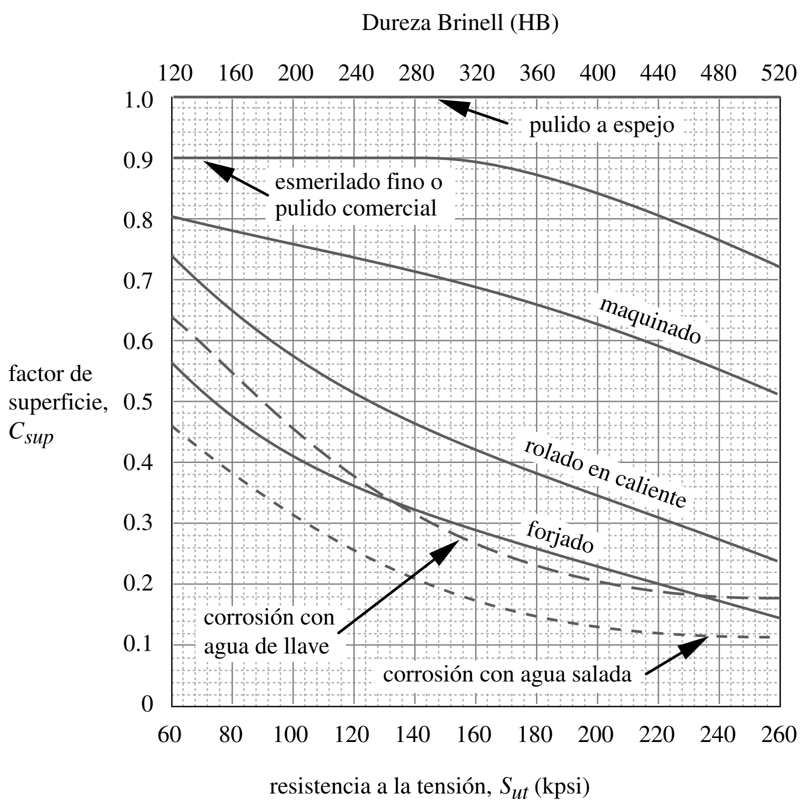


FIGURA 4-26

Factores de superficie para varios acabados en acero (de la fig. 12.6, p. 234, R. C. Juvinall, *Stress, Strain, and Strength*, McGraw-Hill, Nueva York, con autorización)

* Hay muchos parámetros que se utilizan para identificar superficies ásperas, todos los cuales por lo común se miden pasando una aguja afilada de diamante cónica sobre la superficie con una fuerza y una rapidez controladas. La aguja sigue y codifica los contornos microscópicos, además de almacenar el perfil de la superficie en una computadora. Se realizan después varios análisis estadísticos sobre el perfil, tales como la obtención de la mayor distancia pico-pico (R_t), el promedio de los 5 picos más altos (R_{pm}), etcétera. El parámetro más comúnmente utilizado es R_a (o A_a), el cual es el promedio aritmético de los valores absolutos de las alturas de los picos y las profundidades de los valles. Éste es el parámetro que se usa en la figura 4-27. Para mayor información sobre superficies ásperas, véase la sección 5.1.

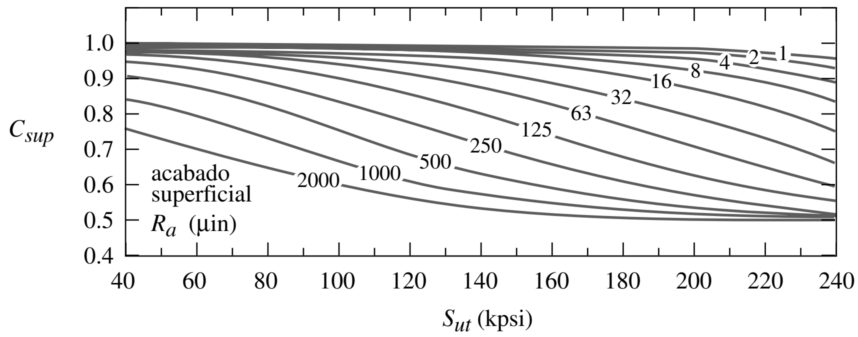


FIGURA 4-27

El factor de superficie como una función de la aspereza de la superficie y de la resistencia última a la tensión (de R. C. Johnson, *Machine Design*, vol. 45, núm. 11, 1967, p. 108, Penton Publishing, Cleveland, Ohio, con autorización)

R. C. Johnson[25] obtuvo la gráfica de la figura 4-27, que da un mayor detalle de **superficies maquinadas y esmeriladas**, relacionando C_{sup} con la resistencia a la tensión basada en la rugosidad promedio superficial R_a medida en micropulgadas.* Si se conoce la R_a de una pieza maquinada o esmerilada, la figura 4-27 sirve para determinar un factor de superficie adecuado C_{sup}. Deberían utilizarse aún las curvas del factor de superficie de la figura 4-26 para superficies roladas en caliente, forjadas y corroídas, ya que toman en cuenta la descarburación y los efectos de oxidación, así como la aspereza superficial.

Shigley y Mischke[39] sugieren el uso de una ecuación exponencial de la forma

$$C_{sup} \cong A\left(S_{ut}\right)^b \qquad \text{si } C_{sup} > 1.0, \text{ sea } C_{sup} = 1.0 \tag{4.7e}$$

para aproximar el factor de superficie a S_{ut}, ya sea en kpsi o en MPa. El coeficiente A y el exponente b de varios acabados se determinaron a partir de datos similares a los de la figura 4-26 y se muestran en la tabla 4-3. Tal enfoque tiene la ventaja de que se programa en computadora y elimina la necesidad de consultar gráficas como las de las figuras 4-26 y 4-27. Observe que se obtienen valores de C_{sup} ligeramente diferentes con la ecuación 4.7*e* y los de la figura 4-26 debido a la diferencia en los datos para desarrollar la ecuación 4.7*e* y sus factores de la tabla 4-3.

Los tratamientos superficiales, como el chapado eléctrico en ciertos metales, podrían reducir severamente la resistencia a la fatiga, como se muestra en la figura 4-28, para el chapado con cromo. Parece que el chapado con metales blandos como cadmio, cobre, zinc, plomo y estaño no compromete gravemente la resistencia a la fatiga.

Tabla 4-3 Coeficientes del factor de superficie de la ecuación 4.7e

Fuente: Shigley y Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 5a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1989, p. 283, con autorización

	Para S_{ut} en MPa se usa		Para S_{ut} en kpsi (no psi) se usa	
Acabado superficial	*A*	*b*	*A*	*b*
Esmerilado	1.58	–0.085	1.34	–0.085
Maquinado o rolado en frío	4.51	–0.265	2.7	–0.265
Rolado en caliente	57.7	–0.718	14.4	–0.718
Forjado	272	–0.995	39.9	–0.995

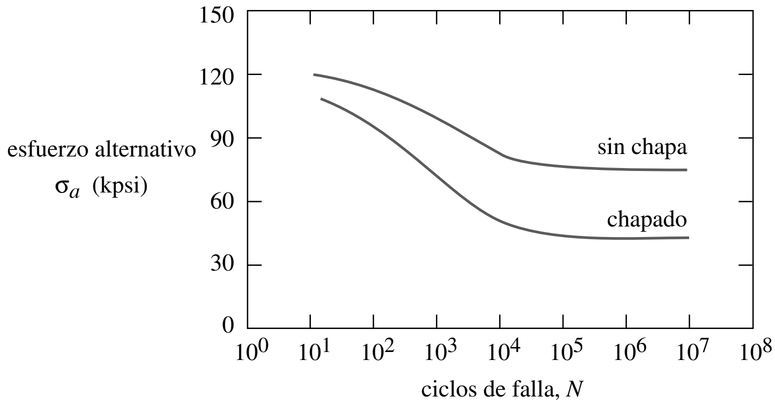


FIGURA 4-28

Efecto del chapado con cromo sobre la resistencia a la fatiga del acero (de C. C. Osgood, *Fatigue Design*, Pergamon Press, Londres, 1982, con autorización)

El chapado eléctrico con cromo y níquel por lo general no se recomienda para piezas con esfuerzos por fatiga, a menos que se apliquen también tratamientos superficiales adicionales como el granallado (véase abajo). Una excepción sería cuando la pieza se encuentra en un ambiente corrosivo y la protección a la corrosión suministrada por el chapado es mayor que la reducción de su resistencia. La mayoría de la resistencia perdida en el chapado se podría recuperar con el granallado a la superficie antes del chapado, para introducir esfuerzos de compresión, como se muestra en la figura 4-29. El granallado y otros medios para crear esfuerzos residuales se estudian en la sección 4.8 (p. 277).

TEMPERATURA Las pruebas de fatiga se hacen en general a temperatura ambiente. La dureza a la fractura disminuye a bajas temperaturas y se incrementa con temperaturas moderadamente altas (hasta 350 °C aproximadamente). Sin embargo, la articulación de rodilla del límite de resistencia a la fatiga, de la gráfica *S-N*, desaparece a altas temperaturas, lo cual hace que la resistencia a la fatiga continúe declinando con el número de ciclos, *N*. Asimismo, la resistencia a la fluencia declina continuamente con temperaturas por arriba de la temperatura ambiente y, en algunos casos, esto puede causar la fluencia antes que la falla por fatiga. A temperaturas arriba del 50% aproximadamente de la temperatura

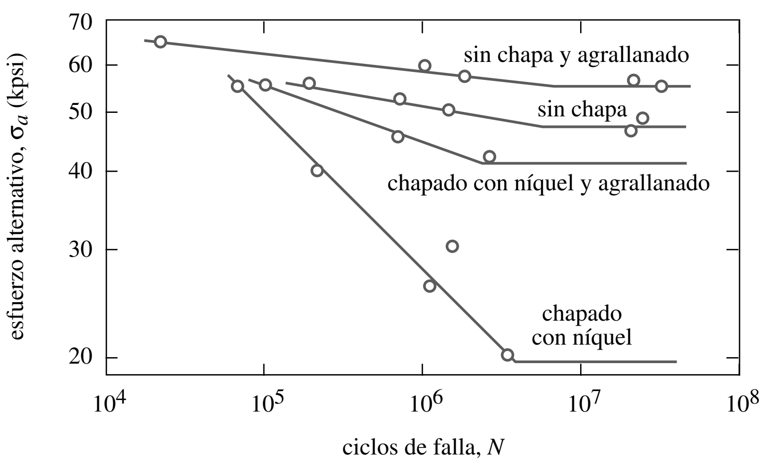


FIGURA 4-29

Efecto del chapado con níquel y agrallanado sobre la resistencia a la fatiga del acero (de Almen y Black, *Residual Stresses and Fatigue in Metals*, McGraw-Hill, Nueva York, 1963)

absoluta de fusión del material, la termofluencia se convierte en un factor determinante y el procedimiento esfuerzo-vida deja de ser válido. El procedimiento deformación-vida toma en cuenta la combinación de la termofluencia y la fatiga a altas temperaturas, por lo que se debería utilizar en dichas situaciones.

Se han propuesto varias fórmulas de aproximación para considerar la reducción del límite de resistencia a la fatiga a temperaturas moderadamente altas. Se define entonces un **factor de temperatura** C_{temp}. Shigley y Mitchell[26] sugieren el siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{para } T \le 450\ °\text{C}\ (840\ °\text{F}): && C_{temp} = 1 \\ &\text{para } 450\ °\text{C} < T \le 550\ °\text{C}: && C_{temp} = 1 - 0.0058(T - 450) \\ &\text{para } 840\ °\text{F} < T \le 1\,020\ °\text{F}: && C_{temp} = 1 - 0.0032(T - 840) \end{aligned} \qquad (4.7f)$$

Observe que este criterio basado en datos para aceros no debería utilizarse para otros metales como Al, Mg y aleaciones de cobre.

Tabla 4-4
Factores de confiabilidad para $S_d = 0.08\ \mu$

% de confiabilidad	C_{conf}
50	1.000
90	0.897
95	0.868
99	0.814
99.9	0.753
99.99	0.702
99.999	0.659
99.9999	0.620

CONFIABILIDAD Muchos de los datos de resistencia reportados son valores medios. Hay una gran dispersión en múltiples pruebas del mismo material bajo las mismas condiciones de prueba. Haugen y Wirsching[27] informan que las desviaciones estándar de resistencias físicas de los aceros rara vez exceden el 8% de sus valores promedio. La tabla 4-4 indica factores de confiabilidad de una supuesta desviación estándar del 8%. Observe que la confiabilidad del 50% tiene un factor de 1 y el factor se reduce conforme se elige una mayor confiabilidad. Por ejemplo, si desea 99.99% de probabilidad de que sus muestras cumplan o excedan la resistencia supuesta, multiplique el valor de la resistencia media por 0.702. Los valores de la tabla 4-4 proporcionan factores de reducción de resistencia C_{conf} para los niveles de confiabilidad seleccionados.

AMBIENTE El ambiente tiene efectos significativos sobre la resistencia a la fatiga, como se observa en las curvas de superficies corroídas en la figura 4-26 (p. 262). La figura 4-30 muestra el esquema de los efectos relacionados con varios ambientes sobre la resistencia a la fatiga. Observe que incluso el aire del ambiente reduce la resistencia comparada con el vacío. Cuanto mayor sean la humedad relativa y la temperatura, más grande será la reducción de la resistencia por el aire. La línea de *prerremojo* representa piezas humedecidas en un ambiente corrosivo (agua o agua salada) y, luego, probadas en el aire ambiental. Se cree que la aspereza creciente de la superficie corroída es la

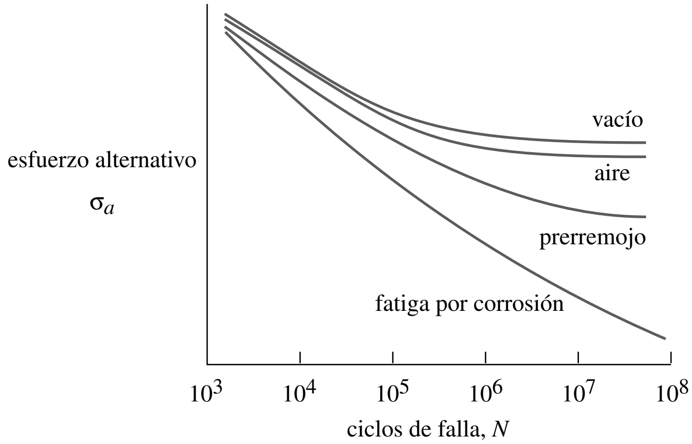


FIGURA 4-30
Efecto del ambiente sobre la resistencia a la fatiga del acero (de Fuchs y Stephens, *Metal Fatigue in Engineering*, Nueva York, 1980. Reimpreso con autorización de John Wiley & Sons, Inc.)

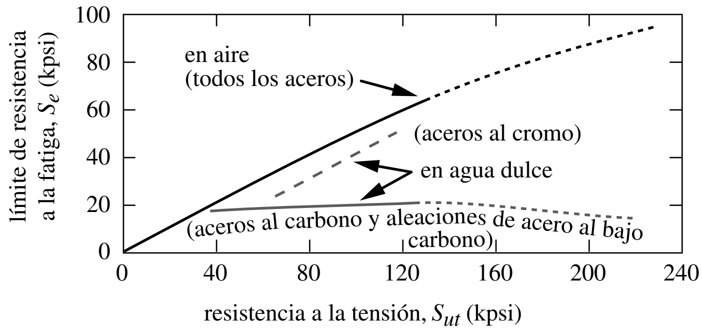


FIGURA 4-31

Efecto de agua dulce sobre la resistencia a la fatiga del acero (de P. G. Forrest, *Fatigue of Metals*, Pergamon Press, Oxford, 1962)

razón de la pérdida de resistencia. La línea de *fatiga por corrosión* indica una reducción drástica de la resistencia, así como la desaparición de la articulación de rodilla del límite de resistencia a la fatiga.

El fenómeno de la **fatiga por corrosión** aún no se comprende cabalmente, aunque datos empíricos como los de las figuras 4-30 y 4-31 describen su severidad. La figura 4-31 indica el efecto de la operación en agua dulce sobre las curvas *S-N* de aceros al carbono y aleaciones de aceros al bajo carbono. La relación entre $S_{e'}$ y S_{ut} se vuelve constante en 15 kpsi aproximadamente. De modo que, en este ambiente, el acero al carbono de baja resistencia es tan bueno como el acero al carbono de alta resistencia. Los únicos aceros que conservan algo de su resistencia en el agua son los aceros cromados (incluyendo los aceros inoxidables), ya que el elemento de la aleación brinda alguna protección contra la corrosión. La figura 4-32 ilustra los efectos del agua salada sobre la resistencia a la fatiga de una aleación de aluminio. Se cuenta tan sólo con datos limitados sobre resistencias de materiales en ambientes severos. Por lo tanto, es difícil determinar factores universales de reducción de la resistencia en condiciones ambientales. El mejor procedimiento consiste en probar exhaustivamente todos los diseños y materiales en el ambiente en el que operarán. (Esto resulta difícil en situaciones en las que se desean ver los efectos a largo plazo de cargas con baja frecuencia, porque obtener los datos tomaría

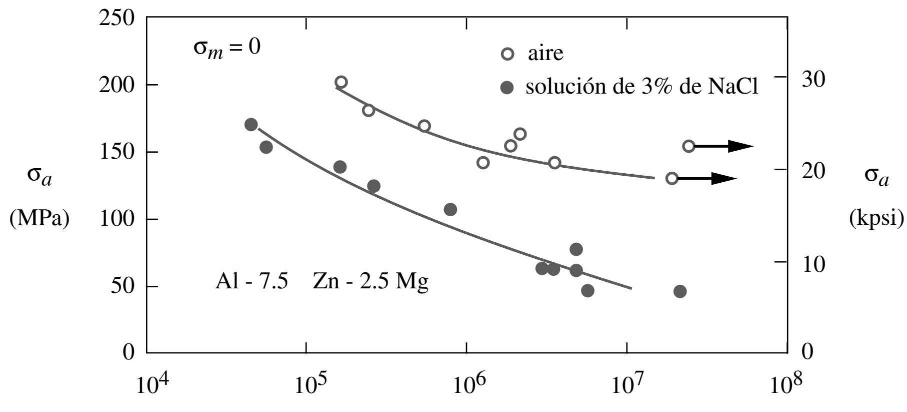


FIGURA 4-32

Efecto del agua salada sobre la resistencia a la fatiga del aluminio (de Stubbington y Forsyth, "Some Corrosion-Failure Observations on a High-Purity Aluminum-Zinc-Magnesium Alloy and Commercial D.T.D. 683 Alloy", *J. of the Inst. of Metals*, Londres, R.U., vol 90, 1961-1962, pp. 347-354, con autorización)

demasiado tiempo.) Con base en la figura 4-31, de aceros al carbono y aleaciones de acero al bajo carbono en agua dulce, las relaciones entre $S_{e'}$ y S_{ut} en la ecuación 4.5*a* se deben modificar a

$$S_{e'} \cong 15 \text{ kpsi } (100 \text{ MPa}) \quad \text{para acero al carbono en agua dulce} \quad (4.8)$$

Cabe suponer que un ambiente de agua salada sería incluso peor.

Cálculo de la resistencia a la fatiga corregida S_f o límite de resistencia a la fatiga corregido S_e

Ahora es posible aplicar los factores de reducción de resistencia al límite de resistencia a la fatiga sin corrección $S_{e'}$ o a la resistencia a la fatiga sin corrección $S_{f'}$, usando la ecuación 4.6 (p. 260), para obtener los valores corregidos para fines de diseño.

Creación de diagramas *S-N* estimados

Las ecuaciones 4.6 brindan información acerca de la resistencia del material en la región de ciclo alto del diagrama *S-N*. Con información similar para la región de ciclo bajo, se puede construir un diagrama *S-N* para el material y la aplicación en particular, como se muestra en la figura 4-33. El ancho de banda de interés es el régimen de HCF de 10^3 a 10^6 ciclos y más allá. Llámese a la resistencia del material en 10^3 ciclos S_m. Los datos de prueba indican que los siguientes estimados de S_m son razonables:[28]

$$\begin{aligned} &\text{flexión:} && S_m = 0.9 S_{ut} \\ &\text{carga axial:} && S_m = 0.75 S_{ut} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ahora se dibuja el diagrama aproximado sobre los ejes log-log, como se ilustra en la figura 4-33. El eje x va de $N = 10^3$ a $N = 10^9$ ciclos o más allá. La S_m adecuada de la ecuación 4.9, para el tipo de carga, se grafica para $N = 10^3$. Observe que los factores de corrección de la ecuación 4.6 **no** se aplican a S_m.

Si el material tiene una articulación de rodilla, entonces el S_e corregido de la ecuación 4.6 se grafica en $N_e = 10^6$ ciclos y luego se traza una línea recta entre S_m y S_e. La curva continúa horizontalmente más allá de ese punto. Si el material no presenta una articulación de rodilla, entonces la S_f corregida, de la ecuación 4.6, se grafica en el número de ciclos para los cuales se generó (que se muestra en $N_f = 5 \times 10^8$) y se traza una línea recta entre S_m y S_f. Esta línea se puede extrapolar más allá de ese punto, aunque su exactitud sea cuestionable y quizá conservadora (véase la figura 4-10).

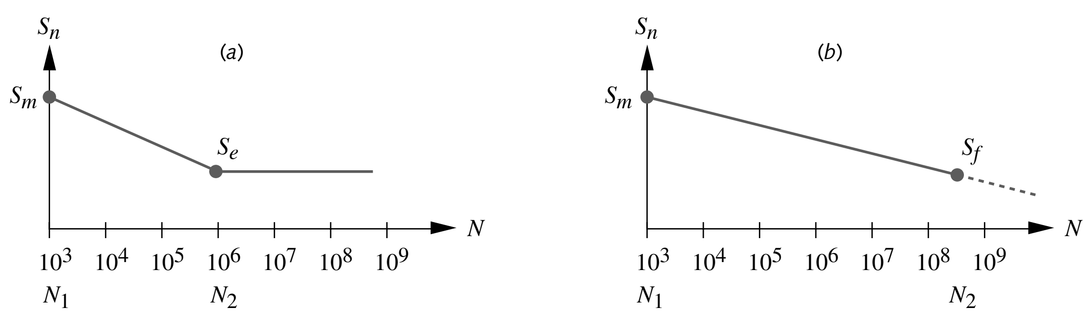


FIGURA 4-33

Curvas *S-N* estimadas para (*a*) materiales con articulación de rodilla, (*b*) materiales sin articulación de rodilla

La ecuación de la línea de S_m a S_e o S_f se escribe como

$$S(N) = aN^b \tag{4.10a}$$

o bien,

$$\log S(N) = \log a + b \log N \tag{4.10b}$$

donde $S(N)$ es la resistencia a la fatiga en cualquier N, mientras a y b son constantes definidas por las condiciones de frontera. Para todos los casos, la intercepción con y es $S(N) = S_m$ en $N = N_1 = 10^3$. Para el caso del límite de resistencia a la fatiga (figura 4-33), $S(N) = S_e$ en $N = N_2 = 10^6$. Para un material que no presente una articulación de rodilla de límite de resistencia, la resistencia a la fatiga se toma en algún número de ciclos: $S(N) = S_f$ en $N = N_2$ (figura 4-33*b*). Sustituyendo las condiciones de frontera en la ecuación 4.10*b*, y resolviendo simultáneamente para a y b:

$$b = \frac{1}{z}\log\left(\frac{S_m}{S_e}\right) \qquad \text{donde} \qquad z = \log N_1 - \log N_2$$

$$\log(a) = \log(S_m) - b\log(N_1) = \log(S_m) - 3b \tag{4.10c}$$

Tabla 4-5

factores z para la ecuación 4.10*c*

N_2	z
1.0*E*6	–3.000
5.0*E*6	–3.699
1.0*E*7	–4.000
5.0*E*7	–4.699
1.0*E*8	–5.000
5.0*E*8	–5.699
1.0*E*9	–6.000
5.0*E*9	–6.699

Observe que N_1 siempre es igual a 1 000 ciclos y su $\log_{10}$ es 3. Para un material con una articulación de rodilla en $N_2 = 10^6$, $z = (3 - 6) = -3$, como se indica en la tabla 4-5. Esta curva es válida sólo para la articulación de rodilla, más allá de la cual $S(N) = S_e$ como en la figura 4-33*a*.

Para un material sin articulación de rodilla y $S(N) = S_f$ en $N = N_2$ (figura 4-33*b*), se calculan con facilidad los valores de z correspondientes a diversos valores de N_2. Por ejemplo, la curva de la figura 4-33*b* muestra S_f en $N_2 = 5E8$ ciclos. El valor de z es, entonces,

$$z_{@5E8} = \log(1\,000) - \log(5E8) = 3 - 8.699 = -5.699$$

$$b_{@5E8} = -\frac{1}{5.699}\log\left(\frac{S_m}{S_f}\right) \quad \text{para } S_f \;@\; N_2 = 5E8 \text{ ciclos} \tag{4.10d}$$

Las constantes de cualesquiera otras condiciones de frontera se determinan de la misma forma. Algunos valores de z para un intervalo de valores de N_2 con $N_1 = 10^3$ se presentan en la tabla 4-5. Tales ecuaciones de la curva *S-N* permiten obtener la vida finita N de cualquier invertido ciclo de resistencia a la fatiga $S(N)$, o la estimación de la resistencia a la fatiga $S(N)$ para cualquier N.

EJEMPLO 4-1

Determinación de diagramas *S-N* aproximados para materiales ferrosos

Problema **Genere un diagrama *S-N* aproximado para una barra de acero y defina sus ecuaciones. ¿Cuántos ciclos de vida se pueden esperar, si el esfuerzo alternativo es de 100 MPa?**

Se proporciona **Se probó el S_{ut} en 600 MPa. La barra es un cuadrado de 150 mm y tiene el acabado de rolado en caliente. La temperatura de operación es de 500 °C máximo. La carga es de ciclo de flexión invertido.**

Suposiciones **Se requiere vida infinita y es factible, puesto que el acero dúctil tiene un límite de resistencia a la fatiga. Se utilizará un factor de confiabilidad de 99.9%.**

Solución

1. Como no se proporciona información sobre el límite de resistencia a la fatiga o la resistencia a la fatiga, se estimará $S_{e'}$ de acuerdo con la resistencia última y con la ecuación 4.5*a* (p. 260).

$$S_{e'} \cong 0.5 S_{ut} = 0.5(600) = 300 \text{ MPa} \tag{a}$$

2. Se trata de carga a la flexión, de modo que el factor de carga de la ecuación 4.7*a* es

$$C_{carga} = 1.0 \tag{b}$$

3. La pieza es mayor que la muestra de prueba y no es redonda, de modo que se debe calcular el diámetro equivalente con base en su 95% de área sometida a esfuerzo (A_{95}), y utilizarlo para obtener el factor de tamaño. En la figura 4-25*c* (p. 262) se define el área A_{95} para una sección rectangular, con carga de flexión no giratoria, mientras el diámetro equivalente se obtiene de la ecuación 4.7*d* (p. 261):

$$A_{95} = 0.05bh = 0.05(150)(150) = 1\ 125 \text{ mm}^2$$
$$d_{equiv} = \sqrt{\frac{A_{95}}{0.0766}} = \sqrt{\frac{1\ 125 \text{ mm}^2}{0.0766}} = 121.2 \text{ mm} \tag{c}$$

y para este diámetro equivalente el factor de tamaño se determina con la ecuación 4.7*b* (p. 261):

$$C_{tamaño} = 1.189(121.2)^{-0.097} = 0.747 \tag{d}$$

4. El factor de superficie se obtiene de la ecuación 4.7*e* (p. 263) y con los datos de la tabla 4-3, para el acabado de rolado en caliente especificado.

$$C_{sup} = A\, S_{ut}^{b} = 57.7(600)^{-0.718} = 0.584 \tag{e}$$

5. El factor de temperatura se obtiene de la ecuación 4.7*f* (p. 265):

$$C_{temp} = 1 - 0.0058(T - 450) = 1 - 0.0058(500 - 450) = 0.71 \tag{f}$$

6. El factor de confiabilidad, que se toma de la tabla 4-4 (p. 265) para el 99.9% deseado, es

$$C_{conf} = 0.753 \tag{g}$$

7. El límite de resistencia a la fatiga corregido S_e ahora se calcula con la ecuación 4.6 (p. 260):

$$\begin{aligned} S_e &= C_{carga}\, C_{tamaño}\, C_{sup}\, C_{temp}\, C_{conf}\, S_{e'} \\ &= 1.0(0.747)(0.584)(0.71)(0.753)(300) \\ S_e &= 70 \text{ MPa} \end{aligned} \tag{h}$$

8. Para crear el diagrama *S-N* también se necesita un número para la resistencia estimada S_m en 10^3 ciclos, con base en la ecuación 4.9 (p. 267) para carga a flexión.

$$S_m = 0.90 S_{ut} = 0.90(600) = 540 \text{ MPa} \tag{i}$$

9. En la figura 4-34 se muestra el diagrama *S-N* estimado con los valores arriba de S_m y S_e. Las expresiones de las dos líneas se obtienen con las ecuaciones 4.10*a* a 4.10*c* (p. 268), suponiendo que S_e inicia en 10^6 ciclos.

4

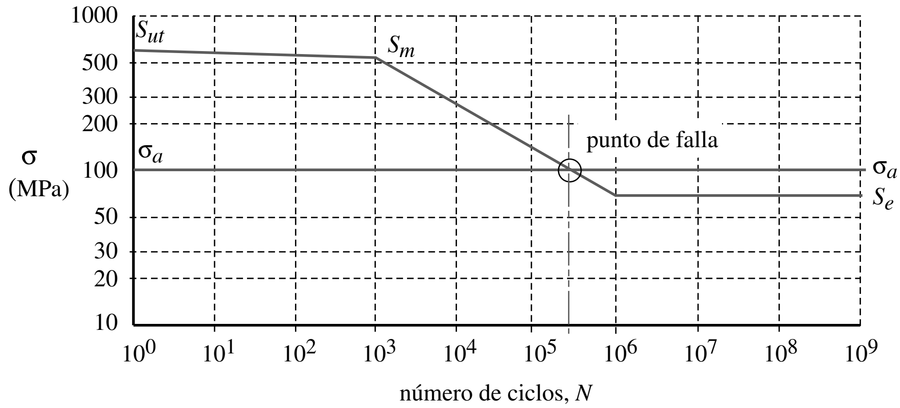


FIGURA 4-34

Diagrama *S-N* y línea del esfuerzo alternativo que muestra el punto de falla del ejemplo 4-1

$$b = -\frac{1}{3}\log\left(\frac{S_m}{S_e}\right) = -\frac{1}{3}\log\left(\frac{540}{70}\right) = -0.295\,765$$

$$\log(a) = \log(S_m) - 3b = \log[540] - 3(-0.295\,765): \qquad a = 4\,165.707 \tag{j}$$

$$S(N) = aN^b = 4\,165.707\,N^{-0.295\,765} \text{ MPa} \qquad 10^3 \le N \le 10^6$$

$$S(N) = S_e = 70 \text{ MPa} \qquad N > 10^6 \tag{k}$$

10. El número de ciclos de vida para cualquier nivel de esfuerzo alternativo se calcula ahora con la ecuación (*k*). Para el nivel de esfuerzo establecido de 100 MPa, se tiene

$$\begin{aligned} 100 &= 4\,165.707\,N^{-0.295\,765} \qquad 10^3 \le N \le 10^6 \\ \log 100 &= \log 4\,165.707 - 0.295\,765 \log N \\ 2 &= 3.619\,689 - 0.295\,765 \log N \\ \log N &= \frac{2 - 3.619\,689}{-0.295\,765} = 5.476\,270 \\ N &= 10^{5.476\,270} = 3.0E5 \text{ ciclos} \end{aligned} \tag{l}$$

La figura 4-34 muestra la intercepción de la línea del esfuerzo alternativo con la línea de falla en $N = 3E5$ ciclos.

11. Los archivos EX06-01 se encuentran en el CD-ROM.

EJEMPLO 4-2

Determinación de diagramas *S-N* aproximados para materiales ferrosos

Problema **Elabore un diagrama *S-N* estimado para una barra de aluminio y defina sus ecuaciones. ¿Cuál es la resistencia a la fatiga corregida en 2*E*7 ciclos?**

Se proporciona **La S_{ut} de este aluminio 6061-T6 se probó a 45 000 psi. La barra forjada es redonda de 1.5 in. La temperatura de operación máxima es de 300 °F. La carga es de ciclo de torsión invertida.**

Suposiciones **Se usará un factor de confiabilidad de 99.0%. La resistencia a la fatiga sin corregir se tomará en 5*E*8 ciclos.**

Solución

1. Como no se proporciona información de resistencia a la fatiga, se estimará $S_{f'}$ con base en la resistencia última usando la ecuación 4.5*c* (p. 260).

$$S_{f'} \cong 0.4 S_{ut} \qquad \text{para } S_{ut} < 48 \text{ ksi}$$
$$S_{f'} \cong 0.4(45\,000) = 18\,000 \text{ psi} \qquad (a)$$

Este valor es para $N = 5E8$ ciclos. No hay articulación de rodilla en la curva *S-N* del aluminio.

2. La carga es *torsión pura*, de modo que el factor de carga de la ecuación 4.7*a* (p. 260) es

$$C_{carga} = 1.0 \qquad (b)$$

ya que el esfuerzo de torsión aplicado se convertirá al esfuerzo normal equivalente de von Mises, por comparación con la resistencia *S-N*.

3. El tamaño de la pieza es mayor que la muestra de la prueba y es redonda, de modo que el factor de tamaño se estima con la ecuación 4.7*b* (p. 261). Observe que esta relación se basa en los datos del acero:

$$C_{tamaño} = 0.869\left(d_{equiv}\right)^{-0.097} = 0.869(1.5)^{-0.097} = 0.835 \qquad (c)$$

4. El factor de superficie se obtiene con la ecuación 4.7*e* (p. 263) y los datos de la tabla 4-3 (p. 263) para el acabado de forja especificado, de nuevo, con la advertencia de que tales relaciones se desarrollaron para aceros, por lo que serían menos exactas para el aluminio.

$$C_{sup} = A\,S_{ut}^{b} = 39.9(45)^{-0.995} = 0.904 \qquad (d)$$

5. La ecuación 4.7*f* (p. 265) es sólo para el acero, por lo que se supone:

$$C_{temp} = 1 \qquad (e)$$

6. El factor de confiabilidad se toma de la tabla 4-4 (p. 265) para el 99.0% deseado y es

$$C_{conf} = 0.814 \qquad (f)$$

7. La resistencia a la fatiga corregida S_f en $N = 5E8$ se calcula ahora con la ecuación 4.6 (p. 260):

$$S_f = C_{carga} C_{tamaño} C_{sup} C_{temp} C_{conf} S_{f'}$$
$$= 1.0(0.835)(0.904)(1.0)(0.814)(18\,000) = 11\,063 \text{ psi} \qquad (g)$$

8. Para crear el diagrama *S-N*, también se necesita un número de la resistencia estimada S_m en 10^3 ciclos con base en la ecuación 4.9 (p. 267). Observe que el valor de la flexión se usa para la torsión.

$$S_m = 0.90 S_{ut} = 0.90(45\,000) = 40\,500 \text{ psi} \qquad (h)$$

9. El coeficiente y el exponente de la línea *S-N* corregida y su ecuación se obtienen de las ecuaciones 4.10*a* a 4.10*c* (p. 268). El valor de *z* se toma de la tabla 4-5 (p. 268) para S_f en 5*E*8 ciclos.

$$b = -\frac{1}{5.699}\log\left(\frac{S_m}{S_f}\right) = -\frac{1}{5.699}\log\left(\frac{40\ 500}{11\ 063}\right) = -0.0989$$

$$\log(a) = \log(S_m) - 3b = \log[40\ 500] - 3(-0.0989): \quad a = 80\ 193 \qquad (i)$$

10. La resistencia a la fatiga en la vida deseada de $N = 2E7$ ciclos se determina ahora con la ecuación de la línea *S-N* corregida:

$$S(N) = aN^b = 80\ 193N^{-0.0989} = 80\ 193(2e7)^{-0.0989} = 15\ 209 \text{ psi} \qquad (j)$$

S(*N*) es mayor que S_f porque tiene una vida más corta que la resistencia a la fatiga publicada.

4

11. Observe el orden de las operaciones. Primero se obtiene la resistencia a la fatiga, sin corregir $S_{f'}$ en algún ciclo de vida "estándar" ($N = 5E8$), luego se corrige para los factores apropiados de las ecuaciones 4.7 (pp. 260-265). Sólo así se obtuvo la ecuación 4.10*a* (p. 268) para la línea *S-N*, de modo que pase por la S_f **corregida** en $N = 5E8$. Si se hubiera creado la ecuación 4.10*a* usando la $S_{f'}$ sin corregir, **resolviéndola** para el ciclo de vida deseado ($N = 2E7$), y **luego** se aplican los factores de corrección, se obtendría un resultado diferente e incorrecto. Como éstas son funciones exponenciales, la superposición no se aplica.
12. Los archivos EX06-02 se encuentran en el CD-ROM.

4.7 MUESCAS Y CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS

Muesca es un término genérico en este contexto y se refiere a cualquier contorno geométrico que afecta el "flujo de fuerza" a través de la pieza, como se describió en la sección 2.15 (p. 116). Una **muesca** es *un orificio, una ranura, un filete, un cambio abrupto de la sección transversal, o bien, cualquier perturbación de los contornos lisos de una pieza*. Las muescas que aquí interesan son aquéllas hechas deliberadamente para obtener características de ingeniería como ranuras para anillos O, filetes en ejes escalonados, orificios de sujeción, etcétera. Se supone que el ingeniero sigue buenas prácticas de diseño y mantiene los radios de tales muescas tan grandes como sea posible, para reducir las concentraciones de esfuerzos, como se describió en la sección 2.15. Las muescas con radios muy pequeños son prácticas de diseño deficientes, por lo que, si están presentes, deberían tratarse como grietas y utilizar los postulados de la mecánica de fractura para predecir fallas (véase las secciones 3.3 en la p. 195 y 4.5 en la p. 245). Una muesca crea una concentración de esfuerzos que aumenta los esfuerzos localmente y que incluso llega a causar fluencia local. En el estudio de concentración de esfuerzos de los capítulos 2 y 3, donde sólo se consideraron cargas estáticas, los efectos de concentración de esfuerzos únicamente se consideraron para materiales frágiles. Se supuso que los materiales dúctiles cederían en la concentración de esfuerzos local y reducirían los esfuerzos a niveles aceptables. Con cargas dinámicas, la situación es diferente, puesto que en las fallas por fatiga los materiales dúctiles se comportan como si fueran frágiles.

Los factores de concentración de esfuerzos geométricos (teóricos) K_t para esfuerzo normal y K_{ts} para esfuerzo cortante se definieron y analizaron en la sección 2.15. (Aquí se refieren ambos como K_t). Tales factores dan una idea del grado de concentración de esfuerzos, en una muesca que tiene un contorno específico, y se utilizan como un multiplicador del esfuerzo nominal, presente en la sección transversal que contiene la muesca (véase la ecuación 2.31, p. 117). Se han determinado muchos de estos *factores de concentración de esfuerzos geométricos o teóricos* para varias cargas y geometrías de piezas; y se publican en varias referencias.[30],[31] Para carga dinámica, se necesita modificar el factor de concentración de esfuerzos teórico de acuerdo con la sensibilidad del

material a la muesca, para obtener un **factor de concentración de esfuerzo de fatiga**, K_f, el cual se pueda aplicar a los esfuerzos dinámicos nominales.

Sensibilidad a la muesca

Los materiales tienen diferente sensibilidad a la concentración de esfuerzos, lo cual se conoce como **sensibilidad a la muesca** del material. En general, cuanto más dúctil sea el material, tendrá menor sensibilidad a la muesca. Los materiales frágiles son más sensibles a la muesca. Como la ductilidad y la fragilidad en los metales están estrechamente relacionadas con la resistencia y la dureza, los materiales blandos de baja resistencia tienden a ser menos sensibles a la muesca que los materiales duros de alta resistencia. La sensibilidad a la muesca también depende del radio de la muesca (el cual es una medida de lo afilado de ésta). Conforme los radios de la muesca se aproximan a cero, **disminuye** la sensibilidad a la muesca de los materiales y también se aproxima a cero. Lo anterior es bastante fortuito, ya que se recordará de la sección 2.15 que el factor de concentración de esfuerzos teórico K_t se aproxima al infinito conforme el radio de la grieta tiende a cero. Si no fuera por la disminución de la sensibilidad a la muesca en los radios que se aproximan a cero (es decir, las grietas), los ingenieros no sabrían diseñar piezas capaces de soportar *cualquier nivel de esfuerzo nominal* cuando están presentes las muescas.

Neuber[32] hizo el primer estudio metódico de los efectos de la muesca y publicó una ecuación para el factor de concentración de esfuerzos de fatiga en 1937. Kuhn[33] revisó más tarde la ecuación de Neuber y desarrolló datos experimentales para la constante de Neuber (una propiedad del material) necesaria en esta ecuación. Peterson[30] refinó posteriormente el procedimiento y desarrolló el concepto de sensibilidad a la muesca q, definido como

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \tag{4.11a}$$

donde K_t es el factor de concentración de esfuerzos teórico (estático) de la geometría particular y K_f es el factor de concentración de esfuerzo por fatiga (dinámico). La sensibilidad a la muesca q varía entre 0 y 1. Esta ecuación se replantea para despejar a K_f.

$$K_f = 1 + q\left(K_t - 1\right) \tag{4.11b}$$

El procedimiento consiste en determinar primero la concentración de esfuerzos teórica K_t para la geometría y carga en particular, luego se establece la sensibilidad a la muesca adecuada para el material seleccionado y se usan en la ecuación 4.11*b* para obtener el factor de concentración de esfuerzos dinámico K_f. El esfuerzo dinámico nominal para cualquier situación se incrementa, entonces, por el factor K_f para esfuerzo por tensión (K_{fs} para el esfuerzo cortante), de la misma manera que se hizo para el caso estático:

$$\begin{aligned} \sigma &= K_f\, \sigma_{nom} \\ \tau &= K_{fs}\, \tau_{nom} \end{aligned} \tag{4.12}$$

En la ecuación 4.11 observe que cuando $q = 0$, $K_f = 1$, lo cual no incrementa el esfuerzo nominal en la ecuación 4.12. Cuando $q = 1$, $K_f = K_t$ y se siente el efecto completo del factor de concentración de esfuerzos geométrico en la ecuación 4.12.

La sensibilidad a la muesca q también se puede definir a partir de la fórmula de Kuhn-Hardrath,[33] en términos de la constante a de Neuber y del radio r de la muesca, ambos expresados en pulgadas.

$$q = \frac{1}{1 + \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \tag{4.13}$$

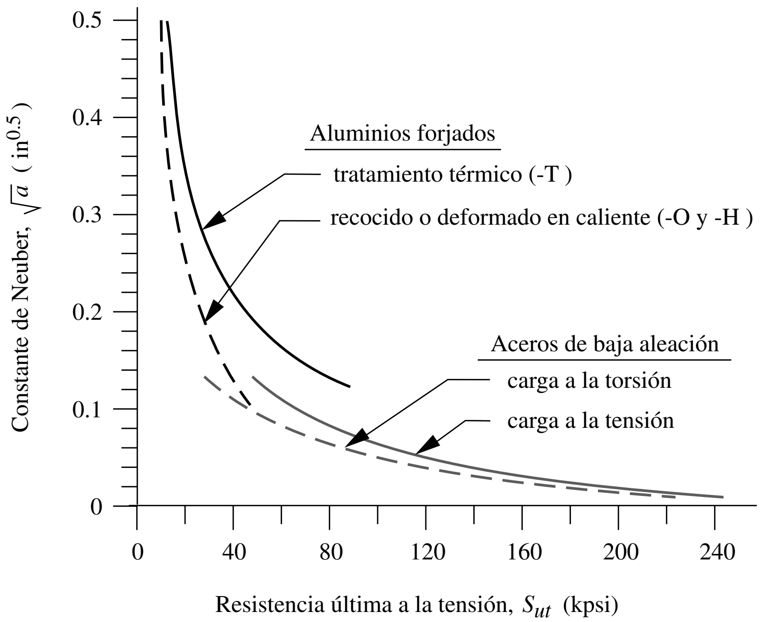


FIGURA 4-35

Constantes de Neuber para acero y aluminio (de *ASME Paper* 843c, "The Prediction of Notch and Crack Strength under Static or Fatigue Loading", por P. Kuhn, abril de 1964)

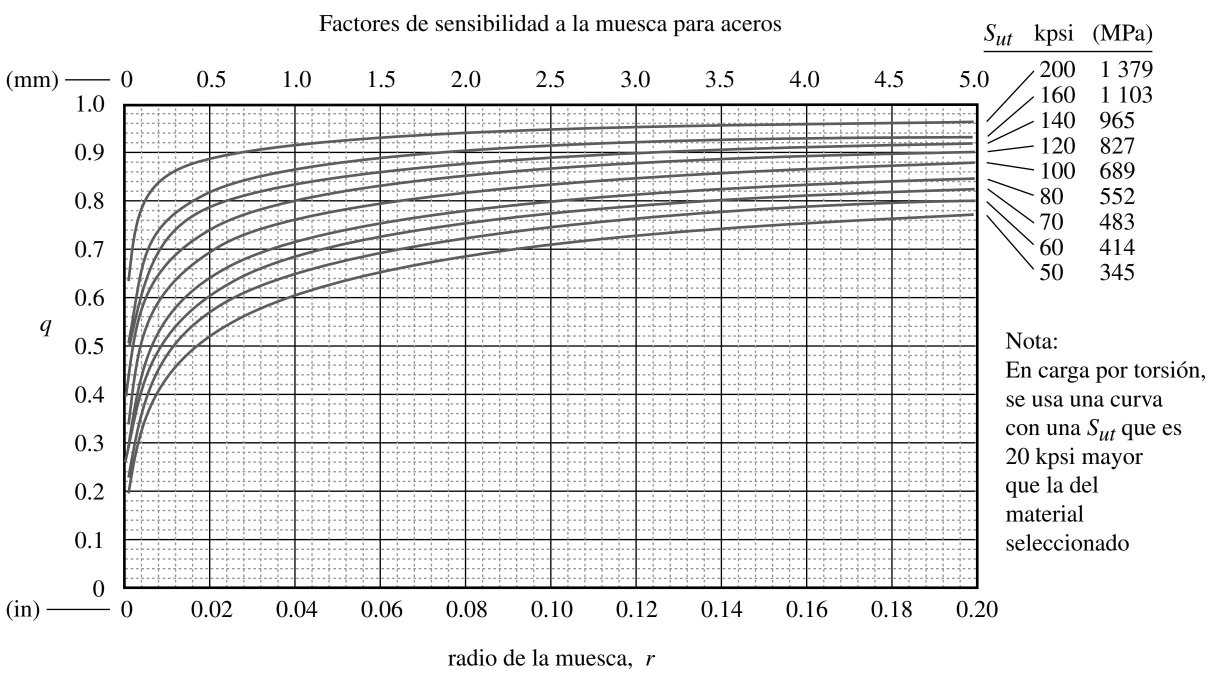
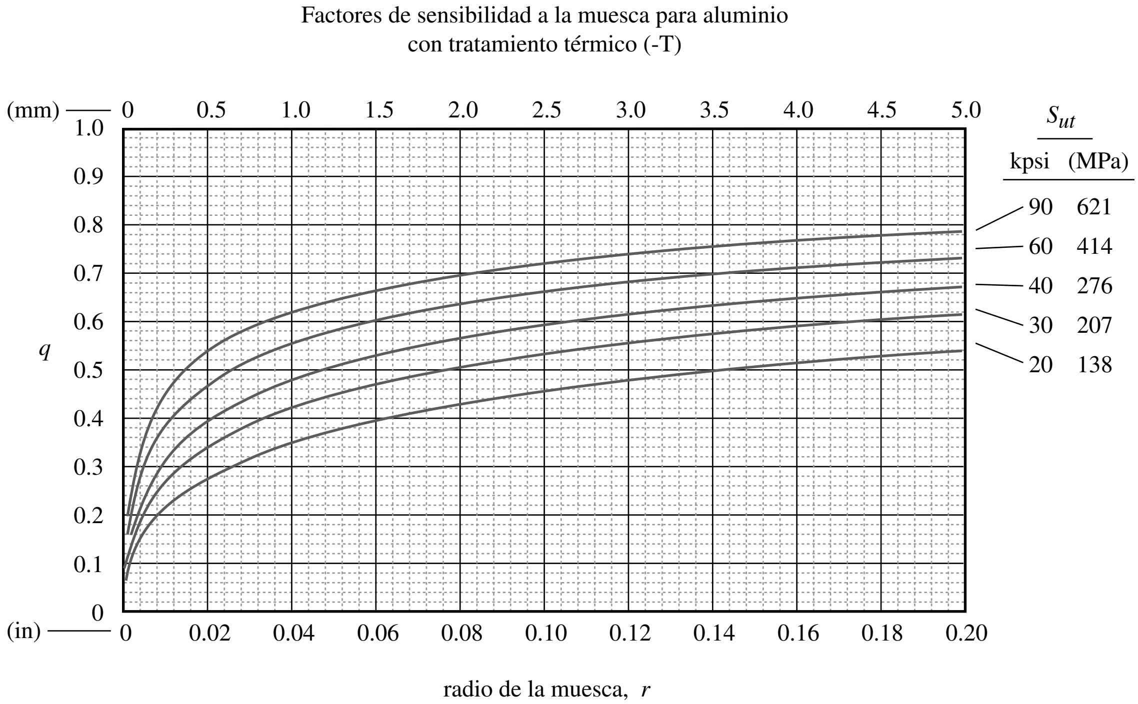


FIGURA 4-36 Parte 1

Curvas de sensibilidad a la muesca para aceros, calculadas a partir de las ecuaciones 4.13 con los datos de la figura 4-35, como lo propuso originalmente R. E. Peterson en "Notch Sensitivity", capítulo 13, en *Metal Fatigue*, por G. Sines y J. Waisman, McGraw-Hill, Nueva York, 1959.



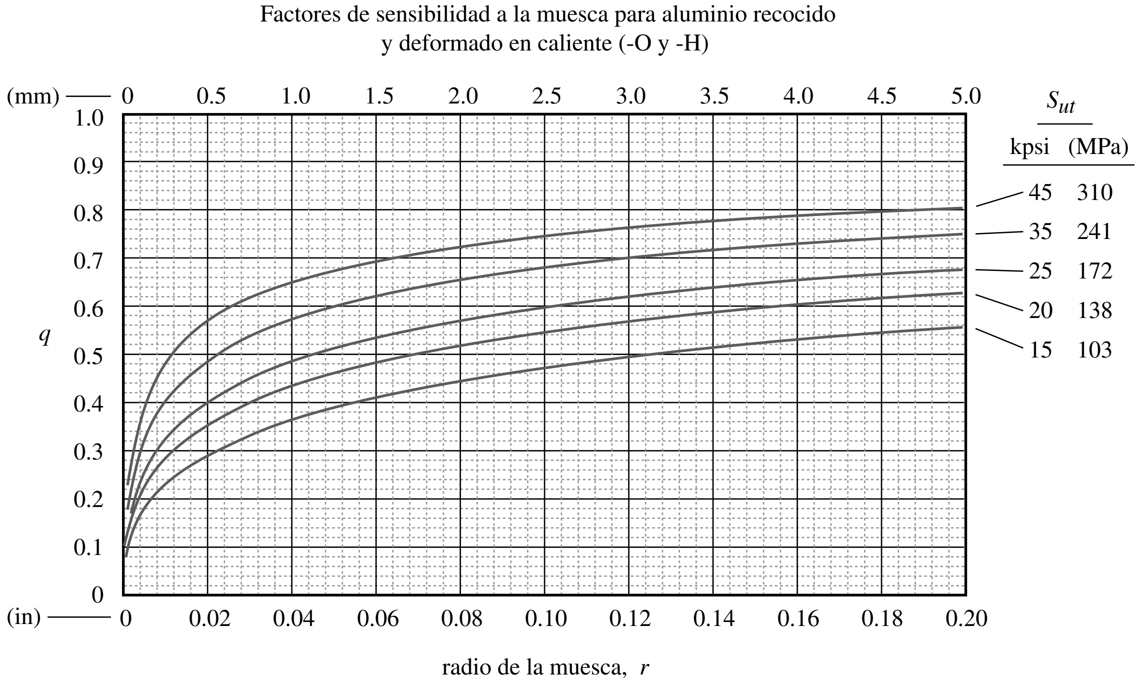


FIGURA 4-36 Parte 2

Curvas de sensibilidad a la muesca para aceros calculadas a partir de las ecuaciones 4.13 con los datos de la figura 4-35, como lo propuso originalmente R. E. Peterson en "Notch Sensitivity", capítulo 13, en *Metal Fatigue*, por G. Sines y J. Waisman, McGraw-Hill, Nueva York, 1959.

Tabla 4-6
Constante de Neuber para aceros

S_{ut} (kspi)	$\sqrt{a}$ (in$^{0.5}$)
50	0.130
55	0.118
60	0.108
70	0.093
80	0.080
90	0.070
100	0.062
110	0.055
120	0.049
130	0.044
140	0.039
160	0.031
180	0.024
200	0.018
220	0.013
240	0.009

Tabla 4-7
Constante de Neuber para aluminio recocido

S_{ut} (kpsi)	$\sqrt{a}$ (in$^{0.5}$)
10	0.500
15	0.341
20	0.264
25	0.217
30	0.180
35	0.152
40	0.126
45	0.111

4

Observe que la constante de Neuber se definió como la raíz cuadrada de a, no como a, de modo que se sustituye directamente en la ecuación 4.13, mientras que para el valor de r se debe obtener la raíz. En la figura 4-35 (página 274) se muestra la gráfica de la constante de Neuber $\sqrt{a}$ para tres tipos de materiales, en tanto que las tablas 4-6 a 4-8 presentan los datos tomados de esa figura. Observe en la figura 4-35 que, para cargas de torsión sobre acero, el valor de $\sqrt{a}$ debe leerse para una S_{ut} 20 kpsi mayor que la del material.

La figura 4-36, partes 1 y 2 (pp. 274 y 275), ilustra conjuntos de curvas de sensibilidad a la muesca para aceros y aluminios (respectivamente), generadas con la ecuación 4.13 con los datos de la figura 4-35. Tales curvas son para muescas cuya profundidad es menor que cuatro veces la raíz del radio y deben usarse con precaución en muescas más profundas.

El valor total del factor K_f de concentración de esfuerzos por fatiga se aplica tan sólo para los valores más altos del régimen de HCF ($N = 10^6 - 10^9$ ciclos). Algunos autores[10],[30],[34] recomiendan aplicar una porción reducida de K_f identificada como $K_{f'}$ para el esfuerzo alternativo en $N = 10^3$ ciclos. Para materiales con resistencias altas o frágiles $K_{f'}$ es aproximadamente igual a K_f, aunque para materiales dúctiles de baja resistencia $K_{f'}$ tiende a 1. Otros autores[35] recomiendan la aplicación del valor total de K_f incluso a 10^3 ciclos. El último enfoque es más conservador, puesto que los datos indican que los efectos de la concentración de esfuerzos son menos pronunciados con N menor. Se adoptará el enfoque conservador y se aplicará K_f de manera uniforme a través del intervalo de HCF, ya que las incertidumbres que rodean los estimados de resistencia a la fatiga y el conjunto de factores que la modifican promueven la cautela.

EJEMPLO 4-3

Determinación de los factores de concentración de esfuerzos por fatiga

Problema **Una barra rectangular escalonada, similar a la que se muestra en la figura 2-36 (p. 120), se carga a la flexión. Determine el factor de concentración de esfuerzos por fatiga para las dimensiones dadas.**

Se proporciona **Mediante la nomenclatura de la figura 2-36, $D = 2$, $d = 1.8$ y $r = 0.25$. El material tiene una $S_{ut} = 100$ kpsi.**

Solución

1. El factor de concentración de esfuerzos geométricos K_t se obtiene a partir de la ecuación de la figura 2-36:

$$K_t = A\left(\frac{r}{d}\right)^b \tag{a}$$

donde A y b se proporcionan en la misma figura como una función de la razón D/d, la cual es 2/1.8 = 1.111. Para esta razón, A = 1.014 7 y b = -0.217 9, lo cual da como resultado

$$K_t = 1.0147\left(\frac{0.25}{1.8}\right)^{-0.2179} = 1.56 \tag{b}$$

2. La sensibilidad a la muesca q del material se obtiene mediante el factor de Neuber $\sqrt{a}$ de la figura 4-35, así como las tablas 4-6 a 4-8 en combinación con la ecuación 4.13 (p. 273), o leyendo q directamente de la figura 4-36. Se aplicará lo primero. El factor de Neuber de la tabla 4-6 para S_{ut} = 100 kpsi es 0.062. Observe que esto es la raíz cuadrada de a:

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1 + \frac{0.062}{\sqrt{0.25}}} = 0.89 \qquad (c)$$

3. Ahora es posible obtener el factor de concentración de esfuerzos por fatiga con la ecuación 4.11*b* (p. 273):

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.89(1.56 - 1) = 1.50 \qquad (d)$$

4. Los archivos EX06-03 se encuentran en el CD-ROM.

Tabla 4-8
Constante de Neuber para aluminio endurecido

S_{ut} (kpsi)	$\sqrt{a}$ (in$^{0.5}$)
15	0.475
20	0.380
30	0.278
40	0.219
50	0.186
60	0.162
70	0.144
80	0.131
90	0.122

4.8 ESFUERZOS RESIDUALES

Los esfuerzos residuales se refieren a los esfuerzos "inherentes" a una pieza sin carga. La mayoría de las piezas tienen algunos esfuerzos residuales, debido a sus procesos de manufactura. Cualquier procedimiento, como el formado o el tratamiento térmico, que crea deformaciones localizadas por arriba del punto de fluencia dejará esfuerzos cuando desaparezca la deformación. Un buen diseño requiere que el ingeniero intente adaptar los esfuerzos residuales para que, como mínimo, no cree efectos negativos sobre la resistencia y preferiblemente cree efectos positivos.

La falla por fatiga es un fenómeno de esfuerzos por tensión. Las figuras 4-17 y 4-18 (pp. 253-254) muestran los efectos benéficos de esfuerzos de compresión medios en la resistencia a la fatiga. Si bien el diseñador tiene poco o ningún control sobre la presencia o la ausencia de esfuerzos compresivos medios en el patrón de carga al que estará sometida la pieza, hay técnicas que permiten la introducción de **esfuerzos residuales compresivos** en una pieza, antes de que se ponga en servicio. Si se hace bien, estos esfuerzos residuales compresivos pueden hacer mejorías significativas en la vida de fatiga. Hay varios métodos para introducir esfuerzos residuales compresivos: **tratamientos térmicos**, **tratamientos superficiales** y **tratamientos de preesfuerzos mecánicos**. La mayoría de ellos originan esfuerzos de compresión biaxiales en la superficie, esfuerzos de compresión triaxiales debajo de la superficie y esfuerzos de tensión triaxiales en el núcleo.

Como la pieza está en equilibrio, los esfuerzos de compresión próximos a la superficie tienen que compensarse con los esfuerzos de tensión en el núcleo. Si se excede el tratamiento, los esfuerzos de tensión crecientes en el núcleo pueden causar falla, de modo que se debe alcanzar el equilibrio. Estos tratamientos son los más valiosos cuando la distribución de esfuerzos aplicados debida a la carga no es uniforme y es de tensión máxima en la superficie, como en la flexión invertida. La flexión en una dirección tendrá un esfuerzo de tensión pico sólo en un lado; por consiguiente, el tratamiento se aplica justamente en ese lado. La carga de tensión axial es uniforme en la sección y, por ello, no se beneficiará con un patrón de esfuerzo residual no uniforme, a menos que haya muescas en la superficie que causen incrementos locales de esfuerzos por tensión. Entonces, los esfuerzos residuales de compresión en la superficie son muy útiles. De hecho, sin tomar en cuenta la carga, el esfuerzo de tensión neto en las muescas se reducirá al agregar esfuerzos de compresión residuales en tales ubicaciones. Como las muescas diseñadas se encuentran por lo general en la superficie, es posible aplicarles un tratamiento.

La introducción deliberada de esfuerzos de compresión residuales es más efectiva en piezas fabricadas con materiales de alta resistencia a la fluencia. Si la resistencia a la fluencia del material es baja, entonces los esfuerzos residuales no permanecerían mucho tiempo en la pieza, debido a la fluencia posterior causada por altos esfuerzos aplicados en servicio. Faires[36] descubrió que los aceros con $S_y < 80$ kpsi presentaron incrementos iniciales, aunque también pequeñas mejoras a largo plazo en la resistencia a la fatiga. No obstante, Heywood[37] informa el 50% de mejora en la resistencia a la fatiga en filetes rolados en acero de alta resistencia.

TRATAMIENTOS TÉRMICOS Los esfuerzos térmicos ocurren siempre que una pieza se calienta y se enfría, como en el formado en caliente o en el tratamiento térmico. En el apéndice B se analizan varios tratamientos térmicos para aceros. *Grosso modo*, se dividen en dos categorías: **endurecimiento completo,** donde *la pieza completa se calienta por arriba de la temperatura de transición, y luego se hace el templado*; y **endurecimiento en cementado,** en el cual sólo *una capa relativamente delgada de la superficie se calienta por encima de la temperatura de transición y templado,* o bien, *la pieza se calienta a una temperatura menor en una atmósfera especial, que agrega elementos de endurecimiento a la superficie.*

El **endurecimiento completo** causa *esfuerzos residuales de tensión* en la superficie. Si la carga sobre la pieza crea esfuerzos de tensión altos en la superficie, como en la flexión o en la torsión, o si las muescas en la superficie de una pieza cargada axialmente causan altos esfuerzos de tensión locales, entonces los esfuerzos de tensión residuales adicionales empeorarán la situación. Esto hace del endurecimiento completo un enfoque menos deseable en tales casos.

El **endurecimiento en cementado** por *carburación, nitruración, por llama* o *endurecimiento por inducción* crea *esfuerzos residuales de compresión* en la superficie, porque el aumento de volumen asociado con el cambio de fase del material (o adiciones de elementos) se localiza cerca de la superficie, mientras el núcleo sin cambios mantiene la parte exterior a compresión. Este esfuerzo de compresión en la superficie puede tener efectos benéficos significativos en la vida de fatiga. A una partícula del material no le importa si el esfuerzo que siente es causado por alguna fuerza externa o por una fuerza residual interna. La partícula siente un esfuerzo neto reducido que ahora es la suma algebraica de los esfuerzos de tensión positivos (aplicado alternativo) y los esfuerzos de compresión negativos (residual medio). Si se va a tratar con calor una pieza cargada a la fatiga, el endurecimiento en cementado ofrece ventajas diferentes sobre el endurecimiento completo. La figura 4-37 muestra los efectos de la nitruración y la carburación sobre el estado de esfuerzos residuales cerca de la superficie, e indica la distribución de los esfuerzos residuales de compresión y de tensión a través del espesor de una pieza carburada.

TRATAMIENTOS SUPERFICIALES Los métodos más comunes para introducir esfuerzos de compresión en la superficie son el **granallado** y el **formado en frío**. Ambos requieren fluencia por tensión de la capa superficial a alguna profundidad. La fluencia parcial de una porción del material causa esfuerzos residuales de signo opuesto a los desarrollados en esa porción, conforme la masa no esforzada subyacente del material intenta forzar al material que ha cedido a regresar a su tamaño original. La regla es *proteger contra los esfuerzos posteriores en una dirección específica, sobreesforzando*

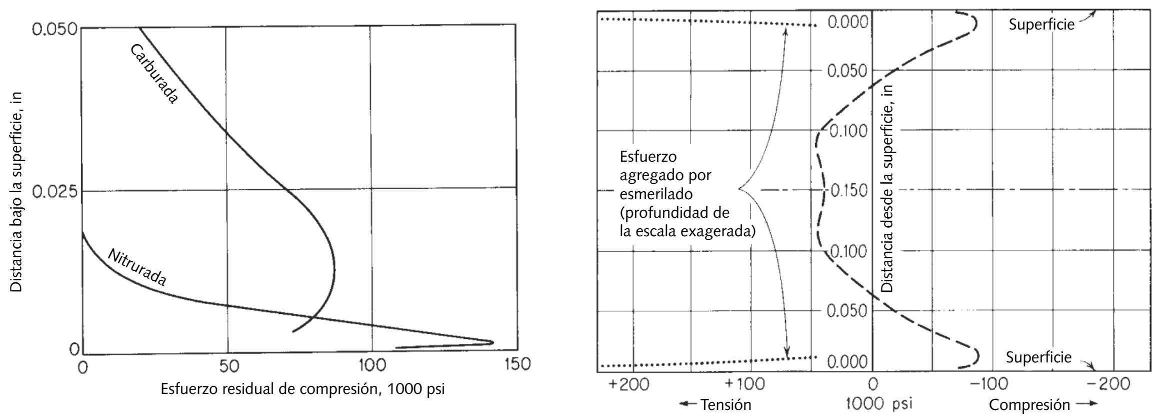


FIGURA 4-37

Distribución de esfuerzos residuales debidos al endurecimiento debido al cementado (de la fig. 5.1, p. 51, y fig. A-13, p. 202, en Almen y Black, 1963, *Residual Stresses and Fatigue Metals*, McGraw-Hill, Nueva York, con autorización)

al material (*es decir, haciéndolo ceder*) *en la misma dirección que lo hará el esfuerzo aplicado.* Como se trata de proteger contra los esfuerzos de tensión en cargas de fatiga, se busca hacer ceder al material con tensión, para desarrollar esfuerzos residuales de compresión. Esta técnica de trabajo en frío de la superficie era conocida por los antiguos herreros, quienes martillaban la superficie de la espada, o los resortes de carruajes cuando estaban fríos como paso final para aumentar su resistencia.

El **granallado*** es relativamente fácil de hacer y se aplica a las piezas de casi cualquier forma. La superficie de la parte es impactada con una ráfaga de granalla (como municiones) hecha de acero, hierro fundido enfriado, vidrio, cerámica, cáscaras de nuez u otro material. La granalla más dura se utiliza sobre piezas de acero; los más blandos, sobre metales no ferrosos blandos. El proyectil se dispara hacia la pieza con gran velocidad usando ya sea una rueda giratoria, o bien, chorros de aire a través de una tobera. Los impactos de las granallas abollan la superficie, haciendo ceder al material y creando la apariencia de hendiduras. Básicamente, la superficie se estira hasta un área más grande, en tanto que el material subyacente la jala de regreso hacia un estado de esfuerzos residuales de compresión. También puede existir algún trabajo en frío de la superficie del material, lo cual incrementará su dureza y su resistencia a la fluencia.

Es posible alcanzar niveles sustanciales de esfuerzos de compresión, hasta aproximadamente el 55% de la resistencia última a la tensión del material.† La profundidad de penetración del esfuerzo compresivo puede ser hasta de 1 mm. Resulta complicado determinar con exactitud el nivel de esfuerzo residual en una pieza tratada con granalla, ya que se destruye al hacerlo. Si se corta una rodaja a una profundidad por debajo de la capa bombardeada, el corte tenderá a acercarse; la cantidad de cercanía es una medida del esfuerzo residual presente. La figura 4-38 presenta la distribución del esfuerzo residual que resulta del granallado en dos aceros, con diferentes resistencias a la fluencia. El esfuerzo de compresión pico ocurre justamente debajo de la superficie y declina muy rápido con la profundidad.

El grado del granallado se mide durante el tratamiento, incluyendo una cinta de prueba *Almen* estándar en un chorro de granallas. La delgada cinta de prueba se mantiene en un accesorio, de modo que tan sólo entra en contacto en uno de sus lados. Cuando se remueve del accesorio, la cinta se enrosca debido a los esfuerzos de compresión sobre un lado. La altura de su curva se convierte a un número Almen, que indica el grado de granallado que recibió la pieza (y la cinta). Si no hubiera datos específicos del nivel de esfuerzo residual presente después del granallado, una manera conservadora de tomar en cuenta su beneficio consiste en definir el factor de superficie $C_{sup} = 1$ in calculando la resistencia a la fatiga corregida con la ecuación 4.8 (p. 267).

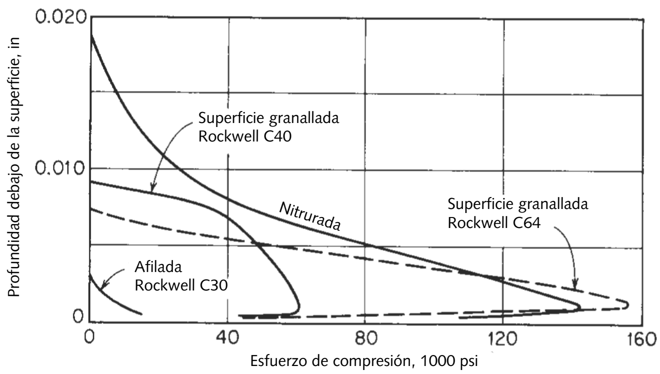


FIGURA 4-38

Distribución de esfuerzos residuales debidos al granallado (de la fig. 5.11, p. 58, de Almen y Black, 1963. *Residual Stresses and Fatigue in Metals*, McGraw-Hill, Nueva York, con autorización)

* Un análisis excelente y definitivo sobre el granallado se encuentra en Leghorn, G., "The Story of Shot Peening", A.S.N.E. Journal, nov., 1957, pp. 653-666, también disponible en http://www.shotpeener.com/learning/story_peening.pdf. Quien esté interesado seriamente en el granallado debería leer este artículo.

Además, el folleto "Shot Peening Applications", 8a. ed., por la Metal Improvement Company, Inc. (www.metalimprovement.com) es un recurso valioso y una referencia sobre granallado.

Otra fuente es una presentación online en http://www.straaltechniek.net/files/straaltechniek_shot_peening_presentation.pdf

† American Gears Manufacturers Association Specification AGMA 938-A05

El **granallado** se utiliza ampliamente en piezas como hojas para sierras eléctricas, cigüeñales, bielas, engranes y resortes.[38] En piezas muy grandes, algunas veces se usa un granallado a **martillo**, en el cual se emplea un martillo neumático manual para impactar porciones muy esforzadas de la superficie (como las raíces de los dientes de engrane) con una esfera endurecida. Las piezas de acero de alta resistencia se benefician más con el granallado, puesto que pueden generar esfuerzos residuales de compresión de hasta 55% aproximadamente de su S_{ut} mayor. Es muy benéfico en las superficies forjadas y roladas en caliente, que son tanto ásperas como débiles por la descarburación. Las piezas chapadas de cromo y níquel pueden restablecer sus niveles de resistencia a la fatiga antes del chapado, si se granallan antes del chapado. Si el granallado se realiza antes del chapado, el resultado no sólo será el efecto negativo del bloqueo del chapado, sino una resistencia a la fatiga mayor que la de la pieza original sin recubrimiento, como se muestra en la figura 4-29 (p. 264). El granallado adecuado de partículas sobre resortes helicoidales puede hacer que sus resistencias a la fatiga se incrementen hasta el punto en el que fallen por fluencia antes de fallar por fatiga,[38] de modo que el bombardeo de proyectiles es evidentemente una técnica útil para mejorar la vida de fatiga o las piezas sometidas a esfuerzos altos y no aumenta excesivamente los costos de producción.

El **forjado con láser** es un desarrollo reciente que usa pulsaciones de láser para forjar hasta 1 m^2 de metal por hora. Cada onda de choque que se genera en el material por el pulso de láser crea esfuerzos de compresión residuales de 1 a 2 mm de profundidad en un área de 25 mm^2, a mayor profundidad que algunas técnicas de forjado por granallado, por lo que se dice que aumenta la vida a la fatiga de 3 a 5 veces más que las técnicas convencionales de forjado con granallado. El forjado con láser es más lento y más costoso que el forjado con granallado, y se usa algunas veces sobre áreas críticas como los bordes en los álabes de una turbina y las raíces de los dientes de engranes, después de que se realiza el forjado con granallado convencional en la totalidad de la pieza.* A diferencia del forjado con proyectiles, el forjado con láser no afecta el acabado de la superficie.

El **formado en frío** se utiliza en superficies de revolución como ejes, en superficies planas que pasan entre rodillos y en el interior de orificios. Por ejemplo, un rodillo endurecido se puede imprimir contra un eje conforme gira en un torno. Las fuerzas grandes causan fluencia local bajo el rodillo, que se convierte en esfuerzos residuales de compresión en la superficie, los cuales la protegerán de los efectos de tensión de la carga de flexión giratoria o de torsión invertida durante el servicio. El formado en frío es particularmente útil en filetes, ranuras o incrementadores de esfuerzo.

Los orificios y barrenos se forman en frío forzando un mandril con un diámetro ligeramente mayor a través del orificio, para expandir el diámetro interior mediante fluencia y crear esfuerzos residuales compresivos. Esto algunas veces se hace en los cañones de las armas de fuego en un proceso llamado **autoludimento**. El autoludimento también se realiza llenando el cañón con un mandril de acero que deja un pequeño ducto circular (como rosquilla), con los extremos cerrados, llenando el espacio con gasolina,† y sometiéndolo a una presión de hasta 200 000 psi. La presión hidrostática hace ceder la superficie interior bajo tensión, creando así esfuerzos de compresión residuales para protegerlo contra la falla por fatiga por los esfuerzos cíclicos de tensión experimentados cuando se dispara el cañón.

Los bordes de los orificios pueden **acuñarse** en cualquier parte haciendo ceder sus bordes con una herramienta cónica para poner esfuerzos de compresión alrededor de la región de concentración de esfuerzos en la superficie. La reducción de las dimensiones del lingote por rolado en frío introduce un esfuerzo de compresión residual en la superficie y de tensión en el núcleo. El rolado en exceso llega a causar agrietamiento por tensión al exceder la resistencia por tensión estática en el centro. El material se puede recocer entre rolados sucesivos para prevenir lo anterior.

PREESFUERZO MECÁNICO El preesfuerzo es una manera útil de crear esfuerzos residuales, en piezas que están cargadas durante el servicio en una sola dirección, como los

* Para mayor información, véase: http://www.llnl.gov/str/March01/Hackel301.html y http://www.geartechnology.com/mag/archive/rev1101.pdf

† La capacidad de algunos líquidos para transmitir presión rápidamente está limitada por el incremento de su viscosidad a presiones altas. Las gasolinas sin plomo y algunos otros líquidos soportan presiones de alrededor de 200 000 psi, sin que se degrade mucho su transmisión de la presión. Algunos fluidos se vuelven sólidos a 100 000 psi. El agua formará hielo-VI a 155 000 psi aproximadamente y tapará el tubo o conducto.
Fuente: D. H. Newhall, Harwood Engineering Inc., Walpole, Mass., comunicación personal, 1994.

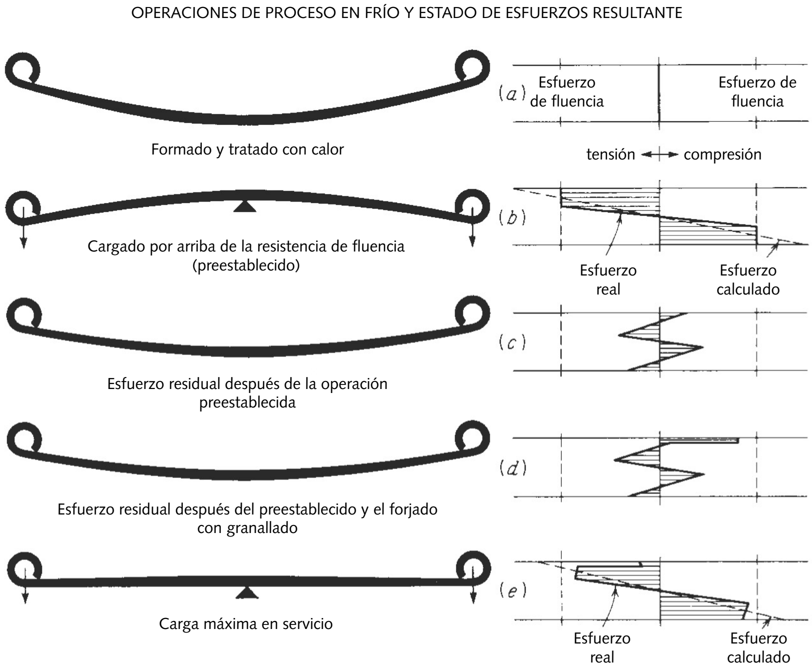


FIGURA 4-39

Esfuerzos residuales debidos a preesfuerzo y un muelle forjado con granallado (de la fig. 6.2, p. 61, en Almen y Black, *Residual Stresses and Fatigue in Metals*, McGraw-Hill, Nueva York, 1963, con autorización)

muelles de soporte en los vehículos. El preesfuerzo se refiere a la sobrecarga deliberada de la pieza en la misma dirección que su carga en servicio, antes de ponerse en servicio. La fluencia que ocurre durante el preesfuerzo crea esfuerzos residuales benéficos.

La figura 4-39 muestra un ejemplo de preesfuerzo aplicado al muelle de un camión. El muelle se formó inicialmente con más contorno del que necesitaba el montaje. Se colocó luego en un accesorio que lo cargara exactamente como si estuviera en servicio, pero en un nivel por arriba de su resistencia a la fluencia (de tensión) para preesforzarlo. Cuando se elimina la carga, resortea de regreso a una nueva forma, la cual es la que se desea para el ensamble. Sin embargo, la recuperación elástica ahora pone al material que se fluencia en un estado de esfuerzo residual, en la dirección opuesta (de compresión) a la de la carga aplicada. Por lo tanto, este esfuerzo residual actuará para proteger la parte contra las cargas de tensión durante el servicio. En la figura se ilustran los patrones de esfuerzo residual y también se indica el resultado del forjado con granallado de la superficie de arriba después del preprogramado. En este caso, los dos tratamientos son aditivos en la superficie de arriba, y brindan una protección mayor contra los esfuerzos por tensión variables durante el servicio. Observe que si se invierte la carga sobre la parte durante el servicio —hasta el punto de fluencia de la superficie de arriba en compresión— se mitigaría el beneficio del esfuerzo de compresión y comprometería la vida de la pieza. Por lo tanto, este procedimiento es más útil en piezas cuyos esfuerzos durante el servicio son unidireccionales.

Resumen Los esfuerzos de tensión residuales quizá sean los "mejores amigos del diseñador a la fatiga". Configurados en forma adecuada, los esfuerzos residuales benéficos pueden dar una seguridad en el diseño que, de otra manera, sería imposible. El diseñador tiene que estar muy familiarizado con los medios existentes para su creación. Esta breve descripción intenta servir tan sólo como introducción a un tema algo complicado, por lo que se le pide al lector que consulte la literatura sobre esfuerzos residuales, alguna de la cual se menciona en la bibliografía del capítulo.

Si se obtienen datos cuantitativos acerca de los niveles de esfuerzos residuales, desarrollados en una pieza determinada (aplicando usualmente pruebas destructivas), entonces tales datos se pueden usar al calcular los niveles de esfuerzos aplicados seguros. En ausencia de dicha información cuantitativa, el diseñador está limitado a considerar el uso de estos tratamientos como proveedores de un factor de seguridad adicional, que se cuantifica burdamente pero en la dirección correcta.

4.9 DISEÑO PARA LA FATIGA DE ALTO CICLO

Ahora se está listo para aplicar toda la información recopilada sobre falla por fatiga *para eliminarla* del diseño de piezas cargadas dinámicamente. Hay cuatro categorías básicas que se pueden tratar por separado, aun cuando, de hecho, tres de ellas son casos especiales del cuarto caso general. Como se verá, el mismo enfoque general para la solución de las cuatro categorías es posible y deseable. Sin embargo, ayudará en la comprensión de las soluciones, si se tratan por separado antes de presentar el método de solución general.

La figura 4-40 muestra las cuatro categorías en una matriz. Las columnas indican la presencia o ausencia de un esfuerzo medio. El caso del ciclo invertido tiene un esfuerzo medio igual a cero y el caso del esfuerzo variable tiene un valor medio diferente de cero. Ambos tienen componentes alternativos. Las filas definen la presencia de componentes de esfuerzos aplicados sobre uno o más ejes. El caso uniaxial representa los casos de carga simple, como la carga axial pura o la flexión pura. El caso multiaxial es general y permite componentes de esfuerzos normales aplicados sobre todos los ejes, en combinación con esfuerzos cortantes aplicados sobre cualquier cara del cubo de esfuerzos. En realidad, los casos de carga pura son raros en la práctica. Más bien, se encontrará alguna combinación de esfuerzos multiaxiales sobre las piezas de máquinas. No obstante, en la práctica a menudo se encuentran tanto los casos de esfuerzos invertidos como los de esfuerzos variables.

Se considerará primero la categoría más simple (I), de esfuerzos uniaxiales de ciclo invertido. Muchos textos subdividen aún más esta categoría en carga de flexión, carga axial y carga de torsión, y presentan por separado cada caso. Se tratará en una sola categoría calculando el esfuerzo efectivo de Von Mises y se comparará con la resistencia a la fatiga por flexión corregida del material elegido. Lo anterior elimina la necesidad de considerar la torsión pura como un caso especial.

A continuación se considerarán los esfuerzos uniaxiales variables (categoría II). Esto agrega la complicación de los esfuerzos medios y se empleará el diagrama de Goodman modificado, además del diagrama *S-N* (más simple). Se utilizará el esfuerzo efectivo de Von Mises para convertir la carga por torsión pura en una forma equivalente de esfuerzo de tensión.

Por último, se investigarán las categorías generales de esfuerzos multiaxiales, tanto del caso de ciclo invertido (III) como el caso de carga fluctuantes (IV); además, se presentará una recomendación del "procedimiento universal" que funcione para todas las categorías de la mayoría de situaciones de carga comunes. La idea es que dicho enfoque simplifique un tema complicado y ofrezca al estudiante un método útil en el diseño de HCF para la mayoría de los casos.

4.10 DISEÑO PARA ESFUERZOS UNIAXIALES TOTALMENTE INVERTIDOS

El ejemplo más sencillo de carga por fatiga es el de la categoría I, del ciclo de esfuerzo uniaxial invertido con un esfuerzo medio igual a cero (véase la figura 4-6*a,* p. 243). Algunas aplicaciones comunes de esta categoría son el eje giratorio con flexión que soporta

	Ciclo de esfuerzos invertidos ($\sigma_m = 0$)	Esfuerzos fluctuantes ($\sigma_m \neq 0$)
Esfuerzos uniaxiales	Categoría I	Categoría II
Esfuerzos multiaxiales	Categoría III	Categoría IV

FIGURA 4-40

Las cuatro categorías de situaciones de diseño para fatiga

una carga estática, o un torque invertido sobre un eje con grandes cargas oscilantes de inercia y un torque medio que es efectivamente cero, comparado con tales oscilaciones. El proceso se describe también con un conjunto de pasos generales:

Pasos de diseño para esfuerzo totalmente invertido con carga uniaxial:

1. Determine el número *N* de ciclos de carga, que la pieza experimentará durante su vida de servicio esperada.
2. Determine la amplitud de las cargas alternativas aplicadas desde cero al pico (ecuación 4.1, p. 244). Observe que una carga estática sobre un eje giratorio causa esfuerzos alternativos.
3. Elabore un diseño geométrico tentativo de la pieza para soportar las cargas aplicadas con base en buenas prácticas de ingeniería. (Véase capítulos 1 y 2.)
4. Determine los factores adecuados K_t (o K_{ts}, de corte) de concentración de esfuerzos geométricos en las muescas de la geometría de la pieza. Intente, desde luego, minimizar esto con un buen diseño. (Véase la sección 2.15, p. 116.)
5. Elija un material tentativo para la pieza y determine sus propiedades de interés, como S_{ut}, S_y, $S_{e'}$ (o $S_{f'}$ para la vida requerida), y q a partir de sus propios datos de prueba, de la literatura existente, o bien, de estimaciones según describió en este capítulo.
6. Convierta los factores K_t (o K_{ts} para el corte) de concentración de esfuerzos geométricos a factores K_f de concentración de fatiga usando la sensibilidad q de la muesca del material.
7. Calcule las amplitudes σ_a (o τ_a si la carga es cortante puro) de los esfuerzos alternativos nominales en ubicaciones críticas de la pieza, debidos a las cargas de servicio alternativas con base en técnicas estándares de análisis de esfuerzos (capítulo 2), e increméntelas tanto como sea necesario con los factores apropiados de concentración de esfuerzos de fatiga (sección 2.15, p. 116 y sección 4.7, p. 272).
8. Calcule las amplitudes del esfuerzo principal para las ubicaciones críticas, según sus estados de esfuerzo aplicados (capítulo 2). Observe que contienen los efectos de concentraciones de esfuerzos. Calcule el esfuerzo efectivo de Von Mises para cada ubicación de interés.
9. Determine los factores adecuados de modificación de resistencia a la fatiga para el tipo de carga, el tamaño de la pieza, la superficie, etcétera, como se describió en la sección 4.6. Observe que el factor de carga C_{carga} diferirá si las cargas son axiales o de flexión (ecuación 4.7*a*, p. 260). Si la carga es torsión pura, entonces el cálculo del esfuerzo efectivo de Von Mises la convertirá en un esfuerzo de pseudotensión; por ello, C_{carga} debería hacerse igual a 1.

10. Defina la resistencia corregida a la fatiga S_f para el ciclo N de vida requerida (o el límite de resistencia S_e corregido para vida infinita, si es necesario) y la resistencia "estática" S_m @ $N = 10^3$ ciclos de la ecuación 4.9 (p. 267). Elabore un diagrama *S-N*, como se muestra en la figura 4-33 (p. 267) y/o escriba la ecuación 4.10 (p. 268) para esta selección tentativa del material.
11. Compare el esfuerzo efectivo de Von Mises alternativo en la ubicación del esfuerzo más alto con la resistencia corregida a la fatiga del material S_n tomada de la curva *S-N* en el número N de ciclos de vida deseados. (Observe que, para casos de vida infinita donde el material presenta una rodilla *S-N*, $S_n = S_e$).
12. Calcule un factor de seguridad para el diseño a partir de la relación,

$$N_f = \frac{S_n}{\sigma'} \tag{4.14}$$

donde N_f es el factor de seguridad a la fatiga; S_n es la resistencia a la fatiga corregida en el número requerido de ciclos de vida, tomados de la curva *S-N* o de la ecuación 4.10 (p. 268), y σ' es el mayor esfuerzo alternativo de Von Mises en cualquier ubicación de la pieza, calculado para incluir todos los efectos de la concentración de esfuerzos.

13. En vista de que el material fue sólo tentativamente seleccionado y que el diseño quizá no esté tan refinado como sea posible, el resultado del primero de los pasos quizá será un diseño deficiente, cuyo factor de seguridad sea muy grande o muy pequeño. Se requiere de iteración (como siempre) para refinar el diseño. Cualquier subconjunto de pasos se puede repetir tantas veces como sea necesario para obtener un diseño aceptable. La táctica más común es regresar al paso 3 y mejorar la geometría de la pieza, con la finalidad de reducir esfuerzos y concentraciones de esfuerzos y/o reabordar el paso 5 para seleccionar un material más adecuado. Algunas veces será posible regresar al paso 1 y volver a definir una vida de la pieza aceptablemente más corta.

    Es posible que las cargas de diseño en el paso 2 no estén bajo el control del diseñador. Por lo general no lo están, a menos que la carga sobre la pieza se deba a fuerzas inerciales; entonces, al incrementar la masa para "agregar resistencia" empeorará la situación, pues esto aumentará las cargas proporcionalmente (véase la sección 1.6, p. 28). En cambio, el diseñador debería aligerar la pieza para disminuir las fuerzas sin comprometer excesivamente su resistencia. Cualesquiera que sean las circunstancias específicas, el diseñador debe aplicar varias veces estos pasos antes de que converjan a una solución aplicable. Los resolvedores de ecuaciones que permiten el cálculo rápido de las ecuaciones son de gran ayuda en esta situación.

La mejor manera de demostrar el uso de estos pasos para el diseño contra la fatiga es mediante un ejemplo.

EJEMPLO 4-4

Diseño de una ménsula en voladizo para flexión totalmente invertida

Problema **Se va a instalar un ensamble de rodillo de alimentación en cada extremo de la ménsula de una máquina sobre el brazo de un soporte en voladizo, como se muestra en la figura 4-41. Los rodillos alimentadores experimentan un ciclo de carga invertida de 1 000 lb de amplitud, deslizándose distancias iguales entre las dos ménsulas de soportes. Diseñe una ménsula en voladizo para resistir sin falla un ciclo de carga de flexión invertida de 500 lb de amplitud para 10^9 ciclos. La deflexión dinámica no debe exceder 0.01 in.**

Se proporciona **La forma de la función carga-tiempo se ilustra en la figura 4-41*a*. El ambiente de operación es aire ambiental con una temperatura máxima de 120 °F. El espacio disponible permite una longitud máxima del voladizo de 6 in. Sólo se requieren 10 de estas piezas.**

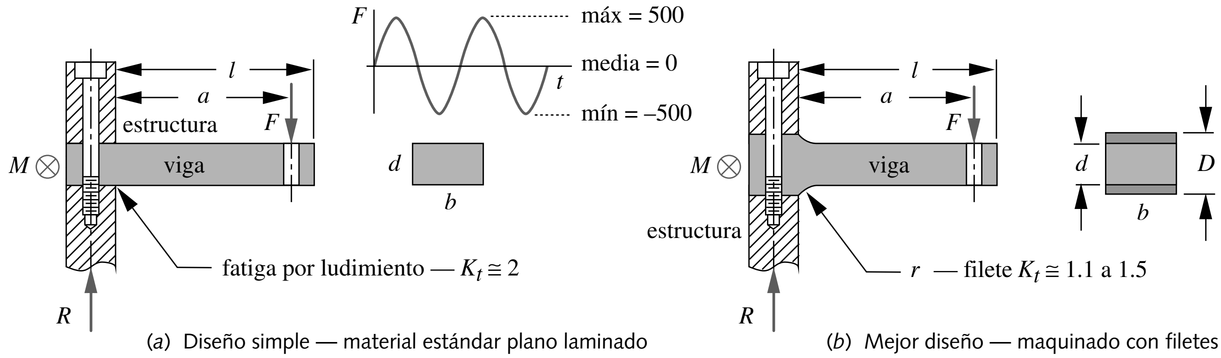


FIGURA 4-41

Diseño de una ménsula en voladizo para una carga de flexión totalmente invertida

Suposiciones **La ménsula puede estar sujeto entre placas esencialmente rígidas o atornillado en su raíz. La carga normal se aplicará en la punta de la viga en voladizo con una varilla sujeta a través de un orificio pequeño en la viga. Como el momento de flexión es efectivamente cero en la punta de la viga, se puede ignorar la concentración de esfuerzos en este orificio. Dada la pequeña cantidad requerida, el maquinado de las formas del material es el método de manufactura elegido.**

Solución **Véase la figura 4-41 y las tablas 4-9 y 4-10 (pp. 288 y 289).**

1. Se trata de un problema de diseño típico. Se dan muy pocos datos, con excepción de la funcionalidad requerida del dispositivo, algunas limitaciones en tamaño y el ciclo de vida requerido. Conforme se avance, se deberán realizar algunas suposiciones básicas acerca de la geometría de la pieza y otros factores. Se espera alguna iteración.

2. Los primeros dos pasos del proceso sugerido anteriormente, la obtención de la amplitud de la carga y el número de ciclos se definen en el planteamiento del problema. Se iniciará en el tercer paso, creando el diseño geométrico tentativo de la pieza.

3. La figura 4-41*a* muestra la configuración del diseño tentativo. Se elige una sección transversal rectangular para facilitar el montaje y la sujeción. Una barra de material rolado en frío en un molino se puede simplemente cortar a la longitud deseada, y taladrarse para tener los barrenos necesarios; luego, se sujeta en el armazón de la estructura. Tal procedimiento parece atractivo en su simplicidad, ya que requiere muy poco maquinado. El acabado de molino sobre los lados es adecuado para esta aplicación. Sin embargo, este diseño tiene algunas desventajas. Las tolerancias del molino sobre el espesor no se ajustan lo suficiente para dar la precisión requerida sobre el espesor, de modo que la pieza alta y la pieza baja deberán maquinarse o esmerilarse a la dimensión adecuada. También las esquinas afiladas en la estructura donde se sujeta causan concentraciones de esfuerzos de aproximadamente $K_t = 2$ y crean asimismo una condición llamada **fatiga por ludimiento** debido a los ligeros movimientos que ocurrirán entre las dos piezas conforme se flexiona la ménsula. Este movimiento desgasta continuamente el revestimiento protector, exponiendo el metal descubierto a la oxidación y acelerando el proceso de falla por fatiga. El ludimiento podría convertirse en un problema aun cuando los bordes de las piezas fueran curvos (radiados).

4. La figura 4.41*b* muestra un diseño mejorado, donde el material salido del molino es más grueso que la dimensión final deseada, y se maquina por arriba y por abajo a la dimensión *D*; luego, se maquina al espesor *d* a lo largo de la longitud *l*. Se le da un filete de radio *r* en el punto de sujeción, con la finalidad de reducir la fatiga por ludimiento y de obtener menor K_t. La figura 2-36 (p. 120) muestra que con un control

adecuado de las razones r/d y D/d para una barra plana escalonada en flexión, el factor de concentración de esfuerzos geométricos K_t se mantiene por debajo de 1.5.

5. Se deben suponer algunas dimensiones de prueba para b, d, D, r, a y l. Se considerarán (supondrán) los valores de $b = 1$ in, $d = 0.75$ in, $D = 0.94$ in, $r = 0.25$, $a = 5.0$ y $l = 6.0$ in para la carga aplicada del primer cálculo. Esta longitud dejará algo de material alrededor del orificio y aun así se ajustará sin dificultad a la longitud restringida de 6 in.

6. Se debe elegir también el material. Para vida infinita, bajo costo y fácil fabricación, es deseable utilizar un acero al carbono, si es posible y si las condiciones ambientales lo permiten. Como esto se usará en un ambiente interior controlado, el acero al carbono es aceptable para el último punto. El hecho de que la deflexión preocupe también es un buen motivo para seleccionar un material con E grande. Los aceros dúctiles al bajo y al medio carbono cumplen con el requisito de resistencia límite de fatiga de articulación de rodilla, para la vida infinita requerida en este caso y también tienen baja sensibilidad a la muesca. Se elige un acero SAE 1040 normalizado con $S_{ut} = 80\,000$ psi para este primer ensayo.

7. La fuerza de reacción y el momento de reacción en el soporte se obtienen mediante las ecuaciones h del ejemplo 4-5. En seguida, se determinan el momento de inercia de la sección transversal, la distancia a la fibra exterior y el esfuerzo flexionante nominal alternativo en la raíz, mediante la amplitud de 500 lb de la carga alternativa.

$$\begin{aligned} R &= F = 500 \text{ lb} \\ M &= Rl - F(l-a) = 500(6) - 500(6-5) = 2\,500 \text{ lb - in} \end{aligned} \tag{a}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{bd^3}{12} = \frac{1(0.75)^3}{12} = 0.035\,2 \text{ in}^4 \\ c &= \frac{d}{2} = \frac{0.75}{2} = 0.375 \text{ in} \end{aligned} \tag{b}$$

$$\sigma_{a_{nom}} = \frac{Mc}{I} = \frac{2\,500(0.375)}{0.035\,2} = 26\,667 \text{ psi} \tag{c}$$

8. Se deben calcular dos razones para usarlas en la figura 2-36 (p. 120) para obtener el factor de concentración de esfuerzos geométricos K_t para las dimensiones supuestas de la pieza.

$$\frac{D}{d} = \frac{0.938}{0.75} = 1.25 \qquad \frac{r}{d} = \frac{0.25}{0.75} = 0.333 \tag{d}$$

$$\text{interpolando} \qquad A = 0.965\,8 \qquad b = -0.266 \tag{e}$$

$$K_t = A\left(\frac{r}{d}\right)^b = 0.965\,8(0.333)^{-0.266} = 1.29 \tag{f}$$

9. La sensibilidad a la muesca q para el material seleccionado se calcula con base en su resistencia última, y el radio de la muesca, con la ecuación 4.13 (p. 273) y los datos de la constante de Neuber de la tabla 4-6 (p. 276).

A partir de la tabla, para $S_{ut} = 80$ kpsi: $\sqrt{a} = 0.08$ $\quad (g)$

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1 + \frac{0.08}{\sqrt{0.25}}} = 0.862 \tag{h}$$

10. Los valores de q y K_t se usan para calcular el factor de concentración de esfuerzos por fatiga K_f, el cual se utiliza en su momento para determinar el esfuerzo alternativo local σ_a en la muesca. Debido a que se trata del caso más sencillo de esfuerzo uniaxial por tensión, el mayor esfuerzo principal alternativo σ_{1a} para este caso es igual al esfuerzo de tensión alternativo, que es el esfuerzo alternativo de von Mises σ'_a. Véase las ecuaciones 2.6 (p. 75) y 3.7*c* (p. 179).

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.862(1.29 - 1) = 1.25 \tag{i}$$

$$\sigma_a = K_f \sigma_{a_{nom}} = 1.25(26\,667) = 33\,343 \text{ psi} \tag{j}$$

$$\tau_{ab} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{33\,343 - 0}{2}\right)^2 + 0} = 16\,672 \text{ psi}$$

$$\sigma_{1_a}, \sigma_{3_a} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \tau_{ab} = 33\,343 \text{ psi, } 0 \text{ psi} \tag{k}$$

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sqrt{33\,343^2 - 33\,343(0) + 0} = 33\,343 \text{ psi}$$

11. El límite de resistencia a la fatiga sin corregir $S_{e'}$ se obtiene de la ecuación 4.5*a* (p. 260). El factor de tamaño para esta pieza rectangular se determina calculando el área de la sección trasversal esforzada arriba del 95% de su esfuerzo máximo (véase la figura 4-25*c*, p. 262) y mediante ese valor en la ecuación 4.7*d* (p. 261) para obtener un diámetro equivalente de la muestra de prueba que se usa en la ecuación 4.7*b* (p. 261) y así obtener $C_{tamaño}$.

$$S_{e'} = 0.5S_{ut} = 0.5(80\,000) = 40\,000 \text{ psi} \tag{l}$$

$$A_{95} = 0.05db = 0.05(0.75)(1) = 0.04 \text{ in}^2$$

$$d_{equiv} = \sqrt{\frac{A_{95}}{0.0766}} = 0.700 \text{ in} \tag{m}$$

$$C_{tamaño} = 0.869\left(d_{equiv}\right)^{-0.097} = 0.900$$

12. El cálculo del límite de resistencia a la fatiga corregido S_e requiere que se determinen varios factores. C_{carga} se obtiene de la ecuación 4.7*a* (p. 260). C_{sup} para un acabado maquinado se determina de la ecuación 4.7*e* (p. 263). C_{temp} se calcula de la ecuación 4.7*f* (p. 265) y C_{conf} se selecciona de la tabla 4-4 (p. 265) para un nivel de confiabilidad de 99.9%.

$$\begin{aligned} &C_{carga} = 1: && \text{para flexión} \\ &C_{sup} = A\left(Sut_{kpsi}\right)^b = 2.7(80)^{-0.265} = 0.845: && \text{maquinado} \\ &C_{temp} = 1: && \text{temperatura ambiente} \\ &C_{conf} = 0.753: && \text{para 99.9\% de confiabilidad.} \end{aligned} \tag{n}$$

El límite corregido de resistencia a la fatiga se obtiene de la ecuación 4.6 (p. 260).

$$\begin{aligned} S_e &= C_{carga} C_{tamaño} C_{sup} C_{temp} C_{conf} S_{e'} \\ &= 1(0.900)(0.845)(1)(0.753)40\,000 = 22\,907 \text{ psi} \end{aligned} \tag{o}$$

Observe que el S_e corregido es de sólo 29% aproximadamente de la S_{ut}.

13. El factor de seguridad se calcula con la ecuación 4.14 (p. 284); en tanto que la deflexión de la viga y se determina con la ecuación (*j*) del ejemplo 2-5 (p. 97).

4

Tabla 4-9 **Ejemplo 4-4 – Diseño de una ménsula en voladizo para ciclo de flexión invertida**
Primera iteración: Diseño sin éxito (archivo EX06-04A)

Entrada	Variable	Salida	Unidad	Comentarios
500	*F*		lb	amplitud de la carga aplicada en el punto *a*
1	*b*		in	ancho de la viga
0.75	*d*		in	profundidad de la viga sobre la longitud
0.94	*D*		in	profundidad de la viga en la pared
0.25	*r*		in	radio del filete
6	*l*		in	longitud de la viga
5	*a*		in	distancia a la carga *F*
6	*lx*		in	distancia para el cálculo de la deflexión
3E7	*E*		psi	módulo de elasticidad
80 000	*Sut*		psi	resistencia última a la tensión
1	*Ccarga*			factor de carga para flexión
	Csup	0.85		acabado maquinado
1	*Ctemp*			temperatura ambiente
0.753	*Cconf*			factor de confiabilidad de 99.9%
	R	500	lb	fuerza de reacción en el soporte
	M	2 500	in-lb	momento de reacción en el soporte
	I	0.035 2	in^4	momento de inercia de área
	c	0.38	in	distancia a la fibra exterior
	signom	26 667	psi	esfuerzo por flexión en la raíz
	D/d	1.25		razón del ancho de la barra 1.01 < *D/d* < 2
	r/d	0.33		razón del radio al diámetro pequeño
	Kt	1.29		factor de concentración de esfuerzos geométricos
	q	0.86		factor de Peterson de sensitividad a la muesca
	Kf	1.25		factor de concentración de esfuerzos por fatiga
	sigx	33 343	psi	esfuerzo concentrado en la raíz
	sig1	33 343	psi	mayor esfuerzo alternativo principal
	sigma-vm	33 343	psi	esfuerzo alternativo de von Mises
	Seprime	40 000	psi	límite de resistencia a la fatiga sin corregir
	A95	0.04	in^2	área de esfuerzo de 95%
	d-equivalente	0.7	in	diámetro equivalente de la muestra de prueba
	Ctamaño	0.9		factor de tamaño con base en el 95% del área
	Se	22 907	psi	límite de resistencia a la fatiga corregido
	N_{sf}	0.69		factor de seguridad pronosticado
	y	–0.026	in	deflexión en el extremo de la viga

Tabla 4-10 Ejemplo 4-4 – Diseño de una ménsula en voladizo para ciclo de flexión invertida
Iteración final: Diseño exitoso (archivo EX06-04B)

Entrada	Variable	Salida	Unidad	Comentarios
500	*F*		lb	amplitud de la carga aplicada en el punto *a*
2	*b*		in	ancho de la viga
1	*d*		in	profundidad de la viga sobre la longitud
1.125	*D*		in	profundidad de la viga en la pared
0.5	*r*		in	radio del filete
6	*l*		in	longitud de la viga
5	*a*		in	distancia a la carga *F*
6	*lx*		in	distancia para el cálculo de la deflexión
3E7	*E*		psi	módulo de elasticidad
80 000	*Sut*		psi	resistencia última a la tensión
1	*Ccarga*			factor de carga para flexión
	Csup	0.85		acabado maquinado
1	*Ctemp*			temperatura ambiente
0.753	*Cconf*			factor de confiabilidad de 99.9%
	R	500	lb	fuerza de reacción en el soporte
	M	2 500	in-lb	momento de reacción en el soporte
	I	0.166 7	in^4	momento de inercia de área
	c	0.5	in	distancia a la fibra exterior
	signom	7 500	psi	esfuerzo por flexión en la raíz
	D/d	1.13		razón del ancho de la barra 1.01 < *D/d* < 2
	r/d	0.50		razón del radio al diámetro pequeño
	Kt	1.18		factor de concentración de esfuerzos geométricos
	q	0.90		factor de Peterson de sensitividad a la muesca
	Kf	1.16		factor de concentración de esfuerzos por fatiga
	sigx	8 688	psi	esfuerzo concentrado en la raíz
	sig1	8 688	psi	mayor esfuerzo alternativo principal
	sigma-vm	8 688	psi	esfuerzo alternativo de von Mises
	Seprime	40 000	psi	límite de resistencia a la fatiga sin corregir
	A95	0.10	in^2	área de esfuerzo de 95%
	d-equiv	1.14	in	diámetro equivalente de la muestra de prueba
	Ctamaño	0.86		factor de tamaño con base en el 95% del área
	Se	21 843	psi	límite de resistencia a la fatiga corregido
	N_{sf}	2.5		factor de seguridad pronosticado
	y	–0.005	in	deflexión en el extremo de la viga

4

$$N_f = \frac{S_n}{\sigma'} = \frac{22\,907}{33\,343} = 0.69 \tag{p}$$

$$y = \frac{F}{6EI}\left[x^3 - 3ax^2 - \langle x-a\rangle^3\right]$$

$$y_{@\,x=l} = \frac{500}{6(3E7)(0.0352)}\left[6^3 - 3(5)(6)^2 - (6-5)^3\right] = -0.026 \text{ in} \tag{q}$$

14. Los resultados de todos los cálculos para el primer diseño supuesto se presentan en la tabla 4-9 (p. 288). La deflexión de 0.026 in no está dentro de la especificación establecida y el diseño falla cuando el factor de seguridad es menor que uno. De modo que se necesitan más iteraciones, como era de esperarse. Se puede cambiar cualquiera de las dimensiones, al igual que el material. El material no se modificó, pero se incrementaron las dimensiones de la sección transversal de la viga y el radio de la muesca, y se volvió a correr el modelo (lo cual sólo tomó unos cuantos minutos) hasta que se lograron los resultados mostrados en la tabla 4-10 (p. 289).
15. Las dimensiones finales son $b = 2$ in, $d = 1$ in, $D = 1.125$ in, $r = 0.5$, $a = 5.0$ y $l = 6.0$ in. El factor de seguridad es ahora de 2.5 y la deflexión máxima es de 0.005 in. En este caso, ambos son satisfactorios. Observe el factor de concentración de esfuerzos por fatiga tan bajo de $K_f = 1.16$. Se eligió de manera deliberada la dimensión D ligeramente menor que el tamaño estándar del material, de modo que el material se pudiera limpiar y quedar listo para el nivel de las superficies del montaje. Con este diseño también se puede usar acero rolado en caliente (HRS), en vez del acero rolado en frío (CRS) supuesto inicialmente (figura 4-41*a*, p. 285). El acero rolado en caliente es menos costoso que el CRS y, si se normaliza, tiene menos esfuerzos residuales, aunque su superficie áspera y descarburada necesita eliminarse maquinándola completamente, o bien, tratarla con granallado para hacerla resistente.
16. Los archivos EX06-04 se encuentran en el CD-ROM.

El ejemplo anterior debería demostrar que el diseño para el ciclo de carga invertido es claro y conciso, una vez que se entienden los fundamentos. Si el diseño es para ciclo de torsión invertida, flexión giratoria o carga axial, el procedimiento sería el mismo de este ejemplo. Las únicas diferencias estarían en la elección de las ecuaciones de esfuerzo y los factores de modificación de la resistencia, como se describió en las secciones anteriores. Observe que el cálculo de los esfuerzos principal y de von Mises es algo redundante en este ejemplo sencillo, ya que ambos son idénticos al esfuerzo aplicado. Sin embargo, esto se hace en favor de la consistencia, ya que tales esfuerzos no serán idénticos en casos de esfuerzos aplicados más complicados. El valor al usar una computadora y un resolvedor de ecuaciones en este o en cualquier problema de diseño no debe exagerarse, ya que permiten iteraciones rápidas partiendo de suposiciones iniciales hasta obtener las dimensiones finales con un esfuerzo mínimo.

4.11 DISEÑO PARA ESFUERZOS UNIAXIALES FLUCTUANTES

Los esfuerzos repetidos o variables como los mostrados en las figuras 4-6*b* y *c* (p. 243) tienen componentes medios diferentes de cero y éstas deben tomarse en cuenta al determinar el factor de seguridad. Las figuras 4-16 (p. 252), 4-17 (p. 253), 4-18 (p. 254), y 4-21 (p. 257) muestran todas evidencia experimental del efecto de las componentes del esfuerzo medio sobre la falla, cuando están presentes en combinación con esfuerzos alternativos. Esta situación es bastante común en maquinaria de cualquier tipo.

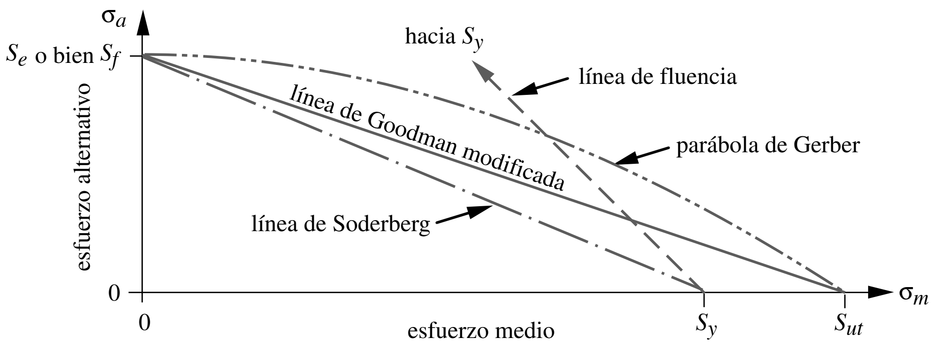


FIGURA 4-42

Varias líneas de falla para esfuerzos fluctuantes

La figura 4-42 muestra la **línea de Goodman modificada**, **la parábola de Gerber, la línea de Soderberg** y la **línea de fluencia** graficadas sobre los ejes σ_m-σ_a. La parábola de Gerber es la que mejor se ajusta a los datos de falla experimentales; mientras que la línea de Goodman modificada se ajusta por debajo de la dispersión de los datos, como se muestra en la figura 4-16, la cual superpone tales líneas sobre los puntos de falla experimentales. Ambas líneas interceptan el límite de resistencia a la fatiga corregido S_e o la resistencia a la fatiga S_f sobre el eje σ_a con la S_{ut} sobre el eje σ_m. También se presenta una línea de fluencia que conecta S_y sobre ambos ejes y sirve como el límite del primer ciclo de esfuerzo. (Si la pieza cede, falla, sin importar su seguridad a la fatiga). La línea de Soderberg conecta S_e o S_f con la resistencia a la fluencia S_y y es, por lo tanto, un criterio de falla más conservador, pero descarta la necesidad de ayudarse con la línea de fluencia. Por lo demás, también elimina combinaciones seguras de σ_m-σ_a, como se observa en la figura 4-16 (p. 252). Cualquiera de las líneas que se elija para representar fallas, las combinaciones seguras de σ_m y σ_a se encuentran a la izquierda y debajo de su envoltura. Estas líneas de falla están definidas por

Parábola de Gerber: $$\sigma_a = S_e\left(1-\frac{\sigma_m^2}{S_{ut}^2}\right) \qquad (4.15a)$$

Línea de Goodman modificada: $$\sigma_a = S_e\left(1-\frac{\sigma_m}{S_{ut}}\right) \qquad (4.15b)$$

Línea de Soderberg: $$\sigma_a = S_e\left(1-\frac{\sigma_m}{S_y}\right) \qquad (4.15c)$$

Aun cuando la parábola de Gerber se ajuste bien a los datos experimentales, haciéndola útil para el análisis de piezas que fallan, la línea de Goodman modificada es un criterio de falla más conservador y se usa más frecuentemente cuando se diseñan piezas sometidas a esfuerzos medios y alternativos positivos. La línea de Soderberg se utiliza con menos frecuencia, en vista de que es demasiado conservadora. Se explorarán ahora las aplicaciones de la línea de Goodman modificada con mayor detalle.

Elaboración del diagrama de Goodman modificado

La figura 4-43*a* muestra una presentación esquemática de la superficie tridimensional formada por la componente del esfuerzo alternativo σ_a, la componente del esfuerzo medio σ_m y el número de ciclos N para un material que tiene una rodilla de límite de resistencia a la fatiga en 10^6 ciclos. Si se observa el plano σ_a-N como el mostrado en la figura 4-43*b*, se observan proyecciones de líneas sobre la superficie que son diagramas *S-N* de

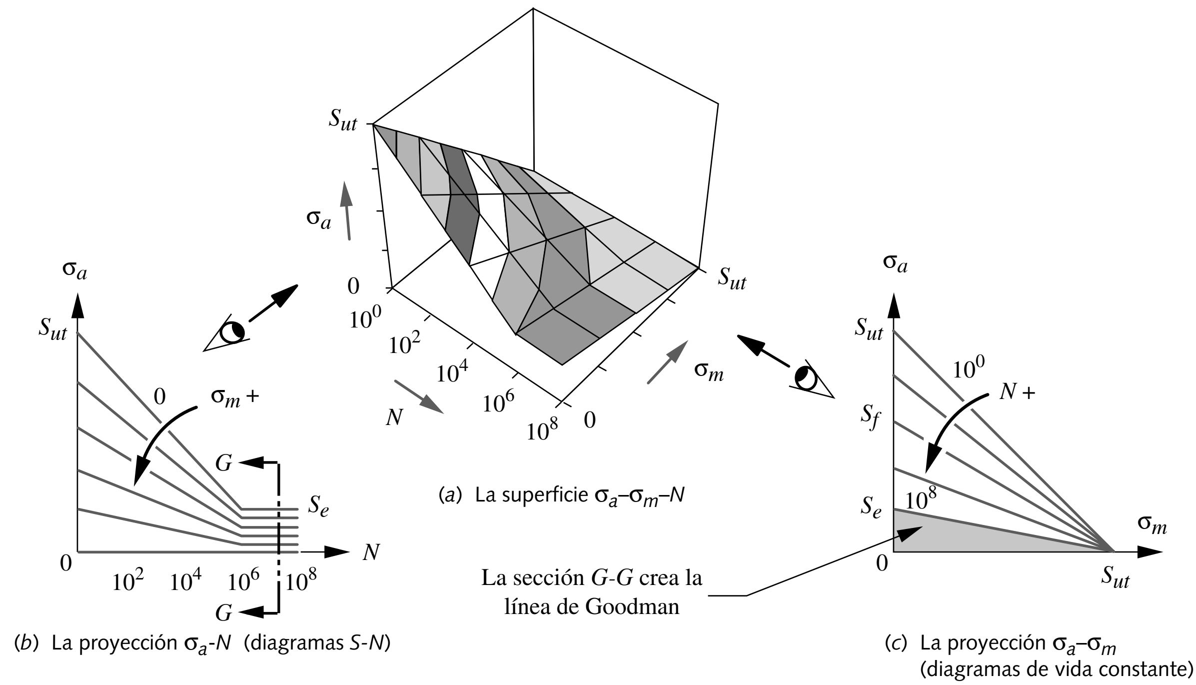


FIGURA 4-43

Efecto de la combinación de los esfuerzos medio y alternativo

varios niveles de esfuerzo medio. Cuando $\sigma_m = 0$, el diagrama *S-N* es la línea superior que conecta S_{ut} con S_e, como se muestra también en las figuras 4-2 (p. 235) y 4-8 (p. 247). Conforme se incrementa σ_m, se reduce la intercepción de σ_m en $N = 1$ ciclo, volviéndose cero cuando $\sigma_m = S_{ut}$.

La figura 4-43*c* ilustra proyecciones sobre el plano σ_a-σ_m para diversos valores de *N*. Esto se conoce como **diagrama de vida constante**, ya que cada línea sobre él muestra la relación entre el esfuerzo medio y el esfuerzo alternativo en un ciclo de vida específico. Cuando $N = 1$, la gráfica es una línea de 45° que conecta la S_{ut} en ambos ejes. Esto da una línea de falla estática. La intercepción con σ_a disminuye conforme *N* se incrementa, y se iguala al límite de resistencia a la fatiga S_e más allá de aproximadamente 10^6 ciclos. La línea que conecta S_e sobre el eje σ_a y S_{ut} sobre el eje σ_m en la figura 4-43*c* es la **línea de Goodman modificada**, tomada en la sección *G-G,* como se indica en la figura 4-43*a*.

La figura 4-44 muestra una gráfica de esfuerzo alternativo σ_a contra el esfuerzo medio σ_m a la cual se refiere como **diagrama de Goodman modificado*** "aumentado". Se trata de un embellecimiento de la línea de Goodman modificada presentada en las figuras 4-16 (p. 252) y 4-42. Se incluyen las líneas de fluencia y la región de esfuerzo de compresión. Se observan varios puntos de falla. Sobre el eje (σ_m) del esfuerzo medio, la resistencia a la fluencia S_y y la resistencia última a la tensión S_{ut} de un material particular están definidas en los puntos *A*, *E* y *F*. Sobre el eje (σ_a) del esfuerzo alternativo, la resistencia a la fatiga corregida S_f en algún número de ciclos (o el límite de resistencia a la fatiga corregido S_e) y la resistencia a la fluencia S_y del material específico están definidos en los puntos *C* y *G*. Observe que por lo general este diagrama representa una sección como *G-G* de la superficie tridimensional de la figura 4-43. Es decir, el diagrama modificado de Goodman usualmente se dibuja para vida infinita o para un caso de ciclos muy altos ($N > 10^6$). No obstante, se puede dibujar también para cualquier sección a lo largo del eje *N* de la figura 4-43, que representa una situación de menor vida finita.

* El diagrama original de Goodman graficaba la relación entre los esfuerzos medio y alternativo sobre un conjunto de ejes, diferente del mostrado aquí, e incluía el supuesto de que el límite de fatiga era 1/3 S_{ut}. El procedimiento original de Goodman rara vez se usa actualmente. J. O. Smith[46] sugirió la representación de la línea de Goodman que se ilustra en la figura 4-42, la cual se conoce como diagrama de Goodman modificado. La versión de Smith no mostraba la línea de fluencia o la región de compresión, como se indica en la figura 4-44; de ahí el uso del término "aumentado" para destacar la suma de esa información en el diagrama. No obstante, se refiere a ella como el diagrama de Goodman modificado o sólo como MGD por simplicidad. Asimismo, las referencias a la "línea de Goodman" se deberían entender aquí como la abreviatura de la "línea de Goodman modificada" y no como una referencia a la versión original de Goodman.

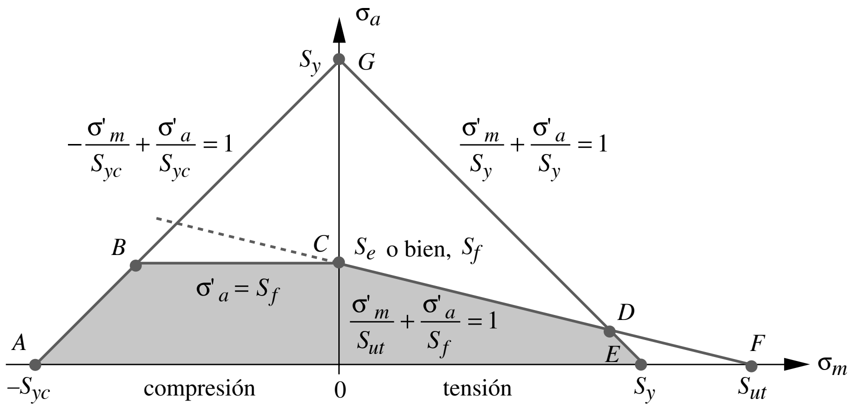


FIGURA 4-44

Diagrama de Goodman modificado "aumentado"

Las líneas de falla se trazan uniendo varios puntos del diagrama. La línea *CF* es la línea de Goodman y puede extenderse hacia la región de compresión (mostrada con puntos), con base en datos empíricos como los mostrados en la figura 4-17 (p. 253). Sin embargo, convencionalmente se traza la línea horizontal más conservadora *CB* para representar una línea de falla en la región de compresión. Esto, en efecto, anula los efectos benéficos del esfuerzo medio de compresión y considera una situación idéntica al caso del ciclo invertido de la sección anterior.†

En la región de tensión, la línea *GE* define la fluencia estática, en tanto que la envoltura de falla está definida por las líneas *CD* y *DE* para tomar en cuenta la posibilidad de una falla por fatiga o por fluencia. Si la componente media del esfuerzo es muy grande y la componente alternativa muy pequeña, la combinación podría definir un punto en la región *DEF* que es seguro considerando la línea de Goodman, pero que cedería en el primer ciclo. La envoltura de falla está definida por las líneas que rodean la zona sombreada identificada como *ABCDEA*. Cualquier combinación de esfuerzos alternativo y medio que se encuentre dentro de esa envoltura (es decir, dentro del área sombreada) será segura. Las combinaciones que se encuentran sobre esas líneas están en proceso de falla, y afuera de la envoltura fallarán.

Para determinar el factor de seguridad de cualquier estado de esfuerzos variable, se necesitan las expresiones de las líneas que forman la envoltura de falla mostrada en la figura 4-44. La línea *AG* define la fluencia a la compresión y es

$$-\frac{\sigma'_m}{S_{yc}} + \frac{\sigma'_a}{S_{yc}} = 1 \tag{4.16a}$$

En combinación con el esfuerzo medio de compresión, la línea *BC* define la falla por fatiga y es:

$$\sigma'_a = S_f \tag{4.16b}$$

En combinación con el esfuerzo medio de tensión, la línea *CF* define la falla por fatiga y es:

$$\frac{\sigma'_m}{S_{ut}} + \frac{\sigma'_a}{S_f} = 1 \tag{4.16c}$$

† Un caso de carga donde el esfuerzo medio σ_m sea negativo debería manejarse suponiendo que $\sigma_m = 0$, con lo que se convertiría en un caso de ciclo de esfuerzo invertido que se resuelve con los métodos de la sección 4.10. Éste es el enfoque que se prefiere, porque si se incluye un esfuerzo medio negativo en el cálculo del esfuerzo de Von Mises efectivo, se tendrá un factor de seguridad demasiado conservador debido a la elevación al cuadrado del valor del esfuerzo medio negativo en el cálculo. La suposición de un esfuerzo medio negativo igual a cero todavía es conservadora, porque al hacerlo se ignoran sus efectos benéficos potenciales mostrados en la figura 4-17 (p. 253).

La línea *GE* define la fluencia por tensión y es

$$\frac{\sigma'_m}{S_y} + \frac{\sigma'_a}{S_y} = 1 \tag{4.16d}$$

Estas ecuaciones se muestran en la figura 4-44.

Aplicación de los efectos de concentración de esfuerzos con esfuerzos fluctuantes

La componente alternativa de esfuerzo se trata del mismo modo como se hace en el caso del ciclo de esfuerzo invertido (véase el ejemplo 4-3). Es decir, se obtiene el factor de concentración de esfuerzos geométrico K_t, se determina la sensibilidad a la muesca del material q, y se usan luego en la ecuación 4.11*b* (p. 273) para obtener el factor de concentración de esfuerzos por fatiga K_f. Se calcula entonces el valor local de σ_a con la ecuación 4.12 (p. 273) para usarlo en el diagrama de Goodman modificado.

La componente media del esfuerzo σ_m se trata de manera diferente, dependiendo de la ductilidad o fragilidad del material y, si es dúctil, de la cantidad de fluencia posible en la muesca. Si el material es quebradizo, entonces se aplica comúnmente el valor total de la concentración de esfuerzos geométrica K_t al esfuerzo medio nominal $\sigma_{m_{nom}}$ para obtener el esfuerzo local medio σ_m en la muesca, mediante la ecuación 2.31 (p. 117). Si el material es dúctil, Dowling[40] sugiere uno de los tres procedimientos de Juvinall[41] dependiendo de la relación de los esfuerzos locales máximos con la resistencia a la fluencia del material dúctil.

El factor de concentración de fatiga del esfuerzo medio K_{fm} se define con base en el nivel del esfuerzo medio local σ_m en la concentración de esfuerzos contra la resistencia a la fluencia. La figura 4-45*a* muestra una situación generalizada de esfuerzo variable. La figura 4-45*b* describe la ubicación de la fluencia que ocurriría alrededor de una concentración de esfuerzos. Para este análisis, se supone una relación de esfuerzo-deformación *elástica perfectamente plástica*, como la mostrada en el inciso *c*. Según la relación entre $\sigma_{máx}$ y la resistencia a la fluencia S_y del material, existen tres posibilidades. Si $\sigma_{máx} < S_y$, no ocurrirá la fluencia (véase la figura 4-45*d*) y el valor total de K_f se usa para K_{fm}.

Si $\sigma_{máx} > S_y$ pero $|\sigma_{mín}| < S_y$, la fluencia local ocurre durante el primer ciclo (figura 4-45*e*), después de lo cual el esfuerzo máximo no puede exceder S_y. El esfuerzo local en la concentración se mitiga y se utiliza un valor menor de K_{fm} como se define en la figura 4-45*g*, la cual grafica la relación entre K_{fm} y $\sigma_{máx}$.

La tercera posibilidad es que el intervalo del esfuerzo $\Delta\sigma$ exceda $2S_y$, causando fluencia invertida, como se ilustra en la figura 4-45*f*. Ahora los esfuerzos máximo y mínimo son iguales a $\pm S_y$ y el esfuerzo medio se vuelve cero (véase la ecuación 4.1*c*, p. 244), haciendo $K_{fm} = 0$.

Estas relaciones se resumen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\text{si } K_f\left|\sigma_{máx_{nom}}\right| < S_y \text{ entonces:} && K_{fm} = K_f \\
&\text{si } K_f\left|\sigma_{máx_{nom}}\right| > S_y \text{ entonces:} && K_{fm} = \frac{S_y - K_f\sigma_{a_{nom}}}{\left|\sigma_{m_{nom}}\right|} \\
&\text{si } K_f\left|\sigma_{máx_{nom}} - \sigma_{mín_{nom}}\right| > 2S_y \text{ entonces:} && K_{fm} = 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Se usan los valores absolutos para tomar en cuenta tanto casos de compresión como de tensión. El valor del esfuerzo medio local σ_m que se utiliza en el diagrama de Goodman

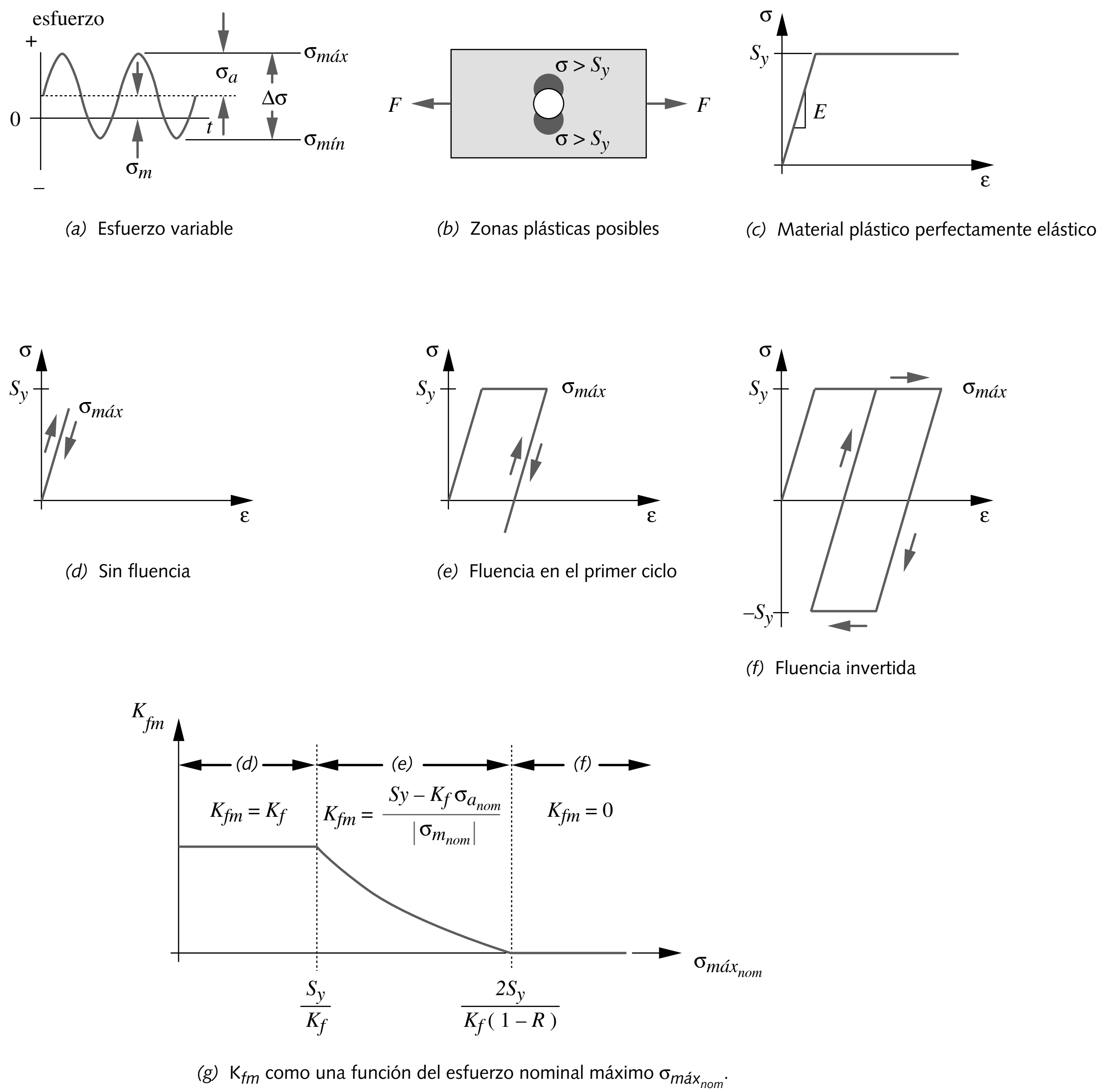


FIGURA 4-45

Variación del factor de concentración del esfuerzo medio con esfuerzo máximo en materiales dúctiles, con posibilidad de fluencia local (adaptado de la fig. 10-14, p. 415, N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993, con autorización)

modificado se obtiene entonces con la ecuación 4.12 (p. 273) sustituyendo K_{fm} por K_f. Observe que los factores de concentración de esfuerzos se deberían aplicar a los esfuerzos nominales aplicados, sean éstos normales o de corte.

Los esfuerzos aplicados locales (con sus efectos de concentración de esfuerzos por fatiga) sirven para calcular los esfuerzos alternativo y medio de Von Mises. Estos cálculos se hacen por separado para las componentes alternativa y media σ'_a y σ'_m. (Véase las ecuaciones 4.22*a* y 4.22*b*, p. 309). Usaremos estas componentes de Von Mises para obtener el factor de seguridad.

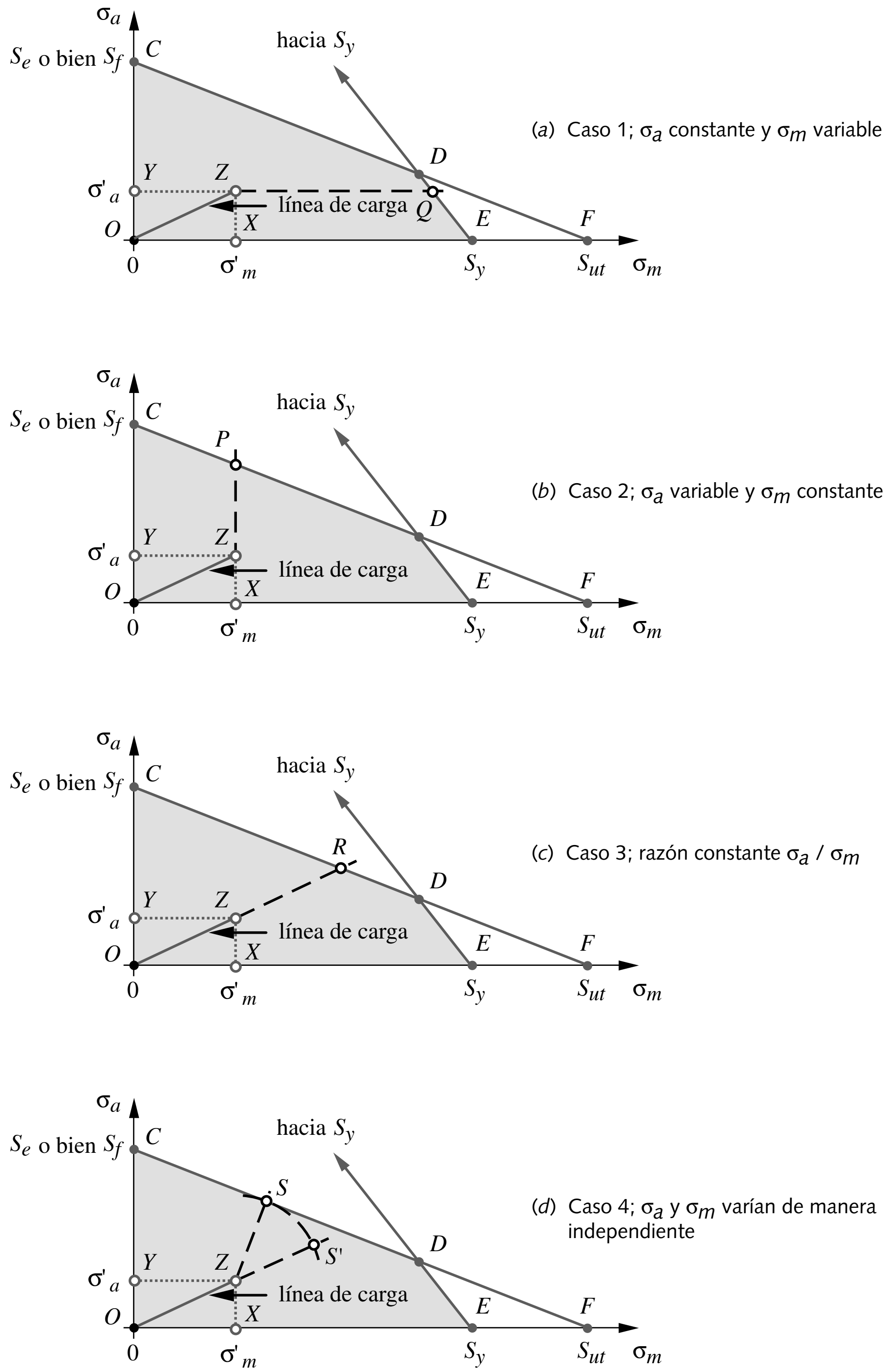


FIGURA 4-46

Factores de seguridad a partir del diagrama de Goodman modificado para cuatro posibles escenarios de carga variable

Determinación del factor de seguridad con esfuerzos variables

La figura 4-46 muestra cuatro vistas del lado de tensión del diagrama de Goodman modificado aumentado, así como una combinación de esfuerzos medio y alternativo de Von

Mises en el punto Z, que representa una parte sometida a esfuerzos variables. El factor de seguridad de cualquier estado de esfuerzos variables depende de la manera en que las componentes media y alternativa varían entre sí durante el servicio. Hay cuatro casos posibles a considerar, como se indica en la figura 4-46.

1. El esfuerzo alternativo permanece básicamente constante durante la vida de la pieza; sin embargo, el esfuerzo medio llega a incrementarse en condiciones de servicio. (Línea *YQ* en la figura 4-46*a*).
2. El esfuerzo medio permanece básicamente constante durante la vida de la pieza; sin embargo, el esfuerzo alternativo llega a incrementarse en condiciones de servicio. (Línea *XP* en la figura 4-46*b*).
3. Ambas componentes de esfuerzos alternativo y medio se incrementan en condiciones de servicio; sin embargo, su razón permanecerá constante. (Línea *OR* en la figura 4-46*c*).
4. Ambas componentes de esfuerzos alternativo y medio se incrementan en condiciones de servicio; sin embargo, se desconoce la relación entre sus incrementos. (Línea *ZS* en la figura 4-46*d*).

4

El factor de seguridad de cada uno de estos casos se calcula de manera diferente. Observe que S_f se usará en las siguientes expresiones, para representar tanto la resistencia a la fatiga corregida en algún número de ciclos definido, como el límite de resistencia a la fatiga corregido. De modo que S_e se puede sustituir por S_f en cualquiera de estas expresiones si es adecuado para el material que se emplea.

Para el caso 1 La falla ocurre en el punto Q y el factor de seguridad es la razón de las líneas *YQ*/*YZ*. Para expresar esto matemáticamente, se resuelve la ecuación 4.16*d* (p. 294) para el valor de $\sigma'_{m@Q}$ y se divide entre $\sigma'_{m@Z}$.

$$\sigma'_{m@Q} = \left(1 - \frac{\sigma'_a}{S_y}\right) S_y$$

$$N_f = \frac{\sigma'_{m@Q}}{\sigma'_{m@Z}} = \frac{S_y}{\sigma'_m}\left(1 - \frac{\sigma'_a}{S_y}\right) \tag{4.18a}$$

Si σ'_a fuera tan grande y σ'_m fuera tan pequeño que el punto Q estuviera sobre la línea *CD* en vez de la línea *DE*, entonces se debería usar la ecuación 4.16*c* (p. 293) para determinar el valor de $\sigma'_{m@Q}$.

Para el caso 2 La falla ocurre en el punto P y el factor de seguridad es la razón de las líneas *XP*/*XZ*. Para expresarlo matemáticamente, se despeja el valor de $\sigma'_{a@P}$ en la ecuación 4.16*c* (p. 293) y se divide entre $\sigma'_{a@Z}$.

$$\sigma'_{a@P} = \left(1 - \frac{\sigma'_m}{S_{ut}}\right) S_f$$

$$N_f = \frac{\sigma'_{a@P}}{\sigma'_{a@Z}} = \frac{S_f}{\sigma'_a}\left(1 - \frac{\sigma'_m}{S_{ut}}\right) \tag{4.18b}$$

Si σ'_m fuera tan grande y σ'_a fuera tan pequeño que el punto P estuviera sobre la línea *DE* en vez de la línea *CD*, entonces se debería usar la ecuación 4.16*d* (p. 294) para determinar el valor de $\sigma'_{a@P}$.

Para el caso 3 La falla ocurre en el punto R y el factor de seguridad es la razón de las líneas *OR*/*OZ* o por triángulos semejantes, sea cualquiera de las razones $\sigma'_{m@R}/\sigma'_{m@Z}$ o bien $\sigma'_{a@R}/\sigma'_{a@Z}$.

Para expresarlo matemáticamente, se resuelven en forma simultánea las ecuaciones 4.16*c* (p. 293) y la ecuación de la línea *OR* para el valor de $\sigma'_{m@R}$ y se divide entre $\sigma'_{m@Z}$.

de la ecuación 4.16*c*: $$\sigma'_{a@R} = \left(1 - \frac{\sigma'_{m@R}}{S_{ut}}\right) S_f$$

de la línea *OR*: $$\sigma'_{a@R} = \left(\frac{\sigma'_{a@Z}}{\sigma'_{m@Z}}\right)\sigma'_{m@R} = \left(\frac{\sigma'_a}{\sigma'_m}\right)\sigma'_{m@R} \tag{4.18c}$$

La solución simultánea de ello da

$$\sigma'_{m@R} = \frac{S_f}{\dfrac{\sigma'_a}{\sigma'_m} + \dfrac{S_f}{S_{ut}}} \tag{4.18d}$$

lo cual, después de la sustitución y alguna manipulación, es

$$N_f = \frac{\sigma'_{m@R}}{\sigma'_{m@Z}} = \frac{S_f S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_f} \tag{4.18e}$$

También existe la posibilidad de que el punto *R* permanezca sobre la línea *DE* en vez de la línea *CD*, en cuyo caso la ecuación 4.16*d* (p. 294) debería sustituirse por la ecuación 4.16*c* en la solución previa.

Para el caso 4 En el cual la relación futura entre las componentes media y alternativa del esfuerzo es ya sea aleatoria o desconocida, el punto *S* sobre la línea de falla más cercana al estado de esfuerzo en *Z* se puede tomar como un estimado conservador del punto de falla. La línea *ZS* es normal a la *CD*, de modo que su ecuación se obtiene y resuelve simultáneamente con la de la línea *CD* para llegar a las coordenadas del punto *S* y la longitud *ZS*, que son

$$\sigma'_{m@S} = \frac{S_{ut}\left(S_f^{\,2} - S_f\sigma'_a + S_{ut}\sigma'_m\right)}{S_f^{\,2} + S_{ut}^{\,2}}$$

$$\sigma'_{a@S} = -\frac{S_f}{S_{ut}}\left(\sigma'_{m@S}\right) + S_f$$

$$ZS = \sqrt{\left(\sigma'_m - \sigma'_{m@S}\right)^2 + \left(\sigma'_a - \sigma'_{a@S}\right)^2} \tag{4.18f}$$

Para establecer la razón del factor de seguridad, corra el punto *S* alrededor del punto *Z* para hacerlo coincidir con la línea *OZS*' en el punto *S*'. El factor de seguridad es la razón *OS*'/*OZ*.

$$OZ = \sqrt{\left(\sigma'_a\right)^2 + \left(\sigma'_m\right)^2}$$

$$N_f = \frac{OZ + ZS}{OZ} \tag{4.18g}$$

También existe la posibilidad de que el punto *S* permanezca sobre la línea *DE* en vez de la línea *CD*, en cuyo caso la ecuación 4.16*d* (p. 294) se debería sustituir por la ecuación 4.16*c* en la solución anterior.

El caso 4 da como resultado un factor de seguridad más conservador que el del caso 3. Se puede usar el mismo procedimiento para obtener las expresiones del factor de seguridad de combinaciones de componentes de esfuerzo en la mitad izquierda del plano del diagrama de Goodman modificado. Asimismo, cuando el diagrama se elabora

a escala, se pueden obtener factores de seguridad burdamente calculados a partir de él. El archivo GOODMAN incluido con este texto calcula todos los factores de seguridad definidos por las ecuaciones 4.18 (pp. 297 y 298) para cualesquier valores de σ'_a y σ'_m, y grafica el diagrama de Goodman modificado y la línea de esfuerzo *OZ* prolongada, de modo que se observe la intercepción de falla.

Pasos de diseño para esfuerzos fluctuantes

Para el caso de esfuerzos fluctuantes, se puede definir un conjunto de pasos de diseño, similares al del caso totalmente invertido:

1. Determine el número de ciclos de carga *N* que la pieza experimentará durante su vida de servicio esperada.
2. Determine la amplitud de las cargas alternativas aplicadas (desde media hasta pico) y la de la carga media. (Véase el capítulo 1 y las ecuaciones 4.1, p. 244).
3. Cree un diseño geométrico tentativo de la pieza para soportar las cargas aplicadas, con base en buenas prácticas de ingeniería. (Véase los capítulos 1 y 2).
4. Determine los factores de concentración de esfuerzos geométricos K_t en las muescas en la geometría de la pieza. Desde luego, trate de minimizar esto con un buen diseño (véase la sección 2.15, en la p. 116).
5. Convierta los factores de concentración de esfuerzos geométricos K_t a factores K_f de concentración a la fatiga usando la *q* del material.
6. Calcule las amplitudes σ_a del esfuerzo de tensión alternativo nominal (véase la figura 4-6*c*, p. 243) en ubicaciones críticas de la pieza debidas a las cargas de servicio alternativas, con base en técnicas estándar de análisis de esfuerzo (capítulo 2), e increméntelas tanto como sea necesario con los factores de concentración de esfuerzos por fatiga adecuados de la ecuación 4.11 (p. 273). (Véase las secciones 2.15 p. 116, y 4.7 p. 272). Calcule las amplitudes del esfuerzo medio nominal en las mismas ubicaciones críticas, e increméntelas tanto como sea necesario con los factores K_{fm} medios de concentración de esfuerzo por fatiga de la ecuación 4.17 (p. 294).
7. Calcule las amplitudes del esfuerzo principal y del esfuerzo de Von Mises en ubicaciones críticas con base en sus estados de esfuerzo aplicados. Hágalo por separado para las componentes media y alternativa. (Véase el capítulo 2 y las ecuaciones 4.22, p. 309).
8. Elija un material tentativo para la pieza y determine sus propiedades de interés, como S_{ut}, S_y, $S_{e'}$ (o $S_{f'}$ para la vida requerida), así como la sensibilidad de la muesca *q*, a partir de sus propios datos de prueba, de la literatura existente o de estimaciones, como se describe en este capítulo.
9. Determine los factores adecuados modificados de resistencia a la fatiga para tipo de carga, tamaño de la pieza, superficie, etcétera, tal como se describió en la sección 4.6 (p. 257). Observe que el factor de carga C_{carga} diferirá si las cargas son axiales o de flexión (ecuación 4.7*a*, p. 260). Si la carga es torsión pura, entonces el cálculo del esfuerzo efectivo de Von Mises la convertirá en un esfuerzo de pseudotensión y, por ende, C_{carga} debería igualarse a 1.
10. Defina la resistencia a la fatiga corregida S_f para el ciclo *N* de vida requerida (o el límite de resistencia a la fatiga corregido S_e para vida infinita, si es el caso). Elabore un diagrama de Goodman modificado, como el mostrado en la figura 4-44 (p. 293) usando la resistencia a la fatiga S_f corregida del material, tomada de la curva *S-N* en el número de ciclos *N* deseado. (Observe que para casos de vida infinita en los cuales el material tiene una articulación de rodilla *S-N*, $S_f = S_e$). Escriba las ecuaciones 4.16 (pp. 293 y 294) para las líneas de Goodman y de fluencia.

11. Grafique los esfuerzos medio y alternativo de von Mises (para la ubicación con los mayores esfuerzos) sobre el diagrama de Goodman modificado y calcule un factor de seguridad para el diseño de una de las relaciones mostradas en las ecuaciones 4.18 (pp. 297-298).

12. En vista de que el material fue sólo tentativamente seleccionado y que el diseño no está tan refinado como sea posible, el resultado del primero de estos pasos muy probablemente será un diseño fallido, cuyo factor de seguridad o es muy grande o muy pequeño. Se requiere de iteración (como siempre) para refinar el diseño. Cualquier subconjunto de pasos se puede repetir tantas veces como sea necesario, para obtener un diseño aceptable. La táctica más común consiste en regresar al paso 3 y mejorar la geometría de la pieza para reducir esfuerzos y concentraciones de esfuerzos, y/o retomar el paso 8 para elegir un material más adecuado. Algunas veces, será posible regresar al paso 1 y redefinir una vida de la pieza aceptablemente más corta. Las cargas de diseño en el paso 2 pueden o no estar bajo el control del diseñador. Por lo general no lo están, a menos que la carga sobre la pieza se deba a fuerzas inerciales, en cuyo caso el incremento de la masa para "agregar resistencia" empeorará la situación, en vista de que ello aumenta proporcionalmente las cargas (véase la sección 1.6, p. 28). El diseñador debe aligerar la pieza para disminuir las fuerzas inerciales, sin comprometer excesivamente su resistencia. Cualesquiera que sean las circunstancias, el diseñador debe esperar aplicar varias veces estos pasos antes de llegar a una solución factible. Los resolvedores de ecuaciones que permiten el cálculo rápido de las ecuaciones son de gran ayuda en esta situación. Si el resolvedor de ecuaciones también "resuelve hacia atrás", permitiendo que las variables se intercambien de entrada a salida, la geometría necesaria para obtener un factor de seguridad deseado es posible calcular directamente haciendo al factor de seguridad una entrada, y a la variable de geometría una salida.

La mejor forma de demostrar el uso de estos pasos para el diseño a la fatiga con esfuerzos variables es con un ejemplo. Se repetirá el ejemplo anterior modificando su patrón de carga.

EJEMPLO 4-5

Diseño de una ménsula en voladizo para flexión variable

Problema **Se va a instalar un ensamble de rodillos alimentadores en cada extremo de la estructura de una máquina sobre el brazo de una ménsula en voladizo, como se muestra en la figura 4-47. Los rodillos alimentadores experimentan una carga fluctuante total que va desde un mínimo de 200 lb hasta un máximo de 2 200 lb, divididas iguales entre las dos ménsulas de soporte. Diseñe una ménsula en voladizo para resistir, sin falla, una carga de flexión variable de 100 a 1 100 lb de amplitud para 10^9 ciclos. La deflexión dinámica no debe exceder 0.02 in.**

Se proporciona **La forma de la función carga-tiempo se muestra en la figura 4-47. El ambiente de operación es aire ambiental con una temperatura máxima de 120 °F. El espacio disponible permite una longitud máxima del voladizo de 6 in. Sólo se requieren diez de estas piezas.**

Suposiciones **La ménsula puede estar sujeta entre placas esencialmente rígidas atornilladas en su raíz. La carga normal se aplicará en la punta de la viga en voladizo, usando una varilla sujeta a través de un orificio pequeño de la viga. Como el momento flexionante es efectivamente cero en la punta de la viga, se puede ignorar la concentración de esfuerzos en este orificio. Dada la pequeña cantidad requerida, el maquinado de las formas del material es el método preferido de manufactura.**

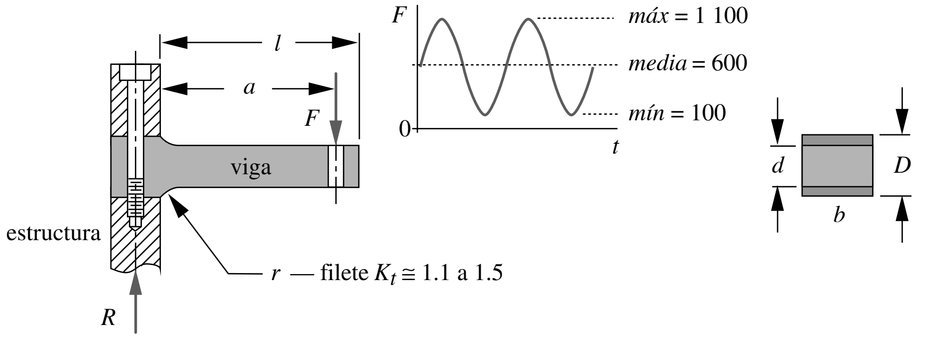


FIGURA 4-47

Diseño de una ménsula en voladizo con carga de flexión variable

Solución **Véase la figura 4-47 y las tablas 4-11 y 4-12.**

1. Éste es un problema típico de diseño. Se dan muy pocos datos, con excepción de la carga sobre el dispositivo, algunas restricciones de tamaño y el ciclo de vida requerido. Se deberán hacer ciertas suposiciones básicas acerca de la geometría de la pieza, los materiales y otros factores conforme se avance. Se espera algo de iteración.

2. La figura 4-47 muestra la misma configuración de diseño tentativa que la de la figura 4-41*b* (p. 285). El material estándar laminado es más grueso que la dimensión final deseada y se maquina por arriba y por abajo a la dimensión *D* y, luego, se maquina al espesor *d* a lo largo de la longitud *l*. Se le da un filete de radio *r* en el punto de sujeción para reducir la fatiga por desgaste y obtener menor K_t. (Véase la figura 2-37 en la p. 121). La figura 2-36 (p. 120) indica que con un control adecuado de las razones *r*/*d* y *D*/*d* para una barra plana escalonada en flexión, el factor de concentración de esfuerzos geométricos K_t se puede mantener por debajo de aproximadamente 1.5.

3. Se debe elegir un material. Para vida infinita, bajo costo y fácil fabricación, es deseable utilizar un acero al carbono si las condiciones ambientales lo permiten. Como esto se usará en un ambiente interior controlado, el acero al carbono es aceptable para este último punto. El hecho de que la deflexión preocupe, también es una buena razón para seleccionar un material con *E* grande. Los aceros dúctiles al bajo y al medio carbonos satisfacen el requisito de resistencia límite a la fatiga en la articulación de rodilla, para la vida infinita requerida en este caso, además de tener baja sensibilidad a la muesca. Se elige un acero al carbono SAE 1040 normalizado con $S_{ut} = 80$ kpsi y $S_y = 60$ kpsi, para el primer ensayo.

4. Se supondrá que las dimensiones imaginadas son las mismas de la solución exitosa para el caso de ciclo invertido del ejemplo 4-4. Éstas son $b = 2$ in, $d = 1$ in, $D = 1.125$ in, $r = 0.5$ in, $a = 5$ in y $l = 6.0$ in. Dicho valor de *a* dejará algún material alrededor del orificio y todavía se ajustará a la restricción de 6 in de longitud.

5. Las componentes media y alternativa de la carga, y sus fuerzas de reacción se calculan a partir de las cargas máxima y mínima que se proporcionan.

$$F_m = \frac{F_{máx} + F_{mín}}{2} = \frac{1\,100 + 100}{2} = 600 \text{ lb}$$
$$F_a = \frac{F_{máx} - F_{mín}}{2} = \frac{1\,100 - 100}{2} = 500 \text{ lb} \qquad (a)$$

$$R_a = F_a = 500 \text{ lb} \qquad R_m = F_m = 600 \text{ lb} \qquad R_{máx} = F_{máx} = 1\,100 \text{ lb} \tag{b}$$

6. A partir de esto, se calculan los momentos medio y alternativo, así como el momento máximo que actúa en la raíz de la viga en voladizo.

$$\begin{aligned} M_a &= R_a l - F_a(l-a) = 500(6) - 500(6-5) = 2\,500 \text{ lb - in} \\ M_m &= R_m l - F_m(l-a) = 600(6) - 600(6-5) = 3\,000 \text{ lb - in} \\ M_{máx} &= R_{máx} l - F_{máx}(l-a) = 1\,100(6) - 1\,100(6-5) = 5\,500 \text{ lb - in} \end{aligned} \tag{c}$$

7. Se obtienen el momento de inercia del área de la sección transversal y la distancia a la fibra exterior.

$$\begin{aligned} I &= \frac{bd^3}{12} = \frac{2.0(1.0)^3}{12} = 0.166\,7 \text{ in}^4 \\ c &= \frac{d}{2} = \frac{1.0}{2} = 0.5 \text{ in} \end{aligned} \tag{d}$$

8. Los esfuerzos nominales de flexión en la raíz se obtienen tanto para la carga alternativa como para la carga media de:

$$\begin{aligned} \sigma_{a_{nom}} &= \frac{M_a c}{I} = \frac{2\,500(0.5)}{0.166\,7} = 7\,500 \text{ psi} \\ \sigma_{m_{nom}} &= \frac{M_m c}{I} = \frac{3\,000(0.5)}{0.166\,7} = 9\,000 \text{ psi} \end{aligned} \tag{e}$$

9. Se deben calcular dos razones para usarlas en la figura 2-36 (p. 120) y obtener el factor K_t de concentración de esfuerzo geométrico para las dimensiones supuestas de la pieza.

$$\frac{D}{d} = \frac{1.125}{1.0} = 1.125 \qquad \frac{r}{d} = \frac{0.5}{1.0} = 0.5 \tag{f}$$

Interpolando en la tabla de la figura 2-36: $A = 1.012 \qquad b = -0.221$ (g)

$$K_t = A\left(\frac{r}{d}\right)^b = 1.012(0.5)^{-0.221} = 1.18 \tag{h}$$

10. La sensibilidad de la muesca q para el material seleccionado se calcula con base en su resistencia última, y el radio de la muesca, mediante la ecuación 4.13 (p. 273) y los datos para la constante de Neuber de la tabla 4-6 (p. 276). Los valores de q y K_t sirven para obtener el factor de concentración de esfuerzo por fatiga K_f con la ecuación 4.11*b* (p. 273). K_{fm} se determina con la ecuación 4.17 (p. 294).

De la tabla 4-6 para $S_{ut} = 80$ kpsi: $\sqrt{a} = 0.08$ (i)

$$q = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1+\frac{0.08}{\sqrt{0.5}}} = 0.898 \tag{j}$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.898(1.18 - 1) = 1.16 \tag{k}$$

$$\begin{aligned} &\text{si } K_f\left|\sigma_{máx}\right| < S_y \text{ entonces} \qquad K_{fm} = K_f \\ &K_f\left|\frac{M_{máx}c}{I}\right| = 1.16\left|\frac{5\,500(0.5)}{0.166\,7}\right| = 19\,113 < 60\,000: \qquad K_{fm} = 1.16 \end{aligned} \tag{l}$$

11. Se usan dichos factores para encontrar los esfuerzos locales medio y alternativo en la muesca.

$$\sigma_a = K_f \sigma_{a_{nom}} = 1.16(7\,500) = 8\,711 \text{ psi}$$
$$\sigma_m = K_{fm} \sigma_{m_{nom}} = 1.16(9\,000) = 10\,454 \text{ psi} \qquad (m)$$

12. Los esfuerzos locales se emplean para calcular los esfuerzos alternativo y medio de Von Mises con las ecuaciones 4.22*b* (p. 309).

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2} = \sqrt{8\,711^2 + 0 - 8\,711(0) + 3(0)} = 8\,711$$
$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma_{x_m}^2 + \sigma_{y_m}^2 - \sigma_{x_m}\sigma_{y_m} + 3\tau_{xy_m}^2} = \sqrt{10\,454^2 + 0 - 10\,425(0) + 3(0)} = 10\,454 \qquad (n)$$

4

13. La resistencia límite a la fatiga sin corregir $S_{e'}$ se determina con la ecuación 4.5*a* (p. 260).

$$S_{e'} = 0.5 S_{ut} = 0.5(80\,000) = 40\,000 \text{ psi} \qquad (o)$$

14. El *factor tamaño* para esta pieza rectangular se determina calculando el área de la sección transversal esforzada por arriba del 95% de su esfuerzo máximo (véase la figura 4-25 en la p. 262), cuyo valor se utiliza en la ecuación 4.7*d* (p. 261) para obtener un diámetro equivalente para la muestra de prueba.

$$A_{95} = 0.05db = 0.05(1.0)(2.0) = 0.1 \text{ in}^2$$
$$d_{equiv} = \sqrt{\frac{A_{95}}{0.076\,6}} = \sqrt{\frac{0.1}{0.076\,6}} = 1.143 \text{ in} \qquad (p)$$
$$C_{tamaño} = 0.869\left(d_{equiv}\right)^{-0.097} = 0.859$$

15. El cálculo del límite de resistencia a la fatiga corregido S_e requiere que se determinen varios factores. C_{carga} se obtiene de la ecuación 4.7*a* (p. 260). C_{sup} para un acabado maquinado se establece con la ecuación 4.7*e* (p. 263). C_{temp} se calcula con la ecuación 4.7*f* (p. 265) y C_{conf} se elige de la tabla 4-4 (p. 265) para un nivel de confiabilidad de 99.9%.

$$S_e = C_{carga} C_{tamaño} C_{sup} C_{temp} C_{conf} S_{e'}$$
$$= 1(0.859)(0.85)(1)(0.753)40\,000 = 21\,883 \text{ psi} \qquad (q)$$

16. Los cuatro factores de seguridad posibles se calculan de las ecuaciones 4.18 (pp. 297-298). Se debe seleccionar el menor o el más adecuado de ellos. La ecuación (*r*) muestra el factor de seguridad para el caso 3, el cual supone que las componentes media y alternativa tendrán una razón constante, mientras varíen con la amplitud máxima durante la vida de la pieza.

$$N_{f_3} = \frac{S_e S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_e} = \frac{21\,883(80\,000)}{8\,688(80\,000) + 10\,425(21\,883)} = 1.9 \qquad (r)$$

17. La deflexión máxima se calcula con la fuerza aplicada máxima $F_{máx}$.

$$y_{@\,x=l} = \frac{F_{máx}}{6EI}\left[x^3 - 3ax^2 - \langle x-a \rangle^3\right]$$
$$= \frac{1\,100}{6(3E7)(0.1667)}\left[6^3 - 3(5)(6)^2 - (6-5)^3\right] = -0.012 \text{ in} \qquad (s)$$

Tabla 4-11 **Diseño de una ménsula en voladizo para flexión fluctuante**
Primera iteración para el ejemplo 4-5 (archivo EX06-05A)

Entrada	Variable	Salida	Unidad	Comentarios
2	*b*		in	ancho de la viga
1	*d*		in	profundidad sobre la longitud de la viga
1.125	*D*		in	profundidad de la viga en la pared
0.5	*r*		in	radio del filete
5	*a*		in	distancia a la carga *F*
80 000	*Sut*		psi	resistencia última a la tensión
60 000	*Sy*		psi	resistencia a la fluencia
'maquinado	*acabado*			'esmerilado, 'maquinado, 'rolado en caliente, 'forjado
'flexión	*carga*			'flexión, 'axial, 'cortante
99.9	*porcentaje*			% de confiabilidad deseado
1 100	*Fmáx*		lb	carga máxima aplicada
100	*Fmín*		lb	carga mínima aplicada
	Fa	500	lb	fuerza alternativa aplicada
	Fm	600	lb	fuerza media aplicada
	Kt	1.18		factor de concentración de esfuerzo geométrico
	q	0.898		factor de sensibilidad a la muesca de Peterson
	Kf	1.16		factor de conc. de esfuerzo por fatiga — alternativo
	Kfm	1.16		factor de conc. de esfuerzo por fatiga — medio
	siganom	7 500	psi	esfuerzo nominal alternativo
	siga	8 711	psi	esfuerzo alternativo con concentración
	sigavm	8 711	psi	esfuerzo de von Mises alternativo
	sigmnom	9 000	psi	esfuerzo nominal medio
	sigm	10 454	psi	esfuerzo medio con concentración
	sigmvm	10 454	psi	esfuerzo de von Mises medio
	Seprima	40 000	psi	límite de resistencia a la fatiga sin corregir
	Ccarga	1		factor de carga para flexión
	Csup	0.845		acabado maquinado
	Ctamaño	0.859		factor de tamaño con base en el 95% del área
	Ctemp	1		temperatura ambiente
	Cconf	0.753		factor de confiabilidad del 99.9%
	Se	21 883	psi	límite de resistencia a la fatiga corregido
	Nsf_1	5.5		FS para esfuerzo alternativo = constante
	Nsf_2	2.2		FS para esfuerzo medio = constante
	Nsf_3	1.9		FS para esf.alt./esf.medio = constante
	Nsf_4	1.7		FS para la línea de falla más cercana

18. Los datos de este diseño se muestran en la tabla 4-11. Usando las mismas dimensiones de la sección transversal y la misma carga alternativa del ejemplo 4-4, ahora se obtienen un factor de seguridad $N_{f3} = 1.9$ y una deflexión máxima $y_{máx} = 0.012$ in para este caso de carga fluctuante, en comparación con $N_{f3} = 2.5$ y $y_{máx} = 0.005$ in

Tabla 4-12 Diseño de una ménsula en voladizo para flexión fluctuante
Iteración final para el ejemplo 4-5 (Archivo EX06-05B)

Entrada	Variable	Salida	Unidad	Comentarios
2	*b*		in	ancho de la viga
1.2	*d*		in	profundidad sobre la longitud de la viga
1.4	*D*		in	profundidad de la viga en la pared
0.5	*r*		in	radio del filete
5	*a*		in	distancia a la carga *F*
80 000	*Sut*		psi	resistencia última a la tensión
60 000	*Sy*		psi	resistencia a la fluencia
'maquinado	*acabado*			'esmerilado, 'maquinado, 'rolado en caliente, 'forjado
'flexión	*carga*			'flexión, 'axial, 'cortante
99.9	*porcentaje*			% de confiabilidad deseado
1 100	*Fmáx*		lb	carga máxima aplicada
100	*Fmín*		lb	carga mínima aplicada
	Fa	500	lb	fuerza alternativa aplicada
	Fm	600	lb	fuerza media aplicada
	Kt	1.22		factor de conc. de esfuerzo geométrico
	q	0.898		factor de sensibilidad a la muesca de Peterson
	Kf	1.20		factor de conc. de esfuerzo a la fatiga — alter.
	Kfm	1.20		factor de conc. de esfuerzo a la fatiga — medio
	siganom	5 208	psi	esfuerzo nominal alternativo
	siga	6 230	psi	esfuerzo alternativo con concentración
	sigavm	6 230	psi	esfuerzo alternativo de von Mises
	sigmnom	6 250	psi	esfuerzo nominal medio
	sigm	7 476	psi	esfuerzo medio con concentración
	sigmvm	7 476	psi	esfuerzo medio de von Mises
	Seprima	40 000	psi	límite de resistencia sin corregir
	Ccarga	1		factor de carga para flexión
	Csup	0.85		acabado maquinado
	Ctamaño	0.85		factor de tamaño con base en el 95% del área
	Ctemp	1		temperatura ambiente
	Cconf	0.753		factor de confiabilidad del 99.9%
	Se	21 658	psi	límite corregido de resistencia
	Nsf_1	8.6		FS para esfuerzo alternativo = constante
	Nsf_2	3.2		FS para esfuerzo medio = constante
	Nsf_3	2.6		FS para esf.alt./esf.medio = constante
	Nsf_4	2.3		FS para la línea de falla más cercana

para el caso de carga totalmente invertida del ejemplo 4-4. La suma de un esfuerzo medio, al nivel previo de esfuerzo alternativo, redujo el factor de seguridad e incrementó la deflexión, como se esperaba.

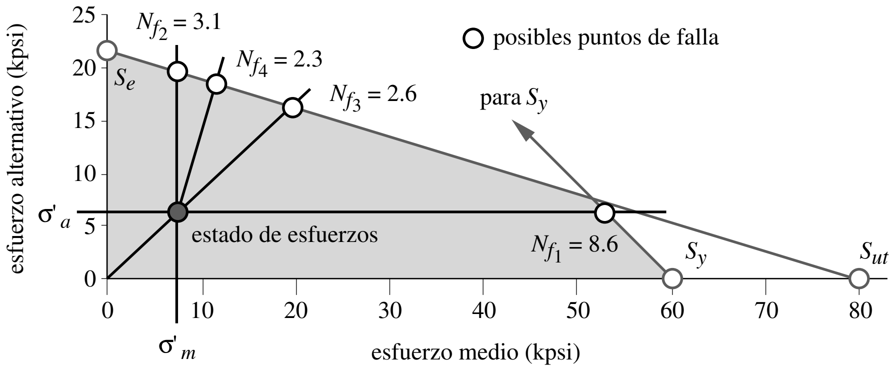


FIGURA 4-48

Diagrama de Goodman modificado para el ejemplo 4-5 que muestra los datos de la solución final de la tabla 4-12

19. Aumentando ligeramente las dimensiones de la sección transversal de la pieza, se obtiene el diseño mejorado presentado en la tabla 4-12. Las dimensiones finales son $b = 2$ in, $d = 1.2$ in, $D = 1.4$ in, $r = 0.5$ in, $a = 5$ in y $l = 6.0$. N_{f3} se vuelve igual a 2.6, como se indica en el diagrama de Goodman de la figura 4-48, y la deflexión máxima es 0.007 in. Ambos valores son aceptables. La dimensión D deliberadamente se eligió un poco menor que el tamaño del material estándar laminado, de modo que hubiera algún material disponible para el maquinado con la finalidad de limpiar y alinear las superficies del montaje.

20. Los archivos EX06-05A y EX06-05B se encuentran en el CD-ROM.

El ejemplo anterior demuestra que el diseño para cargas fluctuantes de HCF variables es sencillo, una vez que se entienden los principios. Si el diseño se requiere para cargas fluctuantes de torsión, de flexión o axiales, el procedimiento de diseño sería el mismo que el de este ejemplo. Las únicas diferencias serían las ecuaciones de esfuerzo seleccionadas y los factores modificados de resistencia, como se describió en las secciones previas. En este o en cualquier problema de diseño, no debe subestimarse el valor por usar una computadora y un resolvedor de ecuaciones, ya que permiten iteraciones rápidas partiendo de suposiciones iniciales hasta las dimensiones finales con un trabajo mínimo.

4.12 DISEÑO PARA ESFUERZOS MULTIAXIALES DE FATIGA

Los análisis anteriores se limitaron a casos donde las cargas produjeron esfuerzos uniaxiales en la pieza. Es muy usual en maquinaria tener cargas combinadas que creen simultáneamente, en el mismo punto, esfuerzos biaxiales o triaxiales que varían con el tiempo. Un ejemplo común es un eje giratorio sometido al mismo tiempo a un momento de flexión estático y a un torque. Debido a que el eje gira, el momento estático crea esfuerzos normales totalmente invertidos, que tienen su máximo en la fibra exterior del eje, y el torque provoca esfuerzos cortantes que también tienen su máximo en la fibra exterior. Existen muchas combinaciones posibles de carga. El torque podría ser constante, de ciclo invertido o variable. Si el torque no es constante, puede ser sincrónico o asincrónico, en fase o desfasado con el momento de flexión. Estos factores complican el cálculo del esfuerzo. En el capítulo 3 se exploró el caso de esfuerzos combinados bajo carga estática y se utilizó el *esfuerzo de Von Mises* para convertirlos a un esfuerzo de

tensión equivalente que sirva para predecir la falla en el caso de carga estática. Existen técnicas similares para el manejo de esfuerzos combinados con cargas dinámicas.

Relaciones de frecuencia y fase

Cuando están presentes diversas cargas que varían con el tiempo, pueden ser periódicas, aleatorias o alguna combinación de ambas. Si son periódicas, pueden ser mutuamente sincrónicas o asincrónicas. Si son sincrónicas sus relaciones de fase van desde estar en fase o desfasadas hasta 180° o algún valor intermedio. Las posibles combinaciones son bastante variadas y sólo se han estudiado unas cuantas de estas combinaciones para determinar sus efectos sobre las fallas por fatiga. Collins[49] sugiere que la suposición de que las cargas son sincrónicas y están en fase por lo general resulta correcta para el diseño de máquinas y normalmente (aunque no siempre) es conservadora.

La mayoría de los casos estudiados son de cargas en fase, periódicas, sincrónicas, que causan esfuerzos combinados cuyas direcciones principales no cambian con el tiempo. Esto se conoce como **esfuerzo multiaxial simple**. Sines[42] desarrolló un modelo para este caso en 1955. Los recipientes o las tuberías a presión, que están sometidas a presiones internas que varían con el tiempo, se pueden ver como esfuerzos multiaxiales de tensión en fase sincrónicos, a partir de una fuente de carga única. El caso de un eje giratorio con flexión y torsión combinadas también entra en esta categoría, si el torque es constante con el tiempo, puesto que la componente alternativa del esfuerzo principal, debido sólo a la flexión tiene una dirección constante. Si el torque varía con el tiempo, entonces las direcciones del esfuerzo principal alternativo no son constantes. Asimismo, cuando existen concentraciones de esfuerzo, como un orificio transversal a través del eje, los esfuerzos locales en la concentración serán biaxiales. Tales situaciones, donde las direcciones de los esfuerzos principales varían con el tiempo, o donde los esfuerzos son asincrónicos o desfasados, se conocen como **esfuerzo multiaxial complejo** y se están estudiando todavía. De acuerdo con el *Manual de diseño para Fatiga*[51] de la *SAE*, "*El análisis de esta situación se encuentra, en general, más allá del estado actual de la tecnología. El proceso de diseño debe avanzar con análisis muy aproximados soportados por amplios estudios experimentales, que simulen el material y la geometría, así como la carga*". Métodos de análisis para algunos de estos casos han sido desarrollados por Kelly,[43] Garud,[44] Brown,[45] Langer[46] y otros. El uso de algunos de estos procedimientos es bastante complicado. La referencia 51 también indica que "*se deben tomar precauciones en el uso directo de estos datos, a menos que las condiciones revisadas coincidan con las que se están analizando*". Se limitará al análisis de unos cuantos procedimientos que son útiles para propósitos del diseño y deberían dar resultados aproximados pero conservadores, en la mayoría de las situaciones del diseño de máquinas.

Esfuerzos multiaxiales simples totalmente invertidos

Los datos experimentales desarrollados para los esfuerzos biaxiales simples, tal como los mostrados en la figura 4-15 (p. 251), indican que, en materiales dúctiles, para esfuerzos multiaxiales simples totalmente invertidos se aplica la teoría de la energía de distorsión, si se calcula el esfuerzo de Von Mises para las componentes alternativas con la ecuación 3.7 (p. 179). Para el caso tridimensional:

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{1_a}^2 + \sigma_{2_a}^2 + \sigma_{3_a}^2 - \sigma_{1_a}\sigma_{2_a} - \sigma_{2_a}\sigma_{3_a} - \sigma_{1_a}\sigma_{3_a}} \tag{4.19a}$$

y para el caso bidimensional:

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{1_a}^2 - \sigma_{1_a}\sigma_{2_a} + \sigma_{2_a}^2} \tag{4.19b}$$

Observe que la forma de la ecuación de von Mises contiene los esfuerzos alternativos principales, que se calculan a partir de las componentes del esfuerzo aplicado alternativo en el estado de esfuerzo multiaxial, usando la ecuación 2.4*c* para 3-D (p. 74), o la 2.6 para 2-D (p. 75), después de que tales componentes alternativas se han incrementado con todos los factores aplicables de concentración del esfuerzo por fatiga. Este esfuerzo efectivo alternativo σ'_a se utiliza entonces para entrar al diagrama *S-N* y determinar el factor de seguridad con

$$N_f = \frac{S_n}{\sigma'_a} \tag{4.20}$$

donde S_n es la resistencia a la fatiga del material en la vida deseada N y σ'_a es el esfuerzo alternativo de Von Mises.

Esfuerzos multiaxiales fluctuantes simples

MÉTODO DE SINES Sines[42] desarrolló un modelo para esfuerzos multiaxiales fluctuantes simples, el cual crea un esfuerzo medio equivalente, así como un esfuerzo alternativo equivalente a partir de las componentes del esfuerzo aplicado. Su esfuerzo alternativo equivalente es, de hecho, el esfuerzo alternativo de Von Mises, como se definió anteriormente en la ecuación 4.19*a*. Sin embargo, se presentará en una forma alterna que usa directamente los esfuerzos aplicados en vez de los esfuerzos principales. Para un estado de esfuerzo triaxial:

$$\begin{aligned} \sigma'_a &= \sqrt{\frac{\left(\sigma_{x_a} - \sigma_{y_a}\right)^2 + \left(\sigma_{y_a} - \sigma_{z_a}\right)^2 + \left(\sigma_{z_a} - \sigma_{x_a}\right)^2 + 6\left(\tau^2_{xy_a} + \tau^2_{yz_a} + \tau^2_{zx_a}\right)}{2}} \\ \sigma'_m &= \sigma_{x_m} + \sigma_{y_m} + \sigma_{z_m} \end{aligned} \tag{4.21a}$$

y, para un estado de esfuerzo biaxial:

$$\begin{aligned} \sigma'_a &= \sqrt{\sigma^2_{x_a} + \sigma^2_{y_a} - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau^2_{xy_a}} \\ \sigma'_m &= \sigma_{x_m} + \sigma_{y_m} \end{aligned} \tag{4.21b}$$

Las componentes del esfuerzo aplicado en las ecuaciones 4.21 son los esfuerzos locales, incrementados por todos los factores aplicables de concentración de esfuerzos. Los dos esfuerzos equivalentes σ'_a y σ'_m se usan entonces en el diagrama de Goodman modificado, como se describió en la sección previa, y el factor de seguridad adecuado se calcula con las ecuaciones 4.18 (pp. 297-298).

Mientras los esfuerzos locales individuales de las ecuaciones 4.19 y 4.21 se incrementan por un factor de concentración de esfuerzo diferente, habría algunos conflictos cuando la resistencia a la fatiga corregida o el límite de resistencia a la fatiga se calculen para un estado de esfuerzo combinado. Por ejemplo, una combinación de carga de flexión y axial daría dos opciones para los factores de carga de las ecuaciones 4.7*a* (p. 260) y 4.9 (p. 267). Utilice el factor axial si existen cargas axiales, con o sin cargas de flexión.

Observe que el esfuerzo medio equivalente σ'_m de Sines de las ecuaciones 4.21 contiene sólo componentes de esfuerzo normal (que son los esfuerzos hidrostáticos), mientras que el esfuerzo alternativo equivalente de Von Mises σ'_a de las ecuaciones 4.21 contiene tanto esfuerzos normales como cortantes. Por lo tanto, las componentes medias del esfuerzo cortante no contribuyen con el modelo de Sines, lo cual es consistente con

los datos experimentales para barras redondas, sin muescas, pulidas, lisas, probadas con cargas combinadas de flexión y torsión.[46] Sin embargo, las muestras con muescas bajo la misma carga indican dependencia del valor del esfuerzo de torsión medio,[46] de modo que las ecuaciones 4.21 pueden ser no conservadoras en tales casos.

Método de von Mises Otros[47],[49] recomiendan emplear el esfuerzo efectivo de Von Mises para las componentes alternativa y media del esfuerzo aplicado en cargas de esfuerzo multiaxial simple. Es posible aplicar los factores adecuados (y posiblemente diferentes) de concentración de esfuerzo para las componentes alternativa y media de los esfuerzos aplicados, como se describió en la sección 4.10. Entonces, los esfuerzos efectivos de Von Mises para las componentes alternativa y media se calculan para el estado de esfuerzo triaxial mediante

$$\sigma'_a = \sqrt{\frac{\left(\sigma_{x_a} - \sigma_{y_a}\right)^2 + \left(\sigma_{y_a} - \sigma_{z_a}\right)^2 + \left(\sigma_{z_a} - \sigma_{x_a}\right)^2 + 6\left(\tau^2_{xy_a} + \tau^2_{yz_a} + \tau^2_{zx_a}\right)}{2}}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{\frac{\left(\sigma_{x_m} - \sigma_{y_m}\right)^2 + \left(\sigma_{y_m} - \sigma_{z_m}\right)^2 + \left(\sigma_{z_m} - \sigma_{x_m}\right)^2 + 6\left(\tau^2_{xy_m} + \tau^2_{yz_m} + \tau^2_{zx_m}\right)}{2}} \qquad (4.22a)$$

o para el estado de esfuerzo biaxial con:

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma^2_{x_a} + \sigma^2_{y_a} - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau^2_{xy_a}}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma^2_{x_m} + \sigma^2_{y_m} - \sigma_{x_m}\sigma_{y_m} + 3\tau^2_{xy_m}} \qquad (4.22b)$$

Estos esfuerzos efectivos alternativo y medio de Von Mises se utilizan después en el diagrama de Goodman modificado, para determinar el factor de seguridad mediante la versión adecuada de las ecuaciones 4.18. Tal enfoque es más conservador que el método de Sines y es, por lo tanto, más conveniente en situaciones con concentraciones de esfuerzo debido a muescas.

Esfuerzos multiaxiales complejos

Este tema aún lo están investigando varios especialistas. Se han analizado muchos casos específicos de esfuerzos multiaxiales complejos, pero aún no se ha desarrollado un enfoque integral de diseño aplicable a todas las situaciones.[50] Nishihara y Kawamoto[52] descubrieron que las resistencias a la fatiga de dos aceros, un hierro colado y una aleación de aluminio probados bajo esfuerzos multiaxiales complejos no eran menores que sus resistencias a la fatiga en fase, en cualquier ángulo de fase. Para el caso común de los esfuerzos biaxiales de flexión y torsión combinados, como ocurre en ejes, se proponen varios métodos.[50] Uno de estos, llamado SEQA, con base en el Código de Calderas de la ASME,* se analizará brevemente. El SEQA es un esfuerzo efectivo o equivalente (similar en concepto al esfuerzo de Von Mises efectivo), el cual combina los efectos de los esfuerzos normal y cortante con la relación de fase entre ellos, en un valor de esfuerzo efectivo que se puede comparar con las resistencias a la fatiga y estática de un material dúctil sobre un diagrama de Goodman modificado. Se calcula a partir de

$$SEQA = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{3}{4}Q^2 + \sqrt{1 + \frac{3}{2}Q^2\cos 2\phi + \frac{9}{16}Q^4}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4.23)$$

* Código ASME para recipientes a presión y calderas, sección III, código de caso N-47-12, Sociedad Estadounidense de Ingenieros Mecánicos, Nueva York, 1980.

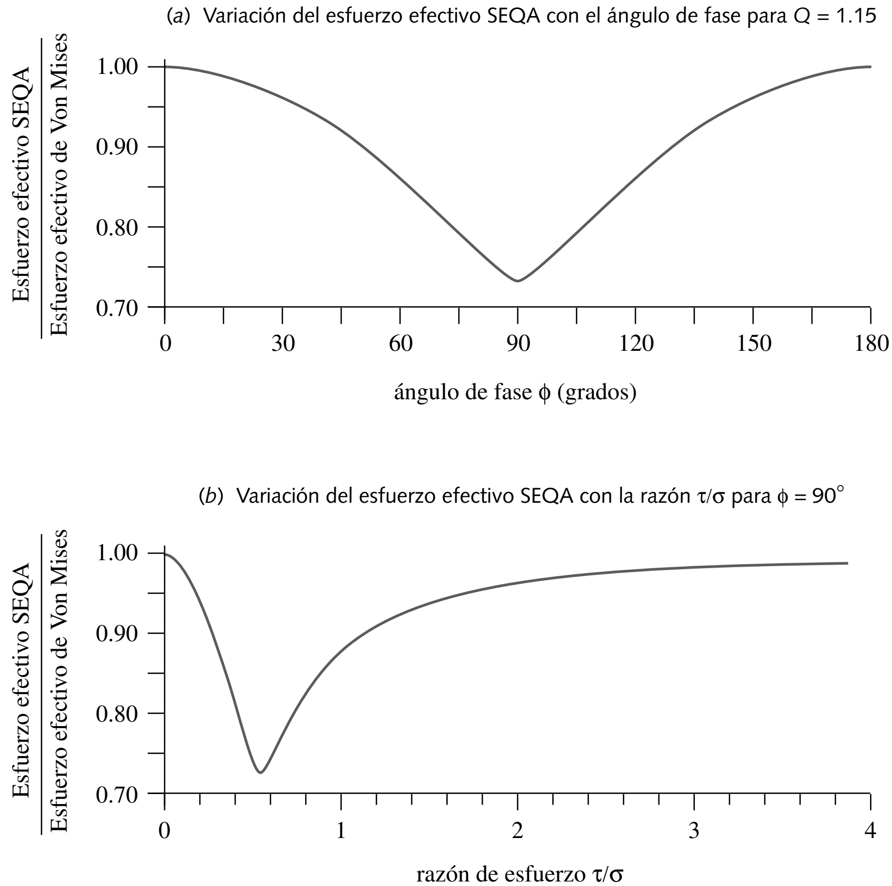


FIGURA 4-49

Variación del esfuerzo efectivo SEQA con la razón τ / σ y el ángulo de fase entre τ y σ

donde σ = amplitud del esfuerzo de flexión incluyendo los efectos de concentración de esfuerzo

$$Q = 2\frac{\tau}{\sigma}$$

τ = amplitud del esfuerzo de torsión incluyendo los efectos de concentración de esfuerzo

ϕ = ángulo de fase entre la flexión y la torsión

El SEQA se puede calcular para ambas componentes media y alternativa del esfuerzo.

La figura 4-49 muestra la variación del esfuerzo efectivo SEQA, expresada como una razón del esfuerzo de Von Mises para la misma combinación flexión-torsión con una función de dos variables: el ángulo de fase ϕ y la razón τ/σ. Observe en la figura 4-49*a* que cuando la flexión y la torsión se encuentran en fase, o desfasadas 180°, el SEQA es igual al esfuerzo de Von Mises σ'. Para $\phi = 90°$, el SEQA es aproximadamente el 73% de σ'. El esfuerzo SEQA también varía con los valores relativos de τ y σ como se indica en la figura 4-49*b*. Cuando $\tau/\sigma = 0.575$ ($Q = 1.15$), la reducción en el esfuerzo SEQA en $\phi = 90°$ es máxima y se aproxima a σ' para razones τ/σ grandes y pequeñas. Esta figura indica que al usar el esfuerzo de Von Mises para fatigas por flexión y torsión combinadas, se obtiene un resultado conservador en cualquier ángulo de fase o razón τ/σ. Sin embargo, Garud demostró que este procedimiento no es conservador para cargas

desfasadas, si la deformación local está por arriba de aproximadamente 0.13%.[44] Por lo tanto, este enfoque no se recomienda para casos de fatiga de bajo ciclo. Tipton y Nelson[50] demostraron que el enfoque SEQA es conservador en aplicaciones de fatiga (de baja deformación) de alto ciclo desfasado. De hecho, cuando los factores de concentración de esfuerzos K_f y K_{fs} de la muesca se hacen igual a 1, el SEQA y procedimientos similares* dan pronósticos de fallas de HCF razonablemente precisos.[50]

El método de análisis de fatiga multiaxial compleja presentado anteriormente supone que las cargas aplicadas son sincrónicas con una relación de fase predecible. Si las fuentes de cargas múltiples están desacopladas y tienen una relación aleatoria o un tiempo de fase desconocido, este método podría ser insuficiente para resolver el problema. El lector debe consultar la literatura referida en la bibliografía de este capítulo, para obtener mayor información sobre casos de carga multiaxial compleja. El mejor enfoque para casos inusuales es un programa de pruebas realizado por uno mismo.

4.13 PROCEDIMIENTO GENERAL PARA EL DISEÑO CON FATIGA DE ALTO CICLO

En las secciones y ejemplos anteriores, se utilizó un procedimiento consistente sin tomar en cuenta la categoría de la carga de fatiga que interviene (véase la figura 4-40 en la p. 283). Incluso en los casos de esfuerzo uniaxial, el esfuerzo de Von Mises se calculó para los esfuerzos alternativo y medio. Se puede decir que este paso no es necesario con esfuerzos uniaxiales, ya que el esfuerzo de Von Mises es idéntico al esfuerzo aplicado. Sin embargo, con un ligero cálculo adicional (lo cual es irrelevante si se usa una computadora), se obtiene la ventaja de la consistencia. Además, los factores individuales adecuados de concentración de esfuerzos se pueden aplicar a varias componentes de esfuerzo, antes de incorporarlos al cálculo del esfuerzo de Von Mises. Con frecuencia, los factores de concentración de esfuerzos geométricos del mismo contorno en una pieza varían con cargas diferentes (axial contra flexión, etcétera).

Ya sea que la carga sea uniaxial o multiaxial, de flexión o de torsión, o cualquier combinación de ellas, el factor de seguridad se obtiene de la misma manera con este procedimiento, comparando alguna combinación de esfuerzos alternativos y medios de Von Mises, con una línea definida por la resistencia a la fatiga por tensión y la resistencia a la tensión estática del material. Esto elimina la necesidad de calcular por separado las resistencias a la fatiga por torsión. Si se acepta el procedimiento presentado en la sección anterior para cargas multiaxiales con concentraciones de esfuerzos, esto es, mediante el esfuerzo de Von Mises para componentes de esfuerzos medio y alternativo, desaparece la diferencia entre los casos uniaxiales y multiaxiales. Se aplica entonces el mismo algoritmo de cálculo para las cuatro categorías de la figura 4-40 de la p. 283.

En lo que respecta a la diferencia entre modos de carga fluctuantes y totalmente invertidos, recuerde que este último es justamente un caso especial del primero. Es posible tratar todos los casos de cargas de fatiga como fluctuantes y aplicar consistentemente, con buenos resultados, el diagrama de Goodman modificado (MGD) como criterio de falla. Observe en la figura 4-43 (p. 292) que el MGD y el diagrama *S-N* son simplemente vistos diferentes de la misma relación tridimensional entre el esfuerzo medio σ'_m, el esfuerzo alternativo σ'_a y el número de ciclos N. La figura 4-43*c* ilustra la sección de Goodman tomada de la superficie tridimensional que relaciona las variables. Es posible graficar un estado de esfuerzo totalmente invertido ($\sigma'_a \neq 0$, $\sigma'_m = 0$) en el diagrama de Goodman y calcular fácilmente su factor de seguridad cuando usted se da cuenta de que los datos puntuales resultantes estarán sobre el eje σ'_a. La ecuación 4.18*b* proporciona su factor de seguridad y es igual que la ecuación 4.14 (p. 284) cuando $\sigma'_m = 0$. Al respecto, el problema de carga estática ($\sigma'_m \neq 0$, $\sigma'_a = 0$) se traza también sobre el diagrama de Goodman modificado y sus datos puntuales caerán sobre el eje σ'_m. Su factor de

* Un método similar con base en la teoría del esfuerzo cortante máximo se define también en la referencia [50]. Este método, llamado SALT, brinda resultados similares pero incluso más conservadores para la HCF que los del método SEQA mostrados en la figura 4-49. La advertencia es que sólo se aplica a la carga de HCF; sin embargo, presenta una mejor correlación con los resultados experimentales de pruebas de fatiga multiaxial con base en la deformación de bajo ciclo, que el método SEQA.[44]

seguridad se calcula con la ecuación 4.18*a* (p. 297), la cual es idéntica a la ecuación 3.8*a* (p. 181) cuando $\sigma'_a = 0$. De modo que el diagrama de Goodman modificado es una herramienta universal para determinar el factor de seguridad para cualquier problema de esfuerzo, ya sea estático, totalmente de fatiga invertida o de fatiga fluctuante.

El procedimiento general recomendado para el diseño de HCF, con esfuerzos uniaxiales o sincrónicos multiaxiales, es entonces:

1. Genere un diagrama adecuado de Goodman modificado a partir de la información de resistencia a la tensión del material en cuestión. Esto se hace tanto para vida finita como para vida infinita, tomando la sección de Goodman en un punto N_2 diferente a lo largo del eje N de la figura 4-42 (p. 291). Esto se consigue automáticamente al seleccionar la $S_{f'}$ en algún número de ciclos N_2 como se indica en la figura 4-33 (p. 267) y en la ecuación 4.10 (p. 268). Aplique los factores adecuados de reducción de resistencia de las ecuaciones 4.7 (pp. 260-265) para obtener la resistencia a la fatiga corregida.
2. Calcule las componentes alternativa y media de los esfuerzos aplicados en todos los puntos de interés de la pieza y aplique el adecuado factor de concentración de esfuerzos para cada componente de esfuerzo aplicado. (Véase el ejemplo 2-9 y la sección de resumen del capítulo 2).
3. Convierta las componentes alternativa y media de los esfuerzos aplicados en cualquier punto de interés de la pieza cargada, a esfuerzos efectivos alternativo y medio de Von Mises mediante las ecuaciones 4.22 (p. 309).
4. Grafique los esfuerzos alternativo y medio de Von Mises sobre el diagrama de Goodman modificado y determine el factor de seguridad adecuado con las ecuaciones 4.18 (pp. 297-298).

Recuerde que cuando se estudiaron las teorías de falla estática en el capítulo 3, se recomendó el enfoque de Von Mises para usarlo sólo en materiales dúctiles, ya que predice exactamente la fluencia en el caso de carga estática, donde el corte es el mecanismo de falla. Aquí se va a usar con un objetivo ligeramente diferente, esto es, combinar los esfuerzos aplicados multiaxial medio y alternativo en esfuerzos efectivos de tensión (pseudouniaxiales) medio y alternativo, que se puedan comparar con resistencias estáticas y de fatiga por tensión en el diagrama de Goodman modificado. Como tal, el enfoque de Von Mises se emplea con materiales dúctiles y frágiles en cargas de fatiga de HCF, ya que la suposición (correcta) es que las fallas por fatiga son fallas a tensión, sin importar la ductilidad o fragilidad del material. De hecho, por mucho tiempo se creyó que los materiales dúctiles de alguna manera se habían vuelto frágiles bajo cargas de fatiga prolongadas, porque sus superficies de falla parecían las de un material frágil con falla estática. Sin embargo, ahora se sabe que esto no es así.

Sin embargo, el diseñador tendría que ser precavido en cuanto al uso de materiales frágiles fundidos en casos de carga por fatiga, ya que sus resistencias a la tensión suelen a ser menores que las de los materiales forjados con densidad equivalente, además de que es más probable que contengan incrementadores de esfuerzos dentro del material por el proceso de vaciado. Se pueden citar muchas aplicaciones exitosas de materiales fundidos bajo cargas de fatiga, tales como cigüeñales en motores de combustión interna, árboles de levas y bielas. Dichas aplicaciones tienden a ser de menor tamaño en máquinas de baja potencia como podadoras, etcétera. Los motores automotrices de alta potencia y de camiones utilizan por lo general acero forjado (dúctil) o hierro fundido nodular (dúctil), en vez de hierro fundido gris (frágil) para cigüeñales y bielas, por ejemplo.

Se presenta ahora un ejemplo de fatiga multiaxial simple con la misma ménsula que se investigó en los ejemplos 2-9 y 3-1. Esta vez la carga es fluctuante con el tiempo.

EJEMPLO 4-6

Esfuerzos fluctuantes multiaxiales

Problema **Determine los factores de seguridad para el tubo de ménsula mostrado en la figura 3-9 (que se repite en la parte inferior de esta página).**

Se proporciona **El material es aluminio 2024-T4 con S_y = 47 000 psi, y S_{ut} = 68 000 psi. La longitud del tubo es l = 6 in y el brazo a = 8 in. El diámetro exterior del tubo es OD = 2 in y el diámetro interior es ID = 1.5 in. La carga aplicada varía senoidalmente de F = 340 a –200 lb.**

Suposiciones **La carga es dinámica y el ensamble se encuentra a temperatura ambiente. Considere el cortante debido a la carga transversal, así como a otros esfuerzos. Se trata de obtener un diseño de vida finita con una vida de 6*E*7 ciclos. El radio de la muesca en la pared es de 0.25 in y los factores de concentración de esfuerzos son para flexión, K_t = 1.7, y para corte K_{ts} = 1.35.**

Solución **Véase la figura 3-9, repetida aquí. También consulte el ejemplo 2-9 (p. 110) para una explicación más completa del análisis de esfuerzos para este problema.**

1. El aluminio no tiene límite de resistencia a la fatiga. Su resistencia física en 5*E*8 ciclos se determina con la ecuación 4.5*c* (p. 260). Puesto que la S_{ut} es mayor que 48 kpsi, la resistencia sin corregir $S_{f'@5E8} = 19$ kpsi.

2. Los factores de corrección se calculan con las ecuaciones 4.7 (pp. 260-265) y la figura 4-25 (p. 262) y se usan para calcular la resistencia a la fatiga corregida en el estándar de 5*E*8 ciclos.

$$C_{carga} = 1: \quad \text{para flexión}$$

$$C_{tamaño} = 0.869\left(d_{equiv}\right)^{-0.097} = 0.869\left(\sqrt{\frac{0.01046d^2}{0.0766}}\right)^{-0.097} = 0.869(.739)^{-0.097} = 0.895$$

$$C_{sup} = 2.7\left(S_{ut}\right)^{-0.265} = 2.7(68)^{-0.265} = 0.883 \qquad (a)$$

$$C_{temp} = 1$$

$$C_{conf} = 0.753: \quad \text{para } 99.9\%$$

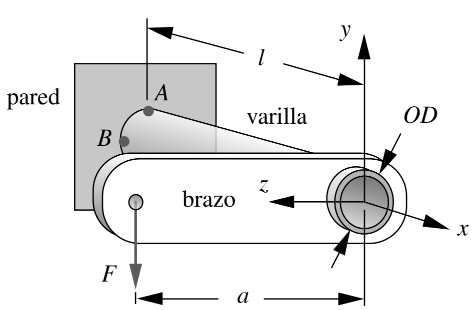


FIGURA 3-9 Repetida

Soporte del ejemplo 4-6

$$S_{f_{@5e8}} = C_{carga} C_{tamaño} C_{sup} C_{temp} C_{conf} S_{f'}$$
$$= (1)(0.895)(0.883)(1)(0.753)19\,000 = 11\,299 \text{ psi} \qquad (b)$$

Observe que el valor C_{carga} de flexión se utiliza a pesar de que existe tanto flexión como tensión. El esfuerzo cortante por torsión se convierte en un esfuerzo de tensión equivalente con el cálculo de Von Mises. C_{sup} se determina con la ecuación 4.7*e* (p. 263) usando los datos de la tabla 4-3 (p. 263). Esta resistencia a la fatiga corregida es todavía para el número de ciclos probados, $N = 5E8$.

4

3. El problema requiere una vida de 6*E*7 ciclos, de modo que el valor de la resistencia para esa vida se debe calcular a partir de la línea *S-N* de la figura 4-33*b* (p. 267), usando la resistencia a la fatiga corregida para esa vida. La ecuación 4.10*a* (p. 268) para esta línea se puede resolver para la resistencia deseada, después de que calculamos los valores de su coeficiente *a* y su exponente *b* a partir de la ecuación 4.10*c* (p. 268).

$$b = \frac{1}{z}\log\left(\frac{S_m}{S_f}\right) = \frac{1}{-5.699}\log\left[\frac{0.9(68\,000)}{11\,299}\right] = -0.1287$$
$$\log(a) = \log(S_m) - 3b = \log[0.9(68\,000)] - 3(-0.1287): \qquad a = 148\,929 \qquad (c)$$
$$S_n = aN^b = 148\,929N^{-0.1287} = 148\,929(6e7)^{-0.1287} = 14\,846 \text{ psi}$$

Observe que S_m se calcula como el 90% de S_{ut} porque la carga es a flexión en vez de axial (ecuación 4.9, p. 267). El valor de *z* se toma de la tabla 4-5 (p. 268) para $N = 5E8$ ciclos. Ésta es la resistencia a la fatiga corregida, para la menor vida requerida en este caso y luego es mayor que el valor de prueba corregido, el cual se calculó para una vida más grande.

4. Se debe obtener la sensibilidad a la muesca del material, para calcular los factores de concentración de esfuerzos por fatiga. La tabla 4-8 (p. 277) muestra los factores de Neuber para aluminio endurecido. La interpolación da un valor de 0.147 para $\sqrt{a}$ en la S_{ut} del material. La ecuación 4.13 (p. 273) da la sensitividad a la muesca resultante para el radio de la muesca supuesto de 0.25 in.

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1}{1 + \frac{0.147}{\sqrt{0.25}}} = 0.773 \qquad (d)$$

5. Los factores de concentración de esfuerzo por fatiga se obtienen de la ecuación 4.11*b* (p. 273), usando los factores de concentración de esfuerzo geométrico para flexión y torsión, respectivamente.

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.773(1.7 - 1) = 1.541 \qquad (e)$$

$$K_{fs} = 1 + q(K_{ts} - 1) = 1 + 0.773(1.35 - 1) = 1.270 \qquad (f)$$

6. El tubo de la ménsula está cargado tanto a la flexión (como una viga en voladizo) como a la torsión. Las formas de las distribuciones de cortante, momento y torque se muestran en la figura 2-31 (p. 113). Todos son máximos en la pared. Las componentes alternativa y media de la fuerza, el momento y el torque aplicados en la pared son

$$F_a = \frac{F_{máx} - F_{mín}}{2} = \frac{340 - (-200)}{2} = 270 \text{ lb}$$
$$F_m = \frac{F_{máx} + F_{mín}}{2} = \frac{340 + (-200)}{2} = 70 \text{ lb} \qquad (g)$$

$$M_a = F_a l = 270(6) = 1\,620 \text{ lb} - \text{in}$$
$$M_m = F_m l = 70(6) = 420 \text{ lb} - \text{in} \tag{h}$$

$$T_a = F_a a = 270(8) = 2\,160 \text{ lb} - \text{in}$$
$$T_m = F_m a = 70(8) = 560 \text{ lb} - \text{in} \tag{i}$$

7. El factor de concentración de esfuerzos por fatiga, para los esfuerzos medios, depende de la relación entre el esfuerzo local máximo de Von Mises en la muesca y la resistencia a la fluencia, como se definió en la ecuación 4.17, una porción de la cual se muestra aquí.

$$\text{si } K_f\left|\sigma_{máx}\right| < S_y \text{ entonces} \qquad K_{fm} = K_f, \qquad K_{fsm} = K_{fs}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = K_f\left|\frac{M_{máx}c}{I}\right| = K_f\left|\frac{F_{máx}\,l\,c}{I}\right| = 1.541\left|\frac{340(6)(1)}{0.5369}\right| = 5\,855$$

$$\tau_{\text{máx}} = K_{fs}\left|\frac{T_{máx}r}{J}\right| = K_{fs}\left|\frac{F_{máx}ar}{J}\right| = 1.270\left|\frac{340(8)(1)}{1.074}\right| = 3\,216 \tag{j}$$

$$\sigma'_{\text{máx}} = \sqrt{5\,855^2 + (3)3\,216^2} = 8\,081 < 47\,000$$

$$\therefore \quad K_{fm} = K_f = 1.541, \qquad K_{fsm} = K_{fs} = 1.270$$

En este caso, no hay reducción en los factores de concentración de esfuerzos para el esfuerzo medio, porque no hay fluencia en la muesca para mitigar la concentración de esfuerzos.

8. El mayor esfuerzo de flexión por tensión se encuentra en la fibra exterior superior o inferior en los puntos *A* o *A*'. El mayor esfuerzo cortante por torsión se encuentra alrededor de la circunferencia exterior del tubo. (Véase el ejemplo 2-9 de la p. 110 para más detalles). Primero, tome un elemento diferencial en el punto *A* o *A*' donde se combinan ambos de estos esfuerzos. (Véase la figura 2-32 en la p. 114). Obtenga las componentes alternativa y media del esfuerzo de flexión normal y del esfuerzo cortante por torsión en el punto *A,* por medio de las ecuaciones 2.11*b* (p. 86) y 2.23*b* (p. 108), respectivamente.

$$\sigma_a = K_f\frac{M_a c}{I} = 1.541\frac{1\,620(1)}{0.5369} = 4\,649 \text{ psi}$$
$$\tau_{a_{torsión}} = K_{fs}\frac{T_a r}{J} = 1.270\frac{2\,160(1)}{1.074} = 2\,556 \text{ psi} \tag{k}$$

$$\sigma_m = K_{fm}\frac{M_m c}{I} = 1.541\frac{420(1)}{0.5369} = 1\,205 \text{ psi}$$
$$\tau_{m_{torsión}} = K_{fsm}\frac{T_m r}{J} = 1.270\frac{560(1)}{1.074} = 663 \text{ psi} \tag{l}$$

9. Obtenga los esfuerzos alternativo y medio de Von Mises en el punto *A* (ecuación 4.22*b*, p. 309).

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2}$$
$$= \sqrt{4\,649^2 + 0^2 - 4\,649(0) + 3\left(2\,556^2\right)} = 6\,419 \text{ psi}$$
$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma_{x_m}^2 + \sigma_{y_m}^2 - \sigma_{x_m}\sigma_{y_m} + 3\tau_{xy_m}^2} \tag{m}$$
$$= \sqrt{1\,205^2 + 0^2 - 1\,205(0) + 3\left(663^2\right)} = 1\,664 \text{ psi}$$

10. Puesto que la misma fuerza aplicada causa el momento y el torque, éstos son sincrónicos y están en fase; cualesquier cambio en ellos mantendrá una razón constante. Ésta es una situación correspondiente al caso 3, en tanto que el factor de seguridad se obtiene con la ecuación 4.18*e* (p. 298).

$$N_f = \frac{S_f S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_f} = \frac{14\,846(68\,000)}{6\,419(68\,000) + 1\,664(14\,846)} = 2.2 \qquad (n)$$

11. Como el tubo es una viga corta, se necesita verificar el cortante debido a la carga transversal en el punto *B* sobre el eje neutro, donde el cortante por torsión también es máximo. El esfuerzo cortante transversal máximo en el eje neutro de un tubo redondo hueco, de pared delgada, está dado en la ecuación 2.15*d* (p. 91).

$$\begin{aligned} \tau_{a_{transversal}} &= K_{fs} \frac{2V_a}{A} = 1.270 \frac{2(270)}{1.374} = 499 \text{ psi} \\ \tau_{m_{transversal}} &= K_{fsm} \frac{2V_m}{A} = 1.270 \frac{2(70)}{1.374} = 129 \text{ psi} \end{aligned} \qquad (o)$$

El punto *B* está en cortante puro. El esfuerzo cortante total en el punto *B* es la suma del esfuerzo cortante transversal y el esfuerzo cortante por torsión, los cuales actúan sobre los mismos planos del elemento.

$$\begin{aligned} \tau_{a_{total}} &= \tau_{a_{transversal}} + \tau_{a_{torsión}} = 499 + 2\,556 = 3\,055 \text{ psi} \\ \tau_{m_{total}} &= \tau_{m_{transversal}} + \tau_{m_{torsión}} = 129 + 663 = 792 \text{ psi} \end{aligned} \qquad (p)$$

12. Calcule los esfuerzos alternativo y medio de Von Mises para el punto *B* (ecuación 4.22*b*, p. 309).

$$\begin{aligned} \sigma'_a &= \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2} = \sqrt{0 + 0 - 0 + 3(3\,055)^2} = 5\,291 \text{ psi} \\ \sigma'_m &= \sqrt{\sigma_{x_m}^2 + \sigma_{y_m}^2 - \sigma_{x_m}\sigma_{y_m} + 3\tau_{xy_m}^2} = \sqrt{0 + 0 - 0 + 3(792)^2} = 1\,372 \text{ psi} \end{aligned} \qquad (q)$$

13. El factor de seguridad en el punto *B* se determina mediante la ecuación 4.18*e* (p. 298).

$$N_f = \frac{S_f S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_f} = \frac{14\,846(68\,000)}{5\,291(68\,000) + 1\,372(14\,846)} = 2.7 \qquad (r)$$

Ambos puntos *A* y *B* están seguros contra la falla por fatiga.

14. Los archivos EX06-06A y EX06-06B se encuentran en el CD-ROM.

4.14 ESTUDIO DE CASO DE DISEÑO POR FATIGA

El siguiente estudio de caso incluye todos los elementos de un problema de diseño de fatiga de HCF. Es un problema de diseño real de la experiencia como consultor del autor, que sirve para ilustrar muchos de los puntos de este capítulo. A pesar de que es extenso y algo complicado, su estudio cuidadoso compensará el tiempo invertido.

ESTUDIO DE CASO 6

Rediseño de un transportador que falla en un telar a chorro de agua

Problema **En varios telares a chorro de agua, los transportadores del peine empezaron a fallar por fatiga. El dueño de una fábrica de tejidos había incrementado la rapidez de los telares para aumentar la producción. El diseño original del transportador del peine de acero pintado duró sin fallar durante 5 años de operaciones en tres turnos a la menor rapidez; pero empezó a fallar en los meses en que se incrementó la velocidad. El propietario tenía cerca un fabricante local que hizo las refacciones de acero pintado similares a las originales, sin embargo, éstas fallaron a los seis meses de uso. Sustituyó luego el transportador por uno de aluminio de su propio diseño, el cual duró tres meses. Después buscó ayuda de ingeniería especializada. Analice las fallas de los tres diseños existentes y rediseñe la pieza para que dure 5 años adicionales a la máxima velocidad.**

Se proporciona **El transportador tiene 54 in de longitud y se carga entre los balancines de dos mecanismos de cuatro barras manivela-balancín de Grashof, que se manejan sincrónicamente y en fase por trenes de engranes conectados por un eje de transmisión de 54 in de largo. La disposición del telar se indica en la figura 4-50; y el montaje, en la figura 4-51. Los detalles de su operación se examinan a continuación. Las secciones transversales de los diseños que fallaron se ilustran en la figura 4-53 y sus fotografías en la figura 4-54. El nuevo diseño no puede ser de un ancho mayor que el existente (2.5 in). La velocidad original del telar era de 400 rpm y la nueva velocidad es de 500 rpm. El costo del nuevo diseño debería ser competitivo con el costo de los diseños actuales (que fallaron) (cerca de $300 cada uno en lotes de 50).**

Suposiciones **La carga fluctuante principal sobre la pieza es inercial y ocurre debido a que su propia masa, más que la del peine que transporta sobre ella, se acelera y desacelera por el movimiento del mecanismo. También hay una fuerza de “golpeteo” sobre el peine, cuando éste golpea la tela para empujar el último hilado a su lugar. Dicha fuerza causa un torque repetido sobre el transportador que puede ser significativo o no para la falla. La magnitud de la fuerza de golpeteo no se conoce exactamente y varía con el peso de la tela que se está tejiendo.**

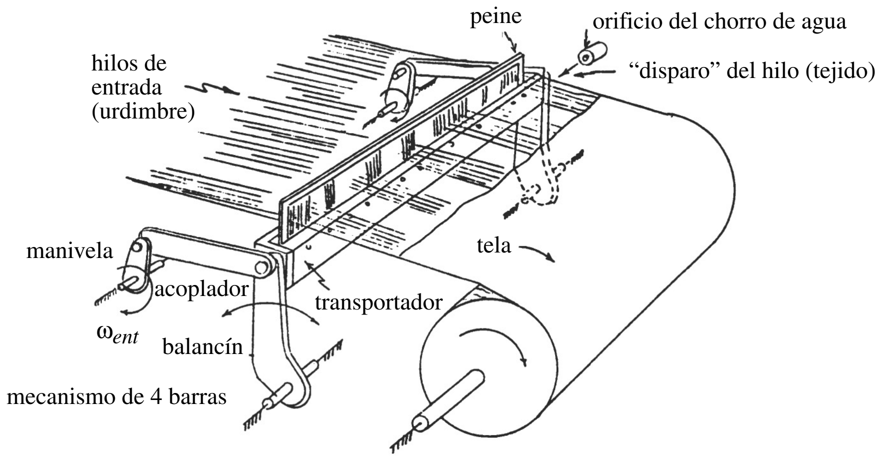


FIGURA 4-50

Urdimbre, tejido, transportador, peine y conductor del transportador en un telar a chorro de agua

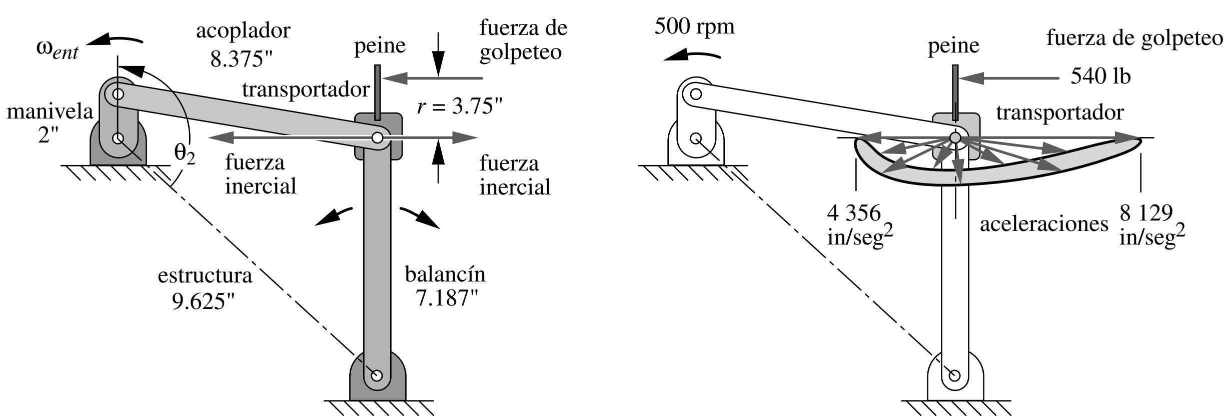
Se estima que es de 10 lb/in del ancho de la tela (540 lb en total). El ambiente se humedece con agua dulce y todas las muestras que fallaron presentan evidencia de corrosión.

Solución **Véase las figuras 4-50 a 4-56 y la tabla 4-13 (p. 328).**

1. Se necesitan algunos antecedentes adicionales para entender el problema antes de buscar su solución. Los telares para hacer lienzos son dispositivos muy antiguos y originalmente funcionaban con energía humana. El telar mecánico se inventó durante la Revolución Industrial y actualmente existen muchas variedades. La figura 4-50 ilustra algunas piezas del telar a chorro de agua que interesa. Quizá la mejor forma de entender la operación fundamental de un telar sea considerar un telar manual, el cual tal vez el lector haya visto en un museo, una tienda de tejidos a la medida o en el taller de un aficionado. Sus elementos básicos son similares a los que tiene la figura.

   Un conjunto de hilos llamados *urdimbre* se estira a través del telar. Cada hilo se sujeta con un dispositivo (que no se muestra) que lo jala hacia arriba o hacia abajo. Este dispositivo se activa con un mecanismo que, en el telar manual, se opera comúnmente mediante pedales. Cuando se empuja un pedal, se levanta un hilo sí y un hilo no de la urdimbre; mientras que los hilos alternados se jalan hacia abajo formando un "túnel", si se observa desde el borde de la tela. Este túnel se llama *calada*. El tejedor "avienta" una *lanzadera* —que parece una canoa en miniatura y tiene dentro una bobina de hilo— a través de la calada. La lanzadera arrastra una sola hebra llamada *hilo de trama* a través de la calada de la urdimbre. Después, el tejedor jala una *barra horizontal* que transporta un dispositivo llamado *peine*. Los hilos de la urdimbre se enhebran en los dientes de este peine, el cual empuja el nuevo hilo entramado hacia los previos hasta "golpear" la tela y crear un tejido apretado. Enseguida, el tejedor cambia los pedales de la calada y los hilos de "arriba" de la urdimbre se vuelven los de "abajo", creando así un nuevo túnel (calada) de hilos cruzados. La lanzadera se avienta de nuevo por la urdimbre (desde el otro lado), tejiendo otro hilo que se golpea con el peine.

   Los telares motorizados originales simplemente mecanizaban el proceso manual, sustituyendo las manos y los pies del tejedor con mecanismos y engranes. El lanzamiento de la lanzadera de madera se realizaba golpeándola literalmente con un palo, haciéndola volar a través de la calada y atrapándola del otro lado. La dinámica del "vuelo de esta lanzadera" (anterior a la NASA) se volvió el factor limitante para la rapidez del telar. Los telares de lanzadera sólo pueden enhebrar 100 hilos por minuto (ppm). Se



(*a*) Mecanismo, transportador, peine y dimensiones (*b*) Aceleración sobre el transportador y fuerza sobre el peine

FIGURA 4-51

Mecanismo de cuatro barras para la conducción del transportador, que indica las fuerzas y aceleraciones sobre el transportador

invirtió mucho trabajo para desarrollar telares más rápidos, y éstos usualmente eliminaron la lanzadera, cuya masa limitaba la velocidad. En el siglo XX se desarrollaron telares a chorro de agua y a chorro de aire, los cuales disparaban el hilo a través de la calada sobre un chorro de aire o un chorro de agua. La figura 4-50 presenta el orificio a través del cual se alimenta el hilo. En el momento exacto del ciclo, una pequeña bomba de pistón dispara un chorro de agua por el orificio, y la tensión superficial jala el hilo a través de la calada. El telar a chorro de agua opera hasta aproximadamente 500 ppm. Los telares en cuestión se diseñaron para funcionar a 400 ppm; sin embargo, el dueño cambió su engranaje para incrementar la velocidad a 500 ppm. Las fallas surgieron pronto ya que las cargas dinámicas se incrementaron al cuadrado de la velocidad, y excedieron las cargas para las cuales se diseñó la máquina.

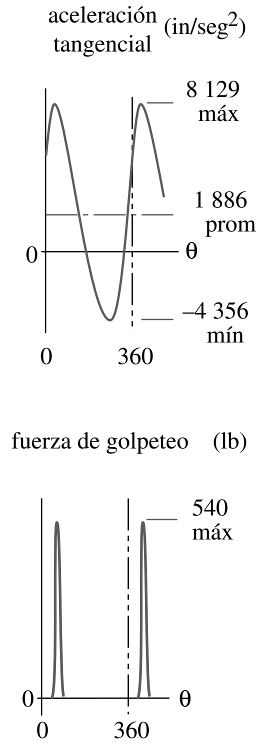


FIGURA 4-52

Aceleración variable con el tiempo y carga sobre el transportador a 500 rpm que muestran su relación de fase

2. Las figuras 4-50 y 4-51 presentan el transportador, el cual es transportado por dos mecanismos idénticos de cuatro barras, que lo mueven en un arco para empujar el peine hacia la tela en el momento exacto del ciclo. El transportador está atornillado firmemente a los balancines de cada extremo y gira con ellos. Los pivotes del mecanismo son cojinetes de bolas de autoalineación, que permiten modelar la barra horizontal como una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida, igual a su masa total por su aceleración más la fuerza de golpeteo. La masa total es la suma de la masa del transportador y la masa de su carga útil de 10 lb, esto es, el peine. La figura 4-51 muestra la geometría del mecanismo del transportador, sus dimensiones y la gráfica polar de los vectores de aceleración en el centro de masa del transportador. Las componentes tangenciales de la aceleración son las más grandes, y crean momentos de flexión en las direcciones de las fuerzas inerciales mostradas en la misma figura. La figura 4-52 grafica la componente de la aceleración tangencial del centro de masa del transportador para 1 ciclo, y muestra la fuerza de golpeteo en su relación de fase con la aceleración. La aceleración crea un momento de flexión fluctuante, y la fuerza de golpeteo, que está desplazada 3.75 in del centro de masa del transportador, crea un torque repetido sobre el transportador. Dependiendo de la geometría de la sección transversal del transportador, esta combinación de cargas puede crear un caso de *esfuerzo multiaxial simple*, sincrónico y en fase, para las ubicaciones de máximo esfuerzo (véase la sección 4.12 de la p. 306). Puesto que la carga es básicamente inercial, el diseño del transportador debería minimizar su masa (para reducir la carga inercial), mientras que al mismo tiempo se maximizan su rigidez y su resistencia. Éstas son restricciones conflictivas y hacen más desafiante la tarea de diseño.

3. Como se trata de un caso de carga fluctuante, se seguirán los pasos de diseño recomendados en la sección 4.11 (p. 290), el primero de los cuales consiste en determinar el número de ciclos de carga esperados durante la vida de servicio. El propietario ha solicitado que el nuevo diseño dure para los próximos 5 años en operación con tres turnos. Suponiendo 2 080 horas por turno en un año de trabajo normal,

$$N = 500\ \frac{\text{ciclos}}{\text{min}}\left(\frac{60\ \text{min}}{\text{hr}}\right)\left(\frac{2\ 080\ \text{hr}}{\text{turno - año}}\right)(3\ \text{turnos})(5\ \text{años}) = 9.4E8\ \text{ciclos} \qquad (a)$$

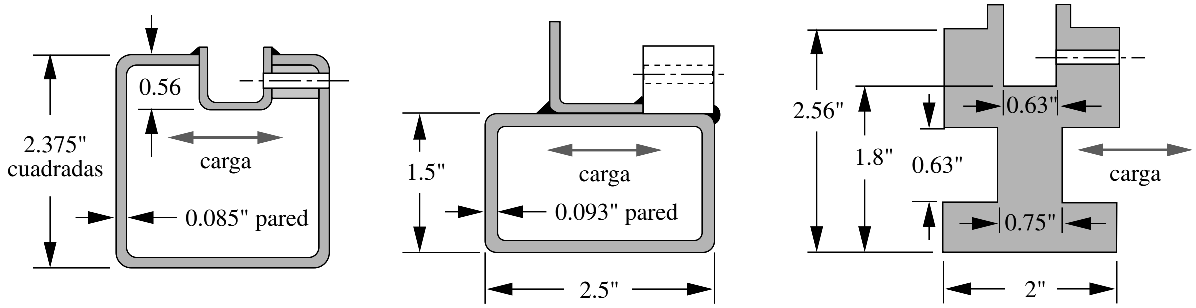
Esto es claramente un régimen de HCF y podría favorecerse con el uso de un material con límite de resistencia a la fatiga.

El propietario informa que el transportador de remplazo duró 6 meses aproximadamente, y su diseño de aluminio duró 3 meses. (Véase las figuras 4-53 y 4-54). Los ciclos de vida son:

$$\text{6 meses:}\ \ N = 500\ \frac{\text{ciclos}}{\text{min}}\left(\frac{60\ \text{min}}{\text{hr}}\right)\left(\frac{2\ 080\ \text{hr}}{\text{año}}\right)(3\ \text{turnos})(0.5\ \text{años}) = 9.4E7\ \text{ciclos}$$

$$(b)$$

$$\text{3 meses:}\ N = 500\ \frac{\text{ciclos}}{\text{min}}\left(\frac{60\ \text{min}}{\text{hr}}\right)\left(\frac{2\ 080\ \text{hr}}{\text{año}}\right)(3\ \text{turnos})(0.25\ \text{años}) = 4.7E7\ \text{ciclos}$$



(*a*) Transportador original de acero (*b*) Sustituto de acero del transportador (*c*) Sustituto de aluminio del transportador

FIGURA 4-53

Diseños existentes del transportador, todos fallaron por fatiga

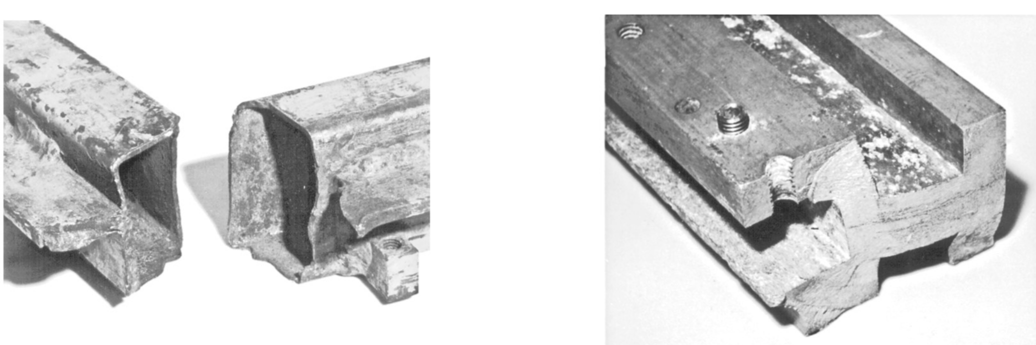
4. Como las amplitudes de las cargas de flexión aplicadas son función de la aceleración (la cual está definida) y de la masa de la pieza (la cual varía con el diseño), lo mejor es expresar las cargas de flexión en términos de $F = ma$. Se supone que el torque aplicado es el mismo para cualquier diseño con base en la estimación del propietario, de una fuerza de golpeteo típica. Tales datos se muestran en la figura 4-52, y los términos medio y alternativo son

Flexión:

$$F_{media} = ma_{media} = m\frac{a_{máx} + a_{mín}}{2} = m\frac{8\,129 + (-4\,356)}{2} = 1\,886.5m$$
$$F_{alt} = ma_{alt} = m\frac{a_{máx} - a_{mín}}{2} = m\frac{8\,129 - (-4\,356)}{2} = 6\,242.5m \qquad (c)$$

Torque:

$$T_{media} = \left(\frac{F_{golpe\,máx} + F_{golpe\,mín}}{2}\right)r = \left(\frac{540+0}{2}\right)3.75 = 1\,012.5 \text{ lb - in}$$
$$T_{alt} = \left(\frac{F_{golpe\,máx} - F_{golpe\,mín}}{2}\right)r = \left(\frac{540-0}{2}\right)3.75 = 1\,012.5 \text{ lb - in} \qquad (d)$$



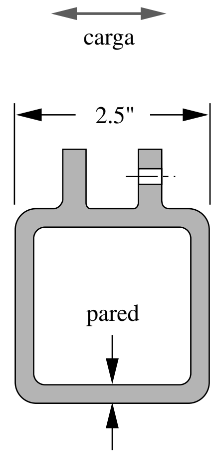
(*a*) (*b*)

FIGURA 4-54

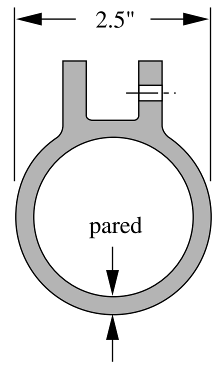
Fotografías de transportadores fallidos *a*) Sustituto de barra de acero — después de 6 meses, *b*) Sustituto de aluminio — después de 3 meses.

5. Se está en la envidiable posición de contar con datos de prueba de piezas típicas, que trabajan en condiciones de servicio reales en forma de muestras que fallaron. De hecho, el propietario corrió inadvertidamente un programa de pruebas (para su disgusto) y determinó los niveles de esfuerzo que causaron la falla en esta aplicación. Por lo tanto, el primer paso será analizar los diseños existentes que fallaron para aprender más acerca del problema. Se sabe que los transportadores del diseño original (figura 4-53a) duraron 5 años con los menores niveles de esfuerzos asociados con una operación a 400 ppm. Sólo empezaron a fallar cuando incrementaron la velocidad, lo cual aumentó la carga de inercia.

   Diversos factores intervienen en esta aplicación y son difíciles de cuantificar. En las piezas fallidas se hace evidente la corrosión. Los transportadores de acero están oxidados y tienen superficies corroídas. La pieza de aluminio no anodizado también está picada. Los diseñadores no tuvieron mucho cuidado en minimizar las concentraciones de esfuerzos y se observa que las fracturas por fatiga se iniciaron (como es típico) en los incrementadores de esfuerzos. En la figura 4-54*b*, la pieza de aluminio que falló muestra que la grieta se inició en un orificio machueleado, que es una muesca muy afilada. Las grietas en la pieza de acero (figura 4-54*b*) parecen haberse iniciado en una gota de soldadura utilizada para sujetar los soportes del peine. Las soldaduras son notorios incrementadores de esfuerzos y siempre dejan esfuerzos por tensión residuales. Se deben tomar en cuenta estas lecciones en el rediseño e intentar reducir tales factores negativos. **Por definición, una pieza que falla tiene un factor de seguridad igual a 1**. Sabiendo esto, se puede crear el modelo de carga, esfuerzos y factor de seguridad de la pieza y, después, *volver a calcular con el factor de seguridad igual a 1,* para determinar varios de los factores anteriores que son difíciles de cuantificar en una aplicación específica.



(*a*) Diseño cuadrado



(*b*) Diseño redondo

FIGURA 4-55

Dos diseños nuevos del transportador de chorro de agua

6. Se creó un modelo para resolver las ecuaciones de este caso. Se introdujeron datos específicos de cada uno de los tres diseños fallidos; el modelo se modificó lo necesario para tomar en cuenta las diferencias en geometría y material entre los tres diseños. El mismo modelo se modificó aún más para dar cabida a los nuevos diseños propuestos que se muestran en la figura 4-55. Se obtuvieron ocho versiones del modelo, y sus archivos de datos se incluyen con este texto y están identificados como CASE6-0 a CASE6-7. El espacio no permite analizar el contenido de los ocho modelos, de modo que tan sólo dos se estudiarán con detalle, y los resultados de los otros se compararán en un resumen. Se presentarán el diseño original fallido y el nuevo diseño final. El lector puede abrir los modelos en el programa de su preferencia, si lo desea.

7. El análisis del diseño original del transportador del peine se encuentra en el archivo CASE6-1. Se deben calcular la sección geométrica y la masa de la viga, con la finalidad de determinar los esfuerzos de flexión.

$$
\begin{aligned}
\text{área} &= 2.375^2 - 2.205^2 + 2(0.56)(0.085) = 0.874 \text{ in}^2 \\
\text{peso} &= \text{área}(\text{longitud})(\gamma) = 0.874(54)(0.286) = 13.5 \text{ lb} \\
m &= \frac{\text{peso} + \text{peine}}{386.4} = \frac{13.5 + 10}{386.4} = 0.061 \text{ blobs} \\
I &= \frac{b_{externa} h_{externa}^3 - b_{interna} h_{interna}^3}{12} = \frac{2.375^4 - 2.205^4}{12} = 0.68 \text{ in}^4
\end{aligned} \tag{e}
$$

   Observe que el cálculo del área incluye los lados completos del peine, puesto que agregan masa pero el cálculo de I los ignora puesto que agregan una cantidad despreciable a I. El peso específico γ es el del acero y la unidad de masa está en blobs o lb-s^2/in.

8. Las componentes media y alternativa nominales de la fuerza inercial y del momento de flexión se pueden calcular ahora.

$$
\begin{aligned}
F_{media} &= 1\,886.5m = 1\,886.5(0.061) = 115 \text{ lb} \\
F_{alt} &= 6\,242.5m = 6\,242.5(0.061) = 380 \text{ lb} \\
M_{media} &= \frac{wl^2}{8} = \frac{(wl)l}{8} = \frac{Fl}{8} = \frac{115(54)}{8} = 775 \text{ lb - in} \\
M_{alt} &= \frac{wl^2}{8} = \frac{(wl)l}{8} = \frac{Fl}{8} = \frac{380(54)}{8} = 2\,565 \text{ lb - in}
\end{aligned}
\qquad (f)
$$

Las ecuaciones de momento corresponden al momento máximo en el centro de una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida (véase la figura F-2 en el apéndice F). Los esfuerzos de flexión nominales (sin incluir las concentraciones de esfuerzos) son, entonces,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{m_{nom}} &= \frac{M_{media}(c)}{I} = \frac{775(1.188)}{0.68} = 1\,351 \text{ psi} \\
\sigma_{a_{nom}} &= \frac{M_{alt}(c)}{I} = \frac{2\,565(1.188)}{0.68} = 4\,470 \text{ psi}
\end{aligned}
\qquad (g)
$$

9. Los esfuerzos cortantes nominales debidos a la torsión en una sección cuadrada hueca son máximos en los centros de los cuatro lados y, por consiguiente, ocurren en los puntos de esfuerzo flexionante máximo. El esfuerzo cortante se obtiene de $\tau_{máx} = T/Q$ (ecuación 2.26*a*, p. 108), donde Q para la geometría particular se obtiene de la tabla 2-2 (p. 102):

$$
Q = 2t(a-t)^2 = 2(0.085)\left(\frac{2.375}{2} - 0.085\right)^2 = 0.207 \text{ in}^3 \qquad (h)
$$

donde t es el espesor de la pared y a es la mitad del ancho de la sección transversal. Los esfuerzos nominales cortantes medio y alternativo son, entonces,

$$
\begin{aligned}
\tau_{m_{nom}} &= \frac{T_{media}}{Q} = \frac{1\,012.5}{0.207} = 4\,900 \text{ psi} \\
\tau_{a_{nom}} &= \frac{T_{alt}}{Q} = \frac{1\,012.5}{0.207} = 4\,900 \text{ psi}
\end{aligned}
\qquad (i)
$$

10. Se necesitan calcular o estimar los factores de concentración de esfuerzos por flexión y cortante. Peterson[30] desarrolló una gráfica para el caso de una sección rectangular hueca en torsión, y de ésta se obtiene $K_{ts} = 1.08$. No se encontraron datos adecuados para el factor de concentración de esfuerzos por flexión para este caso. La corrosión y el picado en combinación con soldaduras ásperas pronostican un K_t grande. El procedimiento adoptado aquí fue regresar a despejar K_t con el factor de seguridad igual a 1 y todos los demás factores del material y los esfuerzos nominales especificados. El resultado fue $K_t = 4.56$ en esta parte fallida. Tal resultado se presenta aquí para dar continuidad conceptual; no obstante, debe entenderse que el valor de K_t se obtuvo *resolviendo hacia atrás* el modelo usando la iteración después de que se definieron todos los demás factores. Después, los esfuerzos locales alternativo y medio y K_t se resolvieron simultáneamente con $N_f = 1$, lo cual representa la condición de falla.

11. La sensibilidad a la muestra del material y los factores estimados de concentración de esfuerzos por fatiga para flexión y cortante alternativos se obtuvieron con las ecuaciones 4.11*b* y 4.13 (p. 273), siguiendo el procedimiento del ejemplo 4-3 (p. 276). Utilizando el valor de K_t calculado en el paso 10 y $q = 0.8$, los resultados son: $K_f = 3.86$ y $K_{fs} = 1.06$. Los factores de concentración de esfuerzos por fatiga correspondientes para el esfuerzo medio se determinan con la ecuación 4.17 (p. 294) y como, en este caso, el esfuerzo local está por debajo del punto de fluencia tanto para la flexión como para la torsión son idénticos a los factores del esfuerzo alternativo: $K_{fm} = K_f$ y $K_{fms} = K_{fm}$.

12. Las componentes estimadas del esfuerzo local se determinan por medio de los factores de concentración de esfuerzos por fatiga:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= K_{fm}\sigma_{m_{nom}} = 3.86(1\,351) = 5\,212 \text{ psi} \\ \sigma_a &= K_f\sigma_{a_{nom}} = 3.86(4\,470) = 17\,247 \text{ psi} \end{aligned} \qquad (j)$$

$$\begin{aligned} \tau_m &= K_{fsm}\tau_{m_{nom}} = 1.06(4\,900) = 5\,214 \text{ psi} \\ \tau_a &= K_{fsm}\tau_{a_{nom}} = 1.06(4\,900) = 5\,214 \text{ psi} \end{aligned} \qquad (k)$$

13. Como se tiene un caso de esfuerzos biaxiales combinados fluctuantes, que son sincrónicos y están en fase, y que tienen concentración de esfuerzos, el método general que usa los esfuerzos efectivos de Von Mises para las componentes media y alternativa es el apropiado (ecuación 4.22*b*). Éstas calculan los esfuerzos equivalentes alternativo y medio para el caso biaxial.

$$\begin{aligned} \sigma'_a &= \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2} \\ &= \sqrt{17\,247 + 0 - 0 + 3(5\,214)} = 19\,468 \text{ psi} \\ \sigma'_m &= \sqrt{\sigma_{x_m}^2 + \sigma_{y_m}^2 - \sigma_{x_m}\sigma_{y_m} + 3\tau_{xy_m}^2} \\ &= \sqrt{5\,212 + 0 - 0 + 3(5\,214)} = 10\,428 \text{ psi} \end{aligned} \qquad (l)$$

14. Ahora se deben determinar las propiedades del material. Se hizo una prueba de laboratorio sobre una muestra de la pieza fallida, y su composición química concuerda con la del acero AISI 1018 rolado en frío. Los valores de la resistencia de este material se obtuvieron de datos publicados (véase el apéndice E) y son: S_{ut} = 64 000 psi y S_y = 50 000 psi. La resistencia de fluencia al cortante se calculó a partir de $S_{ys} = 0.577 S_y$ = 28 850 psi. El límite de resistencia a la fatiga sin corregir se tomó como $S_{e'} = 0.5 S_{ut}$ = 32 000 psi.

15. Los factores de modificación de la resistencia se obtuvieron de las ecuaciones y los datos de la sección 4.6 (p. 257). La carga es una combinación de flexión y torsión. Sin embargo, incorporamos los esfuerzos de torsión en el esfuerzo equivalente de Von Mises, el cual es un esfuerzo normal, así que

$$C_{carga} = 1 \qquad (m)$$

El diámetro equivalente de la muestra de prueba se obtuvo del área con 95% de esfuerzo usando las ecuaciones 4.7*c* y 4.7*d* (p. 261). El factor de tamaño se obtiene entonces con la ecuación 4.7*b* (p. 261):

$$\begin{aligned} A_{95} &= 0.05bh = 0.05(2.375)^2 = 0.282 \text{ in}^2 \\ d_{equiv} &= \sqrt{\frac{A_{95}}{0.0766}} = 1.92 \text{ in} \\ C_{tamaño} &= 0.869\left(d_{equiv}\right)^{-0.097} = 0.869(1.92)^{-0.097} = 0.82 \end{aligned} \qquad (n)$$

El factor de superficie se obtiene de la ecuación 4.7*e* (p. 263) y los datos de la tabla 4-3 (p. 263), para superficies maquinadas o roladas en frío. Parece que el material del transportador originalmente estaba rolado en frío, aunque estaba corroído. La corrosión podría obligar a usar un factor de superficie con un menor valor; sin embargo, se decidió permitir que el factor de concentración de esfuerzo geométrico K_t tomara en cuenta los efectos de la corrosión en este caso, como se describió anteriormente, y se aplicó el factor de superficie maquinada.

$$C_{sup} = A\left(S_{ut}\right)^{b} = 2.7(64)^{-0.265} = 0.897 \tag{o}$$

El factor de temperatura y el factor de confiabilidad se hicieron ambos iguales a 1. Se tomó la confiabilidad del 50% para este cálculo hacia atrás, con la finalidad de ubicar toda la incertidumbre en el factor de concentración de esfuerzos de alta variabilidad.

16. Ahora se calcula el límite de resistencia a la fatiga corregido de

$$S_e = C_{carga}\, C_{tamaño}\, C_{sup}\, C_{temp}\, C_{conf}\, S_{e'}$$
$$S_e = (1)(0.81)(0.90)(1)(1)(32\ 000) = 23\ 258 \text{ psi} \tag{p}$$

17. El factor de seguridad se calcula con la ecuación 4.18*e* (p. 298). El factor de seguridad del caso 3 es aplicable aquí puesto que, con la carga inercial, las componentes media y alternativa del esfuerzo de flexión mantendrán una razón constante con los cambios en la velocidad. Como la fuerza de golpeteo mínima es siempre cero, la razón también es constante sin importar la fuerza máxima.

$$N_f = \frac{S_e S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_e}$$
$$= \frac{23\ 258(64\ 000)}{19\ 468(64\ 000) + 10\ 428(23\ 258)} = 1.0 \tag{q}$$

Los esfuerzos alternativo y medio se calcularon hacia atrás y se pueden usar ahora para graficar un diagrama de Goodman modificado. Como se forzó que el factor de seguridad fuera 1 para representar la falla conocida de esta pieza, el punto del esfuerzo aplicado σ'_a, σ'_m cae sobre la línea de Goodman.

18. Se repitió el análisis anterior cambiando la velocidad de operación al valor del diseño original de 400 rpm. Usando el mismo factor de concentración de esfuerzos de 4.56 que se calculó hacia atrás en el análisis de la pieza fallida, el factor de seguridad a 400 rpm es 1.3, lo que indica por qué el diseño original sobrevivió a las rpm establecidas (archivo caso 6-0).

19. El análisis de esta y otras piezas fallidas da una idea sobre las restricciones del problema y permite crear un mejor diseño. Uno de los factores que influyeron en el nuevo diseño fue el ambiente corrosivo, el cual hace al acero un material menos deseable a pesar de su límite de resistencia a la fatiga. El acabado con pintura no protegió las ahora oxidadas piezas de acero. La muestra de aluminio fallida que se examinó también mostró una picadura significativa en sólo tres meses de uso. Si se va a utilizar aluminio, se debería aplicar un acabado anodizado para protegerlo de la oxidación.

    Otro factor evidente es el rol de la concentración de esfuerzos, que parece ser muy alta en esta pieza. La presencia de soldaduras y orificios machuelados en regiones de esfuerzos altos contribuyó claramente a las fallas. Cualquier diseño nuevo debería reducir las concentraciones de esfuerzos al mover los orificios requeridos para sujetar el peine hacia las ubicaciones de menor esfuerzo. Si es posible, se deberían eliminar las soldaduras en las regiones de alto esfuerzo. Se deben considerar tratamientos superficiales como el granallado para generar esfuerzos residuales de compresión benéficos.

    Los niveles de esfuerzos por torsión definidos de manera deficiente pero potencialmente significativos son una preocupación. El tejido de tela con mayor peso causa niveles más altos de esfuerzos por torsión. Por lo tanto, la geometría del nuevo diseño debería ser resistente a los esfuerzos por torsión, así como a los esfuerzos por flexión. Finalmente, el nuevo diseño no debe ser más pesado que el diseño existente, ya que la masa adicional causará que se transmitan mayores fuerzas de inercia a todas las demás piezas de la máquina, provocando posibles fallas en otras piezas.

20. Debido a que la naturaleza de la carga sobre la viga es básicamente inercial y debido a que transporta una carga de peso fijo, se debe tener una sección transversal óptima para el diseño. La resistencia a la flexión de la viga es una función del momento de inercia de área *I*. La carga inercial es una función inversa de su área *A*. Si la sección transversal fuera sólida, su *I* sería lo más grande posible para una dimensión exterior dada, pero también su área, su masa y su carga inercial. Si la pared fuera delgada como papel, su masa sería mínima, pero también su *I*. Tanto *A* como *I* son funciones no lineales de sus dimensiones. Por consiguiente, tiene que haber un espesor específico de la pared que maximiza el factor de seguridad, y lo mantiene constante.

    Con todos los factores anteriores en mente, se consideraron dos diseños, como se ilustra en la figura 4-55: una sección transversal cuadrada y una redonda con orejas externas integradas para sostener el peine. Ambas comparten algunas características. Los contornos tienen radios generosos para minimizar K_t. (La sección redonda es la mejor en este sentido). Las orejas que sostienen el peine, las cuales tienen orificios con cuerda, se encuentran cerca del eje neutro, donde el esfuerzo de flexión es más bajo y son externas a la estructura geométrica básica. No necesitan soldadura si el perfil puede obtenerse por extrusión. Ambas son secciones básicamente cerradas que pueden resistir torques, y la sección redonda es el perfil óptimo para cargas de torsión. La sección cuadrada tiene mayor *I* y, por lo tanto, resiste la flexión mejor que un perfil redondo de la misma dimensión general.

    Se tomaron en cuenta dos materiales, acero suave y aluminio. (El titanio sería ideal en términos de su razón resistencia/peso (SWR) y su límite de resistencia a la fatiga; pero su alto costo excluye dicha consideración). El aluminio (si se anodiza) tiene la ventaja de resistir mejor la corrosión en el agua; no obstante, el acero tiene la ventaja de su límite de resistencia cuando se protege contra la corrosión. El peso total del nuevo diseño es muy importante. El aluminio de alta resistencia tiene mejor razón resistencia/peso que el acero dulce. (El acero de alta resistencia no presenta un límite de resistencia a la fatiga y es sensible a la muesca, además de costoso). El aluminio se obtiene por extrusión con las orejas integradas, con herramientas de bajo costo, haciendo posible un lote de producción factible en términos económicos. El trabajo en acero de una sección transversal, a pedido del cliente, requeriría que se compraran grandes cantidades para amortizar el costo de la herramienta. De modo que el diseño en acero se limita a los perfiles de fabricación y requiere soldadura en las orejas.

21. Cada geometría de la figura 4-55 se diseñó por separado, ambas en acero y aluminio. El espesor de la pared de cada modelo fue modificándose de acuerdo con una lista de valores, desde muy delgada hasta casi sólida, para determinar la dimensión óptima. El diseño final seleccionado fue una sección redonda de aluminio 6061-T6 obtenido por extrusión con un espesor de pared de 0.5 in. Se analizará ahora este diseño; sin embargo, debe quedar claro que se requirió bastante iteración para llegar al resultado que aquí se presenta. El espacio no permite el estudio de todas las iteraciones.

22. Los cálculos anteriores del *ciclo de vida* (ecuación *a*, paso 3), de la *aceleración* y la *fuerza de golpeteo* (ecuaciones *c* y *d*, paso 4) se pueden aplicar ahora. Las propiedades de la sección son

$$
\begin{aligned}
\acute{a}rea &= \pi\left(\frac{2.5^2 - 1.5^2}{4}\right) + 2(0.5)(0.75) = 3.892 \text{ in}^2 \\
peso &= \acute{a}rea(longitud)(\gamma) = 3.892(54)(0.10) = 21 \text{ lb} \\
m &= \frac{peso + peine}{386} = \frac{21+10}{386} = 0.080 \text{ blobs} \\
I &= \pi\left(\frac{2.5^4 - 1.5^4}{64}\right) = 1.669 \text{ in}^4
\end{aligned}
\qquad (r)
$$

Observe que el cálculo del área incluye las orejas, ya que agregan masa, pero se ignoran para I porque suman una cantidad despreciable para I. La densidad de peso γ para el aluminio está en lb/in^3 y la masa está en blobs, o bien, lb-seg^2/in.

23. Las componentes media y alternativa de la fuerza inercial y el momento de flexión son

$$\begin{aligned} F_{media} &= 1\,886.5m = 1\,886.5(0.08) = 152 \text{ lb} \\ F_{alt} &= 6\,242.5m = 6\,242.5(0.08) = 502 \text{ lb} \\ M_{media} &= \frac{Fl}{8} = \frac{152(54)}{8} = 1\,023 \text{ lb - in} \\ M_{alt} &= \frac{Fl}{8} = \frac{502(54)}{8} = 3\,386 \text{ lb - in} \end{aligned} \tag{s}$$

Las ecuaciones de momento son para el momento máximo en el centro de una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida. Los esfuerzos de flexión nominales (no incluidos en la concentración de esfuerzos) son, entonces,

$$\begin{aligned} \sigma_{m_{nom}} &= \frac{M_{media}(c)}{I} = \frac{1\,023(1.25)}{1.669} \cong 766 \text{ psi} \\ \sigma_{a_{nom}} &= \frac{M_{alt}(c)}{I} = \frac{3\,386(1.25)}{1.669} \cong 2\,536 \text{ psi} \end{aligned} \tag{t}$$

Si se comparan estos resultados con los del diseño original (véase el paso 8), los fuerzas y los momentos son ahora más grandes debido a que la pieza pesa más, pero los esfuerzos son menores debido a mayor I en la sección transversal.

24. Los esfuerzos cortantes por torsión en una sección redonda hueca son máximos en la fibra exterior y, entonces, ocurren en puntos de máximo esfuerzo de flexión. El esfuerzo cortante nominal se obtiene a partir de $\tau_{máx} = Tr/J$ donde J para esta geometría se obtiene de la ecuación 2.25*b* (p. 108):

$$J = \pi\left(\frac{d_{ext}^4 - d_{int}^4}{32}\right) = \pi\left(\frac{2.5^4 - 2.0^4}{32}\right) = 3.338 \text{ in}^4 \tag{u}$$

Los esfuerzos cortantes nominales medio y alternativo son

$$\begin{aligned} \tau_{m_{nom}} &= \frac{T_{media}(r)}{J} = \frac{1\,012.5}{3.338} = 379 \text{ psi} \\ \tau_{a_{nom}} &= \frac{T_{alt}(r)}{J} = \frac{1\,012.5}{3.338} = 379 \text{ psi} \end{aligned} \tag{v}$$

25. Debido al radio grande y a los contornos lisos de esta pieza redonda, K_t y K_{ts} se tomaron iguales a 1. Las mayores concentraciones de esfuerzos se ubicarán en las raíces de las orejas, pero el esfuerzo de flexión es mucho menor ahí y el esfuerzo cortante en este perfil optimizado para la torsión es muy bajo. La sensibilidad a la muesca del material es irrelevante cuando $K_t = 1$, haciendo también $K_f = 1$ y $K_{fs} = 1$. Los factores de concentración de esfuerzo por fatiga para el esfuerzo medio también son iguales a 1 con las suposiciones anteriores. Las componentes de esfuerzos locales son entonces las mismas que las componentes de esfuerzos nominales obtenidos con las ecuaciones *t* y *v*.

26. Como se trata de un caso de esfuerzos fluctuantes biaxiales combinados que son sincrónicos y están en fase, y las muescas se diseñaron afuera, el método de Sines es ahora adecuado (ecuación 4.21*b*, p. 308). Éste calcula los esfuerzos equivalentes alternativo y medio para el caso biaxial sin muescas.

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2}$$
$$= \sqrt{2\,536 + 0 - 0 + 3(379)} = 2\,619 \text{ psi}$$
$$\sigma'_m = \sigma_{x_m} + \sigma_{y_m} = 766 + 0 = 766 \text{ psi} \qquad (w)$$

27. Ahora se deben determinar las propiedades del material. El aluminio no tiene un límite de resistencia a la fatiga, aunque se han publicado resistencias para un ciclo de vida específico. Una búsqueda en la literatura demostró que todas las aleaciones de aluminio, 7075 y 5052 tienen las mayores resistencias a la fatiga S_f. Sin embargo, no se encontraron fabricantes locales de aluminio por extrusión para ninguna de tales aleaciones. La aleación extruida más fuerte disponible fue la 6061-T6 con una $S_{f'}$ publicada igual a 13 500 psi en $N = 5E7$, $S_{ut} = 45\,000$ y $S_y = 40\,000$ psi.

28. Los factores de modificación de resistencia se obtuvieron de las ecuaciones y las datos de la sección 4.6. La carga es una combinación de flexión y torsión, lo cual parece crear un conflicto en la selección de un factor de carga a partir de la ecuación 4.7*a* (p. 260). Sin embargo, se han incorporado los esfuerzos por torsión en el esfuerzo equivalente de Sines, el cual es un esfuerzo normal, por lo que $C_{carga} = 1$. El diámetro equivalente para una pieza redonda no giratoria se obtiene de la figura 4-25 y la ecuación 4.7*d* (p. 261). El factor de tamaño se determina luego con la ecuación 4.7*b* (p. 261):

$$A_{95} = 0.010462d^2 = 0.010462(2.5)^2 = 0.065 \text{ in}^2$$
$$d_{equiv} = \sqrt{\frac{A_{95}}{0.0766}} = \sqrt{\frac{0.065}{0.0766}} = 0.924 \text{ in}$$
$$C_{tamaño} = 0.869\left(d_{equiv}\right)^{-0.097} = 0.869(0.924)^{-0.097} = 0.88 \qquad (x)$$

El factor de superficie se obtiene de la ecuación 4.7*e* (p. 263) y los datos de la tabla 4-3 (p. 263), para superficies maquinadas o roladas en frío. La corrosión podría requerir el uso de un factor de superficie con un valor menor; no obstante, como la pieza se va a anodizar para resistir la corrosión, se aplica el factor de superficie maquinada.

$$C_{sup} = A\,S_{ut}^b = 2.7(45)^{-0.265} = 0.98 \qquad (y)$$

Observe que S_{ut} está en kpsi en la ecuación 4.7*e*. El factor de temperatura se hizo igual a 1, ya que se opera a temperatura ambiente. C_{conf} es 0.702 en la tabla 4-4 (p. 265) para representar el 99.99% de confiabilidad deseada para este diseño nuevo.

29. La resistencia a la fatiga corregida se calcula ahora de

$$S_n = C_{carga}\,C_{tamaño}\,C_{sup}\,C_{temp}\,C_{conf}\,S_{f'}$$
$$S_{n_{@5E7}} = 1(0.88)(0.98)(1)(0.702)(13\,500) \cong 8\,173 \text{ psi} \qquad (z)$$

30. Esta resistencia a la fatiga corregida S_{n5E7} es la que se publica para la prueba de vida en $N = 5E7$ ciclos. Como se requiere una vida de $N = 9.4E8$ ciclos aproximadamente, se debe resolver la ecuación de la curva *S-N* de este material para S_n en $N = 9.4E8$ ciclos. Para hacerlo, se necesita la resistencia S_m del material en 10^3 ciclos de la ecuación 4.9*a*:

$$S_m = 0.9S_{ut} = 0.9(45\,000) = 40\,500 \text{ psi} \qquad (aa)$$

Se usan las ecuaciones 4.10 para obtener el coeficiente y el exponente de la línea *S-N*. El valor −4.699 proviene de la tabla 4-5 (p. 268) y corresponde al número de ciclos (5*E*7), de donde se tomaron los datos de prueba publicados.

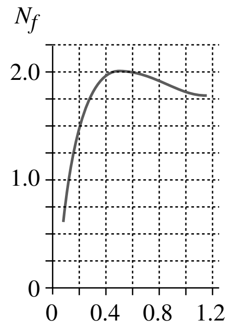


FIGURA 4-56

Factor de seguridad *N* en función del espesor de la pared para un transportador de aluminio redondo.

$$b = \frac{1}{-4.699}\log\left(\frac{S_m}{S_{n_{@5E7}}}\right) = \frac{1}{-4.699}\log\left(\frac{40\,500}{8\,173}\right) = -0.14792$$

$$\log(a) = \log(S_m) - 3b = \log(40\,500) - 3(-0.14792) = 5.0512; \qquad a = 112\,516 \qquad (ab)$$

$$S_{n_{@9.4E8}} = a\,N^b = 112\,516(9.4E8)^{-0.14792} \cong 5\,296 \text{ psi} \qquad (ac)$$

Este valor se usará como la S_n corregida para la vida deseada.

31. Los esfuerzos equivalentes, alternativo y medio, se grafican ahora sobre un diagrama de Goodman modificado, o bien, se calcula el factor de seguridad de la ecuación 4.18*e* (p. 298) para el caso 3, como se describió en el paso 17.

$$N_f = \frac{S_n S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_n} = \frac{5\,296(45\,000)}{2\,536(45\,000) + 766(5\,296)} = 2.0 \qquad (ad)$$

Este factor de seguridad es bastante aceptable; pero como una medida de seguridad adicional, las piezas terminadas se sujetan a granallado antes de anodizarse. En la figura 4-56 se ilustra la variación del factor de seguridad con el espesor de la pared. El pico ocurre con un espesor de pared de aproximadamente 0.5 in, el cual fue el valor que se usó en este diseño. Se graficaron las curvas del factor de seguridad contra el espesor de la pared, para todos los diseños dentro de los modelos. Son de forma similar a la figura 4-56 y todas muestran un espesor de pared óptimo para maximizar el factor de seguridad.

32. Los nombres de los archivos y datos pertinentes de los siete diseños se incluyen en la tabla 4-13. El diseño original se muestra tanto para una velocidad de diseño de 400 rpm, a la cual funcionaba sin problemas, como para la velocidad incrementada de 500 rpm, a la cual falló. La única diferencia es el factor de seguridad, que bajó de 1.3 a 1. Los factores K_t se calculan hacia atrás para los diseños fallidos (factor de seguridad igual a 1), como se describió anteriormente pero son estimados para los nuevos diseños. Los diseños en acero usan el valor de K_t calculado hacia atrás a partir del transportador original fallido, para tomar en cuenta la posible corrosión y los efectos de concentración de la soldadura. El diseño cuadrado de aluminio tiene K_t elevada debido a sus esquinas internas.

Tabla 4-13 Datos de varios diseños del transportador del peine

Estudio de caso 6: Dimensiones en pulgadas y libras

Diseño	Véase la figura	Rpm	Material	Nombre de archivo	Espesor de la pared	Profundidad de la viga	K_t	Factor de peso	Factor de seguridad	Comentario
Transportador original	4-53*a*	400	Acero 1018	CASE6-0	0.085	2.38	4.6	1	1.4	seguro a la velocidad de diseño
Transportador original	4-53*a*	500	Acero 1018	CASE6-1	0.085	2.38	4.6	1	1	falló a la máxima velocidad
Sustituto de acero	4-53*b*	500	Acero 1020	CASE6-2	0.093	2.50	3.2	1	1	falló en 6 meses
Sustituto de aluminio	4-53*c*	500	Aluminio 6061-T6	CASE6-3	sólido	2.00	7.2	1.4	1	falló en 3 meses
Acero cuadrado	4-55*a*	500	Acero 1020	CASE6-4	0.062	2.50	4.6	1.4	0.5	diseño rechazado
Acero redondo	4-55*b*	500	Acero 1020	CASE6-5	0.10	2.50	4.6	1.4	0.5	diseño rechazado
Aluminio cuadrado	4-55*a*	500	Aluminio 6061-T6	CASE6-6	0.35	2.50	2.0	1.4	1.0	diseño rechazado
Aluminio redondo	4-55*b*	500	Aluminio 6061-T6	CASE6-7	0.50	2.50	1.0	1.4	2.0	diseño seleccionado

El factor de peso se calculó como la razón del peso total (incluyendo el peine) del nuevo diseño sobre el peso total (incluyendo el peine) del transportador original. Los valores del factor de seguridad en la tabla son los más grandes alcanzables sin exceder el factor de peso (1.4) del transportador sustituto más pesado, que operó sin crear daños sobre el resto de la máquina (figura 4-53*c*, p. 320). Los factores de seguridad más grandes que los mostrados en la tabla 4-13 se alcanzan con alguno de los diseños rechazados, aunque sólo penalizando el peso. El diseño redondo elegido, entonces, parece ser el mejor con base en la razón entre factor de seguridad y peso.

Otros factores que influyeron en la decisión de usar un diseño de aluminio redondo fueron la resistencia a la corrosión del aluminio anodizado, su disponibilidad a un costo razonable en perfiles extruidos a la medida, lo cual eliminó todas las soldaduras con excepción de los extremos, así como su resistencia superior a la torsión y la carencia de concentración de esfuerzos en una sección transversal redonda. Se hicieron aproximadamente 100 transportadores de este diseño y se instalaron entre 1971 y 1972. Operaron sin una falla individual durante 7 años. La maquinaria fue vendida más tarde, se embarcó al extranjero y el autor le perdió la pista.

4.15 RESUMEN

Las cargas que varían con el tiempo son más la norma que una excepción en las máquinas. El diseño para eliminar fallas en estas condiciones es más desafiante que el diseño con cargas estáticas. El mecanismo de falla por fatiga está razonablemente bien entendido ahora; sin embargo, la investigación sobre sus numerosos detalles aún continúa. Se consideraron dos regímenes de carga: fatiga de bajo ciclo (LCF), donde el número total de oscilaciones de esfuerzo sobre la vida de la pieza es menor de 1 000 aproximadamente; y fatiga de alto ciclo (HCF), la cual comprende ciclos de millones o más. El análisis con base en la deformación es el método más preciso para determinar las resistencias de fatiga y se prefiere para casos de LCF, donde los esfuerzos locales pueden ocasionalmente exceder la resistencia a la fluencia del material en un número determinado de ciclos. Un ejemplo es la estructura de un avión, que suele recibir sobrecargas severas dentro de una serie de oscilaciones de esfuerzos de bajo nivel durante su vida, como se muestra en la figura 4-7 p. (245). La mecánica de la fractura (FM) es una herramienta cada vez más útil para predecir fallas incipientes en montajes que se inspeccionan para detectar grietas. El crecimiento de la grieta se monitorea y se emplea la teoría de mecánica de la fractura para calcular el tiempo de falla. Se sustituye luego la pieza dentro de un plan de mantenimiento que descarta su falla en servicio. Esto se hace regularmente en la industria de la aviación. La mayoría de la maquinaria de fábricas y de vehículos de transporte terrestre experimenta oscilaciones de esfuerzo de magnitud uniforme y se espera también que los soporten por muchos millones de ciclos. Para estos casos, los métodos, aproximados, pero más fáciles de aplicar, del análisis de esfuerzo de HCF son los más adecuados.

Se usan reglas generales y aproximaciones para estimar las resistencias de un material en condiciones de carga dinámica, sobre todo para el caso de fatiga de alto ciclo. Mucho de esto es pecar de conservadores. Si hay datos específicos de prueba de la resistencia a la fatiga del material seleccionado, esos datos siempre se deberían usar preferentemente en vez de un estimado calculado. En ausencia de datos específicos de prueba, la resistencia a la fatiga sin corregir se estima como un porcentaje de la resistencia última a la tensión. En cualquier caso, la resistencia a la fatiga sin corregir se reduce entonces con un conjunto de factores, como se definió en la sección 4.6 y en las ecuaciones 4.7, para tomar en cuenta las diferencias entre la pieza real y la muestra de prueba con la cual se midió la resistencia última. Luego, se elabora el diagrama de Goodman modificado, usando estimados de la resistencia "estática" del material en 1 000 ciclos y su resistencia corregida a la fatiga en algún mayor número de ciclos adecuado para la vida esperada de la pieza. (Véase la sección 4.11).

En la sección 6.13 se presenta un procedimiento general para el diseño en los casos de HCF. La ecuación del esfuerzo efectivo de Von Mises sirve para crear las componentes alternativa y media del esfuerzo efectivo, para la mayoría de los puntos con cargas altas dentro de la pieza. En algunos casos, la componente del esfuerzo medio tal vez sea cero. Se deben incluir todos los efectos adecuados de concentración de esfuerzos en estos cálculos de esfuerzo. Luego, se grafican las componentes media y alternativa de Von Mises sobre el diagrama de Goodman modificado y se calcula un factor de seguridad con base en una suposición acerca de cómo los esfuerzos medio y alternativo llegan a variar durante el servicio. Véase la sección 4.11 y las ecuaciones 4.18 (pp. 297-298).

Ecuaciones importantes usadas en este capítulo

Componentes de esfuerzo fluctuante (sección 4.4):

$$\Delta\sigma = \sigma_{máx} - \sigma_{mín} \tag{4.1a}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} \tag{4.1b}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{máx} + \sigma_{mín}}{2} \tag{4.1c}$$

$$R = \frac{\sigma_{mín}}{\sigma_{máx}} \qquad\qquad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \tag{4.1d}$$

Resistencia estimada a la fatiga sin corregir (sección 4.5):

$$\text{aceros:} \begin{cases} S_{e'} \cong 0.5\,S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 200 \text{ kpsi } (1\,400 \text{ MPa}) \\ S_{e'} \cong 100 \text{ kpsi } (700 \text{ MPa}) & \text{para } S_{ut} \quad 200 \text{ kpsi } (1\,400 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{4.5a}$$

$$\text{hierros:} \begin{cases} S_{e'} \cong 0.4\,S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 60 \text{ kpsi } (400 \text{ MPa}) \\ S_{e'} \cong 24 \text{ kpsi } (160 \text{ MPa}) & \text{para } S_{ut} \quad 60 \text{ kpsi } (400 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{4.5b}$$

$$\text{aluminios:} \begin{cases} S_{f'_{@5E8}} \cong 0.4\,S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 48 \text{ kpsi } (330 \text{ MPa}) \\ S_{f'_{@5E8}} \cong 19 \text{ kpsi } (130 \text{ MPa}) & \text{para } S_{ut} \quad 48 \text{ kpsi } (330 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{4.5c}$$

$$\text{aleaciones de cobre:} \begin{cases} S_{f'_{@5E8}} \cong 0.4\,S_{ut} & \text{para } S_{ut} < 40 \text{ kpsi } (280 \text{ MPa}) \\ S_{f'_{@5E8}} \cong 14 \text{ kpsi } (100 \text{ MPa}) & \text{para } S_{ut} \quad 40 \text{ kpsi } (280 \text{ MPa}) \end{cases} \tag{4.5d}$$

Factores de corrección para resistencia a la fatiga (sección 4.6):

$$\begin{aligned} &\text{flexión:} && C_{carga} = 1 \\ &\text{carga axial:} && C_{carga} = 0.70 \end{aligned} \tag{4.7a}$$

$$\begin{aligned} &\text{para } d \le 0.3 \text{ in } (8 \text{ mm}): && C_{tamaño} = 1 \\ &\text{para } 0.3 \text{ in} < d \le 10 \text{ in}: && C_{tamaño} = 0.869 d^{-0.097} \\ &\text{para } 8 \text{ mm} < d \le 250 \text{ mm}: && C_{tamaño} = 1.189 d^{-0.097} \end{aligned} \tag{4.7b}$$

$$C_{sup} \cong A\left(S_{ut}\right)^b \qquad \text{si } C_{sup} > 1.0, \text{ se hace } C_{sup} = 1.0 \tag{4.7e}$$

$$\begin{aligned} &\text{para } T \leq 450\ °\text{C } (840\ °\text{F}): && C_{temp} = 1 \\ &\text{para } 450\ °\text{C} < T \leq 550\ °\text{C}: && C_{temp} = 1 - 0.0058(T - 450) \\ &\text{para } 840\ °\text{F} < T \leq 1\,020\ °\text{F}: && C_{temp} = 1 - 0.0032(T - 840) \end{aligned} \tag{4.7f}$$

Estimación de resistencia a la fatiga corregida (sección 4.6):

$$\begin{aligned} S_e &= C_{carga} C_{tamaño} C_{sup} C_{temp} C_{conf} S_{e'} \\ S_f &= C_{carga} C_{tamaño} C_{sup} C_{temp} C_{conf} S_{f'} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Resistencia aproximada en 1 000 ciclos (sección 4.6)

$$\begin{aligned} &\text{flexión:} && S_m = 0.9 S_{ut} \\ &\text{carga axial:} && S_m = 0.75 S_{ut} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Diagrama *S-N* (sección 4.6):

$$\log S(N) = \log a + b \log N \tag{4.10b}$$

$$\begin{aligned} &b = \frac{1}{z}\log\left(\frac{S_m}{S_e}\right) \qquad \text{donde} \qquad z = \log N_1 - \log N_2 \\ &\log(a) = \log(S_m) - b\log(N_1) = \log(S_m) - 3b \end{aligned} \tag{4.10c}$$

Sensibilidad a la muesca (sección 4.7):

$$q = \frac{1}{1 + \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \tag{4.13}$$

Factores de concentración de esfuerzos por fatiga (secciones 4.7 y 4.11):

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \tag{4.11b}$$

$$\begin{aligned} &\text{si } K_f \left|\sigma_{máx_{nom}}\right| < S_y \text{ entonces:} && K_{fm} = K_f \\ &\text{si } K_f \left|\sigma_{máx_{nom}}\right| > S_y \text{ entonces:} && K_{fm} = \frac{S_y - K_f \sigma_{a_{nom}}}{\left|\sigma_{m_{nom}}\right|} \\ &\text{si } K_f \left|\sigma_{máx_{nom}} - \sigma_{mín_{nom}}\right| > 2S_y \text{ entonces:} && K_{fm} = 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Factor de seguridad: esfuerzos totalmente invertidos (sección 4.10):

$$N_f = \frac{S_n}{\sigma'} \tag{4.14}$$

Diagrama de Goodman modificado (sección 4.11):

$$-\frac{\sigma'_m}{S_{yc}} + \frac{\sigma'_a}{S_{yc}} = 1 \tag{4.16a}$$

4

$$\sigma'_a = S_f \tag{4.16b}$$

$$\frac{\sigma'_m}{S_{ut}} + \frac{\sigma'_a}{S_f} = 1 \tag{4.16c}$$

$$\frac{\sigma'_m}{S_y} + \frac{\sigma'_a}{S_y} = 1 \tag{4.16d}$$

Factor de seguridad: esfuerzos fluctuantes (sección 4.11):

Caso 1:

$$N_f = \frac{\sigma'_{m@Q}}{\sigma'_{m@Z}} = \frac{S_y}{\sigma'_m}\left(1 - \frac{\sigma'_a}{S_y}\right) \tag{4.18a}$$

Caso 2:

$$N_f = \frac{\sigma'_{a@P}}{\sigma'_{a@Z}} = \frac{S_f}{\sigma'_a}\left(1 - \frac{\sigma'_m}{S_{ut}}\right) \tag{4.18b}$$

Caso 3:

$$N_f = \frac{\sigma'_{m@R}}{\sigma'_{m@Z}} = \frac{S_f S_{ut}}{\sigma'_a S_{ut} + \sigma'_m S_f} \tag{4.18e}$$

$$ZS = \sqrt{\left(\sigma'_m - \sigma'_{m@S}\right)^2 + \left(\sigma'_a - \sigma'_{a@S}\right)^2} \tag{4.18f}$$

Caso 4:

$$OZ = \sqrt{\left(\sigma'_a\right)^2 + \left(\sigma'_m\right)^2}$$

$$N_f = \frac{OZ + ZS}{OZ} \tag{4.18g}$$

Método de Sines para esfuerzos multiaxiales por fatiga: 3-D (sección 4.12):

$$\sigma'_a = \sqrt{\frac{\left(\sigma_{x_a} - \sigma_{y_a}\right)^2 + \left(\sigma_{y_a} - \sigma_{z_a}\right)^2 + \left(\sigma_{z_a} - \sigma_{x_a}\right)^2 + 6\left(\tau^2_{xy_a} + \tau^2_{yz_a} + \tau^2_{zx_a}\right)}{2}}$$

$$\sigma'_m = \sigma_{x_m} + \sigma_{y_m} + \sigma_{z_m} \tag{4.21a}$$

Método de Sines para esfuerzos multiaxiales por fatiga: 2-D (sección 4.12):

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma^2_{x_a} + \sigma^2_{y_a} - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau^2_{xy_a}}$$

$$\sigma'_m = \sigma_{x_m} + \sigma_{y_m} \tag{4.21b}$$

Esfuerzos generales multiaxiales por fatiga: 3-D (sección 4.12):

$$\sigma'_a = \sqrt{\frac{\left(\sigma_{x_a} - \sigma_{y_a}\right)^2 + \left(\sigma_{y_a} - \sigma_{z_a}\right)^2 + \left(\sigma_{z_a} - \sigma_{x_a}\right)^2 + 6\left(\tau^2_{xy_a} + \tau^2_{yz_a} + \tau^2_{zx_a}\right)}{2}} \tag{4.22a}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{\frac{\left(\sigma_{x_m} - \sigma_{y_m}\right)^2 + \left(\sigma_{y_m} - \sigma_{z_m}\right)^2 + \left(\sigma_{z_m} - \sigma_{x_m}\right)^2 + 6\left(\tau^2_{xy_m} + \tau^2_{yz_m} + \tau^2_{zx_m}\right)}{2}}$$

Esfuerzos generales multiaxiales por fatiga: 2-D (sección 4.12):

$$\begin{aligned}\sigma'_a &= \sqrt{\sigma_{x_a}^2 + \sigma_{y_a}^2 - \sigma_{x_a}\sigma_{y_a} + 3\tau_{xy_a}^2} \\ \sigma'_m &= \sqrt{\sigma_{x_m}^2 + \sigma_{y_m}^2 - \sigma_{x_m}\sigma_{y_m} + 3\tau_{xy_m}^2}\end{aligned} \tag{4.22b}$$

Método SEQA para esfuerzos multiaxiales complejos por fatiga (sección 4.12):

$$\mathrm{SEQA} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{3}{4}Q^2 + \sqrt{1 + \frac{3}{2}Q^2 \cos 2\phi + \frac{9}{16}Q^4}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.23}$$

Mecánica de la fractura por fatiga (sección 4.5):

$$\begin{aligned}\Delta K &= \beta\sigma_{máx}\sqrt{\pi a} - \beta\sigma_{mín}\sqrt{\pi a} \\ &= \beta\sqrt{\pi a}\left(\sigma_{máx} - \sigma_{mín}\right)\end{aligned} \tag{4.3b}$$

$$\frac{da}{dN} = A(\Delta K)^n \tag{4.4}$$

4.16 REFERENCIAS

1. **R.P. Reed, J.H. Smith y B.W. Christ**, *The Economic Effects of Fracture in the United States: Part I*, pub. especial 647-1 U.S. Dept. of Commerce, National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1983.
2. **N.E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., p. 340, 1993.
3. **J.W. Fisher y B.T. Yen**, *Design, Structural Details, and Discontinuities in Steel, Safety and Reliability of Metal Structures*, ASCE, 2 de nov. de 1972.
4. **N.E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., p. 355, 1993.
5. **D. Broek**, *The Practical Use of Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Países Bajos, p. 10, 1988.
6. **N.E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., p. 347, 1993.
7. **R.C. Juvinall**, *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength*, McGraw-Hill: Nueva York, p. 280, 1967.
8. **J.E. Shigley y C.R. Mischke**, *Mechanical Engineering Design*, 5a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, p. 278, 1989.
9. **A.F. Madayag**, *Metal Fatigue: Theory and Design*, John Wiley & Sons: Nueva York, p. 117, 1969.
10. **N.E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., p. 418, 1993.
11. **R.C. Juvinall**, *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength*, McGraw-Hill: Nueva York, p. 231, 1967.

12. **J.A. Bannantine, J.J. Comer y J.L. Handrock**, *Fundamentals of Metal Fatigue*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., p. 13, 1990.

13. **P.C. Paris y F. Erdogan**, *A Critical Analysis of Crack Propagation Laws. Trans. ASME, J. Basic Eng*., **85**(4): p. 528, 1963.

14. **J.M. Barsom**, *Fatigue-Crack Propagation in Steels of Various Yield Strengths Trans. ASME, J. End. Ing*., **Serie B**(4): p. 1190, 1971.

15. **H.O. Fuchs y R.I. Stephens**, *Metal Fatigue in Engineering*, John Wiley & Sons: Nueva York, p. 88, 1980.

16. **J.A. Bannantine, J.J. Comer y J.L. Handrock**, *Fundamentals of Metal Fatigue*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., p. 106, 1990.

17. **J.M. Barsom y S.T. Rolfe**, *Fracture and Fatigue Control in Structures*, 2a. ed., Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., p. 256, 1987.

18. **H.O. Fuchs y R.I. Stephens**, *Metal Fatigue in Engineering*, John Wiley & Sons: Nueva York, p. 89, 1980.

19. **J.M. Barsom y S.T. Rolfe**, *Fracture and Fatigue Control in Structures*, 2a. ed., Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., p. 285, 1987.

20. **P.G. Forrest**, *Fatigue of Metals*, Pergamon Press: Londres, 1962.

21. **J.E. Shigley y L.D. Mitchel**, *Mechanical Engineering Design*, 4a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, p. 293, 1983.

22. **R. Kuguel**, *A Relation Between Theoretical Stress-Concentration Factor and Fatigue Notch Factor Deduced from the Concept of Highly Stressed Volume*, Proc. ASTM, **61**: pp. 732-748, 1961.

23. **R.C. Juvinall**, *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength*, McGraw-Hill: Nueva York, p. 233, 1967.

24. ***Ibid*.**, p. 234.

25. **R.C. Johnson**, *Machine Design*, vol. 45, p. 108, 1973.

26. **J.E. Shigley y L.D. Mitchel**, *Mechanical Engineering Design*, 4a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, p. 300, 1983.

27. **E.B. Haugen y P.H. Wirsching**, "Probabilistic Design", *Machine Design*, vol. 47, pp. 10-14, 1975.

28. **R.C. Juvinall y K.M. Marshek**, *Fundamentals of Machine Component Design*, 2a. ed., John Wiley & Sons: Nueva York, p. 270, 1967.

29. ***Ibid*.**, p. 267**.**

30. **R.E. Peterson**, *Stress-Concentration Factors*, John Wiley & Sons: Nueva York, 1974.

31. **R.J. Roark y W.C. Young**, *Formulas for Stress and Strain*, 5a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, 1975.

32. **H. Neuber**, *Theory of Notch Stresses*, J.W. Edwards Publisher Inc.: Ann Arbor, Mich., 1946.

33. **P. Kuhn y H.F. Hardrath**, *An Engineering Method for Estimating Notch-size Effect in Fatigue Tests on Steel*, Nota técnica 2805, NACA, Washington, D.C., cct. de 1952.

34. **R.B. Heywood**, *Designing Against Fatigue*, Chapman & Hall Ltd.: Londres, 1962.

35. **R.C. Juvinall**, *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength*, McGraw-Hill: Nueva York, p. 280, 1967.

36. **V.M. Faires**, *Design of Machine Elements*, 4a. ed., Macmillan: Londres, p. 162, 1965.

37. **R.B. Heywood**, *Designing Against Fatigue of Metals*, Reinhold: Nueva York, p. 272, 1962.

38. **H.O. Fuchs y R.I. Stephens**, *Metal Fatigue in Engineering*, John Wiley & Sons: Nueva York, p. 130, 1980.

39. **J.E. Shigley y C.R. Mischke**, *Mechanical Engineering Design*, 5a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, p. 283, 1989.

40. **N.E. Dowling**, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., p. 416, 1993.

41. **R.C. Juvinall**, *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength*, McGraw-Hill: Nueva York, p. 280, 1967.

42. **G. Sines**, *Failure of Materials under Combined Repeated Stresses Superimposed with Static Stresses*, Nota técnica 3495, NACA, 1955.

43. **F.S. Kelly**, *A Generated Fatigue Evaluation Method*, Dcto. 79-PVP-77, ASME: Nueva York, 1979.

44. **Y.S. Garud**, *A New Approach to the Evaluation of Fatigue Under Multiaxial Loadings*, en *Methods for Predicting Material Life in Fatigue*, W.J. Ostergren y J.R. Whitehead, ed., ASME: Nueva York, pp. 249-263, 1979.

45. **M.W. Brown y K.J. Miller**, *A Theory for Fatigue Failure under Multiaxial Stress-Strain Conditions. Proc. Inst. Mech. Eng.*, **187**(65): pp. 745-755, 1973.

46. **J.O. Smith**, *The Efect of Range of Stress on the Fatigue Strength of Metals*, Univ. of Ill., *Eng. Exp. Sta. Bull.*, (334), 1942.

47. **J.E. Shigley y L.D. Mitchel**, *Mechanical Engineering Design*, 4a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, p. 333, 1983.

48. **B.F. Langer**, *Design of Vessels Involving Fatigue*, en *Pressure Vessel Engineering*, R.W. Nichols, ed., Elsevier: Amsterdam, pp. 59-100, 1971.

49. **J.A. Collins**, *Failure of Materials in Mechanical Design*, 2a. ed., John Wiley & Sons: Nueva York, pp. 238-254, 1993.

50. **S.M. Tipton y D.V. Nelson**, *Fatigue Life Predictions for a Notched Shaft in Combined Bending and Torsion,* en *Multiaxial Fatigue*, K.J. Miller y M.W. Brown, editores, ASTM: Filadelfia, PA., pp. 514-550, 1985.

51. **R.C. Rice**, ed., *Fatigue Design Handbook*, 2a. ed., Soc. of Automotives Engineers: Warrendale, PA., p. 260, 1988.

52. **T. Nishihara y M. Kawamoto**, *The Strength of Metals under Combined Alternating Bending and Torsion with Phase Difference*, Memoirs College of Engineering, Kyoto Univ., Japón, **11**(85), 1945.

53. *Shot Peening of Gears*, American Gear Manufacturers Association AGMA 938-A05, 2005.

Tabla P4-0†
Matriz tema/problema

Sec. 4.4 Cargas de fatiga
4-1

Sec. 4.5 Mecánica de fractura
4-51, 4-52, 4-53

Sec. 4.6 Diagramas *S/N*
4-2, 4-4, 4-5, 4-54, 4-55, 4-56, 4-57

Sec. 4.7 Conc. de esfuerzos
4-15, 4-58, 4-59, 4-60, 4-63 a 4-66

Sec. 4.10 Totalmente invertido
4-6, ***4-7***, ***4-8***, *4-20*, 4-26, 4-29, **4-33**, **4-35**, **4-37**, **4-46**, ***4-48***

Sec. 4.11 Fluctuante
4-3, **4-9**, 4-10, **4-11**, 4-12, **4-13**, ***4-14***, **4-16**, **4-17**, **4-18**, ***4-19***, **4-21**, **4-22**, 4-23, 4-24, 4-25, ***4-27***, ***4-28***, 4-30, 4-31, 4-32, **4-34**, **4-36**, 4-38, **4-40**, **4-43**, **4-44**, **4-45**, 4-70

Sec. 4.12 Mutiaxial
4-39, **4-41**, **4-42**, **4-61**, **4-62**, **4-67**, **4-68**, **4-69**

4

4.17 BIBLIOGRAFÍA

Para mayor información sobre diseño a la fatiga, véase:

J.A. Bannantine, J.J. Comer y J.L. Handrock, *Fundamentals of Metal Fatigue*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1990.

H.E. Boyer, ed., *Atlas of Fatigue Curves*, Amer. Soc. for Metals: Metals Park, Ohio, 1986.

H.O. Fuchs y R.I. Stephens, *Metal Fatigue in Engineering*. John Wiley & Sons: Nueva York, 1980.

R.C. Juvinall, *Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength*.

A.J. McEvily, ed., *Atlas of Stress-Corrosion and Corrosion Fatigue Curves*, Amer. Soc. for Metals: Metals Park, Ohio, 1990. McGraw-Hill: Nueva York, 1967.

Para más información sobre el enfoque deformación-vida para fatiga de bajo ciclo, véase:

N.E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1993.

R.C. Rice, ed., *Fatigue Design Handbook*, 2a. ed., Soc. of Automotive Engineers: Warrendale, PA., 1988.

Para más información sobre el enfoque de mecánica de la fractura por fatiga, véase:

J.M. Barsom y S.T. Rolfe, *Fracture and Fatigue Control in Structures*, 2a. ed., Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1987.

D. Broek, *The Practical Use of Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Países Bajos, 1988.

Para más información sobre esfuerzos residuales, véase:

J.O. Almen y P.H. Black, *Residual Stresses and Fatigue in Metals*, McGraw-Hill: Nueva York, 1963.

Para más información sobre esfuerzos multiaxiales por fatiga, véase:

A. Fatemi y D.F. Socie, *A Critical Plane Approach to Multiaxial Fatigue Damage Including Out-of-Phase Loading*, Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, **11**(3): pp. 149-165, 1988.

Y.S. Garud, *Multiaxial Fatigue: A Survey of the State of the Art*.. J. Test. Eval., **9**(3), 1981.

K.F. Kussmaul, D.L. McDiarmid y D.F. Socie, eds., *Fatigue Under Biaxial and Multiaxial Loading*. Mechanical Engineering Publications Ltd.: Londres, 1991.

G.E. Leese y D. Socie, eds., *Multiaxial Fatigue: Analysis and Experiments*, Soc. de Ingenieros Automotrices, Warrendale, Pa., 1989.

K.J. Miller y M.W. Brown, eds., *Multiaxial Fatigue*, vol. STP 853, ASTM: Filadelfia, Pa., 1985.

G. Sines, *Behavior of Metals Under Complex Static and Alternating Stresses*, en *Metal Fatigue*, G. Sines y J.L. Waisman, eds., McGraw-Hill: Nueva York, 1959.

R.M. Wetzel, ed., *Fatigue Under Complex Loading: Analysis and Experiments*, SAE Pub. núm. AE-6, Soc. of Automotive Engineers: Warrendale, Pa., 1977.

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice D.

† Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

4.18 PROBLEMAS

*4-1. Para los datos en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P4-1, obtenga el intervalo de esfuerzo, la componente de esfuerzo alternativo, la componente de esfuerzo medio, la razón de esfuerzo y la razón de amplitud.

4-2. Para los datos de resistencia del acero en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P4-2, calcule el límite de resistencia a la fatiga sin corregir y dibuje un diagrama de resistencia-vida (*S-N*).

*4-3. Para el ensamble del brazo del pedal de la bicicleta en la figura P4-1, suponga una fuerza aplicada por el ciclista, en el pedal, que se encuentra entre 0 y 1 500 N cada ciclo. Determine los esfuerzos fluctuantes en el brazo del pedal de 15 mm de diámetro. Obtenga el factor de seguridad a la fatiga, si S_{ut} = 500 Mpa.

4-4. Para los datos de la resistencia del aluminio de la(s) fila(s) asignada(a) en la tabla P4-2, calcule la resistencia a la fatiga sin corregir en 5*E*8 ciclos y grafique el diagrama resistencia-vida (*S-N*) del material.

4-5. Para los datos en la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P4-3 obtenga la resistencia a la fatiga corregida (o límite), defina las ecuaciones de la línea *S-N* y elabore el diagrama *S-N*.

***4-6**. Para el montaje del remolque del problema 1-6 en la página 57 (véase también la figura P4-2 y la figura A-5, p. 860), obtenga los factores de seguridad para vida infinita a la fatiga en todos los modos de falla, suponiendo que la fuerza de impacto horizontal del remolque sobre la bola es totalmente invertido. Use acero con S_{ut} = 600 MPa y S_y = 450 MPa.

****4-7***. Diseñe el buje del problema 1-7 (p. 57) para vida infinita con un factor de seguridad de 1.5, si la aceleración de 2 500 g es de ciclo invertido y S_{ut} = 130 kpsi.

****4-8***. Una máquina papelera procesa rollos de papel que tienen una densidad de 984 kg/m^3. El rollo de papel tiene 1.50 m de diámetro exterior (*OD*) × 0.22 m de diámetro interior (*ID*) × 3.23 m de largo; se encuentra sobre un eje de acero hueco simplemente apoyada con S_{ut} = 400 MPa. Encuentre el diámetro interior del eje necesario para obtener un factor de seguridad dinámico de 2 para una vida de 10 años, trabajando 3 turnos de 8 horas diarias, si el diámetro exterior del eje es de 22 cm y el rollo gira a 50 rpm.

4-9. Para las pinzas de presión ViseGrip® dibujadas a escala en la figura P4-3, cuyas fuerzas se analizaron en el problema 1-9 (p. 57) y sus esfuerzos en el problema 2-9 (p. 159),

Tabla P4-1
Datos del problema 4-1

Fila	$\sigma_{máx}$	$\sigma_{mín}$
a	1 000	0
b	1 000	–1 000
c	1 500	500
d	1 500	–500
e	500	–1 000
f	2 500	–1 200
g	0	–4 500
h	2 500	1 500

Tabla P4-2
Datos de los problemas 4-2, 4-4

Fila	S_{ut} (psi)	mat'l
a	90 000	acero
b	250 000	acero
c	120 000	acero
d	150 000	acero
e	25 000	alum.
f	70 000	alum.
g	40 000	alum.
h	35 000	alum.

Tabla P4-3 Datos del problema 4-5

Fila	Material	S_{ut} kpsi	Perfil	Tamaño en pulgadas	Acabado superficial	Carga	Temp °F	Confiabilidad
a	acero	110	redondo	2	esmerilado	torsión	ambiente	99.9
b	acero	90	cuadrado	4	maqu.	axial	600	99.0
c	acero	80	viga-I	16 x 18*	rolado en caliente	flexión	ambiente	99.99
d	acero	200	redondo	5	forjado	torsión	–50	99.999
e	acero	150	cuadrado	7	rolado en frío	axial	900	50
f	aluminio	70	redondo	9	maqu.	flexión	ambiente	90
g	aluminio	50	cuadrado	9	esmerilado	torsión	ambiente	99.9
h	aluminio	85	viga-I	24 x 36*	rolado en frío	axial	ambiente	99.0
i	aluminio	60	redondo	4	esmerilado	flexión	ambiente	99.99
j	aluminio	40	cuadrado	6	forjado	torsión	ambiente	99.999
k	hierro dúctil	70	redondo	5	fundido	axial	ambiente	50
l	hierro dúctil	90	cuadrado	7	fundido	flexión	ambiente	90
m	bronce	60	redondo	9	forjado	torsión	50	90
n	bronce	80	cuadrado	6	fundido	axial	212	99.999

* ancho × peso

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas también pueden continuar y extenderse en capítulos posteriores.

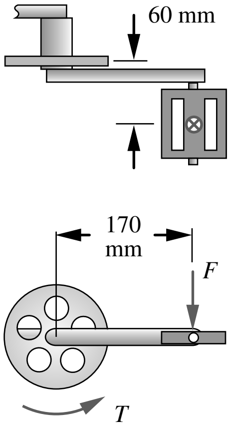


FIGURA P4-1

Problema 4-3 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

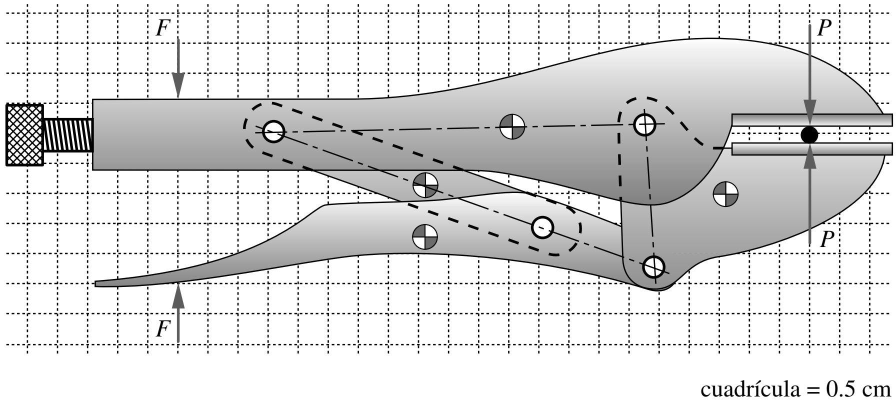


FIGURA P4-3

Problema 4-9 (un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

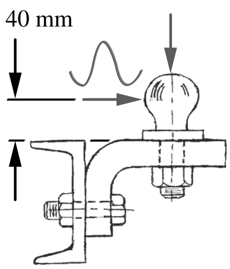


FIGURA P4-2

Problema 4-6 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

obtenga los factores de seguridad de cada perno para una fuerza de sujeción supuesta de P = 4 000 N, en la posición mostrada. Los pernos de acero tienen 8 mm de diámetro con S_y = 400 MPa, S_{ut} = 520 MPa y están sometidos a cortante doble. Suponga una vida finita deseada de 5*E*4 ciclos.

*__4-10__. En la figura P4-4*a* se muestra un trampolín sobresaliente. Una persona de 100 kg está parada en el extremo libre. Suponga que las dimensiones de la sección transversal son 305 mm × 32 mm. ¿Cuál es el factor de seguridad a la fatiga para vida finita, si el material es fibra de vidrio frágil con S_f = 39 MPa@ N = 5*E*8 ciclos y S_{ut} = 130 MPa en la dirección longitudinal?

*__4-11__. Repita el problema 4-10 suponiendo que la persona de 100 kg salta 25 cm hacia arriba y cae de regreso sobre el trampolín. Suponga que el trampolín pesa 29 kg y se flexiona 13.1 cm estáticamente cuando la persona está parada sobre él. ¿Cuál es el factor de seguridad a la fatiga para vida finita, si el material es fibra de vidrio frágil con S_f = 39 MPa @ N = 5*E*8 ciclos y S_{ut} = 100 MPa en la dirección longitudinal?

4-12. Repita el problema 4-10, usando el diseño del trampolín en voladizo de la figura P4-4*b*.

4-13. Repita el problema 4-11, según el diseño del trampolín mostrado en la figura P4-4*b*. Suponga que el trampolín pesa 19 kg y se flexiona 8.5 cm estáticamente, cuando la persona se para sobre él.

4-14. La figura P4-5 muestra un juguete infantil llamado *cangurín*. Un niño se para sobre las almohadillas y aplica la mitad de su peso en cada lado. Luego salta hacia arriba del suelo, manteniendo las almohadillas contra sus pies, y rebota junto con el resorte que amortigua el impacto y almacena energía para ayudar a cada rebote. Suponga un niño de 60 lb y una constante de resorte de 100 lb/in. El cangurín pesa 5 lb. Diseñe las secciones de la viga de aluminio en voladizo sobre la cual el niño permanece

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas también pueden continuar y extenderse en capítulos posteriores.

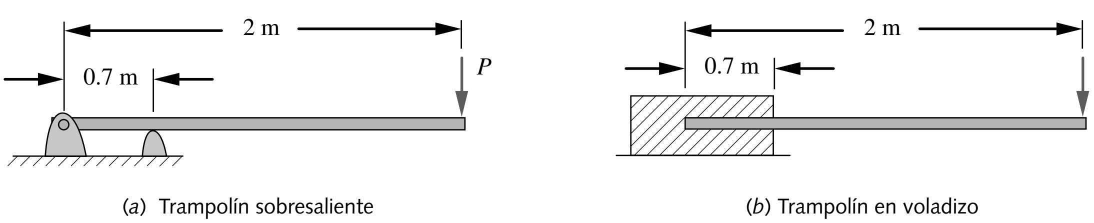


FIGURA P4-4

Problemas 4-10 a 4-13

Tabla P4-4 Datos del problema 4-15

Fila	S_{ut} (kpsi)	K_t	r (in)	Material	Carga
a	100	3.3	0.25	acero	flexión
b	90	2.5	0.55	acero	torsión
c	150	1.8	0.75	acero	flexión
d	200	2.8	1.22	acero	torsión
e	20	3.1	0.25	aluminio blando	flexión
f	35	2.5	0.28	aluminio blando	flexión
g	45	1.8	0.50	aluminio blando	flexión
h	50	2.8	0.75	aluminio duro	flexión
i	30	3.5	1.25	aluminio duro	flexión
j	90	2.5	0.25	aluminio duro	flexión

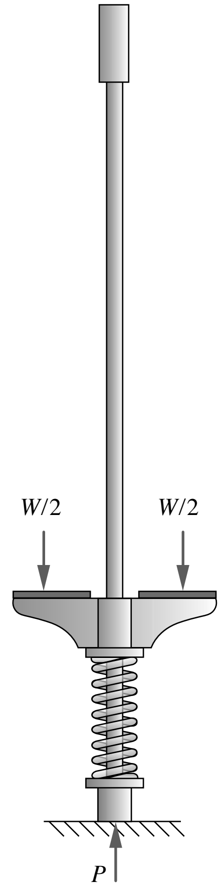


FIGURA P4-5
Problema 4-14

2 saltos arriba del suelo con un factor de seguridad dinámico de 2 para vida finita de 5*E*4 ciclos. Use aluminio de la serie 2000. Defina el perfil y el tamaño de la viga.

*__4-15__. Para una pieza con muesca, cuya muesca tiene una dimensión *r*, un factor de concentración de esfuerzo geométrico K_t, una resistencia S_{ut}, y una carga como se muestra en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P4-4, obtenga el factor *a*, de Neuber, la sensibilidad a la muesca *q* del material y el factor de concentración de esfuerzos por fatiga K_f.

4-16. Se diseñó una guía para bolas de bolos con dos varillas redondas, como se indica en la figura P4-6. Las varillas forman un pequeño ángulo entre sí. Las bolas ruedan sobre las varillas hasta que caen entre ellas y pasan a otra guía. La longitud del claro de cada varilla es de 30 in y el ángulo entre ellas es de 3.2°. Las bolas tienen un diámetro de 4.5 in y pesan 2.5 lb. La distancia central entre las varillas de 1 in de diámetro es de 4.2 in en el extremo más angosto. Obtenga el factor de seguridad para vida infinita para las varillas de 1 in de diámetro de acero SAE 1010 rolado en frío.

a) Suponga que las varillas están simplemente apoyadas en ambos extremos.
b) Suponga que las varillas están empotradas en cada extremo.

*__4-17__. En la figura P4-7 se muestran unas tenazas para hielo. El peso del hielo es de 50 lb y tiene 10 in de ancho entre las tenazas. La distancia entre los mangos es de 4 in y el radio medio *r* de las tenazas de acero es de 6 in. Las dimensiones de la sección transversal rectangular son 0.750 in × 0.312 in. Obtenga el factor de seguridad de las tenazas para 5*E*5 ciclos, si su S_{ut} = 50 kpsi.

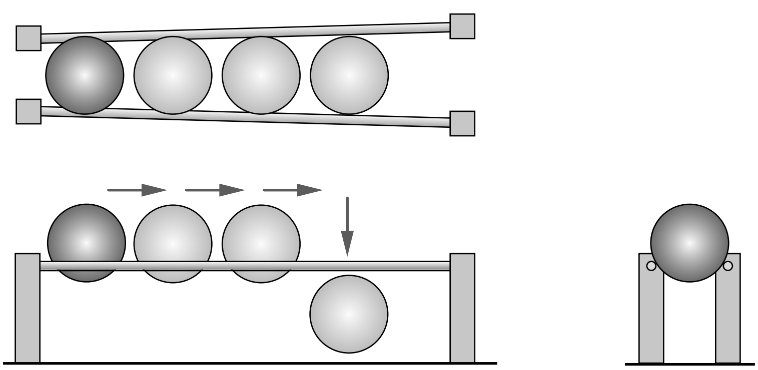


FIGURA P4-6
Problema 4-16

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas también pueden continuar y extenderse en capítulos posteriores.

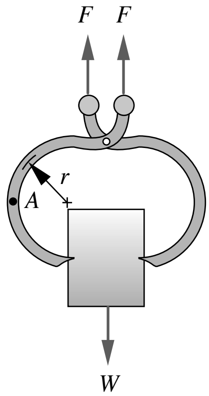


FIGURA P4-7

Problema 4-17

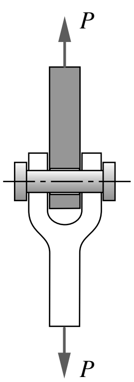


FIGURA P4-8

Problema 4-19



FIGURA P4-10

Problema 4-22

4-18. Repita el problema 4-17 con las tenazas fabricadas con hierro fundido gris clase 40.

*****4-19***. Determine el tamaño necesario del perno de la horquilla que se muestra en la figura P4-8, para resistir una fuerza aplicada repetida de 0 a 130 000 lb para vida infinita. También determine el radio exterior requerido del extremo de la horquilla para que no falle ni al desgarramiento ni a la presión por contacto, si las pestañas de la horquilla tienen 2.5 in de espesor. Use un factor de seguridad de 3. Suponga una S_{ut} = 140 kpsi para el perno y S_{ut} = 80 kpsi para la horquilla.

4-20. Se aplica un torque de ±100 N-m a un eje de acero redondo, sólido, de 1 m de largo. Diséñela para limitar su flexión angular a 2° y seleccione una aleación de acero para tener un factor de seguridad a la fatiga de 2 para vida infinita.

4-21. La figura P4-9 muestra una rueda de automóvil con dos estilos de llave común para apretar los birlos, una llave con un solo extremo en (*a*) y otra con dos extremos en (*b*). La distancia entre los puntos *A* y *B* es de 1 ft en ambos casos y el diámetro del mango es de 0.625 in. ¿Cuántos ciclos se pueden esperar al apretar el birlo antes de que falle por fatiga, si el torque de apriete promedio es de 100 ft-lb y la S_{ut} del material es de 60 kpsi?

*****4-22**. En la figura P4-10 se muestra un patín con ruedas en línea. Las ruedas de poliuretano tienen un diámetro de 72 mm y un espacio de 104 mm entre sus centros. La combinación patín-bota-pie pesa 2 kg. La "razón efectiva del resorte" del sistema persona-patín es de 6 000 N/m. Los pernos del eje de 10 mm de diámetro están sometidos a cortante doble y son de acero con una S_{ut} = 550 MPa. Obtenga el factor de seguridad a la fatiga para vida infinita de los pernos, cuando una persona de 100 kg aterriza sobre un pie, luego de un salto de 0.5 m.

a) Suponga que las cuatro ruedas llegan al suelo simultáneamente.
b) Suponga que sólo una rueda absorbe toda la fuerza de aterrizaje.

*4-23. La viga de la figura P4-11*a* está sometida a una fuerza senoidal que es función del tiempo con $F_{máx} = F$ y $F_{mín} = -F/2$, donde *F* y otros datos de la viga se encuentran en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P4-5. Obtenga el estado de esfuerzos en la viga debido a esta carga y seleccione un material con especificaciones que brinden un factor de seguridad de 3 para $N = 5E8$ ciclos.

*4-24. La viga de la figura P4-11*b* está sometida a una fuerza senoidal que es función del tiempo con $F_{máx} = F$ N y $F_{mín} = F/2$, donde *F* y otros datos de la viga se encuentran en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P4-5. Obtenga el estado de esfuerzos en la viga

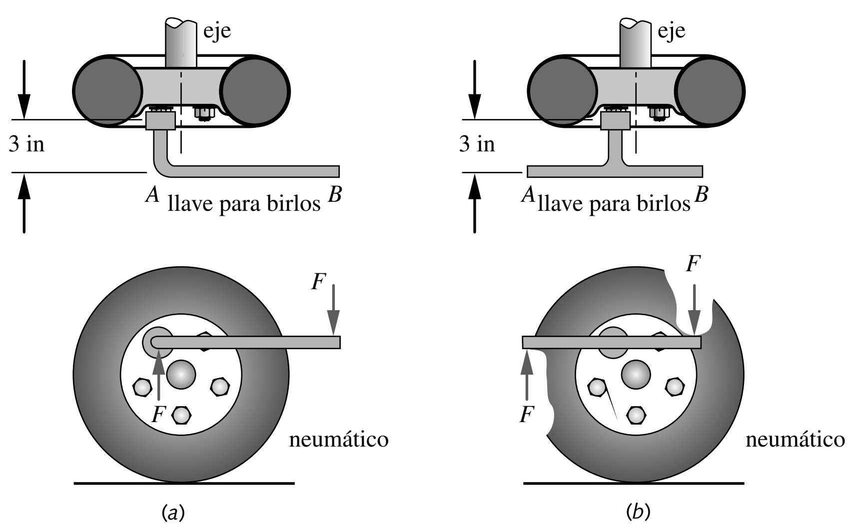


FIGURA P4-9

Problema 4-21

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas también pueden continuar y extenderse en capítulos posteriores.

Tabla P4-5 Datos de los problemas 4-23 a 4-26

Use sólo los datos relevantes para un problema específico. Longitudes en m, fuerzas en N, I en m^4

Fila	l	a	b	F	I	c	E
a	1.00	0.40	0.60	500	2.85*E*–08	2.00*E*–02	acero
b	0.70	0.20	0.40	850	1.70*E*–08	1.00*E*–02	acero
c	0.30	0.10	0.20	450	4.70*E*–09	1.25*E*–02	acero
d	0.80	0.50	0.60	250	4.90*E*–09	1.10*E*–02	acero
e	0.85	0.35	0.50	750	1.80*E*–08	9.00*E*–03	acero
f	0.50	0.18	0.40	950	1.17*E*–08	1.00*E*–02	acero
g	0.60	0.28	0.50	250	3.20*E*–09	7.50*E*–03	acero
h	0.20	0.10	0.13	500	4.00*E*–09	5.00*E*–03	alum.
i	0.40	0.15	0.30	200	2.75*E*–09	5.00*E*–03	alum.
j	0.20	0.10	0.15	80	6.50*E*–10	5.50*E*–03	alum.
k	0.40	0.16	0.30	880	4.30*E*–08	1.45*E*–02	alum.
l	0.90	0.25	0.80	600	4.20*E*–08	7.50*E*–03	alum.
m	0.70	0.10	0.60	500	2.10*E*–08	6.50*E*–03	alum.
n	0.85	0.15	0.70	120	7.90*E*–09	1.00*E*–02	alum.

debido a esta carga y elija un material con especificaciones que brinden un factor de seguridad de 1.5 para $N = 5E8$ ciclos.

*4-25. La viga de la figura P4-11*c* está sometida a una fuerza senoidal que es función del tiempo con $F_{máx} = F$ y $F_{mín} = 0$, donde F y otros datos de la viga se encuentran en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P4-5. Obtenga el estado de esfuerzo en la viga debido a esta carga y seleccione un material con especificaciones que brinden un factor de seguridad de 2.5 para $N = 5E8$ ciclos.

*4-26. La viga de la figura P4-11*d* está sometida a una fuerza senoidal que es función del tiempo con $F_{máx} = F$ lb y $F_{mín} = -F$, donde F y otros datos de la viga se encuentran en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P4-5. Obtenga el estado de esfuerzos en la viga debido a esta carga y seleccione un material con especificaciones que brinden un factor de seguridad de 6 para $N = 5E8$ ciclos.

***4-27.* Se diseñó un estante de almacenamiento para guardar el rollo de papel del problema 4-8, como se muestra en la figura P4-12. Determine un valor adecuado para la dimensión a de la figura para un factor de seguridad de vida infinita a la fatiga igual a 2. Suponga la dimensión $b = 100$ mm y que el mandril es sólido y se inserta hasta la mitad dentro del rollo de papel: (más al reverso)

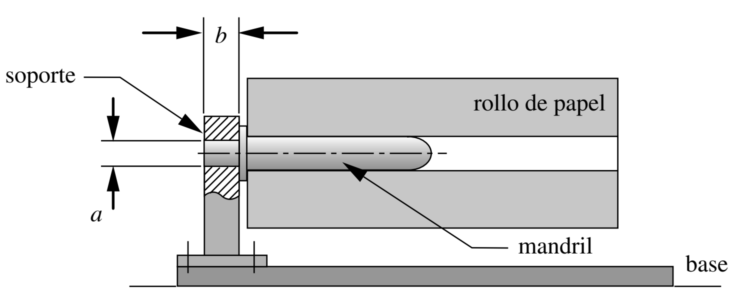


FIGURA P4-12

Problema 4-27

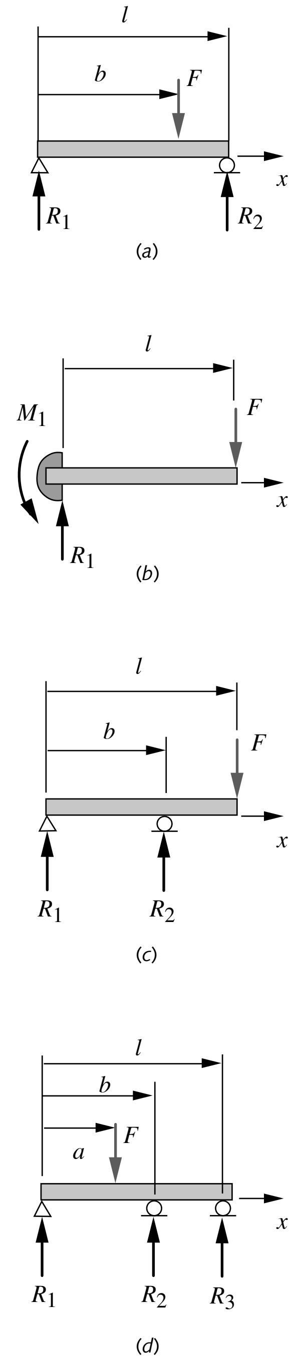


FIGURA P4-11

Vigas y cargas de los problemas 4-23 a 4-26: Véase la tabla P4-5 para los datos

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

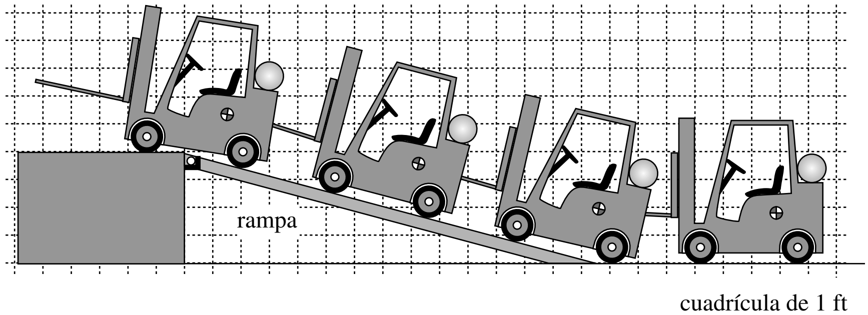


FIGURA P4-13

Problema 4-28

a) Si la viga es un material dúctil con S_{ut} = 600 MPa.
b) Si la viga es un material fundido frágil con S_{ut} = 300 MPa.

4-28. La figura P4-13 muestra una carretilla elevadora que sube una rampa de 15° para llegar a una plataforma de carga, cuya altura es de 4 ft. La carretilla pesa 5 000 lb y tiene una distancia entre ejes de 42 in. Diseñe dos rampas (una por cada lado) de acero de 1 ft de ancho, para tener un factor de seguridad de 2 para vida infinita en el peor de los casos de carga, conforme la carretilla sube por ellas. Minimice el peso de las rampas usando una geometría sensible de sección transversal. Seleccione un acero o una aleación de aluminio adecuados.

*4-29. Una barra de 22 × 30 mm de sección transversal se carga axialmente a la tensión con $F(t) = \pm 8$ kN. Un orificio de 10 mm pasa por el centro del lado de 30 mm. Obtenga el factor de seguridad para vida infinita, si el material tiene S_{ut} = 500 MPa.

4-30. Repita el problema 4-29, con $F_{mín} = 0$, $F_{máx} = 16$ kN.

*4-31. Repita el problema 4-29, con $F_{mín} = 8$ kN, $F_{máx} = 24$ kN.

4-32. Repita el problema 4-29, con $F_{mín} = -4$ kN, $F_{máx} = 12$ kN.

***4-33**. La ménsula de la figura P4-14 está sometido a una fuerza senoidal que es función del tiempo, con $F_{máx} = F$ y $F_{mín} = -F$, donde F y otros datos de la viga se encuentran en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P4-6. Obtenga los estados de esfuerzos en los puntos A y B debidos a esta carga totalmente invertida y seleccione un acero dúctil o un aluminio, cuyas especificaciones brinden un factor de seguridad de 2 para vida infinita, si es acero, o bien, $N = 5E8$ ciclos si es aluminio. Suponga un factor de concentración de esfuerzo geométrico de 2.5 en flexión y 2.8 en torsión.

***4-34**. El soporte de la figura P4-14 está sometido a una fuerza senoidal que es función del tiempo, con $F_{máx} = F$ y $F_{mín} = 0$, donde F y otros datos de la viga se encuentran en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P4-6. Obtenga los estados de esfuerzos en A y B

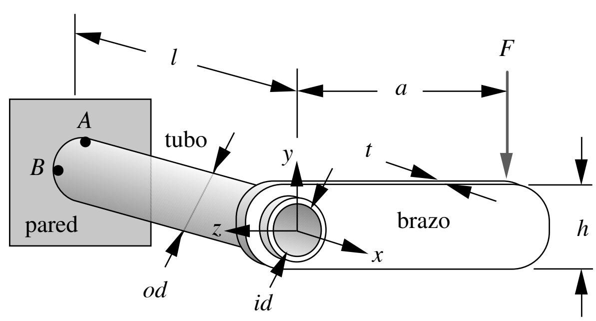


FIGURA P4-14

Problemas 4-33 a 4-36 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas también pueden continuar y extenderse en capítulos posteriores.

Tabla P4-6 Datos de los problemas 4-33 a 4-36

Use sólo los datos relevantes para un problema específico. Longitudes en mm, fuerzas en N.

Fila	l	a	t	h	F	od	id	E
a	100	400	10	20	50	20	14	acero
b	70	200	6	80	85	20	6	acero
c	300	100	4	50	95	25	17	acero
d	800	500	6	65	160	46	22	alum.
e	85	350	5	96	900	55	24	alum.
f	50	180	4	45	950	50	30	alum.
g	160	280	5	25	850	45	19	acero
h	200	100	2	10	800	40	24	acero
i	400	150	3	50	950	65	37	acero
j	200	100	3	10	600	45	32	alum.
k	120	180	3	70	880	60	47	alum.
l	150	250	8	90	750	52	28	alum.
m	70	100	6	80	500	36	30	acero
n	85	150	7	60	820	40	15	acero

debidos a esta carga repetida y seleccione un acero dúctil o un aluminio, cuyas especificaciones brinden un factor de seguridad de 2 para vida infinita si es acero, o bien, $N = 5E8$ ciclos si es aluminio. Suponga un factor de concentración de esfuerzo geométrico de 2.8 en flexión y 3.2 en torsión.

4-35. Repita el problema 4-33, usando un material de hierro fundido.

4-36. Repita el problema 4-34, usando un material de hierro fundido.

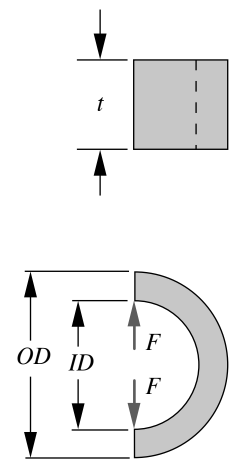


FIGURA P4-15

Problema 4-37 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

***4-37**. Una viga semicircular como la presentada en la figura P4-15 tiene un diámetro exterior igual a 150 mm, un diámetro interior igual a 100 mm y $t = 25$ mm. Para un par de carga $F = \pm 3$ kN aplicado a lo largo del diámetro, obtenga el factor de seguridad a la fatiga en las fibras interior y exterior:

a) si la viga es de acero con $S_{ut} = 700$ Mpa.
b) si la viga es de hierro fundido una $S_{ut} = 420$ Mpa.

4-38. Un eje de acero de 42 mm de diámetro tiene un orificio transversal de 19 mm y está sometida a una carga senoidal combinada de $\sigma = \pm 100$ MPa de esfuerzo de flexión, y una de torsión constante de 110 MPa. Obtenga su factor de seguridad para vida infinita, si su $S_{ut} = 1$ Gpa.

*4-39. Un eje de acero de 42 mm de diámetro tiene un orificio transversal de 19 mm y está sometida a una carga combinada de $\sigma = \pm 100$ MPa de esfuerzo de flexión, y una de torsión alternativa de ± 110 MPa, las cuales están desfasadas 90°. Obtenga su factor de seguridad para vida infinita, si $S_{ut} = 1$ Gpa.

4-40. Rediseñe el soporte del rollo del problema 4-8, de manera que sea como el de la figura P4-16. Los mandriles se insertan un 10% en la longitud del rollo. Diseñe las dimensiones *a* y *b* con un factor de seguridad de 2 para vida infinita.

a) Si la viga es de acero con $S_{ut} = 600$ Mpa.
b) Si la viga es de hierro fundido con $S_{ut} = 300$ Mpa.

***4-41**. Un tubo de acero de 10 mm de diámetro interior transporta líquido a 7 MPa. La presión varía periódicamente desde cero hasta un máximo. El acero tiene $S_{ut} = 400$ Mpa. Determine el factor de seguridad a la fatiga para vida infinita de la pared, si su espesor es de:

a) 1 mm.
b) 5 mm.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas también pueden continuar y extenderse en capítulos posteriores.

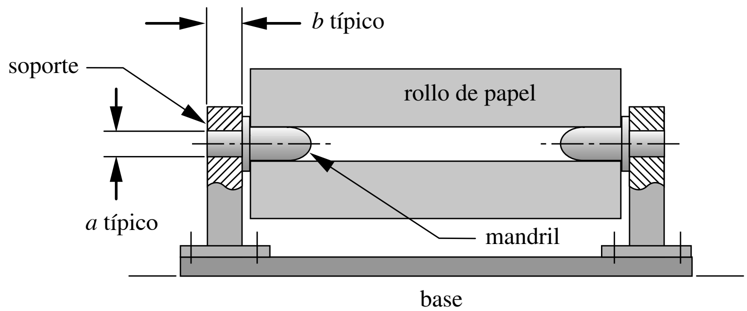


FIGURA P4-16

Problema 4-40 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

4-42. Se requiere un tanque cilíndrico con extremos hemisféricos para mantener 150 psi de aire presurizado a temperatura ambiente. El ciclo de la presión va de cero a un máximo. El acero tiene S_{ut} = 500 Mpa. Determine el factor de seguridad a la fatiga para vida infinita, si el diámetro del tanque es de 0.5 m, el espesor de la pared es de 1 mm y su longitud es de 1 m.

4-43. Los rollos de papel de la figura P4-17 tienen 0.9 m de diámetro exterior × 0.22 m de diámetro interior × 3.23 m de largo, y tienen una densidad de 984 kg/m^3. Los rollos se transfieren de una banda transportadora (que no se muestra) al montacargas por un mecanismo-V de la estación de descarga, el cual gira 90° por la acción de un cilindro de aire. Luego, el papel rueda hacia la tijera del montacargas. Las cuchillas de las tijeras tienen 38 mm de espesor por 100 mm de ancho por 1.2 m de largo y tienen una punta de 3° con la horizontal y S_{ut} = 600 Mpa. Obtenga el factor de seguridad a la fatiga para vida infinita para las dos cuchillas del montacargas, cuando el papel rueda hacia él en dos condiciones diferentes (defina todas las suposiciones):

a) Las dos cuchillas no tienen soporte en sus extremos libres.
b) Las dos cuchillas están en contacto con la mesa en el punto *A*.

4-44. Determine un espesor aceptable para los eslabones-V de la estación de descarga de la figura P4-17, con la finalidad de limitar a 10 mm sus deflexiones en las puntas en cualquier posición de su giro. Dos eslabones-V soportan al rollo en los puntos que se encuentran a 1/4 y 3/4 a lo largo de la longitud del rollo, y cada uno de los brazos en V tiene un ancho de 10 cm y 1 m de largo. ¿Cuál es su factor de seguridad a la fatiga

* Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas también pueden continuar y extenderse en capítulos posteriores.

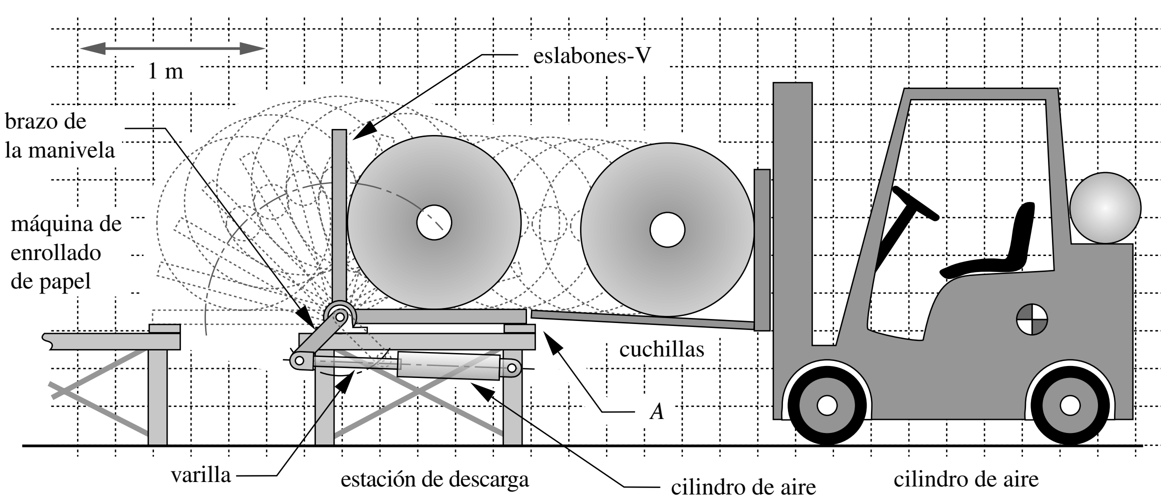


FIGURA P4-17

Problemas 4-43 a 4-47

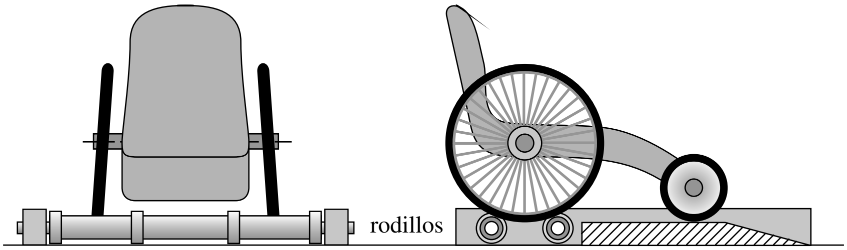


FIGURA P4-18

Problema 4-48

para vida infinita, cuando se diseña para limitar su deflexión, como se muestra arriba? S_{ut} = 600 Mpa. Para mayor información, véase el problema 2-43.

4-45. Determine el factor de seguridad a la fatiga para vida infinita, con base en la carga de tensión sobre la varilla del cilindro de aire de la figura P4-17. El ciclo de la carga de tensión va de cero al máximo (las cargas de compresión por debajo de la carga crítica de pandeo no afectan la vida a la fatiga). El brazo de la manivela que hace girar es de 0.3 m de largo, y la varilla tiene una extensión máxima de 0.5 m. La varilla de 25 mm de diámetro es de acero sólido con S_{ut} = 600 Mpa. Defina todas las suposiciones.

4-46. Los eslabones-V de la figura P4-17 giran por la acción del brazo de la manivela a través de un eje que tiene 60 mm de diámetro por 3.23 m de largo. Determine el torque máximo aplicado a este eje durante el movimiento del eslabón-V y obtenga el factor de seguridad a la fatiga para vida infinita del eje, si su S_{ut} = 600 Mpa. Para mayor información, véase el problema 4-43.

*__4-47__. Determine las fuerzas máximas sobre los pernos de cada extremo del cilindro de aire de la figura P4-17. Determine el factor de seguridad a la fatiga para vida infinita de estos pernos, si tienen 30 mm de diámetro y están a cortante simple. S_{ut} = 600 Mpa. Para mayor información, véase el problema 4-43.

4-48. La figura P4-18 muestra un dispositivo de entrenamiento para un corredor en silla de ruedas de 100 kg. La silla tiene ruedas de 65 cm de diámetro, separadas por una pista de 70 cm de ancho. Las ruedas traseras se encuentran sobre dos rodillos que giran libremente sobre cojinetes. El movimiento lateral de la silla está limitado por las pestañas. Diseñe los rodillos de 1 m de largo como tubos huecos de aluminio (seleccione la aleación), para minimizar la altura de la plataforma y limitar también las deflexiones del rodillo a 1 mm en el peor de los casos. Especifique el tamaño adecuado de los ejes de acero para soportar los tubos sobre los cojinetes. Calcule los factores de seguridad a la fatiga para una vida de $N = 5E8$ ciclos.

4-49. La figura P4-19 muestra el perno maquinado de un pivote que tiene una presión de contacto en la pieza A y una corredera en la pieza B. Si F = 100 lb, l = 2 in y d = 0.5 in, ¿cuál será el factor de seguridad del perno contra la fatiga, si está hecho de acero SAE 1020 rolado en frío? La carga es totalmente invertida y se desea una confiabilidad de 90%. El factor de concentración de esfuerzo por flexión es K_t = 1.8, en la sección donde el perno sale de la pieza A sobre el lado derecho.

4-50. La figura P4-19 muestra el perno maquinado de un pivote que tiene presión por contacto en la pieza A y una corredera en la pieza B. Si F = 100 N, l = 50 mm y d = 16 mm, ¿cuál será el factor de seguridad del perno contra la fatiga, si está hecho de hierro fundido clase 50? La carga es totalmente invertida y se desea una confiabilidad de 90%. El factor de concentración de esfuerzo por flexión es K_t = 1.8 en la sección donde el perno sale de la pieza A sobre el lado derecho.

4-51. Se fabricó un componente de aluminio 7075-T651 en forma de una hoja grande, la cual tiene una dureza a la fractura K_c = 24.2 MPa-m$^{0.5}$ y una resistencia a la fluencia por tensión de 495 MPa. Determine el número de ciclos de carga que puede resistir, si el esfuerzo nominal varía de 0 a la mitad de la resistencia a la fluencia, y la grieta inicial tenía una longitud total de 1.2 mm. Los valores del coeficiente y del exponente en la ecuación 4.4 para este material son $A = 5 \times 10^{-11}$ (mm/ciclo) y $n = 4$.

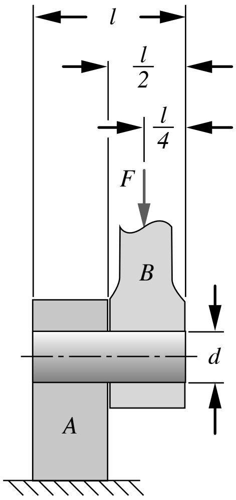


FIGURA P4-19

Problemas 4-49 y 4-50

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador. Los problemas también pueden continuar y extenderse en capítulos posteriores.

*4-52. Se fabricó un componente de acero SAE 4340 en forma de una hoja grande, la cual tiene una tenacidad a la fractura $K_c = 98.9$ MPa-m$^{0.5}$. Las hojas son inspeccionadas después de la fabricación para detectar defectos de grietas; sin embargo, el dispositivo de inspección no puede detectar defectos menores de 5 mm. Determine el espesor mínimo requerido para que la hoja tenga un ciclo de vida mínimo de 10^6 ciclos (mediante el criterio de mecánica de la fractura), si su ancho es de 400 mm y la carga normal en la grieta varía de 20 a 170 kN. Los valores del coeficiente y el exponente de la ecuación 4.4 para este material son $A = 4 \times 10^{-9}$ (mm/ciclo) y $n = 3$.

4-53. Un cilindro cerrado de pared delgada está hecho de una aleación de aluminio que tiene una tenacidad a la fractura de 38 MPa-m$^{0.5}$ y tiene las siguientes dimensiones: longitud = 200 mm, diámetro exterior = 84 mm y diámetro interior igual a 70 mm. Se descubre una grieta semicircular de 2.8 mm de profundidad sobre el diámetro interior y lejos de los extremos, orientada a lo largo de una línea paralela al eje del cilindro. Si el cilindro se presuriza de manera repetida de 0 a 75 MPa, ¿cuántos ciclos de presión puede soportar? Los valores del coeficiente y exponente de la ecuación 4.4 para este material son $A = 5 \times 10^{-12}$ (mm/ciclo) y $n = 4$. (*Sugerencia*: El valor del factor geométrico para un defecto superficial semicircular es $b = 2/p$ y la grieta se propaga en dirección radial).

4-54. Una viga de acero sin rotación rolada en caliente tiene una sección acanalada con $h = 64$ mm y $b = 127$ mm. Tiene una carga repetida a la flexión con el eje neutro que pasa por la red. Determine su resistencia a la fatiga corregida con 90% de confiabilidad, si se usa en un ambiente con una temperatura por debajo de 450 °C y tiene una resistencia última a la tensión de 320 MPa.

4-55. Una varilla de acero maquinada sin rotación tiene una sección redonda con $d =$ 50 mm. Está cargada con una fuerza axial fluctuante. Determine su resistencia a la fatiga corregida con 99% de confiabilidad, si se usa en un ambiente con una temperatura por debajo de 450 °C y tiene una resistencia última a la tensión de 480 MPa.

4-56. Una varilla de acero sin rotación rolada en frío tiene una sección redonda con $d =$ 76 mm. Está cargada con torsión repetida. Determine su resistencia a la fatiga corregida con 99% de confiabilidad, si se usa en un ambiente con una temperatura de 500 °C y tiene una resistencia última a la tensión de 855 MPa.

4-57. Una varilla de acero sin rotación y esmerilada tiene una sección rectangular con $h = 60$ mm y $b = 40$ mm. Está cargada a la flexión repetida. Determine su resistencia a la fatiga corregida con 99.9% de confiabilidad, si se usa en un ambiente con una temperatura por debajo de 450 °C y tiene una resistencia última a la tensión de 1 550 MPa.

4-58. Un eje de acero ranurado similar al mostrado en la figura G-5 (apéndice G) se cargará a flexión. Sus dimensiones son: $D = 57$ mm, $d = 38$ mm, $r = 3$ mm. Determine el factor de concentración de esfuerzos por fatiga, si el material tiene $S_{ut} = 1\,130$ MPa.

4-59. Un eje de acero con un orificio transversal, similar al mostrado en la figura G-8 (apéndice G) está cargado a torsión. Sus dimensiones son: $D = 32$ mm, $d = 3$ mm. Determine el factor de concentración de esfuerzos por fatiga, si el material tiene $S_{ut} = 808$ MPa.

4-60. Una barra plana de aluminio endurecido y fileteado similar a la mostrada en la figura G-9 (apéndice G) se cargará axialmente. Sus dimensiones son: $D = 1.20$ in, $d =$ 1.00 in, $r = 0.10$ in. Determine el factor de concentración de esfuerzos por fatiga, si el material tiene $S_{ut} = 76$ kpsi.

4-61. En la figura P4-20 se muestra un eje giratorio con un hombro fileteado asentado en el canal interior de un cojinete de contacto con el hombro contra el borde del cojinete. El cojinete tiene una ligera excentricidad, que induce un momento de flexión totalmente invertido en el eje conforme ésta gira. Las mediciones indican que la amplitud del esfuerzo alternativo resultante debido a la flexión es $\sigma_a = 57$ MPa. El torque sobre el eje varía del más alto de 90 N-m al más bajo de 12 N-m, y está en fase con el esfuerzo de flexión. El eje está esmerilado y sus dimensiones son: $D = 23$ mm, $d = 19$ mm y $r = 1.6$ mm. El material del eje es acero SAE 1040 rolado

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H.

en frío. Determine el factor de seguridad a la fatiga para vida infinita del eje, con una confiabilidad de 99%.

4-62. Un elemento a tensión en una máquina se filetea como se indica en la figura P4-21. El elemento tiene un defecto de fabricación que causa la variación en la carga de tensión que se aplica excéntricamente y da como resultado también una carga de flexión variable. Las mediciones indican que el esfuerzo de tensión máximo es de 16.4 MPa y el mínimo es 4.1 MPa. La carga de tensión varía de la más alta de 3.6 kN a la más baja de 0.90 kN y está en fase con el esfuerzo de flexión. La pieza se maquina y sus dimensiones son $D = 33$ mm, $d = 25$ mm, $h = 3$ mm y $r = 3$ mm. El material es acero SAE 1020 rolado en frío. Determine el factor de seguridad a la fatiga para vida infinita de la pieza con 90% de confiabilidad.

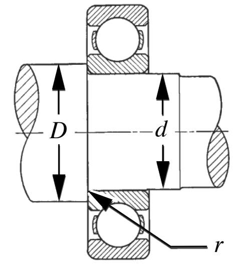


FIGURA P4-20
Problema 4-61

4-63. Para una barra plana fileteada en tensión similar a la que se muestra en la figura G-9 (apéndice G) y los datos de la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P4-7, determine los esfuerzos axiales alternativo y medio conforme se modifican por los factores de concentración de esfuerzos adecuados en la barra.

4-64. Para una barra plana fileteada en flexión similar a la que se muestra en la figura G-10 (apéndice G) y los datos de la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P4-7, determine los esfuerzos de flexión alternativo y medio, conforme se modifican con los factores adecuados de concentración de esfuerzos en la barra.

4-65. Para un eje, con un hombro fileteado, en tensión similar a la mostrada en la figura G-1 (apéndice G) y los datos de la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P4-7, determine los esfuerzos axiales alternativo y medio, conforme se modifican con los factores de concentración de esfuerzos adecuados en el eje.

4-66. Para un eje, con un hombro fileteado, en flexión similar a la mostrada en la figura G-2 (apéndice G) y los datos de la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P4-7, determine los esfuerzos de flexión alternativo y medio, conforme se modifican por los factores de concentración de esfuerzos adecuados en el eje.

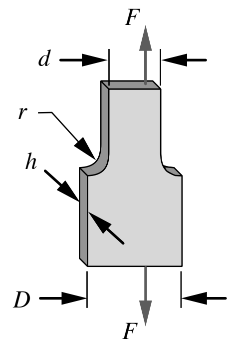


FIGURA P4-21
Problema 4-62

4-67. La pieza de una máquina está sometida a esfuerzos multiaxiales simples fluctuantes. Los intervalos de los esfuerzos corregidos diferentes de cero son: $\sigma_{xmín} = 50$ MPa, $\sigma_{xmáx} = 200$ MPa, $\sigma_{ymín} = 80$ MPa, $\sigma_{ymáx} = 320$ MPa, $\tau_{xzmín} = 120$ MPa, $\tau_{xymáx} = 480$ MPa. Las propiedades del material son: $S_e = 525$ MPa y $S_{ut} = 1200$ MPa. Por medio de la línea de carga del caso 3, calcule y compare los factores de seguridad de vida infinita proporcionados por los métodos de Sines y de von Mises.

4-68. Se construyó un tanque cilíndrico con extremos hemisféricos. Se hizo con acero rolado en caliente con $S_{ut} = 380$ MPa. El diámetro exterior del tanque es de 300 mm con una pared de 20 mm de espesor. La presión puede variar de 0 a un máximo desconocido.

Tabla P4-7 Datos de los problemas 4-63 a 4-66
Utilice sólo los datos relevantes para el problema específico.
Longitudes en mm, fuerzas en N y momentos en N-m.

Fila	D	d	r	h	$M_{mín}$	$M_{máx}$	$P_{mín}$	$P_{máx}$	*Material*
a	40	20	4	10	80	320	8000	32000	SAE 1020 CR
b	26	20	1	12	100	500	9500	47500	SAE 1040 CR
c	36	30	1.5	8	60	180	6500	19500	SAE 1020 CR
d	33	30	1	8	75	300	7200	28800	SAE 1040 CR
e	21	20	1	10	50	150	5500	16500	SAE 1050 CR
f	51	50	1.5	7	80	320	8000	32000	SAE 1020 CR
g	101	100	5	8	400	800	15000	60000	SAE 1040 CR

Tabla P4-8
Datos del problema 4-70

Fila	σ_m'	σ_a'
a	50	30
b	70	30
c	100	10
d	20	60
e	80	40
f	40	40
g	120	50
h	80	80

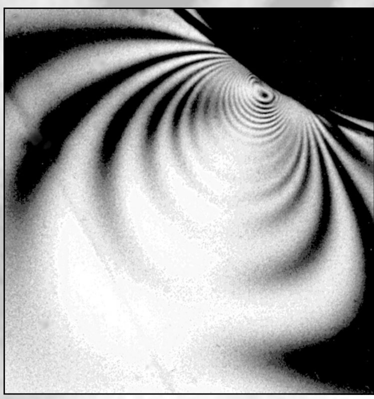
Para un factor de seguridad a la fatiga de vida infinita igual a 4, con un factor de confiabilidad de 99.99%, ¿cuál será la presión máxima a la que puede someterse el tanque?

4-69. Se diseñó y fabricó un eje giratorio de acero SAE 1040 HR. Se hizo con tubería que tiene un diámetro exterior de 60 mm y un espesor de pared de 5 mm. Las mediciones de la deformación indican que hay un esfuerzo axial totalmente invertido de 68 MPa y un esfuerzo de torsión que varía de 12 MPa a 52 MPa, y está en fase con el esfuerzo axial en un punto crítico sobre el eje. Determine el factor de seguridad a la fatiga para vida infinita del eje con una confiabilidad de 99%.

4-70. Para los valores del esfuerzo medio y alternativo (en MPa) en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P4-8, obtenga el factor de seguridad para cada uno de los cuatro casos de cargas variables, con base en el diagrama de Goodman modificado, si $S_e = 100$, $S_y = 150$ y $S_{ut} = 200$ MPa.

4-71. Un eje giratorio con un hombro fileteado, en torsión, similar a la mostrada en la figura G-3 del apéndice G, está hecho de acero SAE 1020 CR y tiene las dimensiones $D = 40$ mm, $d = 20$ mm y $r = 4$ mm. El eje es esmerilado y está sometido a un torque totalmente invertido de $+/-$ 80 N-m. Determine el factor de seguridad para vida infinita del eje con un 99.9% de confiabilidad.

5



FALLA DE SUPERFICIES

Desgástelo, hasta acabarlo;
arrégleselas con él o sin él.

Proverbio de Nueva Inglaterra

5.0 INTRODUCCIÓN

Existen sólo tres modos en que las piezas o los sistemas pueden “fallar”: por *obsolescencia*, *ruptura* o *desgaste*. Mi vieja computadora aún funciona bien, pero es obsoleta y ya no me sirve. El florero favorito de mi esposa está hecho pedazos porque se me cayó al suelo y es irrecuperable. Sin embargo, mi automóvil, con 123 000 millas recorridas, todavía me sirve a pesar de que muestra algunos signos de desgaste. La mayoría de los sistemas están expuestos a estos tres tipos de falla. La falla por obsolescencia es algo arbitraria. (Mi nieto está feliz usando mi computadora antigua). A menudo, la falla por ruptura es repentina y suele ser permanente. La falla por “desgaste” es generalmente un proceso gradual y algunas veces se repara. En última instancia, cualquier sistema que no es víctima de esos dos modos de falla inevitablemente se desgastará, si se mantiene en servicio el tiempo suficiente. El desgaste es el modo final de falla, del cual nada escapa. Por lo tanto, se debe estar consciente de que no se podrá hacer un diseño para eliminar completamente todos los tipos de desgaste, tan sólo posponerlos.

En capítulos anteriores estudiamos fallas de piezas por distorsión (fluencia) y ruptura (fractura). **Desgaste** es un término muy amplio que incluye muchos tipos de fallas, todas las cuales implican cambios en la **superficie** de la pieza. Algunos de estos llamados *mecanismos de desgaste* aún no se comprenden del todo y en algunos casos existen incluso teorías competidoras. La mayoría de los expertos describen cinco categorías generales de desgaste: **desgaste adhesivo**, **desgaste abrasivo**, **erosión**, **desgaste corrosivo y fatiga superficial**. En las siguientes secciones, se analizan dichos temas en detalle. Asimismo, existen otros tipos de falla superficial que no se ajustan exactamente a ninguna de las cinco categorías o que se ajustan a más de una. La **fatiga por corrosión** tiene aspectos de las últimas dos categorías, igual que la **corrosión por frotamiento**. Por sencillez, se estudiarán estos híbridos simultáneamente con una de las cinco categorías principales listadas arriba.

La falla por desgaste usualmente implica la pérdida de algo de material de la superficie de las piezas sólidas del sistema. Los movimientos de desgaste que interesan

5

Tabla 5-0 Variables usadas en este capítulo

Símbolo	Variable	Unidades ips	Unidades SI	Véase
a	mitad del ancho de la huella de contacto	in	m	Secc. 5.8–5.10
A_a	área aparente de contacto	in^2	m^2	Secc. 5.2
A_r	área real de contacto	in^2	m^2	Ec. 5.1
B	factor de geometría	1/in	1/m	Ec. 5.9*b*
b	mitad de la longitud de la huella de contacto	in	m	Secc. 5.8–5.10
d	profundidad del desgaste	in	m	Ec. 5.7
E	módulo de Young	psi	Pa	todo
F, P	fuerza o carga	lb	N	todo
f	fuerza de fricción	lb	N	Ec. 5.2
$f_{máx}$	fuerza tangencial máxima	lb	N	Ec. 5.22*f*
K	coeficiente de desgaste	ninguna	ninguna	Ec. 5.7
l	longitud del contacto lineal	in	m	Ec. 5.7
L	longitud del contacto cilíndrico	in	m	Ec. 5.14
m_1, m_2	constantes del material	1/psi	m^2/N	Ec. 5.9*a*
H	dureza de penetración	psi	kg/mm^2	Ec. 5.7
N	número de ciclos	ninguna	ninguna	Ec. 5.26
N_f	factor de seguridad para fatiga superficial	ninguna	ninguna	Ejemplo 5-5
p	presión en la huella de contacto	psi	N/m^2	Secc. 5.8–5.10
$p_{prom.}$	presión prom. en la huella de contacto	psi	N/m^2	Secc. 5.8–5.10
$p_{máx}$	presión máx. en la huella de contacto	psi	N/m^2	Secc. 5.8–5.10
R_1, R_2	radios de curvatura	in	m	Ec. 5.9*b*
S_{us}	resistencia última al cortante	psi	Pa	Secc. 5.3
S_{ut}	resistencia última a la tensión	psi	Pa	Secc. 5.3
S_y	resistencia a la fluencia	psi	Pa	Secc. 5.3
S_{yc}	resistencia a la fluencia en compresión	psi	Pa	Secc. 5.3
V	volumen	in^3	m^3	Ec. 5.7
x, y, z	variables generales de longitud	in	m	todo
μ	coeficiente de fricción	ninguna	ninguna	Ec. 5.2–5.6
ν	razón de Poisson	ninguna	ninguna	todo
σ	esfuerzo normal	psi	Pa	todo
σ_1	esfuerzo principal	psi	Pa	Secc. 5.11
σ_2	esfuerzo principal	psi	Pa	Secc. 5.11
σ_3	esfuerzo principal	psi	Pa	Secc. 5.11
τ	esfuerzo de cortante	psi	Pa	todo
τ_{13}	esfuerzo cortante máximo	psi	Pa	Secc. 5.11
τ_{21}	esfuerzo cortante principal	psi	Pa	Secc. 5.11
τ_{32}	esfuerzo cortante principal	psi	Pa	Secc. 5.11

son deslizamiento, rodamiento o una combinación de ambos. El desgaste tiene un costo significativo para la economía nacional.* Sólo se requiere la pérdida de un volumen muy pequeño de material para inutilizar un sistema completo. Rabinowicz[1] estimó que un automóvil de 4 000 lb, cuando está completamente "desgastado", únicamente habrá perdido

* Un estudio de 1977, patrocinado por la ASME, estimó que el costo de la energía para la economía de Estados Unidos asociado con la sustitución de equipo que falló por desgaste representó 1.3% del consumo estadounidense total de energía. Esto es el equivalente de alrededor de 160 millones de barriles de petróleo por año. Véase O. Pinkus y D.F. Wilcock, *Strategy for Energy Conservation through Tribology*, ASME, Nueva York, 1977, p. 93.

unas cuantas onzas de metal en sus superficies de trabajo. Aún más, estas superficies dañadas no serán visibles sin desarmarlo, de modo que con frecuencia es difícil monitorear y anticipar los efectos del desgaste antes de que ocurra la falla.

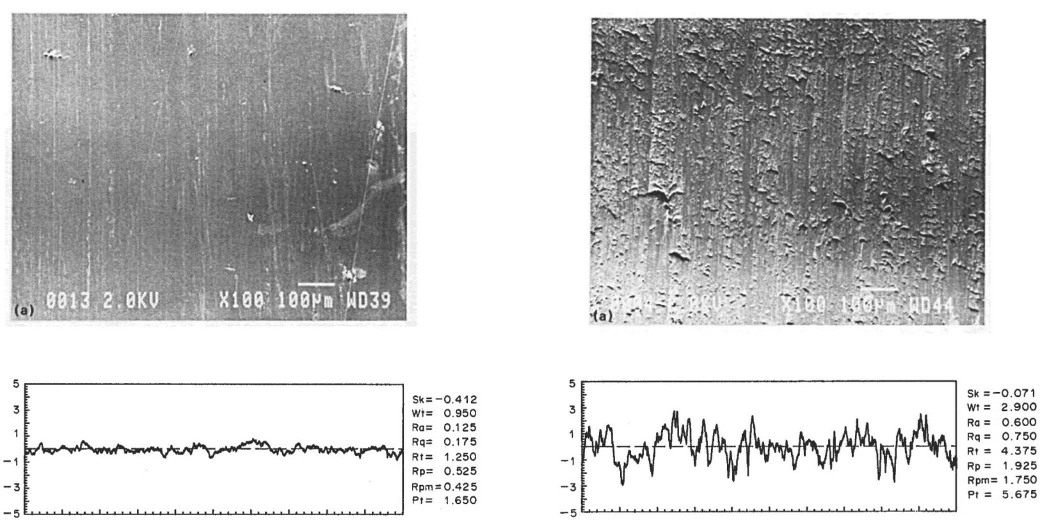
La tabla 5-0 presenta las variables usadas en este capítulo y las referencias a ecuaciones, tablas o secciones donde se utilizan. Al final del capítulo se incluye un resumen que también agrupa todas las ecuaciones importantes del presente texto para facilitar su referencia, e identifica la sección del capítulo en la cual se encuentra su análisis.

5.1 GEOMETRÍA DE LA SUPERFICIE

Antes de analizar con detalle los tipos de mecanismos de desgaste, es conveniente definir las características relevantes, para estos procesos, de una superficie de ingeniería. (La resistencia y la dureza del material también son factores en el desgaste). La mayoría de las superficies sólidas que están sometidas al desgaste en maquinaria son las maquinadas o las esmeriladas; sin embargo, algunas pueden ser fundidas o forjadas. En cualquier caso, la superficie tendrá algún grado de aspereza que es inherente al proceso de acabado. Este grado de aspereza o de tersura tendrá un efecto sobre el tipo y el grado de desgaste que experimentará.

Incluso una superficie aparentemente lisa tiene irregularidades microscópicas, las cuales son susceptibles de medirse por varios métodos. El perfilómetro pasa un punzón duro (por ejemplo, de diamante), con una carga ligera, sobre la superficie a velocidad controlada (baja) y registra sus ondulaciones. El punzón tiene una punta con radio muy pequeño (cerca de 0.5 μm) que actúa, en efecto, como un filtro de paso bajo, ya que no se detectan contornos más pequeños que su radio. Sin embargo, brinda un perfil razonablemente preciso de la superficie con una resolución de 0.125 μm o mejor. La figura 5-1 muestra los perfiles y las fotografías del SEM* (100x) de dos superficies de levas de acero endurecido: *a*) una maquinada y *b*) una esmerilada. Los perfiles se midieron con un perfilómetro Hommel T-20 que digitaliza 8 000 puntos de datos sobre la longitud

* Microscopio de escaneo electrónico



(*a*) (*b*)

FIGURA 5-1

Fotografías (100x) del microscopio de escaneo electrónico de las superficies *a*) esmerilada y *b*) maquinada de una leva

de la muestra (en este caso, de 2.5 mm). Los "picos de las montañas" microscópicas sobre las superficies se llaman **asperezas**.

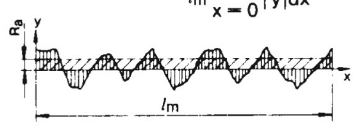
A partir de estos perfiles se pueden calcular varias medidas estadísticas. ISO define por lo menos 19 de estos parámetros. Algunos de ellos se muestran en la figura 5-2 junto con sus definiciones matemáticas. Tal vez los parámetros más comúnmente usados son R_a, que representa el promedio de los valores absolutos de los puntos medidos, o R_q, el cual es su promedio rms. Éstos son muy similares en valor y en significado. Por desgracia, muchos ingenieros sólo especifican uno de estos parámetros. Por ejemplo, las dos superficies mostradas en las figuras 5-3*a* y *b* tienen los mismos valores R_a y R_q, pero difieren claramente en su naturaleza. Una tiene características predominantemente positivas y la otra, predominantemente negativas. Estas superficies reaccionarán de manera bastante diferente al deslizamiento o al rodamiento contra otra superficie.

5

R_a (CLA) (AA) — **Media aritmética del valor de la aspereza** DIN 4768, DIN 4762, ISO 4287/1

El valor aritmético promedio de la aspereza filtrada del perfil, determinado a partir de las desviaciones alrededor de la línea central dentro de la longitud evaluada l_m.

$$R_a = \frac{1}{l_m} \int_{x=0}^{x=l_m} |y|\,dx$$

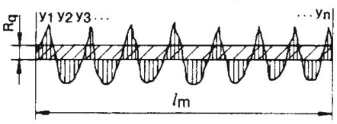


l_m = longitud evaluada

R_q (RMS) — **Raíz cuadrada del valor medio de la aspereza** DIN 4762, ISO 4287/1

El valor RMS obtenido a partir de las desviaciones del perfil de la aspereza filtrada sobre la longitud evaluada l_m.

$$R_q = \sqrt{\frac{1}{l_m} \int_0^{l_m} y^2(x)\,dx}$$



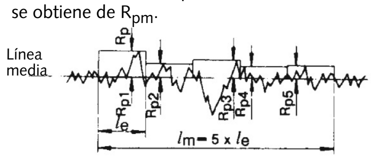
R_{pm} — **Valor medio de la altura de picos por encima de la línea media** DIN 4762

El valor aritmético promedio de los cinco picos más altos por encima de la línea media $R_{p1} - R_{p5}$, similar a la definición de R_z (DIN) especificada en DIN 4768. Los cinco picos más altos se determinan a partir de la "línea central" del perfil de aspereza filtrada, cada uno como producto de una prueba individual en la longitud l_e.

$$R_{pm} = \frac{1}{5} \cdot (R_{p1} + R_{p2} + \ldots + R_{p5})$$

R_p — **Pico individual más alto por encima de la línea media** DIN 4762, ISO 4287/1

El valor del pico individual más alto por encima de la línea central del perfil filtrado, conforme se obtiene de R_{pm}.



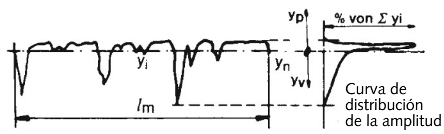
S_k — **Oblicuidad del perfil**

Una medida del perfil o simetría de la curva de distribución de la amplitud, obtenida a partir del perfil de aspereza filtrado. Una oblicuidad negativa representa buenas propiedades de contacto.

$$S_k = \frac{1}{R_q^3} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \bar{y})^3$$

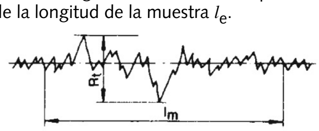
Curva amplitud-distribución DIN 4762, ISO 4287/1

La gráfica de la frecuencia en % de amplitudes del perfil.



R_t (R_h) (R_d) — **Altura máxima pico-valle** DIN 4762 (1960) desde 1978 es $R_{máx}$.

La altura máxima pico-valle del perfil filtrado sobre la longitud evaluada lm independientemente de la longitud de la muestra l_e.



W_t — **Profundidad de ondulación** DIN 4774

La altura máxima pico-valle del perfil de la ondulación nivelada (aspereza eliminada) dentro de la longitud de evaluación l_m.

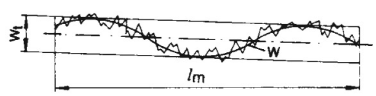


FIGURA 5-2

Definiciones de los parámetros DIN e ISO para asperezas superficiales, ondulación y oblicuidad (*Cortesía de Hommel America Inc., New Britain, Ct.*)

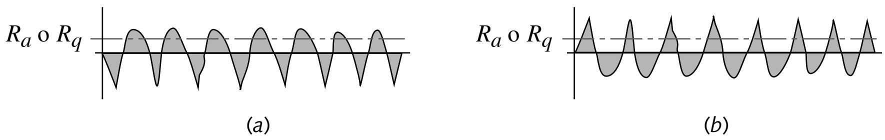


FIGURA 5-3

Contornos superficiales diferentes pueden tener los mismos valores R_a o R_q

Para diferenciar las superficies con valores idénticos de R_a o R_q, se deberían calcular otros parámetros. La oblicuidad S_k es una medida del promedio de la primera derivada del contorno de la superficie. Un valor negativo de S_k indica que en la superficie predominan los valles (figura 5-3*a*), en tanto que una S_k positiva define un predominio de los picos (figura 5-3*b*). Se pueden calcular otros muchos parámetros (véase la figura 5-2). Por ejemplo, R_t define la mayor dimensión pico-valle en la longitud de la muestra, R_p la altura del pico más grande por encima de la línea media, y R_{pm} el promedio de las alturas de los cinco picos más grandes. Todas las mediciones de aspereza se calculan a partir de una medición filtrada electrónicamente, que anula cualquier onda de cambio lento en la superficie. Se calcula una línea promedio a partir de la cual se efectúan las mediciones pico-valle. Además de estas mediciones de aspereza (denotadas por R), también es posible calcular la ondulación W_t de la superficie. El cálculo de W_t filtra los contornos de alta frecuencia y preserva las ondulaciones de periodo largo en las mediciones de superficie burda. Si desea identificar totalmente la condición del acabado superficial, observe que no es suficiente utilizar tan sólo R_t o R_q.

5

5.2 SUPERFICIES APAREADAS

Cuando se presionan entre sí dos superficies con una carga, su área aparente de contacto A_a se calcula fácilmente a partir de la geometría; sin embargo, su área real de contacto A_r se ve afectada por las asperezas que hay en las superficies y es más difícil determinarla con precisión. La figura 5-4 muestra dos piezas en contacto. Las partes superiores de las asperezas entrarán en contacto primero con la pieza apareada y el área inicial de contacto será extremadamente pequeña. Los esfuerzos resultantes en las asperezas serán muy altos y podrían exceder con facilidad la resistencia a la fluencia por compresión del material. Conforme se incrementa la fuerza de apareamiento, las puntas de las asperezas ceden y se ensanchan hasta que su área combinada sea suficiente para reducir el esfuerzo medio a un nivel sostenible, es decir, el material más débil desarrolla una *resistencia a la penetración por compresión*.

La resistencia a la penetración por compresión del material se mide mediante pruebas convencionales de dureza (Brinell, Rockwell, etcétera), en las cuales se fuerza un

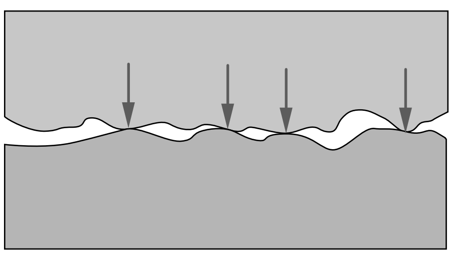


FIGURA 5-4

El contacto real entre dos superficies es sólo en las puntas de la aspereza

punzón muy liso sobre el material y éste se deforma (cede) a la forma del punzón. (Véase la sección B.4). La resistencia a la penetración S_p se calcula fácilmente a partir de estos datos de prueba y, en la mayoría de los materiales, tiende a ser del orden de tres veces la resistencia a la fluencia por compresión S_{yc}.[2]

Así, el área real de contacto se estima con

$$A_r \cong \frac{F}{S_p} \cong \frac{F}{3S_{yc}} \tag{5.1}$$

donde F es la fuerza aplicada normal a la superficie y las resistencias son como las definidas en el párrafo anterior, tomadas del más débil de los dos materiales. *Observe que el área de contacto para un material de resistencia específica bajo una carga determinada será la misma sin importar el área aparente de las superficies en contacto*.

5.3 FRICCIÓN

Observe que el área real de contacto A_r (ecuación 5.1) es independiente del área aparente A_a que está definida por la geometría de las piezas en contacto. Éste es el motivo por el cual la fricción de Coulomb entre dos sólidos también es independiente del área aparente de contacto A_a. La ecuación para la fricción por deslizamiento de Coulomb es

$$f = \mu F \tag{5.2a}$$

donde f es la fuerza de fricción, μ es el coeficiente de fricción dinámica y F es la fuerza normal.

La fuerza normal presiona recíprocamente las dos superficies y crea deformaciones elásticas y adhesiones (véase la sección siguiente) en las puntas de las asperezas. La fuerza de fricción dinámica de Coulomb f se define como la fuerza necesaria para cortar las asperezas adheridas y elásticamente entrelazadas con la finalidad de permitir un movimiento de deslizamiento. Esta fuerza cortante es igual al producto de la resistencia al cortante del material más débil por el área de contacto real A, más una "fuerza de arrancamiento" P.

$$f = S_{us} A_r + P \tag{5.2b}$$

La fuerza de arrancamiento P se debe a la pérdida de partículas incrustadas de las superficies y es insignificante comparada con la fuerza cortante,* de modo que puede ignorarse. De la ecuación 5.1, se tiene

$$A_r \cong \frac{F}{3S_{yc}} \tag{5.2c}$$

Sustituyendo la ecuación 5.2*c* en 5.2*b* (ignorando P),

$$f \cong F\frac{S_{us}}{3S_{yc}} \tag{5.2d}$$

Al combinar las ecuaciones 5.2*a* y 5.2*d*,

$$\mu = \frac{f}{F} \cong \frac{S_{us}}{3S_{yc}} \tag{5.3}$$

lo cual indica que el coeficiente de fricción μ es función sólo de la razón de las resistencias del material más débil de los dos materiales en contacto.

* Esto es válido únicamente si las dos superficies tienen aproximadamente la misma dureza. Si una superficie es más dura y áspera que la otra, podría haber una fuerza de arrancamiento grande.

La resistencia última al cortante se calcula con base en la resistencia última a la tensión del material.

$$\begin{aligned} &\text{aceros:} && S_{us} \cong 0.8 S_{ut} \\ &\text{otros metales dúctiles:} && S_{us} \cong 0.75 S_{ut} \end{aligned} \tag{5.4}$$

La resistencia a la fluencia por compresión, expresada como una fracción de la resistencia última a la tensión, varía con el material y la aleación en un rango bastante grande, tal vez

$$0.5 S_{ut} < S_{yc} < 0.9 S_{ut} \tag{5.5}$$

Al sustituir las ecuaciones 5.4 y 5.5 en la ecuación 5.3 se obtiene

$$\frac{0.75 S_{ut}}{3(0.9 S_{ut})} < \mu < \frac{0.8 S_{ut}}{3(0.5 S_{ut})}$$

$$0.28 < \mu < 0.53 \tag{5.6}$$

lo cual es aproximadamente el intervalo de valores de μ común para metales secos al aire. Observe que si los metales se limpian a conciencia, su μ tendrá el doble de estos valores. En el vacío, la μ de superficies limpias se puede aproximar al infinito debido al soldado en frío. Hay mucha variación en el coeficiente de fricción con los niveles de ambientes contaminados y otros factores, de manera que el ingeniero debería desarrollar datos de prueba para los materiales reales en condiciones reales de servicio. Es una prueba fácil de realizar.

Efecto de la aspereza sobre la fricción

Uno esperaría que la aspereza superficial ejerciera una fuerte influencia sobre el coeficiente de fricción. Sin embargo, las pruebas indican sólo una relación débil. En acabados extremadamente lisos, por debajo de 10 μin de R_a, el coeficiente de fricción μ se incrementa hasta un factor de 2 debido al incremento en el área de contacto real. En acabados muy ásperos, por arriba de 50 μin R_a, μ también aumenta ligeramente debido a la energía necesaria para superar las interferencias de la aspereza (arrancamiento), además del cortante de sus adherencias.

Efecto de la velocidad sobre la fricción

La fricción cinética de Coulomb se modela generalmente con independencia de la velocidad de deslizamiento V, excepto para una discontinuidad en $V = 0$, donde se mide un mayor coeficiente estático. En realidad existe una caída continua no lineal de μ con el incremento de V. Esta función es aproximadamente una recta cuando se traza contra el logaritmo de V, y su pendiente negativa es un ligero porcentaje por década.[7] Se cree que algo de esto ocurre porque las temperaturas crecientes en el punto de contacto resultantes de las altas velocidades reducen la resistencia a la fluencia por cortante del material en la ecuación 5.3 (p. 354).

Fricción por rodamiento

Cuando una pieza rueda sobre otra sin deslizamiento, el coeficiente de fricción es mucho menor, con μ en el intervalo de 5*E*-3 a 5*E*-5. La fuerza de fricción variará directamente con la potencia de la carga (de 1.2 a 2.4) e inversamente con el radio de curvatura de los elementos que ruedan. La aspereza superficial no tiene un efecto sobre la fricción por rodamiento, y la mayoría de estas uniones están esmeriladas para minimizar su aspereza.

Los materiales altamente endurecidos por lo general se utilizan para obtener las resistencias necesarias y favorecer los acabados esmerilados lisos. La fricción por rodamiento varía muy poco con la velocidad.[7]

Efecto del lubricante sobre la fricción

El uso de un lubricante en el punto de contacto del deslizamiento tiene varios beneficios sobre el coeficiente de fricción. Los lubricantes pueden ser líquidos o sólidos, aunque comparten las propiedades de baja resistencia al cortante y alta resistencia a la compresión. Un lubricante líquido como el aceite derivado del petróleo es básicamente incompresible en los niveles de esfuerzos por compresión que se presentan en cojinetes, pero se corta fácilmente. Por lo tanto, se vuelve el material más débil en el punto de contacto, y su baja resistencia al cortante en la ecuación 5.3 reduce el coeficiente de fricción. Los lubricantes también actúan como contaminantes en las superficies metálicas y las recubren con una capa (del espesor de una molécula) que inhibe la adhesión aun entre metales compatibles (véase la sección siguiente). Muchos aceites lubricantes comerciales se mezclan con varios aditivos que reaccionan con los metales para formar una capa contaminante del espesor de una molécula. Los llamados lubricantes EP (de *presión extrema*) agregan al aceite ácidos grasos u otros compuestos que atacan químicamente el metal y forman una capa contaminante que protege y reduce la fricción, incluso cuando la película de aceite sale del punto de contacto por las fuertes cargas de contacto. Los lubricantes, especialmente los líquidos, también sirven para eliminar el calor en el punto de contacto. Las bajas temperaturas reducen las interacciones de las superficies y el desgaste. Los lubricantes y el fenómeno de lubricación se estudiarán con mayor detalle en el capítulo 7. La tabla 5-1 muestra algunos valores típicos de coeficientes de fricción para pares de materiales que se encuentran comúnmente.

5.4 DESGASTE ADHESIVO

Cuando las superficies (limpias), como las que se ilustran en la figura 5-1 (p. 351), se presionan entre sí con una carga, algo de las asperezas en contacto suele adherirse de una a otra debido a las fuerzas de atracción entre los átomos superficiales de los dos materiales.[3] Como hay deslizamiento entre las superficies, estas adhesiones se rompen, ya sea a lo

Tabla 5-1 Coeficientes de fricción en algunas combinaciones de materiales

		Estático		Dinámico	
Material 1	**Material 2**	**Seco**	**Lubricado**	**Seco**	**Lubricado**
acero dulce	acero dulce	0.74		0.57	0.09
acero dulce	hierro fundido		0.183	0.23	0.133
acero dulce	aluminio	0.61		0.47	
acero dulce	latón	0.51		0.44	
acero duro	acero duro	0.78	0.11–0.23	0.42	0.03–0.19
acero duro	babbitt	0.42–0.70	0.08–0.25	0.34	0.06–0.16
teflón	teflón	0.04			0.04
acero	teflón	0.04			0.04
hierro fundido	hierro fundido	1.10		0.15	0.07
hierro fundido	bronce			0.22	0.077
aluminio	aluminio	1.05		1.4	

Fuente: *Mark's Mechanical Engineers' Handbook*, T. Baumeister, ed., McGraw-Hill, Nueva York

largo del punto de contacto original o a lo largo de un plano nuevo que pasa por un pico de aspereza del material. En el último caso, un trozo de la pieza *A* se transfiere a la pieza *B*, causando problemas y daño superficial. Algunas veces una partícula de material se romperá y quedará libre, volviéndose un residuo en el punto de contacto, lo cual podría entonces rayar la superficie y crear surcos en ambas piezas. Este tipo de daño algunas veces se denomina **estriación** o **raspadura*** de la superficie. La figura 5-5 muestra el ejemplo de un eje que falló por desgaste adhesivo en ausencia del lubricante adecuado.[6]

La teoría original de la adhesión postula que todos los contactos de asperezas causarán fluencia y adhesión que se deben a los grandes esfuerzos presentes. Ahora se cree que en la mayoría de los casos de contacto, sobre todo con frotamiento repetido, tan sólo una pequeña fracción de los contactos de asperezas causa realmente fluencia y adhesión; las deformaciones elásticas de las asperezas también juegan un rol significativo en las fuerzas de tracción (fricción) desarrolladas en el punto de contacto.[32]

COMPATIBILIDAD Un factor importante que afecta la adhesión es la compatibilidad metalúrgica entre los materiales en contacto. La **compatibilidad metalúrgica** entre dos metales se define como *alta solubilidad mutua* o *la formación de compuestos intermetálicos*.[4] Davis define dos condiciones para la **incompatibilidad** metalúrgica, lo cual quiere decir que los *metales pueden deslizarse entre sí con relativamente poca escoria*.[5]

1. *Los metales deben ser insolubles entre sí, no debe disolverse un material en el otro ni formar una aleación con él.*
2. *Por lo menos uno de los materiales debe estar en el subgrupo-B, es decir, a la derecha de la columna Ni-Pd-Pt en la tabla periódica.*†

Por desgracia, esta terminología llega a crear confusión, ya que la palabra *compatibilidad* usualmente significa la habilidad para trabajar juntos; mientras que en este contexto significa que no funcionan (se deslizan) bien juntos. Su "compatibilidad" metalúrgica en este caso es la *adherencia*, la cual actúa para prevenir el deslizamiento, haciéndolos **incompatibles por fricción**.

Rabinowicz[33] agrupa los pares de materiales en las categorías de idénticos (metalúrgicamente), compatibles, parcialmente compatibles, parcialmente incompatibles, e incompatibles, con base en el criterio anterior. Las combinaciones de idénticos y compatibles no deberían trabajarse juntas en el contacto con deslizamiento sin lubricar. Las categorías incompatibles y las parciales pueden trabajarse juntas. La figura 5-6 muestra una gráfica de compatibilidad de los metales usados normalmente según sus categorías. Los círculos con puntos indican metales **metalúrgicamente compatibles** (es decir, no aceptables para el contacto con deslizamiento). La cuarta parte de un cuadrado oscuro indica **parcialmente compatibles**; y un medio círculo oscuro, combinaciones de **parcialmente incompatibles**. Los últimos son mejores en contacto con deslizamiento que

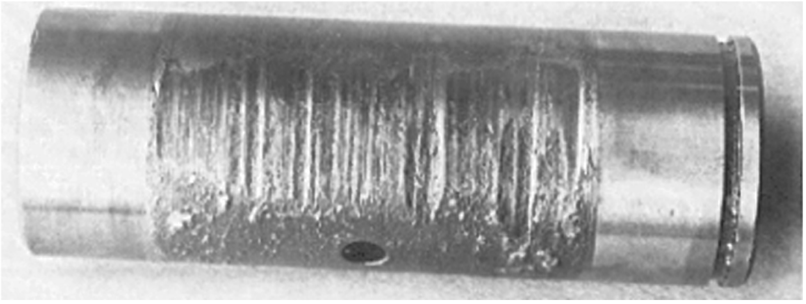


FIGURA 5-5

Desgaste adhesivo sobre un eje. Fuente: D.J. Wulpi, *Understanding How Components Fail*, Amer. Soc. for Metals: Metals Park, Ohio, 1990, con autorización

* Note que a menudo la raspadura se asocia con los dientes de engrane, los cuales experimentan típicamente una combinación de rodamiento y deslizamiento. Para estudio adicional, véase el capítulo 7.

† Algunos metales del subgrupo B que suelen ser de interés para aleaciones accesibles al rodamiento son (en orden alfabético): aluminio (Al), antimonio (Sb), bismuto (Bi), cadmio (Cd), carbono (C), cobre (Cu), plomo (Pb), silicio (Si), estaño (Sn), zinc (Zn).

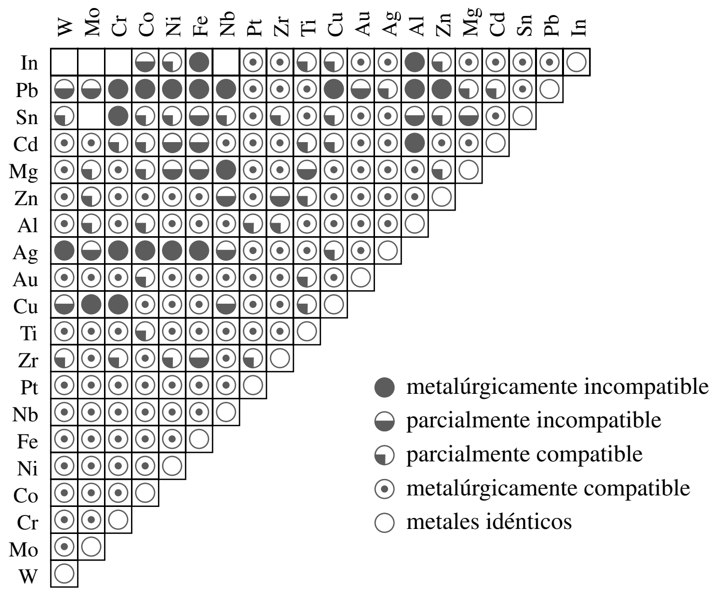


FIGURA 5-6

Gráfica de compatibilidad de pares de metales con base en diagramas de fase binarios (Adaptada de la figura 7, p. 491, E. Rabinowicz, *Wear Coefficients—Metals*, en *Wear Control Handbook*, M.B. Peterson y W.O. Winer, ed., ASME, Nueva York, 1980, con autorización)

los primeros. Los círculos sombreados por completo indican pares **incompatibles metalúrgicamente**, en los que se esperaría mejor resistencia al desgaste adhesivo que en cualquier otra combinación.

CONTAMINANTES La unión adhesiva en las asperezas únicamente sucede cuando el material está limpio y libre de contaminantes. Los contaminantes tienen la forma de óxidos, grasa de piel humana, humedad atmosférica, etcétera. Los contaminantes en este contexto también incluyen los materiales que se introducen deliberadamente en el punto de contacto, tales como recubrimientos o lubricantes. De hecho, una de las funciones principales de un lubricante es prevenir tales adhesiones y, por consiguiente, reduce la fricción y el daño superficial. Una película de lubricante aísla eficazmente los dos materiales y previene la adhesión incluso entre materiales idénticos.

ACABADO SUPERFICIAL No es necesario que las superficies sean "ásperas" para que opere el mecanismo de desgaste adhesivo. En la figura 5-1*a,* se observa que el esmerilado fino de la pieza tiene tantas asperezas para este proceso, como la superficie sin trabajar más áspera de la figura 5-1*b* (p. 351).

SOLDADURA EN FRÍO Si los materiales en contacto son metales, son compatibles y están extremadamente limpios, las fuerzas adhesivas son más altas y la fricción por deslizamiento puede generar suficiente calor en un sitio para soldar las asperezas entre sí. Si las superficies metálicas limpias tienen también un acabado con un valor de aspereza bajo (es decir, están pulidas) y, luego, se frotan entre sí (con fuerza suficiente) pueden soldarse en frío (agarrarse) con un vínculo prácticamente tan fuerte como el metal original. Este proceso se favorece si ocurre en el vacío, ya que la ausencia de aire elimina la contaminación por oxidación de la superficie. El proceso de **adhesión-rolado**, donde dos metales compatibles se sueldan entre sí en frío (al aire), al laminarlos o prensarlos juntos, bajo cargas normales altas se usa comercialmente para fabricar las láminas bimetálicas de los termostatos, así como las monedas de diez y veinticinco centavos de dólar para su bolsillo.

Ludimiento Describe la situación de una soldadura en frío incompleta donde, por cualquier motivo (usualmente por contaminación), las piezas no se sueldan totalmente. Sin embargo, porciones de la superficie tienen adherencia y causan que se transfiera material de una pieza a otra en rayas grandes visibles a simple vista. El ludimiento generalmente arruina la superficie en una pasada.

Estos factores explican los motivos que son del conocimiento general de los operarios e ingenieros experimentados: *el mismo material generalmente no debería trabajar contra sí mismo*. Existen algunas excepciones para esta regla, sobre todo para acero endurecido sobre acero endurecido; no obstante, *deben* descartarse otras combinaciones como aluminio sobre aluminio.

Coeficiente de desgaste adhesivo

En general, el desgaste es inversamente proporcional a la dureza. La razón de desgaste se determina haciendo correr un perno sobre un disco giratorio, con carga y condiciones de lubricación controladas, en una distancia de deslizamiento conocida y midiendo la pérdida de volumen. El volumen de desgaste es independiente de la velocidad de deslizamiento y se expresa como

$$V = K \frac{Fl}{H} \tag{5.7a}$$

donde $V =$ volumen de desgaste del más blando de los dos materiales, $F =$ fuerza normal, $l =$ longitud de deslizamiento, y H es la dureza de penetración en kgf/mm^2 o psi. H se expresa en unidades de dureza de Brinell (HB), Vickers (HV) u otras unidades de dureza absoluta. Se suele usar una lectura de dureza de Rockwell, si se convierte primero a una escala que tenga unidades reales. (Véase la tabla B-3, apéndice B). El factor K es el **coeficiente de desgaste** y es una propiedad adimensional del sistema deslizante. K es una función de los materiales usados y también de la situación de lubricación.

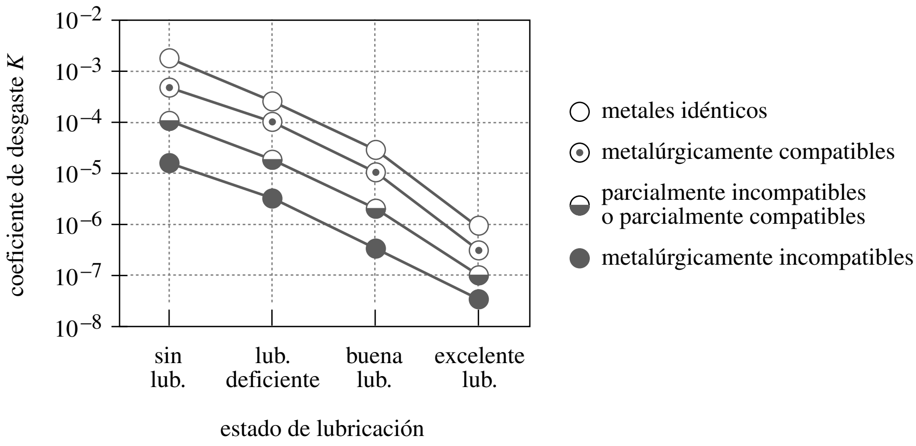
Desde el punto de vista de ingeniería, la profundidad del desgaste d puede ser de más interés que el volumen, y se escribe la ecuación 5.7a en esos términos como

$$d = K \frac{Fl}{HA_a} \tag{5.7b}$$

donde A_a es el área aparente de contacto en el punto de contacto.

Los valores de K obtenidos para los mismos materiales probados en las mismas condiciones varían por aproximadamente un factor de 2 de una prueba a otra. Esta clase de variabilidad también se observa en las pruebas para los coeficientes de fricción, los cuales tienen normalmente una desviación estándar de ±20%. Los motivos para estas variaciones no se conocen totalmente, aunque se atribuyen por lo general a la dificultad para reproducir de manera exacta las mismas condiciones superficiales de una prueba a otra.[33] A pesar de esta gran variación, es mejor tener los datos obtenidos que no tenerlos, pues son útiles para hacer estimaciones de las razones de desgaste en situaciones donde no es factible probar el diseño real.

Se han publicado tablas con valores empíricos de varias combinaciones de pares de materiales y condiciones de lubricación.[33] Mientras que es posible obtener datos de los coeficientes de desgaste para combinaciones que se aproximan a su situación particular, el número total de permutaciones posibles hace que algunas situaciones del diseño no se ajusten a los datos disponibles. La figura 5-7 muestra una gráfica general del coeficiente de desgaste K en función tanto del modo de lubricación como de las categorías de compatibilidad de Rabinowicz. El valor aproximado de K se obtiene con esta figura para cualquier situación de diseño. Se reconoce que tan sólo un programa de pruebas ofrece



5

FIGURA 5-7

Coeficiente adhesión-desgaste en función de la compatibilidad y la lubricación (Adaptado de la figura 11, p. 495, E. Rabinowicz, "Wear Coefficients-Metals", en *Wear Control Handbook*, M.B. Peterson y W.O. Winer, ed., ASME, Nueva York, 1980, con autorización)

datos de vida de desgaste con razonable precisión para un diseño. Observe que los datos de la figura 5-7 están basados en el coeficiente de desgaste asociado con la pérdida de material. También se transfiere material de uno a otro de los materiales deslizantes por la adhesión. El coeficiente de desgaste por transferencia adhesiva es aproximadamente tres veces el de la pérdida de material del sistema.[33]

5.5 DESGASTE ABRASIVO

La abrasión ocurre de dos maneras, dependiendo de que el proceso de desgaste abrasivo ocurra entre *dos o tres cuerpos*.[9] **La abrasión entre dos cuerpos** se refiere al *deslizamiento de un material áspero duro contra uno más blando*. La superficie dura escarba en el material más blando y lo remueve. Un ejemplo es una lima que se utiliza en el contorno de una pieza de metal. **La abrasión entre tres cuerpos** se refiere a la *introducción de partículas duras entre dos superficies deslizantes, donde por lo menos una de ellas es más blanda que las partículas*. Las partículas erosionan material de una o ambas superficies. El lapeado y el pulido entran en esta categoría, de modo que la **abrasión** es el *proceso de remoción de un material donde las superficies afectadas pierden masa a una velocidad controlada o no controlada*. El desgaste abrasivo también obedece la ecuación 5.7 (p. 359). Véase la figura 5-8 para tener una idea de los coeficientes de desgaste para el desgaste abrasivo. La tabla 5-2 también muestra coeficientes típicos de desgaste abrasivo.

ABRASIÓN SIN CONTROL El equipo que remueve tierra, como retroexcavadoras, niveladoras y el equipo de minería, opera en abrasión relativamente descontrolada entre

Tabla 5-2 Coeficiente de desgaste K para la abrasión

	Lima	Lija, nueva	Granos abrasivos sueltos	Pulido áspero
Superficies secas	5*E*–2	1*E*–2	1*E*–3	1*E*–4
Lubricadas	1*E*–1	2*E*–2	2*E*–3	2*E*–4

Fuente: E. Rabinowicz, "Wear coefficients—Metals", en *Wear Control Handbook*, M.B. Peterson y W.O. Winer, ed., ASME, Nueva York, 1980.

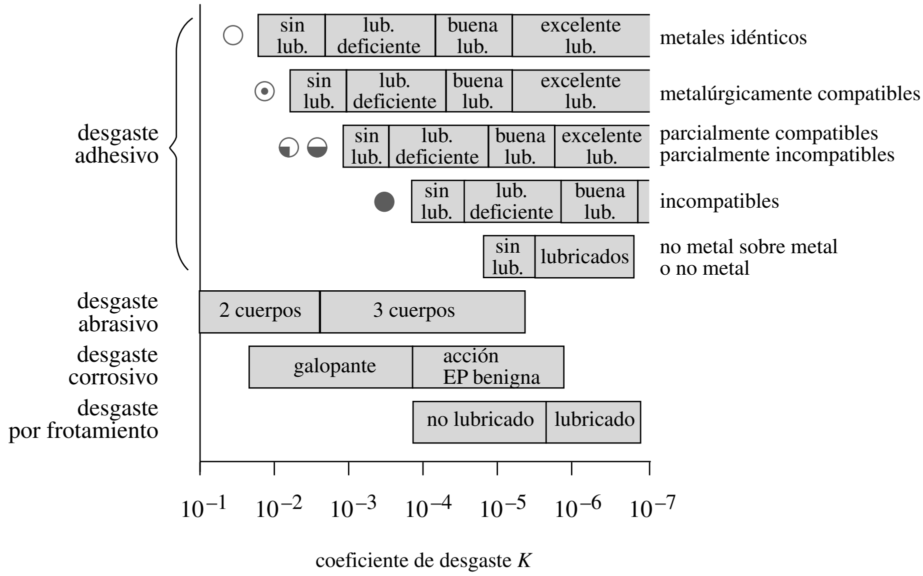
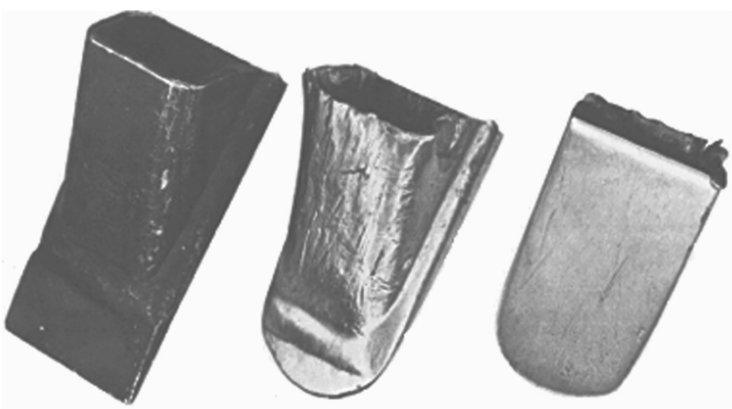


FIGURA 5-8

Coeficientes de desgaste en varias situaciones de deslizamiento Fuente: E. Rabinowicz, "Wear Coefficients-Metals", en *Wear Control Handbook*, M.B. Peterson y W.O. Winer, ed., ASME, Nueva York, 1980

tres cuerpos, ya que la excavación de tierra o minerales con frecuencia contiene materiales más duros que la superficie de acero del equipo. El silicio (arena) es el material más abundante sobre la faz de la Tierra y es más duro que la mayoría de los metales (dureza absoluta de 800 kg/mm^2). La dureza absoluta del acero dulce es tan sólo de 200 kg/mm^2, aproximadamente; sin embargo, la del acero endurecido para herramientas es tan alta como 1 000 kg/mm^2 y, por consiguiente, sobreviviría en tales aplicaciones. Por lo tanto, las limas de acero duro sirven para corroer metales más suaves, no metales e incluso vidrio (el cual es una forma de silicio). Muchas aplicaciones de diseño de



(*a*) (*b*) (*c*)

FIGURA 5-9

Diente de una retroexcavadora: (*a*) nuevo, (*b*) con desgaste abrasivo sobre la cara trasera suave, (*c*) con desgaste abrasivo sobre la cara frontal dura. Fuente: D.J. Wulpi, *Understanding How Components Fail*, Amer. Soc. for Metals: Metals Park, Ohio, 1990

máquinas requieren el manejo de materiales de producción que son abrasivos. El bombeo de concreto fresco, el molido de rocas, las excavaciones en tierra y el transporte de piezas de cerámica son ejemplos del manejo de medios abrasivos. La figura 5-9 ilustra los efectos de una abrasión sin control sobre el diente reemplazable de una retroexcavadora. Una pieza nueva (*a*) se compara con el lado desgastado del reverso (*b*) y el lado frontal (*c*) de una pieza usada. El lado frontal está hecho de acero 8640 con endurecido medio, en tanto que el reverso es acero 1010 blando.[6]

Las piezas de máquinas que operan en ambientes más limpios se pueden diseñar para minimizar o eliminar el desgaste abrasivo, mediante la selección adecuada de materiales y acabados. En dos cuerpos en contacto, los materiales duros lisos no erosionan a los blandos. Los recubrimientos de cojinetes y ejes suelen tener acabados con muy baja dureza y están fabricados con pares de materiales adecuados, como se indica en la sección 5.4. Los acabados lisos minimizan la abrasión desde el principio, y esa situación continúa a menos que se introduzcan posteriormente durante el servicio contaminantes muy duros en el punto de contacto. Un motivo para hacer el recubrimiento de los rodamientos de materiales blandos (trabajando contra ejes duros) es facilitar la incrustación, en el material de rodamiento blando, de cualquier partícula dura que se abra camino hacia el rodamiento. Luego, las partículas son atrapadas (enterradas) en el material blando y se minimiza el daño potencial sobre el eje. Las partículas pueden entrar al rodamiento, ya sea como contaminantes externos en el lubricante o como productos de la oxidación generada dentro del rodamiento. Los óxidos de hierro son más duros que el acero que los genera y erosionan el eje. Si se usa lubricación hidrostática (en la cual el lubricante circula activamente; véase el capítulo 7), entonces se debe filtrar el lubricante para eliminar cualquier partícula que entre en el sistema. Un rodamiento lubricado hidrostáticamente diseñado de forma adecuada no debería experimentar desgaste abrasivo si tiene suficiente lubricante limpio.

ABRASIÓN CONTROLADA Además del diseño de sistemas para eliminar la abrasión, los ingenieros también los diseñan para *crear* desgaste abrasivo controlado. La abrasión controlada se usa ampliamente en los procesos de manufactura. Dos cuerpos **esmerilados** constituyen quizás el caso más común donde un medio abrasivo, como el carburo de silicio (carborundo), se fuerza contra la parte con altas velocidades de deslizamiento, para remover material y controlar el tamaño y el acabado. Con frecuencia se usa un refrigerante tanto para proteger el material de un tratamiento térmico indeseable, como para mejorar el proceso de abrasión. La humedad incrementa la razón de abrasión en casi un 15% en relación con la abrasión en seco.[10] El papel y la tela abrasivos brindan un recurso para aplicar un medio abrasivo a superficies curvas compuestas. Los disparos o chorros de arena son un ejemplo de erosión, donde un cuerpo es la arena y el otro es la superficie que se va a erosionar o a corroer.

En manufactura, un ejemplo común de abrasión controlada entre tres cuerpos es el **proceso de molino de frotación**, en el cual las piezas se colocan sobre un tambor junto con algunas partículas abrasivas y, luego, se hacen girar juntas. Después, las piezas se frotan (rozan) y rebotan entre sí en la mezcla abrasiva. El resultado es la remoción de rebabas y extremos afilados, así como un pulido general de todas las superficies expuestas. Otro ejemplo es el proceso de **pulido de superficies**, el cual requiere el uso de partículas duras muy finas atrapadas entre un material relativamente fino y ajustable (como tela) y la superficie que se va a pulir. Las velocidades relativas son altas y frecuentemente se agrega humedad.

TAMAÑO DE LAS PARTÍCULAS Éste afecta la eficiencia de un proceso de abrasión. Existe un umbral en el tamaño de la partícula para cualquier situación, arriba del cual la abrasión continúa rápidamente, pero abajo del cual la velocidad de desgaste disminuye. Se cree que la velocidad de desgaste es más baja cuando las partículas erosionadas de la pieza que se trabaja son tan grandes, o más grandes, que las partículas abrasivas. En esos casos, impiden que los abrasivos se introduzcan en la pieza de trabajo.

Materiales abrasivos

Los dos requerimientos de un abrasivo son la dureza y lo afilado. El abrasivo debe ser más duro que el material a desgastar. Una dureza excesiva, más allá del 150% de la dureza de la pieza que se trabaja, no incrementa la velocidad de desgaste, sin embargo, prolonga la "vida cortante" útil del abrasivo, el cual con el tiempo pierde su habilidad para cortar.[11] El corte se logra usando materiales frágiles que se rompan en partículas filosas. Las clases de materiales que mejor cumplen con estos dos criterios son las cerámicas y los no metales duros. La mayoría de los abrasivos comerciales son de estos tipos. La tabla 5-3 incluye algunos materiales abrasivos comunes y su dureza. El óxido de aluminio (corundo) y el carburo de silicio (carborundo) son los más usados debido a la combinación favorable de su relativamente alta dureza y bajo costo. El carburo de boro y el diamante se utilizan en aplicaciones que requieren los materiales más duros, aunque ambos son costosos.

Materiales con resistencia a la abrasión

Algunos materiales de ingeniería se adaptan mejor que otros a las aplicaciones de desgaste por abrasión, basados principalmente en su dureza. Sin embargo, junto con la dureza por lo general viene la fragilidad y, por consiguiente, su resistencia al impacto o a cargas de fatiga podría ser menor que lo óptimo. La tabla 5-4 muestra la dureza de algunos materiales que son adecuados para aplicaciones de desgaste abrasivo.

Recubrimientos Algunos materiales cerámicos se rocían como plasma sobre sustratos metálicos, con la finalidad de obtener una cara endurecida que también tiene alta resistencia química y a la corrosión. Estos recubrimientos de plasma rociado son bastante ásperos encima de la aplicación (como una cáscara de naranja muy pintada), y por ello deben esmerilarse con diamante para lograr un acabado adecuado para una junta deslizante. Estos recubrimientos también son muy frágiles y en ocasiones se desprenden del sustrato si se sobrecargan térmica o mecánicamente.

Observe que el óxido de aluminio se puede crear de manera controlada sobre aluminio por anodización y tiene un acabado tan bueno como el sustrato. La llamada anodización dura es simplemente un recubrimiento anodizado más grueso que el usado para la protección de la corrosión y, en general, se usa para proteger piezas de aluminio en condiciones de desgaste abrasivo. (Véase la sección B.5 en el apéndice B).

Tabla 5-3 Materiales usados como abrasivos

Material	Composición	Dureza (kg/mm^2)
Diamante	C	8 000
Carburo de boro	B_4C	2 750
Carborundo (carburo de silicio)	SiC	2 500
Carburo de titanio	TiC	2 450
Corundo (alúmina)	Al_2O_3	2 100
Carburo de circonio	ZrC	2 100
Carburo de tungsteno	WC	1 900
Granate	Al_2O_3 3FeO $3SiO_2$	1 350
Zirconio	ZrO_2	150
Cuarzo, sílice, arena	SiO_2	800
Vidrio	Silicato	≅ 500

Fuente: E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, 1965, reimpreso con autorización de John Wiley & Sons, Inc., Nueva York

Tabla 5-4 Materiales resistentes a la abrasión

Material	Dureza (kg/mm^2)	Desgaste relativo
Carburo de tungsteno (aglomerado)	1 400-1 800	0.5-5
Hierro fundido blanco al alto cromo		5-10
Acero para herramientas	700-1 000	20-30
Acero para cojinetes	700-950	
Cromo (por electrólisis)	900	
Acero carburado	900	20-30
Acero nitrurado	900-1 250	20-30
Hierro blanco perlítico		25-50
Acero austenítico al manganeso		30-50
Acero perlítico de baja aleación (0.7%C)	480	30-60
Acero perlítico sin aleación (0.7%C)	300	50-70
Acero al bajo carbono (0.2%C) normalizado o rolado		100

Fuente: E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, 1965, reimpreso con autorización de John Wiley & Sons, Inc., Nueva York. T.E. Norman, *Abrasive Wear of Metals, en Handbook of Mechanical Wear*, C. Lipson, ed., U. Mich. Press, 1961

5

5.6 DESGASTE POR CORROSIÓN

CORROSIÓN Ocurre en ambientes normales en casi todos los materiales excepto los llamados nobles, por ejemplo, oro, platino, etcétera. La forma más común de corrosión es la oxidación. La mayoría de los metales reaccionan con el oxígeno del aire o del agua para formar óxidos. En algunos materiales, como el aluminio, la oxidación se autolimita en la medida en que la superficie permanece sin perturbaciones. El aluminio en el aire forma gradualmente una capa de óxido hasta un grosor de 0.02 μm, punto donde la reacción cesa porque la película de óxido de aluminio sin poros sella el sustrato, impidiendo el contacto con el oxígeno del aire. (Éste es el principio de anodización, el cual crea una capa de óxido de aluminio uniforme y de espesor controlado sobre la pieza, antes de ponerla en servicio). Las aleaciones de hierro, por otro lado, forman una película de óxido discontinua y porosa que se descama fácilmente por sí misma para exponer nuevo sustrato del material. La oxidación continúa hasta que todo el hierro se convierte en óxidos. Las temperaturas elevadas incrementan de forma considerable la velocidad de las reacciones químicas.

DESGASTE POR CORROSIÓN Agrega al ambiente químicamente corrosivo un quebrantamiento mecánico en la capa superficial debido al contacto por deslizamiento o rodamiento entre dos cuerpos. La superficie de contacto puede actuar para romper la película de óxido (o cualquier otra) y exponer sustrato nuevo a los elementos reactivos, incrementando así la rapidez de la corrosión. Si los productos de la reacción química son duros y frágiles (como los óxidos), las escamas de esta capa se pueden volver partículas sueltas en el punto de contacto y contribuir a otras formas de desgaste como la abrasión. Véase la figura 5-8 (p. 361) para información de coeficientes de desgaste por corrosión.

Algunos productos de la reacción de los metales, como los cloruros metálicos, los fosfatos y los sulfuros, son más blandos que el sustrato de metal y no son frágiles. Estos productos de la corrosión llegan a actuar como contaminantes benéficos para reducir el desgaste adhesivo al bloquear la adhesión de las asperezas del metal. Éste es el motivo por el cual se agregan compuestos que contienen cloro, azufre y otros agentes reactivos de aceites de presión extrema. La estrategia consiste en intercambiar una mayor rapidez y más dañina de desgaste adhesivo, por una velocidad baja de desgaste corrosivo sobre

las superficies metálicas, como dientes de engranes y levas, los cuales pueden tener lubricación deficiente debido a lo complicado de su geometría.

Fatiga por corrosión

En el capítulo 4 se analizan con detalle los mecanismos de mecánica de la fractura y falla por fatiga; también se menciona brevemente el fenómeno llamado con frecuencia fatiga por corrosión o esfuerzo de corrosión. Este mecanismo no está aún cabalmente comprendido; no obstante, la evidencia empírica de sus resultados es fuerte e inequívoca. Cuando una pieza se esfuerza en un ambiente corrosivo, el proceso de corrosión se acelera y la falla sucede más rápido de lo que se esperaría si sólo actuara el estado de esfuerzos o el proceso de corrosión.

Los esfuerzos estáticos son suficientes para acelerar el proceso de corrosión. La combinación del esfuerzo y el ambiente corrosivo tiene un efecto sinérgico y el material se corroe más rápidamente que cuando carece de esfuerzos. Esta combinación de esfuerzo estático y corrosión se denomina **corrosión por esfuerzo**. Si a la pieza *se le aplican esfuerzos cíclicos en un ambiente corrosivo*, la grieta crecerá más rápidamente que con los efectos de un solo factor. Esto se llama **fatiga por corrosión**. Mientras que la frecuencia del esfuerzo cíclico (al contrario del número de ciclos) parecería no tener un efecto nocivo en el crecimiento de la grieta en un ambiente no corrosivo, en presencia de un ambiente corrosivo sí lo tiene. Las menores frecuencias cíclicas dan al ambiente más tiempo para actuar sobre la punta de la grieta estresada, mientras está abierta por el esfuerzo de tensión; esto incrementa sustancialmente la velocidad de crecimiento de la grieta. Véase las figuras 4-30 a 4-32 (pp. 265-266) y su análisis en el capítulo 4 para mayor información sobre este fenómeno.

5

Corrosión por frotamiento

Cuando dos superficies metálicas están en contacto profundo —como un sujetador con ajuste forzado o una abrazadera—, uno no esperaría que hubiera corrosión severa en el punto de contacto, sobre todo si se encuentran en el aire ambiental. Sin embargo, esta clase de contactos están sometidos a un fenómeno llamado **corrosión por frotamiento** (o **frotamiento**) que llega a causar una pérdida significativa de material en el punto de contacto. Aun cuando no sea posible tener movimientos de deslizamiento evidentes en tales situaciones, incluso las pequeñas deflexiones (del orden de milésimas de pulgada) son suficientes para causar desgaste. Las vibraciones son otra posible fuente de movimientos pequeños de desgaste.

Se cree que el mecanismo de frotamiento es una combinación de abrasión, adhesión y corrosión.[12] Las superficies expuestas se oxidarán con el aire; sin embargo, la rapidez se reducirá conforme el óxido formado sobre la superficie bloquea gradualmente el contacto del sustrato con la atmósfera. Como se vio antes, algunos metales realmente limitan por sí mismos su oxidación si se mantienen sin perturbaciones. La presencia de vibraciones o deflexiones mecánicas repetidas tiende a perturbar la capa de óxido raspándolo y exponiendo el nuevo metal base al oxígeno. Esto provoca la adhesión de asperezas del metal “limpio” entre las piezas y también brinda un medio abrasivo en forma de partículas de óxido duro en el punto de contacto de los tres cuerpos en abrasión. Todos estos mecanismos suelen reducir lentamente el volumen sólido de los materiales y generar “polvo” del material oxidado/erosionado. Con el tiempo, podría ocurrir una pérdida significativa de las dimensiones en el punto de contacto. En otros casos, el resultado sería tan sólo una ligera decoloración de las superficies o una adhesión similar al ludimiento. ¡Todo esto por una junta que no se diseñó para movimiento relativo y probablemente fue ideada por el diseñador como rígida! Desde luego, nada es realmente rígido, y el frotamiento es la evidencia de que los movimientos microscópicos son

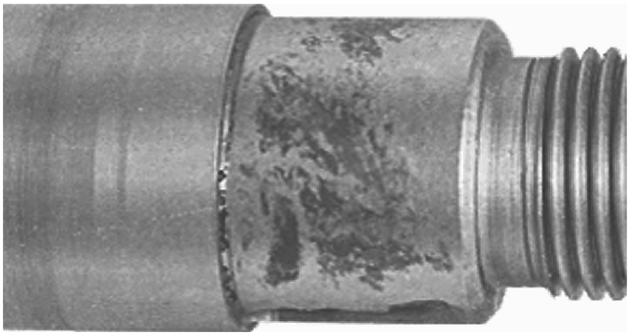


FIGURA 5-10

Desgaste por frotamiento sobre un eje debajo del cubo con ajuste forzado Fuente: D.J. Wulpi, *Understanding How Components Fail*, Amer. Soc. for Metals: Metals Park, Ohio, 1990

suficientes para provocar desgaste. La figura 5-10 ilustra el desgaste por frotamiento sobre un eje donde el cubo fue ajustado a presión.[6] Véase la figura 5-8 (p. 361) para información de coeficientes de desgaste por picadura.

Algunas técnicas que han demostrado reducir el desgaste por frotamiento son la reducción de las deflexiones (es decir, los diseños más duros o las abrazaderas más apretadas), así como la incorporación de lubricantes secos o fluidos en la junta, que actúen como barrera contra el oxígeno y como reductores de la fricción. La incorporación de una junta, especialmente una con gran elasticidad (como de caucho) para absorber las vibraciones, ha demostrado ser muy útil. Superficies más duras y más lisas sobre las piezas de metal son más resistentes a la abrasión y reducen el daño por frotamiento. Algunas veces se usan placas resistentes a la corrosión, como el cromo. El mejor método (impráctico en la mayoría de los casos) es eliminar el oxígeno mediante la operación en vacío o en la atmósfera de un gas inerte.

5.7 FATIGA SUPERFICIAL

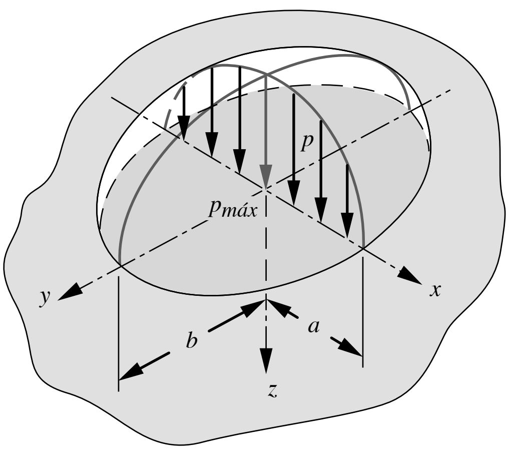
Todos los modos de falla superficial estudiados antes se aplican a situaciones donde los movimientos relativos entre las superficies son básicamente deslizamiento puro. Cuando dos superficies están en contacto de **rodamiento puro**, o sobre todo rodamiento combinado con un pequeño porcentaje de deslizamiento, ocurre un mecanismo de falla superficial diferente, llamado **fatiga superficial**. Existen muchas aplicaciones de este caso: cojinetes de bolas y de rodillos, levas con seguidores de rodillos, rodillos de presión y dientes de engranes rectos o helicoidales. Todos, con excepción de los dientes de engranes y los rodillos de presión, tienen por lo común rodamiento puro con tan sólo un 1% aproximadamente de deslizamiento. Los dientes de engranes tienen un deslizamiento significativo en las piezas de contacto del diente, lo cual cambia significativamente el estado de esfuerzos comparado con los casos de rodamiento puro, como se verá más adelante. Otros tipos de engranes como los cónicos en espiral, los hipoidales y los conjuntos de engranes tipo tornillo sinfín tienen básicamente deslizamiento puro en sus puntos de contacto y aplican uno o más de los mecanismos de desgaste ya estudiados. Los rodillos de presión (como los que se usan para rolar hojas de acero) trabajan con deslizamiento o sin éste, dependiendo de su objetivo.

Los esfuerzos introducidos en dos materiales en contacto en el punto de contacto del rodamiento dependen bastante de la geometría de las superficies en contacto, así como de la carga y de las propiedades del material. El caso general permite cualquier geometría

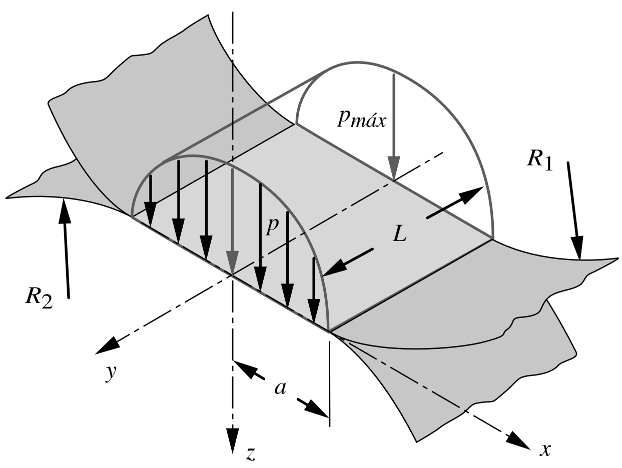
tridimensional de los elementos en contacto y, como es de esperarse, su cálculo resulta más complejo. Dos casos de geometría especial son de interés práctico y también son un poco más fáciles de analizar. Éstos son *esfera sobre esfera* y *cilindro sobre cilindro*. En todos los casos, los radios de curvatura de las superficies en contacto son factores significativos. Variando los radios de curvatura de una de las superficies, estos casos especiales se amplían hasta incluir los subcasos de *esfera sobre un plano*, *esfera en copa*, *cilindro sobre un plano* y *cilindro en canal*. Sólo es necesario hacer infinitos los radios de curvatura de un elemento para obtener un plano; los radios de curvatura negativos definen una copa cóncava o la superficie cóncava de un contenedor. Por ejemplo, algunos cojinetes de bolas se pueden modelar como una *esfera sobre un plano;* y algunos cojinetes de rodillos, como *cilindros en canal*.

Conforme la bola pasa sobre otra superficie, la huella de contacto teórica es un punto con dimensión igual a cero. Un rodillo contra una superficie cilíndrica o plana teóricamente hace contacto a lo largo de una línea de ancho igual a cero. Como el área de cada una de estas geometrías de contacto teórico es cero, cualquier fuerza aplicada creará entonces un esfuerzo infinito. Pero se sabe que esto no puede ser verdad, ya que los materiales fallarían instantáneamente. De hecho, los materiales deben flexionarse para tener suficiente área de contacto para soportar la carga de algún esfuerzo finito. Esta flexión crea una distribución semielipsoidal de la presión sobre la huella de contacto. En el caso general, la huella de contacto es elíptica, como se muestra en la figura 5-11*a*. Las esferas tienen una huella de contacto circular y los cilindros crean una huella de contacto rectangular, como se indica en la figura 5-11*b*.

Considere el caso de una bola esférica que rueda en línea recta sin deslizamiento contra una superficie plana y bajo una carga normal constante. Si la carga esfuerza el material sólo por debajo de su punto de fluencia, la flexión en la huella de contacto es elástica y la superficie regresará a su geometría curva original, después de pasar por el contacto. La misma huella sobre la bola hará contacto nuevamente con la superficie en cada revolución subsiguiente. Los esfuerzos resultantes en la huella de contacto se llaman **esfuerzos de contacto o esfuerzos hertzianos**. Los esfuerzos de contacto en este pequeño volumen de la bola son **repetidos** de acuerdo con la frecuencia de rotación de la bola. Esto crea un escenario de carga-fatiga que a final de cuentas llevará a la **superficie a una falla por fatiga**.



(a) Distribución elipsoidal de la presión en el caso general de contacto, para contacto esférico donde $a = b$



(b) Prisma elipsoidal de distribución de la presión, para contacto cilíndrico

FIGURA 5-11

Distribución de la presión y zonas de contacto en los contactos esférico, cilíndrico y casos generales hertzianos

Esta carga repetida es similar al caso de carga de fatiga por tensión mostrado en la figura 4-1*b* (p. 234). La diferencia principal en este caso es que los esfuerzos de contacto principales en el centro de la huella de contacto son todos de compresión, no de tensión. Recuerde del capítulo 4 que las fallas por fatiga se inician por el esfuerzo cortante y continúan hacia la falla por el esfuerzo de tensión. También existe un esfuerzo cortante asociado con los esfuerzos de contacto por compresión y se cree que es la causa de la formación de la grieta después de muchos ciclos de esfuerzo. De esta manera, el crecimiento de la grieta finalmente causa la falla por **picadura**: *la fractura y remoción de pequeños trozos de material de la superficie*. Una vez que la superficie comienza a picarse, el acabado superficial cede y rápidamente llega a la falla por **descascarado**: *la pérdida de grandes pedazos de la superficie*.* La figura 5-12 muestra algunos ejemplos de superficies picadas y descascarado.

5

Si la carga es lo suficientemente grande como para elevar el esfuerzo de contacto por encima de la resistencia a la fluencia por compresión del material, entonces la flexión en la huella de contacto creará un aplanamiento permanente en la bola. Esta condición algunas veces se llama **endurecimiento falso**, debido a su semejanza con la hendidura dejada por una prueba Brinell de dureza del material. El aplanamiento sobre una de las bolas (o rodillos) hace que la bola (o rodillo) quede inútil para el rodamiento.

Ahora se investigarán geometrías de la huella de contacto, distribuciones de la presión, esfuerzos y deformaciones en contactos por rodamiento, iniciando con la geometría relativamente simple de la *esfera sobre esfera*; luego, se tratará el caso del *cilindro sobre cilindro* y, finalmente, se analizará el caso *general*. La deducción de las ecuaciones para estos casos se encuentra entre los conjuntos de ejemplos más complejos en la teoría de elasticidad. En 1881, Hertz dedujo por primera vez las ecuaciones para área de contacto, deformación, distribución de la presión y esfuerzo de contacto sobre la línea central de dos cuerpos con carga estática.[13] Un texto en inglés de lo anterior se encuentra en la referencia 14. Desde luego, muchos otros han hecho adiciones para la comprensión de este problema.[15],[16],[17],[18]

* De acuerdo con Ding y Gear[36]

… en la literatura no hay una definición unificada para distinguir de manera consistente el picado del esquirlado. En la mayoría de los textos se usan indistintamente los términos picado, esquirlado, o algunas veces micropicado; sin embargo, una minoría de la literatura utiliza los términos picado, micropicado y esquirlado para designar los diferentes niveles de severidad de la fatiga en la superficie de contacto. Tallian define el esquirlado como la fatiga por contacto a macroescala causada por la propagación de la grieta, y reserva el picado para el daño superficial causado por fuentes diferentes a la propagación de la grieta. Uno de los motivos de la confusión se debe probablemente a que aún no se identifica la causa física del picado y descascarado. Con el objetivo de estudiar el asunto sobre terreno firme, Ding define el picado y el descascarado (como sigue). El picado se toma como la formación de cráteres poco profundos [≤ 10 μm] desarrollados principalmente por defectos de la superficie; mientras que se considera que el descascarado lo constituyen cavidades más profundas desarrolladas sobre todo por defectos de la subsuperficie.

5.8 CONTACTO ESFÉRICO

En la figura 5-13 se presentan las secciones transversales de dos esferas en contacto. Las líneas punteadas indican las posibilidades de que una esté plana o tenga una concavidad. La diferencia estriba tan sólo en la magnitud o el signo del radio de curvatura (convexo +, cóncavo −). La figura 5-11*a* (p. 367) ilustra la distribución general semielipsoidal de la presión sobre la huella de contacto. Para una esfera sobre una esfera, existirá un hemisferio con una huella de contacto circular ($a = b$).

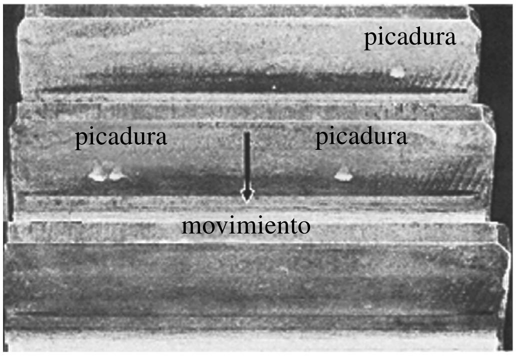
Presión de contacto y huella de contacto en contacto esférico

La presión de contacto es máxima $p_{máx}$ en el centro y cero en el borde. La carga total aplicada F sobre la huella de contacto es igual al volumen del hemisferio:

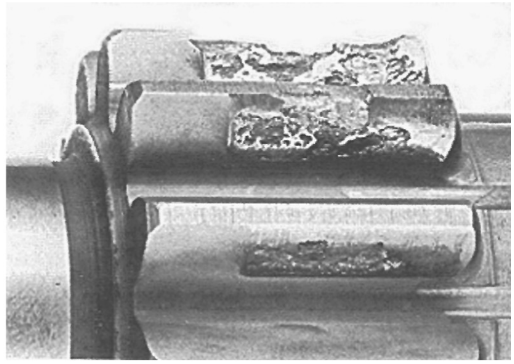
$$F = \frac{2}{3}\pi a^2 p_{máx} \tag{5.8a}$$

donde a es la mitad del ancho (radio) de la huella de contacto. Esto se resuelve despejando la presión máxima:

$$p_{máx} = \frac{3}{2}\frac{F}{\pi a^2} \tag{5.8b}$$



(a) Picadura moderada en dientes de engrane



(b) Picadura severa, descascarado y desintegración de los dientes del engrane

FIGURA 5-12

Ejemplos de superficies que fallaron por picadura y descascarado debido a fatiga superficial Fuente: J.D. Graham, *Pitting of Gear Teeth*, en *Handbook of Mechanical Wear*, C. Lipson, ed., U. Mich. Press, 1961, pp. 138, 143, con autorización

La presión promedio sobre la huella de contacto es la fuerza aplicada dividida entre su área:

$$p_{prom} = \frac{F}{area} = \frac{F}{\pi a^2} \tag{5.8c}$$

y sustituyendo la ecuación 5.8*c* en la ecuación 5.8*b*:

$$p_{máx} = \frac{3}{2} p_{prom} \tag{5.8d}$$

Ahora se definirán las *constantes del material* para las dos esferas

$$m_1 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \qquad m_2 = \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \tag{5.9a}$$

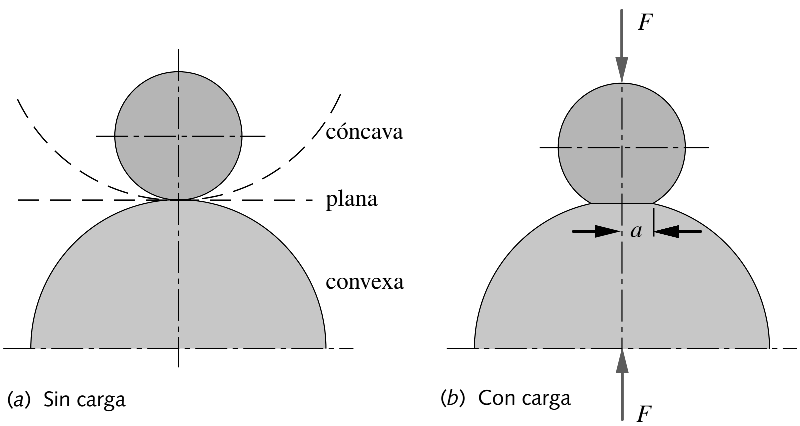


FIGURA 5-13

Zona de contacto de dos esferas o dos cilindros

donde E_1, E_2 y v_1, v_2 son los módulos de Young y las razones de Poisson para los materiales de la esfera 1 y la esfera 2, respectivamente.

Las dimensiones del área de contacto son usualmente muy pequeñas comparadas con los radios de curvatura de los cuerpos, lo cual permite que los radios se consideren constantes en el área de contacto, sin importar las pequeñas deformaciones que ocurran ahí. Ahora se define una *geometría constante* que sólo depende de los radios R_1 y R_2 de las dos esferas,

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{5.9b}$$

Para considerar el caso de una esfera sobre un plano, R_2 se vuelve infinito haciendo $1/R_2 = 0$. Para una esfera en una copa, R_2 se vuelve negativo. (Véase la figura 5-13, p. 369). De otro modo, R_2 es finito y positivo, como R_1.

El radio a de la huella de contacto se determina entonces de

$$a = \frac{\pi}{4} p_{máx} \frac{m_1 + m_2}{B} \tag{5.9c}$$

Sustituyendo la ecuación 5.8*c* en 5.9*c*:

$$a = \frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{2}\frac{F}{\pi a^2}\right)\frac{m_1 + m_2}{B}$$

$$a = \sqrt[3]{0.375 \frac{m_1 + m_2}{B} F} \tag{5.9d}$$

La distribución de la presión dentro del hemisferio es

$$p = p_{máx}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}} \tag{5.10}$$

Se puede normalizar la presión p con la magnitud p_{prom} y la dimensión x o y de la huella con el radio a de la huella y, luego, graficar la distribución de la presión normalizada a través de la huella, lo cual dará como resultado una elipse como la de la figura 5-14.

Distribuciones del esfuerzo estático en el contacto esférico

La presión sobre la huella de contacto origina un estado de esfuerzo tridimensional en el material. Los tres esfuerzos aplicados σ_x, σ_y y σ_z son de compresión y son máximos sobre la superficie de la esfera, en el centro de la huella. Tales esfuerzos disminuyen rápida y no linealmente con la profundidad y con la distancia desde el eje de contacto. Se conocen como **esfuerzos hertzianos** en honor a su descubridor. La deducción completa de estas ecuaciones se encuentra en la referencia 19. Observe que estos esfuerzos, aplicados en las direcciones x, y y z, también son los esfuerzos principales en este caso. Si se ve cómo varían dichos esfuerzos a lo largo del eje z (con z creciendo hacia el interior del material), se tiene

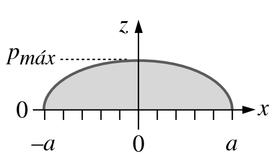


FIGURA 5-14

Distribución de la presión sobre la huella de contacto

$$\sigma_z = p_{máx}\left[-1 + \frac{z^3}{\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}}\right] \tag{5.11a}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{p_{máx}}{2}\left[-(1+2\nu)+2(1+\nu)\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)-\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)^3\right] \qquad (5.11b)$$

Se toma la razón de Poisson para la esfera que nos interesa en este cálculo. Tales esfuerzos normales (y principales) son máximos en la superficie, donde $z = 0$:

$$\sigma_{z_{máx}} = -p_{máx} \qquad (5.11c)$$

$$\sigma_{x_{máx}} = \sigma_{y_{máx}} = -\frac{1+2\nu}{2}p_{máx} \qquad (5.11d)$$

Existe también un esfuerzo cortante principal inducido por los esfuerzos normales principales:

$$\tau_{13} = \frac{p_{máx}}{2}\left[\frac{(1-2\nu)}{2}+(1+\nu)\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)^3\right] \qquad (5.12a)$$

el cual no es máximo en la superficie, sino a una pequeña distancia $z_{@\tau_{máx}}$ debajo de la superficie.

$$\tau_{13_{máx}} = \frac{p_{máx}}{2}\left[\frac{(1-2\nu)}{2}+\frac{2}{9}(1+\nu)\sqrt{2(1+\nu)}\right] \qquad (5.12b)$$

$$z_{@\tau_{máx}} = a\sqrt{\frac{2+2\nu}{7-2\nu}} \qquad (5.12c)$$

La figura 5-15 muestra la gráfica de los esfuerzos normales principales y cortante máximo, en función de la profundidad z a lo largo del radio de la esfera. Los esfuerzos están normalizados con la presión máxima $p_{máx}$, en tanto que la profundidad está normalizada por la mitad del ancho a de la huella de contacto. Esta gráfica proporciona una imagen adimensional de la distribución de esfuerzo sobre la línea central en un contacto esférico. Note que todos los esfuerzos disminuyen hasta $<10\%$ de $p_{máx}$ dentro de $z = 5a$. Se observa también la ubicación del esfuerzo cortante máximo debajo de la superficie. Si ambos materiales son acero, esto ocurre a una profundidad aproximada de $0.63a$ y su magnitud es de alrededor de $0.34p_{máx}$. El esfuerzo cortante es de aproximadamente $0.11p_{máx}$ en la superficie sobre el eje z.

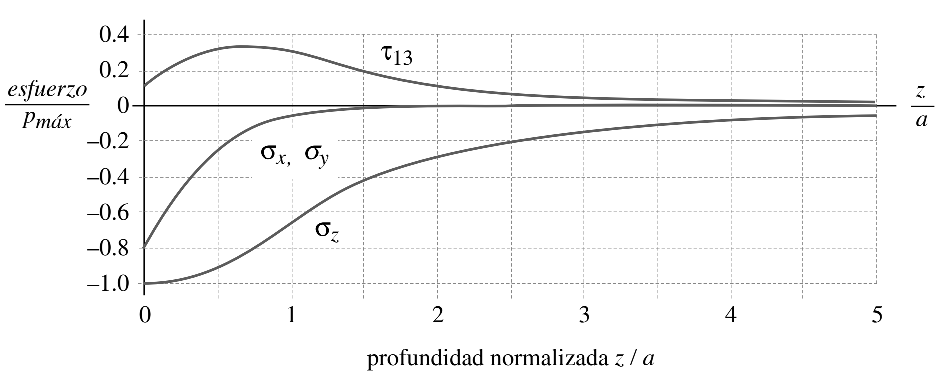


FIGURA 5-15

Distribución de esfuerzo normalizada a lo largo del eje z en el contacto esférico estático; los esfuerzos xyz son principales

Algunos creen que la ubicación del esfuerzo cortante máximo debajo de la superficie es un factor importante en la falla de fatiga superficial. La teoría indica que las grietas que inician debajo de la superficie finalmente crecen hasta el punto en que el material arriba de la grieta se rompe hasta formar la picadura, como se muestra en la figura 5-12 (p. 369). Otra evidencia sugiere que las grietas algunas veces se inician en la superficie.

La figura 5-16 muestra un modelo fotoelástico de los esfuerzos de contacto en una leva inmediatamente debajo de un rodillo seguidor cargado.[20] El análisis experimental del esfuerzo fotoelástico usa un modelo físico de la pieza que se está analizando, hecho de material plástico transparente (Lexan, en este ejemplo), que muestra los contornos de esfuerzos de magnitud constante cuando se somete a carga y se observa con luz polarizada. El esfuerzo cortante máximo se distingue con claridad a corta distancia del interior de la leva, directamente debajo del seguidor. Mientras que éste es un contacto cilíndrico en vez de un contacto esférico, las distribuciones de esfuerzos a lo largo de una línea central son similares, como se verá en la siguiente sección.

Cuando se mueve afuera de la línea central de la huella de contacto sobre la superficie de la esfera, los esfuerzos disminuyen. En el borde de la huella, el esfuerzo radial σ_z es cero, aunque existe una condición de esfuerzo cortante puro de magnitud:

$$\tau_{xy} = \frac{1-2\nu}{3} p_{máx} \tag{5.13a}$$

Trace el círculo de Mohr para el caso de cortante puro. Los dos esfuerzos principales diferentes de cero son $\pm\tau_{xy}$, lo cual significa que en ese punto también hay un esfuerzo de tensión igual a

$$\sigma_{1_{borde}} = \frac{1-2\nu}{3} p_{máx} \tag{5.13b}$$

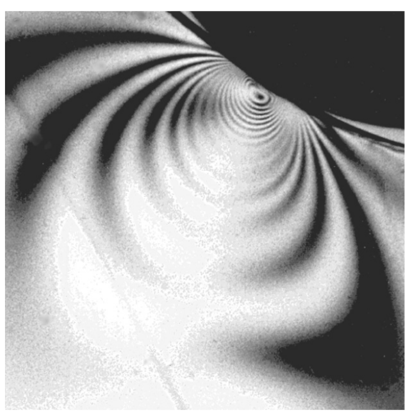


FIGURA 5-16

Análisis fotoelástico de los esfuerzos de contacto debajo del seguidor de la leva Fuente: V.S. Mahkijani, *Study of Contact Stresses as Developed on a Radial Cam Using Photoelastic Model and Finite Element Analysis*. M. S. Thesis, Worcester Polytechnic Institute, 1984

EJEMPLO 5-1

Esfuerzos en un cojinete de bolas de empuje

Problema **Una bola en un cojinete de empuje de siete bolas está cargada axialmente de un extremo a otro de sus carreras a través de las bolas. ¿Cuál es el tamaño de la huella de contacto sobre una carrera? ¿Cuáles son los esfuerzos desarrollados en las bolas y sus carreras? ¿Cuál es la profundidad del esfuerzo cortante máximo en la bola?**

Se proporciona **Las siete bolas esféricas miden 10 mm (0.394 in) de diámetro y las carreras son planas. Todas las piezas son de acero endurecido. La carga axial es de 151 lb o 21.5 lb por bola.**

Suposiciones **Las siete bolas comparten la carga en piezas iguales. La velocidad de giro es lo suficientemente baja como para que se considere un problema de carga estática.**

5

Solución

1. Primero se necesitará determinar el tamaño de la huella de contacto, para lo cual se debe obtener la constante de geometría y las constantes del material, a partir de las ecuaciones 5.9*a* y *b* (pp. 369-370).

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0.197} + \frac{1}{\infty}\right) = 2.54 \qquad (a)$$

Observe el radio de curvatura infinito para R_2.

$$m_1 = m_2 = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} = \frac{1 - 0.28^2}{3E7} = 3.072E-8 \qquad (b)$$

Note que ambos materiales son iguales en este ejemplo. Las constantes del material y de la geometría se pueden usar ahora en la ecuación 5.9*d* (p. 370).

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{8}\frac{m_1 + m_2}{B}F} = \sqrt[3]{0.375\frac{2(3.072E-8)}{2.54}21.5} = 0.0058 \text{ in} \qquad (c)$$

donde *a* es la mitad del ancho (el radio) de la huella de contacto. El área de la huella circular de contacto es entonces

$$\acute{a}rea = \pi a^2 = \pi\left(0.0058^2\right) = 1.057E-4 \text{ in}^2 \qquad (d)$$

2. Las presiones de contacto promedio y máxima se calculan ahora con las ecuaciones 5.8*c* y *d* (p. 369).

$$p_{prom} = \frac{F}{\acute{a}rea} = \frac{21.5}{1.057E-4} = 203\,587 \text{ psi} \qquad (e)$$

$$p_{m\acute{a}x} = \frac{3}{2}p_{prom} = \frac{3}{2}(203\,587) = 305\,381 \text{ psi} \qquad (f)$$

3. Los esfuerzos normales máximos en el centro de la huella de contacto en la superficie se determinan con las ecuaciones 5.11*c* y *d* (p. 371).

$$\sigma_{z_{m\acute{a}x}} = -p_{m\acute{a}x} = -305\,381 \text{ psi} \qquad (g)$$

$$\sigma_{x_{m\acute{a}x}} = \sigma_{y_{m\acute{a}x}} = -\frac{1 + 2\nu}{2}p_{m\acute{a}x} = -\frac{1 + 2(0.28)}{2}(305\,381) = -238\,197 \text{ psi} \qquad (h)$$

4. El esfuerzo cortante máximo y su ubicación debajo de la superficie se calculan con las ecuaciones 5.12*b* y *c* (p. 371).

$$\tau_{yz_{máx}} = \frac{p_{máx}}{2}\left[\frac{(1-2\nu)}{2} + \frac{2}{9}(1+\nu)\sqrt{2(1+\nu)}\right]$$

$$= \frac{305\,381}{2}\left[\frac{(1-2(0.28))}{2} + \frac{2}{9}(1+0.28)\sqrt{2(1+0.28)}\right] = 103\,083 \text{ psi} \qquad (i)$$

$$z_{@\tau_{máx}} = a\sqrt{\frac{2+2\nu}{7-2\nu}} = 0.005\,8\sqrt{\frac{2+2(0.28)}{7-2(0.28)}} = 0.0037 \text{ in} \qquad (j)$$

5. Todos los esfuerzos obtenidos hasta aquí se encuentran sobre la línea central de la huella. En el borde de la huella, en la superficie, existe un esfuerzo cortante de

$$\tau_{xy} = \frac{1-2\nu}{3}p_{máx} = \frac{1-2(0.28)}{3}(305\,381) = 44\,789 \text{ psi} \qquad (k)$$

y un esfuerzo de tensión con la misma magnitud.

6. Como ambas piezas son del mismo material, todos estos esfuerzos se aplican para ambos.

7. Los archivos EX07-01 se encuentran en el CD-ROM.

5.9 CONTACTO CILÍNDRICO

El contacto cilíndrico es común en maquinaria. Los rodillos de contacto se utilizan con frecuencia para jalar material, como papel a través de la maquinaria, o para cambiar el espesor de un material en los procesos de rodamiento o calandrado. Los cojinetes de rodillos tienen otra aplicación. Ambos cilindros pueden ser convexos, uno convexo y uno cóncavo (cilindro en canal), o en el límite, un cilindro sobre un plano. En todos estos contactos, existe la posibilidad de deslizamiento, así como de rodamiento en el punto de contacto. La presencia de fuerzas de deslizamiento tangenciales tiene un efecto significativo sobre los esfuerzos comparados con rodamiento puro. Primero se considerará el caso de dos cilindros en rodamiento puro y, después, se introducirá la componente de deslizamiento.

Presión de contacto y huella de contacto en el contacto cilíndrico paralelo

Cuando dos cilindros ruedan juntos, su huella de contacto es rectangular, como se presenta en la figura 5-11*b* (p. 367). La distribución de la presión es un prisma semielíptico de la mitad del ancho *a*. La zona de contacto es como se muestra en la figura 5-13 (p. 369). La presión por contacto es máxima $p_{máx}$ en el centro y cero en los bordes, como se indica en la figura 5-14 (p. 370). La carga aplicada *F* sobre la huella de contacto es igual al volumen de la mitad del prisma:

$$F = \frac{1}{2}\pi a L p_{máx} \qquad (5.14a)$$

donde *F* es la carga total aplicada y *L* es la longitud de contacto a lo largo del eje del cilindro. Esto se despeja para la presión máxima:

$$p_{máx} = \frac{2F}{\pi a L} \tag{5.14b}$$

La presión promedio es la fuerza aplicada dividida entre el área de la huella de contacto:

$$p_{prom} = \frac{F}{área} = \frac{F}{2aL} \tag{5.14c}$$

Al sustituir la ecuación 5.14*c* en la 5.14*b* se obtiene

$$p_{máx} = \frac{4}{\pi} P_{prom} \cong 1.273 P_{prom} \tag{5.14d}$$

Ahora se define la constante de la geometría cilíndrica que depende de los radios R_1 y R_2 de los dos cilindros [observe que es la misma ecuación 5.9*b* (p. 370) para esferas].

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{5.15a}$$

Para tomar en cuenta el caso de un cilindro sobre un plano, R_2 se convierte en infinito, haciendo $1/R_2$ igual a cero. Para un cilindro en canal, R_2 se vuelve negativo. Si no, R_2 es finito y positivo, como R_1. La mitad del ancho a de la huella de contacto se obtiene entonces de

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{m_1 + m_2}{B} \frac{F}{L}} \tag{5.15b}$$

donde m_1 y m_2 son constantes del material, como se definió en la ecuación 5.9*a* (p. 369).

La distribución de la presión dentro del prisma semielíptico es

$$p = p_{máx} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \tag{5.16}$$

la cual es una elipse como se muestra en la figura 5-11 (p. 367).

Distribuciones de esfuerzo estático en el contacto cilíndrico paralelo

El análisis de esfuerzo hertziano es para cargas estáticas pero también se aplica al contacto por rodamiento puro. Las distribuciones del esfuerzo dentro del material son similares a las mostradas en la figura 5-15 (p. 371) para el caso de esfera sobre esfera. Son posibles dos casos: *esfuerzo plano*, donde los cilindros son muy cortos axialmente, como en algunas levas con seguidores de rodillo; y *deformación plana*, donde los cilindros son grandes axialmente, como en los rodillos apretados. En el caso del esfuerzo plano, uno de los esfuerzos principales es cero. En deformación plana, los tres esfuerzos principales pueden ser diferentes de cero.

La figura 5-17 muestra las distribuciones del esfuerzo principal, cortante máximo y esfuerzo de von Mises, a través del ancho de la huella en la superficie y a lo largo del eje z (donde son más grandes), para dos cilindros en contacto estático o de rodamiento puro. Los esfuerzos normales son todos de compresión y máximos en la superficie. Los esfuerzos disminuyen rápidamente con la profundidad del material y también disminuyen lejos de la línea central, como se indica en la figura 5-17.

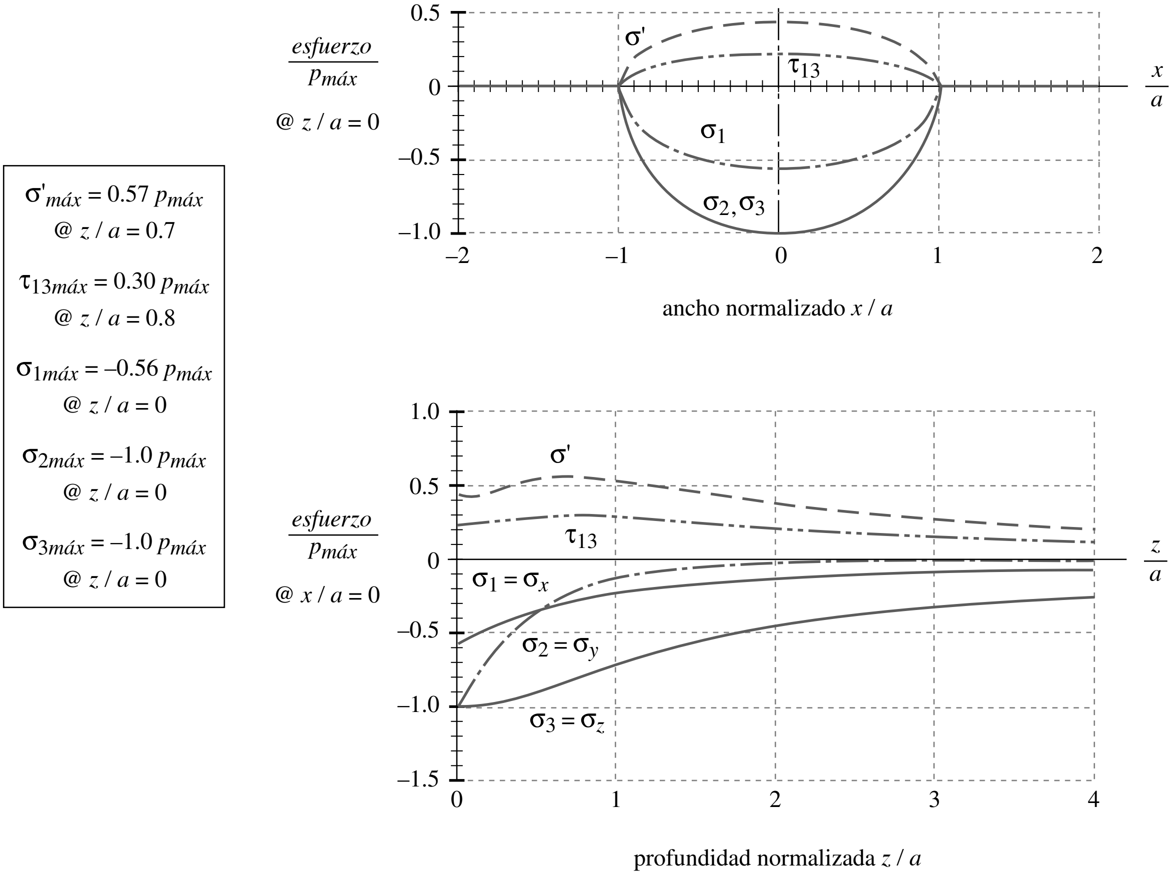


FIGURA 5-17

Distribuciones de los esfuerzos principales, cortante máximo y de von Mises para cilindros de acero con carga estática o rodamiento puro

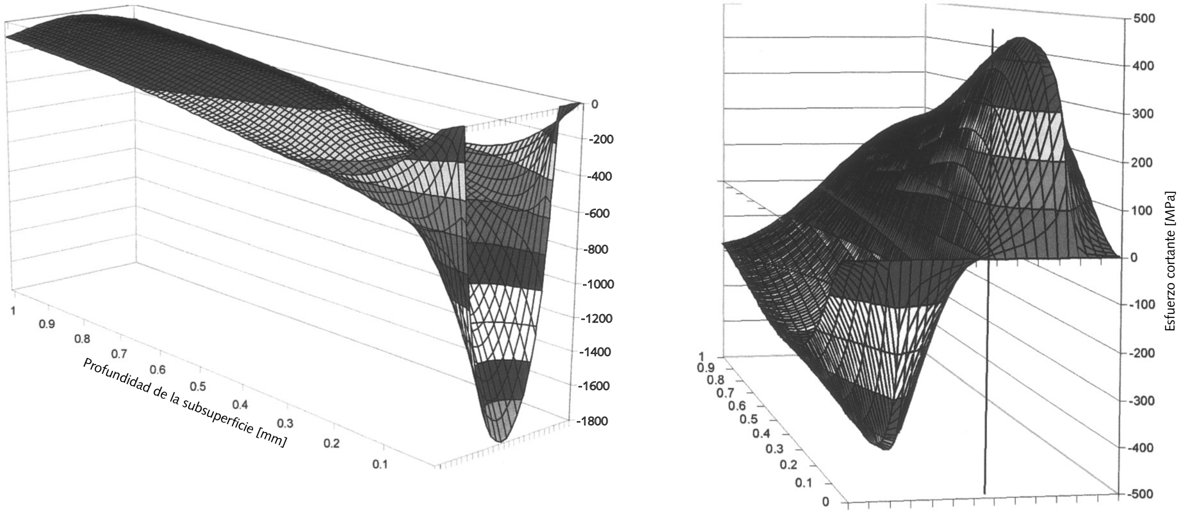
En la superficie sobre la línea central, los esfuerzos normales aplicados máximos son

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_z = -p_{máx} \\ \sigma_y &= -2\nu\, p_{máx} \end{aligned} \tag{5.17a}$$

Estos esfuerzos son principales, ya que no existe esfuerzo cortante aplicado. El esfuerzo cortante máximo τ_{13} sobre el eje z que resulta de la combinación de esfuerzos sobre el plano del círculo de Mohr está debajo de la superficie, como en el caso de contacto esférico. Para dos cilindros de acero en contacto estático, el valor pico y la ubicación del esfuerzo cortante máximo son[19]

$$\begin{aligned} \tau_{13_{máx}} &= 0.304\, p_{máx} \\ z_{@\tau_{máx}} &= 0.786a \end{aligned} \tag{5.17b}$$

Sin embargo, observe en la figura 5-17 que, sobre el eje z, el esfuerzo cortante máximo no es cero, sino $0.22p_{máx}$ en la superficie y no varía mucho sobre la profundidad $0 < z < 2a$. La figura 5-18 muestra la distribución tridimensional de los esfuerzos normal y cortante debajo de la superficie en el contacto cilíndrico.[35]



(a) Esfuerzo normal σ_x

(b) Esfuerzo cortante τ_{xy}

FIGURA 5-18

Distribución de esfuerzo debajo de la superficie en contacto cilíndrico[35]

EJEMPLO 5-2

Esfuerzos en contacto cilíndrico

Problema **La rueda de una grúa elevada trabaja lentamente sobre un riel de acero. ¿Cuál es el tamaño de la huella de contacto entre la rueda y el riel, y cuáles son los esfuerzos? ¿Cuál es la profundidad del esfuerzo cortante máximo?**

Se proporciona **La rueda tiene 12 in de diámetro por 0.875 in de espesor y el riel es plano. Ambas piezas son de acero. La carga radial es de 5 000 lb.**

Suposiciones **La velocidad giratoria es lo suficientemente baja por lo que éste se puede considerar un problema de carga estática.**

Solución

1. Primero se determina el tamaño de la huella de contacto, con el cual se obtienen la constante geométrica y las constantes del material, a partir de las ecuaciones 5.15*a* (p. 375) y 5.9*a* (p. 369).

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + 0\right) = 0.083 \qquad (a)$$

Observe el radio de curvatura infinito para R_2.

$$m_1 = m_2 = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} = \frac{1 - 0.28^2}{3E7} = 3.072E - 8 \qquad (b)$$

Note que los dos materiales son iguales en este ejemplo. Las constantes del material y de geometría se pueden usar ahora en la ecuación 5.15*b* (p. 375).

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{m_1 + m_2}{B}\frac{F}{L}} = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)\frac{2(3.072E-8)}{0.083}\left(\frac{5\,000}{0.875}\right)} = 0.0518 \text{ in} \qquad (c)$$

donde a es la mitad del ancho de la huella de contacto. El área rectangular de la huella de contacto es

$$\text{área} = 2aL = 2(0.051\,8)(0.875) = 0.091 \text{ in}^2 \qquad (d)$$

2. La presión de contacto promedio y máxima se determinan con las ecuaciones 5.14*b* y *c* (p. 375).

$$p_{prom} = \frac{F}{\text{área}} = \frac{5\,000}{0.09063} = 55\,169 \text{ psi} \qquad (e)$$

$$p_{máx} = \frac{2F}{\pi a L} = \frac{2(5\,000)}{\pi(0.051\,789)(0.875)} = 70\,243 \text{ psi} \qquad (f)$$

3. Los esfuerzos máximos normales en el centro de la huella de contacto en la superficie se calculan entonces usando las ecuaciones 5.17*a* (p. 376).

$$\sigma_{z_{máx}} = \sigma_{x_{máx}} = -p_{máx} = -70\,243 \text{ psi} \qquad (g)$$

$$\sigma_{y_{máx}} = -2\nu p_{máx} = -2(0.28)(70\,243) = -39\,336 \text{ psi} \qquad (h)$$

4. El esfuerzo cortante máximo y su ubicación (profundidad) se obtienen con las ecuaciones 5.17*b* (p. 376).

$$\begin{aligned} \tau_{13_{máx}} &= 0.304\,p_{máx} = 0.304(70\,243) = 21\,354 \text{ psi} \\ z_{@\tau_{máx}} &= 0.786a = 0.786(0.0518) = 0.041 \text{ in} \end{aligned} \qquad (i)$$

5. Todos los esfuerzos calculados se encuentran sobre el eje z y los esfuerzos normales son principales. Estos esfuerzos se aplican a la rueda y al riel, puesto que ambos son de acero.

6. Los archivos EX07-02 se encuentran en el CD-ROM.

5.10 CONTACTO GENERAL

Cuando a la geometría de los dos cuerpos en contacto se le permite tener una curvatura general, la huella de contacto es una elipse y la distribución de la presión es un semielipsoide, como se muestra en la figura 5-11*a* (p. 367). Incluso la curvatura más general se podría representar con un radio de curvatura sobre un ángulo pequeño con un error mínimo. El tamaño de la huella de contacto para la mayoría de los materiales prácticos es tan pequeño que tal aproximación es razonable. Por lo tanto, la curvatura compuesta de cada cuerpo se representa con dos radios de curvatura mutuamente ortogonales en el punto de contacto.

Presión de contacto y huella de contacto en el contacto general

La presión de contacto es máxima $p_{máx}$ en el centro y cero en el borde. La carga total aplicada F sobre la huella de contacto es igual al volumen del semielipsoide:

$$F = \frac{2}{3}\pi\, ab\, p_{máx} \tag{5.18a}$$

donde a es la mitad del ancho del eje mayor y b es la mitad del ancho del eje menor de la elipse de la huella de contacto. Esto se despeja para la presión máxima:

$$p_{máx} = \frac{3}{2}\frac{F}{\pi ab} \tag{5.18b}$$

La presión promedio sobre la huella de contacto es la fuerza aplicada dividida entre su área:

$$p_{prom} = \frac{F}{área} = \frac{F}{\pi ab} \tag{5.18c}$$

y al sustituir la ecuación 5.18c en 5.18b se obtiene

$$p_{máx} = \frac{3}{2} P_{prom} \tag{5.18d}$$

Se deben definir tres constantes geométricas que dependen de los radios de curvatura de los dos cuerpos,

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'}\right) \tag{5.19a}$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right)\cos 2\theta\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.19b}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \tag{5.19c}$$

donde R_1 y R_1' son los dos radios de curvatura* del cuerpo 1, R_2 y R_2' son los radios* del cuerpo 2 y θ es el ángulo entre los planos que contienen R_1 y R_2.

Las dimensiones a y b de la huella de contacto se obtienen entonces de

$$a = k_a \sqrt[3]{\frac{3F(m_1 + m_2)}{4A}} \qquad b = k_b \sqrt[3]{\frac{3F(m_1 + m_2)}{4A}} \tag{5.19d}$$

donde m_1 y m_2 son las constantes del material como se definieron en la ecuación 5.9a (p. 369) y los valores de k_a y k_b son los de los datos originales de Hertz en la tabla 5-5, correspondientes al valor de ϕ de la ecuación 5-19c.

* Medidos en planos mutuamente perpendiculares.

Tabla 5-5 Factores para usar en la ecuación 5.19d

ϕ	0	10	20	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
k_a	∞	6.612	3.778	2.731	2.397	2.136	1.926	1.754	1.611	1.486	1.378	1.284	1.202	1.128	1.061	1
k_b	0	0.319	0.408	0.493	0.530	0.567	0.604	0.641	0.678	0.717	0.759	0.802	0.846	0.893	0.944	1

Fuentes: H. Hertz, *Contact of Elastic Solids*, en *Miscellaneous Papers*, P. Lenard, ed., Macmillan & Co. Ltd.: Londres, 1896, pp. 146-162.
H.L. Whittemore y S.N. Petrenko, *Natl. Bur. Std. Tech. Paper* 201, 1921.

Para estimaciones más precisas de las que se logran mediante interpolación en la tabla, se ajustaron funciones a los datos de la tabla 5-5 y se pueden usar para calcular valores aproximados de k_a y k_b para cualquier valor del ángulo ϕ (en grados) a partir de:

$$
\begin{aligned}
k_a &= 50.192\phi^{-0.86215} && (R = 0.99927) \\
k_b &= 0.0045333 + 0.043581\phi - 0.0017292\phi^2 + 3.7374E-5\phi^3 \\
&\quad -3.7418E-7\phi^4 + 1.4207E-9\phi^5 && (R = 0.99949)
\end{aligned}
\tag{5.19e}
$$

La distribución de la presión dentro del semielipsoide es

$$p = p_{máx}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \tag{5.20}$$

la cual es una elipse, como se muestra en la figura 5-11 (p. 367).

Distribuciones de esfuerzos en el contacto general

Las distribuciones de esfuerzo dentro del material son similares a las mostradas en la figura 5-17 para el caso del cilindro sobre cilindro. Los esfuerzos normales son todos de compresión y son máximos en la superficie. Estos esfuerzos disminuyen rápidamente con la profundidad del material y lejos de la línea central. En la superficie sobre la línea central, los esfuerzos normales máximos son[19]

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= -\left[2\nu + (1-2\nu)\frac{b}{a+b}\right]p_{máx} \\
\sigma_y &= -\left[2\nu + (1-2\nu)\frac{a}{a+b}\right]p_{máx} \\
\sigma_z &= -p_{máx}
\end{aligned}
\tag{5.21a}
$$

$$k_3 = \frac{b}{a} \qquad\qquad k_4 = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2} \tag{5.21b}$$

Estos esfuerzos aplicados también son los esfuerzos principales. El esfuerzo cortante máximo en la superficie asociado con estos esfuerzos se obtiene de la ecuación 2.5. El mayor esfuerzo cortante ocurre ligeramente abajo de la superficie, donde la distancia depende de la razón de los semiejes de la elipse de contacto. Para $b/a = 1.0$, el mayor esfuerzo cortante ocurre en $z = 0.63a$, y para $b/a = 0.34$ en $z = 0.24a$. Su magnitud pico es aproximadamente $0.34p_{máx}$.[19]

En los extremos del eje mayor de la elipse de contacto, el esfuerzo de corte en la superficie es[19]

$$\tau_{xz} = (1-2\nu)\frac{k_3}{k_4^2}\left(\frac{1}{k_4}\tanh^{-1}k_4 - 1\right)p_{máx} \tag{5.21c}$$

En los extremos del eje menor de la elipse de contacto, el esfuerzo corte en la superficie es

$$\tau_{xz} = (1-2\nu)\frac{k_3}{k_4^2}\left[1 - \frac{k_3}{k_4}\tan^{-1}\left(\frac{k_4}{k_3}\right)\right]p_{máx} \tag{5.21d}$$

La ubicación del mayor esfuerzo de corte en la superficie varía con la razón de la elipse k_3. Para algunos casos, es como se muestra en la ecuación 5.21*c*, pero en otros se mueve hacia el centro de la elipse, y se obtiene de los esfuerzos principales con la ecuación 5.21*a* usando la ecuación 2.5 (p. 74).

EJEMPLO 5-3

Esfuerzos en el seguidor coronado de leva

Problema **El seguidor de rodillo coronado de una leva tiene un radio moderado transversal a la dirección de rodamiento, para eliminar la necesidad de alineación crítica de su eje con el de la leva. El radio de curvatura de la leva y la carga dinámica varían alrededor de su circunferencia. ¿Cuál es el tamaño de la huella de contacto entre la leva y el seguidor, y cuáles son los peores casos de esfuerzos?**

Se proporciona **El radio del cilindro es de 1 in con un radio en la corona de 20 in a 90° del radio del cilindro. El radio de curvatura de la leva en el punto de carga máxima es 3.46 in y es axialmente plano. Los ejes giratorios de la leva y el rodillo son paralelos, lo cual hace que el ángulo entre los dos cuerpos sea cero. La fuerza es de 250 lb, normal al plano de contacto.**

Suposiciones **Los materiales son de acero. El movimiento relativo es de rodamiento con un deslizamiento <1%.**

Solución

1. Obtenga las constantes del material a partir de la ecuación 5.9*a*.

$$m_1 = m_2 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} = \frac{1-0.28^2}{3E7} = 3.072E-8 \tag{a}$$

2. Se necesitan dos constantes geométricas de las ecuaciones 5.19*a* y *b*.

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1'}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_2'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{20}+\frac{1}{3.46}+\frac{1}{\infty}\right) = 0.669\,5 \tag{b}$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_1'}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2'}\right)^2+2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_1'}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2'}\right)\cos 2\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{20}\right)^2+\left(\frac{1}{3.46}-\frac{1}{\infty}\right)^2+2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{20}\right)\left(\frac{1}{3.46}-\frac{1}{\infty}\right)\cos 2(0)\right]^{\frac{1}{2}} = 0.619\,5 \tag{c}$$

El ángulo ϕ se obtiene de su razón (ecuación 5.19*c*),

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0.6195}{0.6695}\right) = 22.284° \tag{d}$$

y se utiliza en las ecuaciones 5.19*e* (p. 380) para obtener los factores k_a y k_b.

$$k_a = 50.192\phi^{-0.86215} = 50.192(22.284)^{-0.86215} = 3.455$$
$$k_b = 0.0045333 + 0.043581(22.284) - 0.0017292(22.284)^2 + 3.7374E-5(22.284)^3$$
$$-3.7418E-7(22.284)^4 + 1.4207E-9(22.284)^5 = 0.415 \qquad (e)$$

3. Se usan ahora las constantes del material y la geometría en la ecuación 5.19*d* (p. 379).

$$a = k_a \sqrt[3]{\frac{3F(m_1+m_2)}{4A}} = 3.455\sqrt[3]{\frac{3(250)2(3.072E-8)}{4(0.6695)}} = 0.0892$$
$$(f)$$
$$b = k_b \sqrt[3]{\frac{3F(m_1+m_2)}{4A}} = 0.415\sqrt[3]{\frac{3(250)2(3.072E-8)}{4(0.6695)}} = 0.0107$$

donde a es la mitad del ancho del eje mayor, y b es la mitad del ancho del eje menor de la huella de contacto. El área de la huella de contacto es entonces

$$área = \pi ab = \pi(0.0892)(0.0107) = 0.0030 \text{ in}^2 \qquad (g)$$

4. La presión de contacto promedio y máxima se determinan con las ecuaciones 5.18*b* y *c* (p. 379).

$$p_{prom} = \frac{F}{área} = \frac{250}{0.003} = 83\,281 \text{ psi} \qquad (h)$$

$$p_{máx} = \frac{3}{2}p_{prom} = \frac{3}{2}(83\,281) = 124\,921 \text{ psi} \qquad (i)$$

5. Los esfuerzos máximos normales en el centro de la huella de contacto en la superficie se calculan entonces con las ecuaciones 5.21*a* (p. 380).

$$\sigma_x = -\left[2\nu + (1-2\nu)\frac{b}{a+b}\right]p_{máx}$$
$$= -\left[2(.28) + (1-2(.28))\frac{0.0107}{0.0892+0.0107}\right]124\,921 = -75\,849 \text{ psi}$$
$$\sigma_y = -\left[2\nu + (1-2\nu)\frac{a}{a+b}\right]p_{máx} \qquad (j)$$
$$= -\left[2(.28) + (1-2(.28))\frac{0.0892}{0.0892+0.0107}\right]124\,921 = -119\,028 \text{ psi}$$
$$\sigma_z = -p_{máx} = -124\,921 \text{ psi}$$

Estos esfuerzos son principales: $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$. El esfuerzo cortante máximo asociado con ellos en la superficie es (a partir de la ecuación 2.5, p. 74):

$$\tau_{13} = \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right| = \left|\frac{-75\,849 + 124\,921}{2}\right| = 24\,536 \text{ psi (en la superficie)} \qquad (k)$$

6. El mayor esfuerzo de corte bajo la superficie sobre el eje z es aproximadamente

$$\tau_{13} \cong 0.34p_{máx} = 0.34(124\,921) \cong 42\,168 \text{ psi (debajo de la superficie)} \qquad (l)$$

7. Todos los esfuerzos obtenidos hasta aquí se encuentran sobre la línea central de la huella. En el borde de la huella, en la superficie, también hay un esfuerzo cortante. Se obtienen dos constantes con la ecuación 5.21*b* (p. 380) para este cálculo.

$$k_3 = \frac{b}{a} = \frac{0.0107}{0.0892} = 0.120$$
$$k_4 = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{0.0892}\sqrt{0.0892^2 - 0.0107^2} = 0.993 \qquad (m)$$

Estas constantes se usan en las ecuaciones 5.21*c* y *d* (p. 380) para obtener los esfuerzos cortantes sobre la superficie en los extremos de los ejes mayor y menor.

$$\tau_{xz} = (1 - 2\nu)\frac{k_3}{k_4^2}\left(\frac{1}{k_4}\tanh^{-1} k_4 - 1\right)p_{máx}$$
$$(n)$$
$$\tau_{xz} = (1 - 0.56)\frac{0.120}{(0.993)^2}\left(\frac{1}{0.993}\tanh^{-1} 0.993 - 1\right)124\,921 = 12\,253 \text{ psi}$$

$$\tau_{xz} = (1 - 2\nu)\frac{k_3}{k_4^2}\left[1 - \frac{k_3}{k_4}\tan^{-1}\left(\frac{k_4}{k_3}\right)\right]p_{máx}$$
$$(o)$$
$$\tau_{xz} = (1 - 0.56)\frac{0.120}{(0.993)^2}\left[1 - \frac{0.120}{0.993}\tan^{-1}\left(\frac{0.993}{0.120}\right)\right]124\,921 = 5\,522 \text{ psi}$$

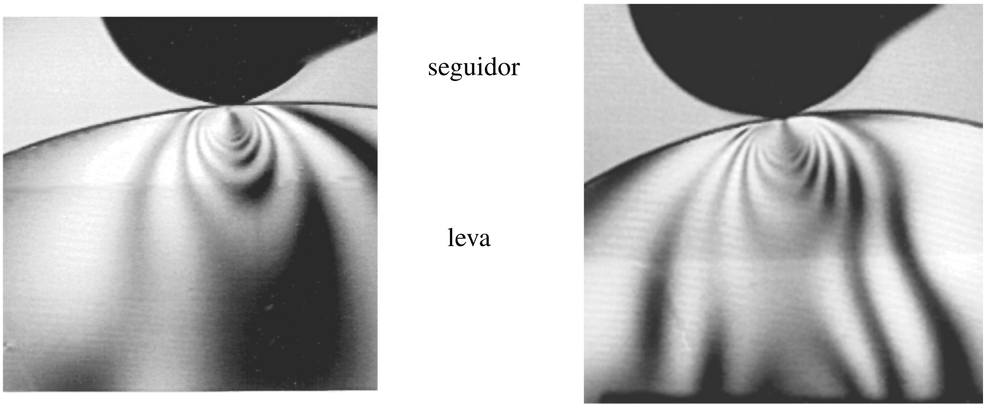
8. Los archivos EX07-03 se encuentran en el CD-ROM.

5.11 ESFUERZOS DE CONTACTO DINÁMICOS

Las ecuaciones presentadas anteriormente para esfuerzos de contacto suponen que la carga es de rodamiento puro. Cuando están presentes rodamiento y deslizamiento, el campo de esfuerzos se distorsiona por la carga tangencial. La figura 5-19 muestra un estudio fotoelástico de una pareja leva-seguidor[20], cargada estáticamente (*a*) y cargada dinámicamente con deslizamiento (*b*). La distorsión del campo de esfuerzos por el movimiento deslizante se observa en el inciso (*b*). Esto es una combinación de contacto por rodamiento con deslizamiento a velocidad relativamente baja. El incremento del deslizamiento causa más distorsión del campo de esfuerzos.

Efecto de la componente de deslizamiento sobre esfuerzos de contacto

Smith y Lui[18] analizaron el caso de rodillos paralelos en rodamiento y deslizamiento combinados, y desarrollaron las ecuaciones para la distribución de esfuerzos debajo del punto de contacto. La carga de deslizamiento (friccional) tiene un efecto significativo sobre el campo de esfuerzos. Los esfuerzos se expresan como componentes separadas, un conjunto debido a la carga normal sobre los rodillos (denotado por un subíndice *n*) y el otro debido a la fuerza de fricción tangencial (denotado por un subíndice *t*). Luego se combinan para obtener la situación de esfuerzos completa. El campo de esfuerzos puede ser bidimensional en un rodillo muy corto, como una leva de placa delgada o un engrane delgado, suponiendo que sea un esfuerzo plano. Si los rodillos son axialmente grandes, entonces existirá una condición de deformación plana en regiones alejadas de los extremos, provocando un estado de esfuerzo tridimensional.



(a) Carga estática

(b) Carga dinámica

5

FIGURA 5-19

Estudio fotoelástico de esfuerzos en dos cilindros en contacto con carga estática (*a*) y dinámica de rodamiento puro (*b*) Fuente: V.S. Mahkijani, *Study of Contact Stresses as Developed on a Radial Cam Using Photoelastic Model and Finite Element Analysis*, M.S. Thesis, WPI, 1984

La geometría de contacto se muestra en la figura 5-11*b* (p. 367) con el eje *x* alineado en la dirección del movimiento, el eje *z* radial a los rodillos, y el eje *y* axial a los rodillos. Los esfuerzos debidos a la carga normal $p_{máx}$ son

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_n} &= -\frac{z}{\pi}\left[\frac{a^2+2x^2+2z^2}{a}\beta - \frac{2\pi}{a} - 3x\alpha\right]p_{máx} \\
\sigma_{z_n} &= -\frac{z}{\pi}\left[a\beta - x\alpha\right]p_{máx} \\
\tau_{xz_n} &= -\frac{1}{\pi}z^2\alpha\, p_{máx}
\end{aligned} \tag{5.22a}$$

y los que se deben a la fuerza unitaria de fricción $f_{máx}$ son

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_t} &= -\frac{1}{\pi}\left[\left(2x^2-2a^2-3z^2\right)\alpha + 2\pi\frac{x}{a} + 2\left(a^2-x^2-z^2\right)\frac{x}{a}\beta\right]f_{máx} \\
\sigma_{z_t} &= -\frac{1}{\pi}z^2\alpha f_{máx} \\
\tau_{xz_t} &= -\frac{1}{\pi}\left[\left(a^2+2x^2+2z^2\right)\frac{z}{a}\beta - 2\pi\frac{z}{a} - 3xz\alpha\right]f_{máx}
\end{aligned} \tag{5.22b}$$

donde los factores α y β están dados por

$$\alpha = \frac{\pi}{k_1}\frac{1-\sqrt{\dfrac{k_2}{k_1}}}{\sqrt{\dfrac{k_2}{k_1}}\sqrt{2\sqrt{\dfrac{k_2}{k_1}}+\left(\dfrac{k_1+k_2-4a^2}{k_1}\right)}} \tag{5.22c}$$

$$\beta = \frac{\pi}{k_1} \frac{1 + \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}}{\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \sqrt{2\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} + \left(\frac{k_1 + k_2 - 4a^2}{k_1} \right)}} \tag{5.22d}$$

$$k_1 = (a + x)^2 + z^2 \qquad k_2 = (a - x)^2 + z^2 \tag{5.22e}$$

La fuerza unitaria tangencial $f_{máx}$ se obtiene de la carga normal y el coeficiente de fricción μ.

$$f_{máx} = \mu \, p_{máx} \tag{5.22f}$$

Las variables independientes en estas ecuaciones son entonces las coordenadas x, z en la sección transversal del rodillo, en relación con el punto de contacto, la mitad del ancho a de la huella de contacto y la carga normal máxima $p_{máx}$ en el punto de contacto.

Las ecuaciones 5.22 (pp. 384-385) definen el comportamiento de las funciones de esfuerzo debajo de la superficie, pero cuando $z = 0$, los factores α y β se vuelven infinitos y tales ecuaciones fallan. Se necesitan otras formas para tomar en cuenta los esfuerzos sobre la superficie de la huella de contacto.

$$\text{Cuando } z = 0: \quad \text{si } |x| \le a \ \text{ entonces } \sigma_{x_n} = -p_{máx}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \ \text{ si no } \sigma_{x_n} = 0$$

$$\sigma_{z_n} = \sigma_{x_n} \tag{5.23a}$$

$$\tau_{xz_n} = 0$$

$$\text{si } x \ge a \ \text{ entonces } \sigma_{x_t} = -2 f_{máx}\left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)$$

$$\text{si } x \le -a \ \text{ entonces } \sigma_{x_t} = -2 f_{máx}\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) \tag{5.23b}$$

$$\text{si } |x| \le a \ \text{ entonces } \sigma_{x_t} = -2 f_{máx} \frac{x}{a}$$

$$\sigma_{z_t} = 0 \tag{5.23c}$$

$$\text{si } |x| \le a \ \text{ entonces } \tau_{xz_t} = -f_{máx}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \ \text{ si no } \tau_{xz_t} = 0$$

El esfuerzo total sobre cada plano cartesiano se obtiene superponiendo las componentes debidas a las cargas normal y tangencial:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{x_n} + \sigma_{x_t} \\ \sigma_z &= \sigma_{z_n} + \sigma_{z_t} \\ \tau_{xz} &= \tau_{xz_n} + \tau_{xz_t} \end{aligned} \tag{5.24a}$$

Para rodillos cortos en esfuerzo plano, $\sigma_y = 0$, pero si los rodillos son axialmente largos, entonces se presenta una condición de deformación plana lejos de los extremos, por lo cual el esfuerzo en la dirección y es:

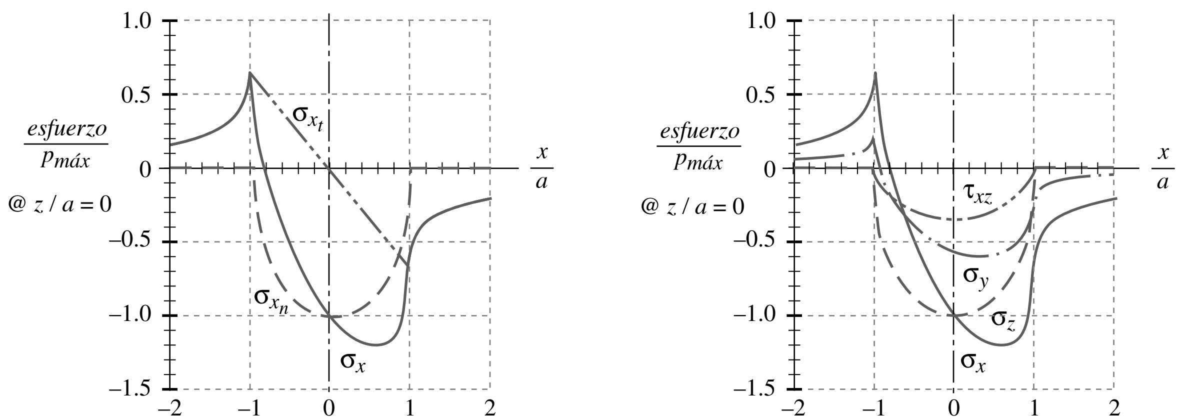
$$\sigma_y = \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right) \tag{5.24b}$$

donde ν es la razón de Poisson.

Los esfuerzos son máximos en la superficie y disminuyen con la profundidad. Excepto para razones muy bajas de fuerza tangencial a fuerza normal (< de aprox. 1/9),[18],[21] el esfuerzo cortante máximo también ocurre en la superficie, a diferencia del caso de rodamiento puro. Se hizo un programa de computadora que evaluara las ecuaciones 5.22 y 5.23 (pp. 384-385) para las condiciones en la superficie y graficarlas. (Véase el archivo CONTACT.EXE). Todos los esfuerzos son normalizados con la carga normal máxima $p_{máx}$ y las ubicaciones se normalizan con la mitad del ancho a de la huella. Para los ejemplos, se suponen un coeficiente de fricción de 0.33 y rodillos de acero con $\nu = 0.28$. Las magnitudes y formas de las distribuciones de esfuerzos son una función de estos factores.

La figura 5-20*a* muestra los esfuerzos en la dirección x en la superficie, los cuales se deben a las cargas normal y tangencial, y también muestra su suma a partir de la primera de las ecuaciones 5.24*a.* Observe que la componente del esfuerzo σ_{xt} debida a la fuerza tangencial es de tensión: desde el punto de contacto hasta más allá del extremo de arrastre de la huella de contacto. Esto no debería sorprender, ya que uno puede imaginar que la fuerza tangencial intenta amontonar material enfrente del punto de contacto y estirarlo detrás de ese punto, justo como una alfombra se amontona enfrente de algo cuando trata de pasar a través de esto. La componente del esfuerzo σ_{xn} debida a la fuerza normal es de compresión en cualquier lugar. Sin embargo, la suma de las dos componentes σ_x tiene un valor a la tensión significativo normalizado del doble del coeficiente de fricción (aquí es de 0.66 $p_{máx}$) y un pico compresivo de aproximadamente $-1.2\ p_{máx}$. La figura 5.20*b* muestra todos los esfuerzos aplicados en las direcciones x, y y z a través de la superficie de la zona de contacto. Observe que los campos de esfuerzos sobre la superficie se extienden más allá de la zona de contacto cuando está presente una fuerza tangencial, a diferencia de la situación de rodamiento puro donde se encuentran dentro de la zona de contacto. (Véase la figura 5-17 (p. 376) y el programa CONTACT.EXE).

La figura 5-21 ilustra los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo de Von Mises para la deformación plana, y el estado de esfuerzo aplicado de la figura 5-20. Observe que la magnitud del esfuerzo principal más grande de compresión



(a) Componentes normal y tangencial de σ_x

(b) Todos los esfuerzos aplicados en la superficie de la huella de contacto

FIGURA 5-20

Esfuerzos aplicados tangencial, normal y cortante en la superficie de cilindros con rodamiento y deslizamiento combinados con $\mu = 0.33$

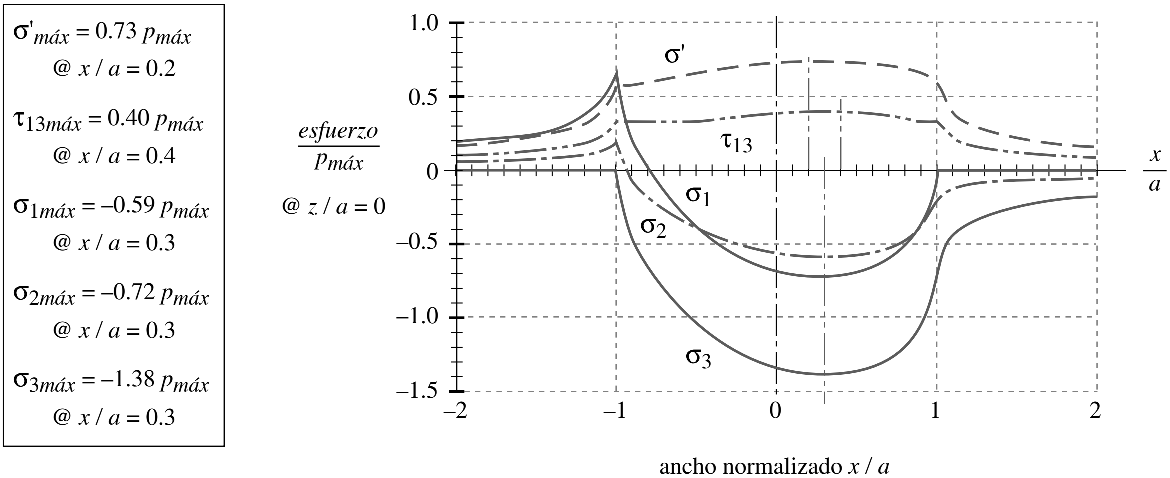


FIGURA 5-21

Esfuerzos principal y de von Mises a través de la zona de contacto en la superficie para cilindros con rodamiento y deslizamiento combinados con $\mu = 0.33$

es de aproximadamente 1.38 $p_{máx}$ y el mayor esfuerzo principal de tensión es de 0.66$p_{máx}$ en el extremo de arrastre de la huella de contacto. La presencia de un esfuerzo cortante aplicado tangencial en este ejemplo incrementa 40% el esfuerzo de compresión pico en relación con el caso de rodamiento puro, e introduce un esfuerzo de tensión en el material. El esfuerzo cortante principal alcanza un valor pico de 0.40$p_{máx}$ en $x / a = 0.4$. Todos los esfuerzos mostrados en las figuras 5-19 y 5-20 se encuentran en la superficie de los rodillos.

Debajo de la superficie, se reducen las magnitudes de los esfuerzos de compresión debidos a la carga normal. Sin embargo, el esfuerzo cortante τ_{xz_n} debido a la carga normal se incrementa con la profundidad, volviéndose máximo debajo de la superficie en $z = 0.5a$, como se observa en la figura 5-22. Observe el signo contrario en el punto medio de la zona de contacto. Existen componentes de esfuerzo cortante de ciclo invertido que actúan sobre cada elemento diferencial del material conforme éste pasa a través de la zona de contacto. El intervalo pico a pico de este ciclo de esfuerzo cortante invertido en el plano xz es mayor en magnitud que el rango del esfuerzo cortante máximo, y se considera como responsable de las fallas por picadura en la subsuperficie.[17]

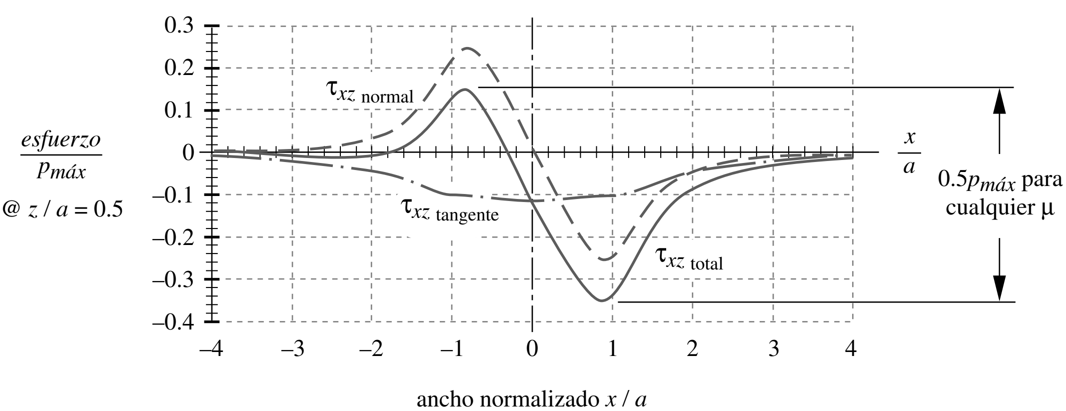


FIGURA 5-22

Esfuerzos de corte debajo de la superficie en $z / a = 0.5$ para cilindros con rodamiento y deslizamiento combinados, graficados con $\mu = 0.33$

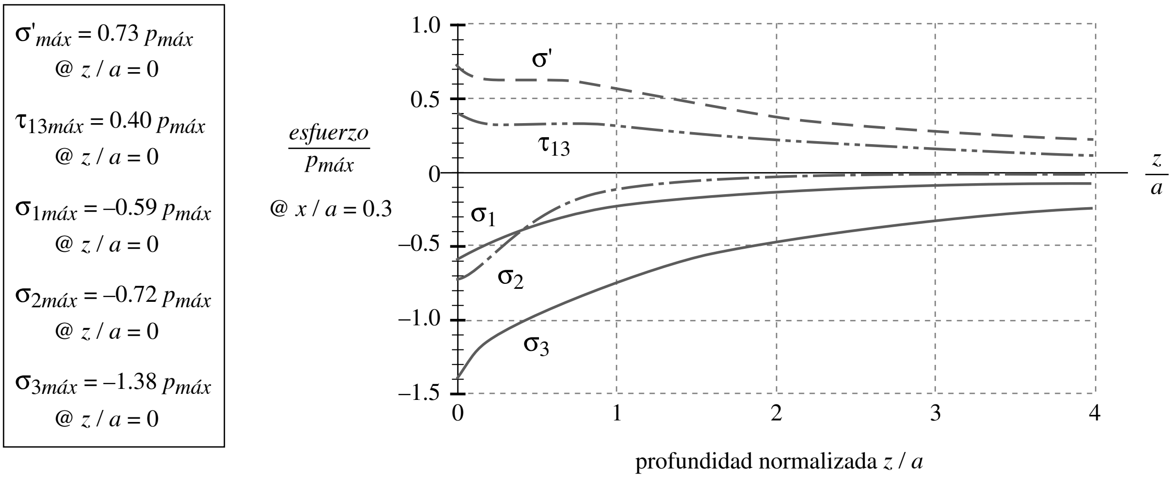


FIGURA 5-23

Esfuerzos principales y de von Mises debajo de la superficie en $x / a = 0.3$ para cilindros con rodamiento y deslizamiento combinados con $\mu = 0.33$

La figura 5-23 grafica los esfuerzos principales, el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo de Von Mises (calculados para $\mu = 0.33$ y una condición de deformación plana) contra la profundidad normalizada z/a tomada en el plano $x/a = 0.3$ (donde los esfuerzos principales son máximos, como se indica en la figura 5-21). Todos los esfuerzos son máximos en la superficie. Los esfuerzos principales disminuyen rápidamente con la profundidad, pero los esfuerzos cortante y de Von Mises permanecen casi constantes en la primera $1a$ de profundidad.

En la superficie, el esfuerzo cortante máximo es relativamente uniforme a través del ancho de la huella con un pico de 0.4 en $x/a = 0.4$ cuando $\mu = 0.33$, como se ilustra en la figura 5-21. Esta ubicación pico de $\tau_{máx}$ se mueve en relación con la línea central de la huella con el incremento de la profundidad, pero su magnitud varía sólo ligeramente con la profundidad. La figura 5-24 grafica el mayor valor del pico del esfuerzo cortante τ_{13} que ocurre en cualquier valor de x a través de la zona de la huella y, por lo tanto, es una gráfica compuesta por el valor pico del esfuerzo cortante en cada plano z. Para $0 < \mu < 0.5$, el valor pico permanece dentro del 60 al 80% de su valor más grande en la primera a de profundidad y es, todavía, del 58 al 70% de su valor pico en $z/a = 2.0$. Conforme el coeficiente de fricción se incrementa hasta 0.5 o más, el valor normalizado del esfuerzo cortante máximo se vuelve igual a μ y es constante a través de la superficie de la huella de contacto.

La variación limitada de $\tau_{máx}$ a pequeñas profundidades de z explicaría por qué algunas fallas por picadura parecen iniciar en la superficie y un poco abajo de ésta. Con una magnitud relativamente uniforme del esfuerzo cortante máximo en toda la región

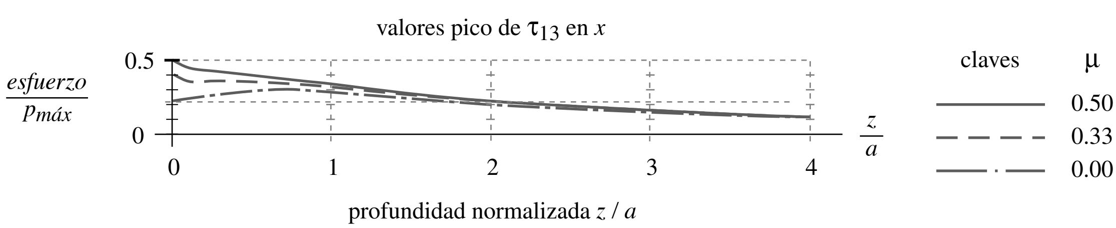


FIGURA 5-24

Valores pico del esfuerzo cortante máximo para todos los valores de x / a en cilindros con rodamiento y deslizamiento combinados con $0 \leq \mu \leq 0.5$

cerca de la superficie, cualquier inclusión de material en esa región crea una concentración de esfuerzos y sirve como un punto de iniciación de una grieta. El hecho de que el valor pico del esfuerzo cortante máximo ocurra en ubicaciones transversales ligeramente diferentes a distintas profundidades dentro de la zona de contacto es irrelevante, ya que una inclusión a cualquier profundidad específica pasa por la ubicación una vez por cada revolución exponiéndose al valor pico del esfuerzo.

Los programas CONTACT, SURFCYLZ y SURFCYLX del disco resuelven y grafican las ecuaciones 5.22, 5.23 y 5.24 (pp. 385-386) para cualquier especificación del usuario de geometría del rodillo, materiales, carga y coeficiente de fricción, en cualquier intervalo especificado de ubicaciones por debajo y a lo largo de la superficie.

EJEMPLO 5-4

Esfuerzos en cilindros con rodamiento y deslizamiento combinados

Problema **El par de rodillos de calandrado funcionan juntos con una combinación de rodamiento y deslizamiento. Obtenga los esfuerzos máximos de tensión, de compresión y cortante en los rodillos.**

Se proporciona **Los radios de los rodillos son de 1.25 y 2.5 in, y los dos miden 24 in de largo. La fuerza es de 5000 lb, normal al plano de contacto.**

Suposiciones **Ambos materiales son de acero. El coeficiente de fricción es de 0.33.**

Solución

1. La geometría de la huella de contacto se obtiene del mismo modo como se hizo en el ejemplo 5-2. Se determinan las constantes del material con la ecuación 5.9*a* (p. 369).

$$m_1 = m_2 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} = \frac{1-0.28^2}{3E7} = 3.072E-8 \qquad (a)$$

La constante geométrica se obtiene de la ecuación 5.15*a* (p. 375)

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.25}+\frac{1}{2.5}\right) = 0.600 \qquad (b)$$

y la mitad del ancho de la huella de la ecuación 5.15*b* (p. 375).

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{m_1+m_2}{B}\frac{F}{L}} = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)\frac{2(3.072E-8)}{0.600}\left(\frac{5000}{24}\right)} = 0.003\,685 \text{ in} \qquad (c)$$

donde a es la mitad del ancho de la huella de contacto. El área rectangular de la huella de contacto es, entonces,

$$area = 2aL = 2(0.003\,685)(24) = 0.1769 \text{ in}^2 \qquad (d)$$

2. La presión de contacto promedio y máxima se determina ahora con las ecuaciones 5.14*b* y *c* (p. 375).

$$p_{prom} = \frac{F}{área} = \frac{5000}{0.1769} = 28\,266 \text{ psi} \qquad (e)$$

$$p_{máx} = \frac{2F}{\pi a L} = \frac{2(5000)}{\pi(0.003\,7)24} = 35\,989 \text{ psi} \tag{f}$$

La presión tangencial se obtiene de la ecuación 5.22*f* (p. 385):

$$f_{máx} = \mu\, p_{máx} = 0.33(35\,989) = 11\,876 \text{ psi} \tag{g}$$

3. Con $\mu = 0.33$, los esfuerzos principales en la zona de contacto son máximos sobre la superficie ($z = 0$) en $x = 0.3a$ a partir de la línea central, como se muestra en las figuras 5-20 (p. 386) y 5-22 (p. 387). Las componentes de esfuerzos aplicados se obtienen de la ecuación 5.23*a* (p. 385) para la fuerza normal, y de la ecuación 5.23*b* (p. 385) para la fuerza tangencial.

$$\begin{aligned} \sigma_{x_n} &= -p_{máx}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = -35\,989\sqrt{1-0.3^2} = -34\,331 \text{ psi} \\ \sigma_{x_t} &= -2 f_{máx}\frac{x}{a} = -2(11\,876)(0.3) = -7\,126 \text{ psi} \end{aligned} \tag{h}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z_n} &= -p_{máx}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = -35\,989\sqrt{1-0.3^2} = -34\,331 \text{ psi} \\ \sigma_{z_t} &= 0 \qquad\qquad \tau_{xz_n} = 0 \end{aligned} \tag{i}$$

$$\tau_{xz_t} = -f_{máx}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = -11\,876\sqrt{1-0.3^2} = -11\,329 \text{ psi} \tag{j}$$

4. Las ecuaciones 5.24*a* y *b* (pp. 385-386) se resuelven ahora para los esfuerzos totales aplicados a lo largo de los ejes *x*, *y* y *z*.

$$\sigma_x = \sigma_{x_n} + \sigma_{x_t} = -34\,331 - 7\,126 = -41\,457 \text{ psi} \tag{k}$$

$$\sigma_z = \sigma_{z_n} + \sigma_{z_t} = -34\,331 + 0 = -34\,331 \text{ psi} \tag{l}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz_n} + \tau_{xz_t} = 0 - 11\,329 = -11\,329 \text{ psi} \tag{m}$$

5. Como los rodillos son largos, se espera que haya una condición de deformación plana. El esfuerzo en tercera dimensión se obtiene de la ecuación 5.24*b* (p. 386):

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) = 0.28(-41\,457 + 34\,331) = -21\,221 \text{ psi} \tag{n}$$

6. A diferencia del caso de rodamiento puro, estos esfuerzos no son principales debido al esfuerzo cortante aplicado. Los esfuerzos principales se calculan con la ecuación 2.4 (p. 74) utilizando una solución de búsqueda de raíz cúbica (*Véase* el programa MOHR o el archivo STRESS3D).

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -21\,221 \text{ psi} \\ \sigma_2 &= -26\,018 \text{ psi} \\ \sigma_3 &= -49\,771 \text{ psi} \end{aligned} \tag{o}$$

El esfuerzo cortante máximo se obtiene de los esfuerzos principales usando la ecuación 2.5 (p. 74).

$$\tau_{13} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{|-21\,221 + 49\,771|}{2} = 14\,275 \text{ psi} \tag{p}$$

7. Los esfuerzos principales son máximos en la superficie, como se observa en las figuras 5-20 y 5-22.
8. Los archivos EX07-04 se encuentran en el CD-ROM.

5.12 MODELOS DE FALLA POR FATIGA SUPERFICIAL: CONTACTO DINÁMICO

Todavía existe algún desacuerdo entre los expertos acerca del mecanismo real de falla que causa la picadura y el descascarado de superficies. La posibilidad de tener un esfuerzo cortante máximo en una ubicación debajo de la superficie (en rodamiento puro) ha llevado a algunos a concluir que la picadura se inicia en esta ubicación o cerca de ella. Otros han concluido que la picadura se inicia en la superficie. Es posible que funcionen ambos mecanismos en tales casos, ya que la iniciación de la falla por lo general comienza en una imperfección, la cual puede estar sobre la superficie o debajo de ésta. La figura 5-25 muestra grietas tanto en la superficie como en la subsuperficie, en el caso de un rodillo de acero con funda endurecida sometido a cargas de rodamiento pesadas.[22]

En 1935 Way[23] realizó un estudio experimental extensivo acerca de la picadura por contacto de rodamiento. Se hicieron cerca de 80 pruebas de contacto, rodamiento puro, rodillos paralelos de diferentes materiales, lubricantes y cargas, corriendo por arriba de 18 millones de ciclos; sin embargo, la mayoría de muestras fallaron entre los 0.5E6 y 1.5E6 ciclos. Se monitorearon las muestras con aparentes grietas superficiales diminutas, las cuales presagian inevitablemente una falla por picadura en menos de 100 000 ciclos adicionales en presencia de un lubricante.

Las superficies más duras y más lisas resistieron mejor la falla por picadura. Las muestras muy pulidas no fallaron durante 12E6 ciclos. Los rodillos sometidos a nitruración con fundas muy duras sobre un núcleo blando tuvieron vidas mayores que otros materiales probados. **No ocurrió la picadura sobre las muestras en ausencia de un lubricante**, aun cuando la corrida en seco produjo grietas en la superficie. Las piezas agrietadas continuaron corriendo en seco sin falla, por lo menos hasta 5E6 ciclos hasta que se agregó algún lubricante. Luego, aparecieron grietas en la superficie que se extendieron

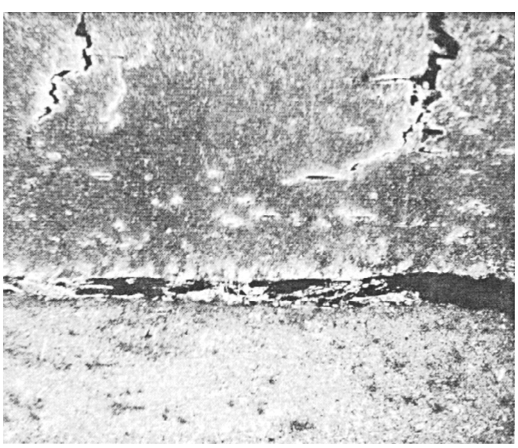


FIGURA 5-25

Microfotografía (100x) de grietas en la superficie y la subsuperficie de un rodillo carburizado y endurecido (HRC 52-58) sometido a una carga por rodamiento pesado Fuente: J.D. Graham, *Pitting of Gear Teeth*, en C. Lipson, *Handbook of Mechanical Wear*, U. Mich. Press, 1961, p. 137, con autorización

rápidamente y causaron picadura en una forma característica de puntas de flecha dentro de los 100 000 ciclos adicionales.

La explicación sugerida para este efecto nocivo del lubricante fue que una vez que se forman grietas superficiales orientadas adecuadamente, son bombeadas completamente con aceite al acercarse al apriete del rodillo y después se presionan estrechamente dentro del apriete, presurizando el fluido atrapado en la grieta. La presión del fluido crea esfuerzos de tensión en la punta de la grieta, lo que favorece el rápido crecimiento de la grieta y origina el picado. Los lubricantes de alta viscosidad no eliminan el contacto metal contra metal, pero retrasan la falla por picadura, lo cual indica que el fluido debería entrar fácilmente en la grieta para causar el daño.

Way llegó a diversas conclusiones para retrasar la falla por fatiga superficial mediante el diseño de los rodillos.[23]

5

1. No usar aceite (aunque se apresuró a señalar que no es una solución práctica, ya que esto estimula otros tipos de desgaste, como se analizó en las secciones anteriores).
2. Incrementar la viscosidad del lubricante.
3. Pulir las superficies (aunque esto resulta costoso).
4. Incrementar la dureza de la superficie (sobre todo con un núcleo más blando y tenaz).

No hubo conclusiones en relación con los motivos para la iniciación de las grietas sobre la superficie. Aunque en rodamiento puro, los esfuerzos cortante no son máximos en la superficie, ahí **son** diferentes de cero en algunas ubicaciones (véase las figuras 5-12, p. 369 y 5-17, p. 376).

En 1966 Littmann y Widner[24] ejecutaron un extenso estudio analítico y experimental sobre fatiga por contacto, y describieron cinco modos de falla distintos en rodillos en contacto. Éstos se listan en la tabla 5-6 junto con algunos factores que favorecen su ocurrencia. Algunos de estos modos apuntan al asunto de iniciación de la grieta; y otros, al de propagación de la grieta. Se estudiarán brevemente cada uno en el orden listado.

ORIGEN EN UNA INCLUSIÓN Describe un mecanismo de iniciación de la grieta que es similar al que se examinó en la sección 4.1 en falla por fatiga. Se supone que la grieta se origina en un campo de esfuerzo cortante, en una ubicación de la subsuperficie o de la superficie que contiene una pequeña inclusión de materia "extraña". Las inclusiones más comunes son óxidos del material, que se formaron durante su proceso y quedaron atrapadas

Tabla 5-6 Modos de falla superficial y sus causas

Modo de falla	Factores que favorecen la ocurrencia
Origen de inclusión	Frecuencia y severidad de oxidación u otras inclusiones duras.
Concentración de esfuerzo geométrico	Geometría del borde en contacto. Desalineación y deflexiones. Posibles efectos del espesor de la película lubricante.
Origen en un punto de la superficie (PSO)	Escasa viscosidad del lubricante. Película elastohidrodinámica delgada comparada con las asperezas de las superficies en contacto. Fuerzas tangenciales y/o deslizamiento burdo.
Descascaramiento (picadura superficial)	Escasa viscosidad del lubricante. Asperezas frecuentes en el acabado superficial que exceden el espesor de la película elastohidrodinámica. Pérdida de presión elastohidrodinámica debida a fuga lateral o a raspaduras en la superficie de contacto.
Subcaso de fatiga (en componentes carburizadas)	Baja dureza del núcleo. Escasa profundidad de la funda en relación con el radio de curvatura de los elementos en contacto.

Fuente: W.E. Littmann y R.L. Widner, Propagation of Contact Fatigue from Surface and Subsurface Origins, *J. Basic Eng. Trans. ASME*, vol. 88, pp. 624-636, 1996.

en él. Éstas son típicamente duras y de forma irregular, y provocan concentración de esfuerzos. Varios investigadores[25],[26],[27] han publicado microfotografías (o identificadas de otro modo) de grietas debajo de la superficie que se iniciaron con inclusiones de óxido. "Tales inclusiones de óxido se presentan con frecuencia como una cadena o agregados alargados de partículas…, que tienen una mucho mayor probabilidad para que un punto con alta concentración de esfuerzos se encuentre en posición desfavorable con respecto al esfuerzo aplicado".[28] La propagación de la grieta a partir de la inclusión podría permanecer debajo de la superficie o incluso romper la superficie. En el último caso, esto genera un sitio para la propagación de la presión hidráulica, como se describió anteriormente. En cualquier caso, al final, el resultado es picadura o descascarado.

Concentración de esfuerzo geométrico (gsc) Se analizó en el capítulo 2. Este mecanismo puede actuar sobre la superficie cuando, por ejemplo, una pieza en contacto es axialmente más corta que la otra (común en juntas leva-seguidor y cojinetes de rodillos). Los extremos del rodillo más corto crean concentración de esfuerzo en la línea de contacto con el rodillo aparejado, como se muestra en la figura 5-26*a*, y probablemente ocurrirá la picadura o el descascarado en esa ubicación. Éste es un buen motivo para usar rodillos con corona, los cuales tienen un radio de curvatura grande en la corona en el plano *yz*, además del radio del rodillo en el plano *xz*. Si la carga de contacto es predecible, al radio de la corona se le podría dar un tamaño, para obtener una distribución más uniforme del esfuerzo a través de la longitud axial del área de contacto debido a las deflexiones de los rodillos, como se muestra en la figura 5-26*b*. Sin embargo, con cargas más ligeras se reduce el área de contacto y, por consiguiente, los mayores esfuerzos en el centro y las cargas de diseño más grandes que la concentración de esfuerzos regresarán a los extremos. Se puede usar una corona parcial como se ilustra en la figura 5-26*c*, pero podría causar alguna concentración de esfuerzo en la de transición recta a corona. Reusner[29] demostró que una curva logarítmica sobre la corona, como se ilustra en la figura 5-26*d*, dará una distribución de esfuerzos más uniforme con niveles de carga variables.

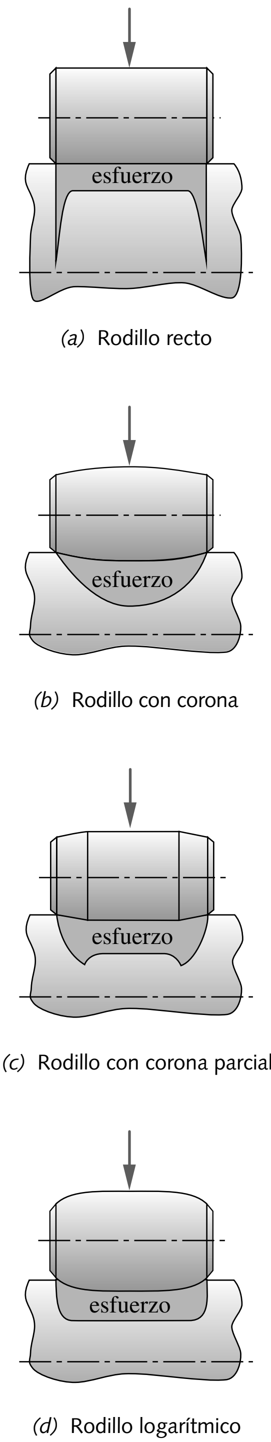


FIGURA 5-26
Concentraciones de esfuerzo debajo de rodillos de formas variadas

Origen en un punto de la superfcie (pso) Es el fenómeno descrito por Way que se analizó anteriormente. Littmann y otros[24] consideraron que el PSO es más un modo de propagación de la grieta que de iniciación de la grieta, y sugirieron que una inclusión en la superficie o cerca de ésta podría ser la responsable de iniciar la grieta. Las muescas o abolladuras por manipulación también suelen convertirse en el núcleo de una grieta sobre la superficie. Una vez que se presenta, y si está en la dirección adecuada para captar aceite, la grieta se propaga rápidamente hacia la falla. Una vez que comienza el descascarado, los residuos pueden crear nuevas muescas que servirán como sitios adicionales para el surgimiento de grietas.

Descascaramiento Se refiere a la situación donde las grietas por fatiga están a una profundidad superficial y se extienden por un área tan grande, que la superficie "se descascara" lejos del sustrato. Las superficies ásperas exacerban el descascaramiento si las asperezas superficiales son más grandes que el espesor de la película lubricante.

Fatiga de subnúcleo, Llamada también *aplastamiento de núcleo*, ocurre sólo sobre piezas con núcleo endurecida y es muy probable que si el núcleo es muy delgado, los esfuerzos debajo de la superficie se extiendan hacia el núcleo del material más débil y blando. La grieta por fatiga inicia debajo del núcleo y finalmente causa que el núcleo se colapse hacia la subsuperficie fallida del material, o bien, irrumpa hacia afuera como picaduras o descascarados. Talbourdet[34] encontró que la profundidad del núcleo debería ser, por lo menos, el doble de la profundidad del punto del esfuerzo cortante máximo; además, sugiere que para cargas unitarias altas debería estar entre 0.060 y 0.070 in.

Cualquiera que sea la causa específica del inicio de una grieta, una vez iniciada, el resultado es predecible. Por ello, el diseñador necesita tomar todas las precauciones posibles para mejorar la resistencia de la pieza a la picadura, así como para todos los otros modos de desgaste. En la sección de resumen de este capítulo, se darán los lineamientos para tal objetivo.

5.13 RESISTENCIA A LA FATIGA SUPERFICIAL

Las cargas repetidas, que varían con el tiempo, tienden a hacer fallar las piezas a menores niveles de esfuerzo de los que soportaría el material en aplicaciones de carga estática. Las resistencias a la fatiga en la flexión y axial se analizaron ampliamente en el capítulo 4. El concepto de **resistencia a la fatiga superficial** es similar, excepto por una diferencia básica. Mientras que los aceros y otros cuantos materiales más muestran un límite de resistencia cuando se cargan a la flexión o axialmente, *ningún material* en general tiene una propiedad equivalente cuando una carga produce fatiga superficial. Por lo tanto, se debe esperar que la máquina, aun cuando sea cuidadosamente diseñada en contra de todos los otros tipos de falla, a final de cuentas sucumbirá a la fatiga superficial, si se carga durante los ciclos suficientes.*

5

Morrison[30] y Cram[31] reportaron por separado los resultados de un estudio experimental sobre resistencia a la fatiga superficial en materiales, realizado en USM Corp. de 1932 a 1956 por G. Talbourdet.[34] Se operaron cuatro máquinas de prueba al desgaste **24 horas diarias durante 24 años** en aproximadamente 1000 rpm para reunir datos de resistencia a la fatiga superficial en hierro colado, acero, bronce, aluminio y materiales no metálicos. Sus pruebas incluyeron rodillos en rodamiento puro, así como rodamiento más porcentajes variables de deslizamiento del rodillo conductor, hasta de un 75%. La mayoría de los datos de rodillo/deslizamiento se obtuvieron con 9% de deslizamiento, ya que estimula las condiciones promedio en que operan engranes rectos y helicoidales. El porcentaje de deslizamiento se define como la velocidad relativa de deslizamiento entre los rodillos o los dientes del engrane, dividida entre la velocidad de la línea de paso en el punto de contacto.

En secciones anteriores se demostró la complejidad del estado de esfuerzos que existe en las regiones superficiales y debajo de la superficie, en la zona de contacto de cilindros aparejados, esferas u otros cuerpos. El análisis anterior acerca de los mecanismos de iniciación de una grieta indica que la ubicación de una grieta incipiente es bastante impredecible, dada la distribución aleatoria de las inclusiones en el material. Por lo tanto, es más difícil predecir exactamente la condición de esfuerzo en un punto de falla esperado en una zona de contacto, que en el caso del diseño de una viga en voladizo, por ejemplo. Este dilema se resuelve con un esfuerzo, en la zona de contacto, el cual se puede calcular fácilmente como un *valor de referencia* para comparar con las resistencias del material. El elegido es el mayor esfuerzo de contacto principal (de compresión) negativo. En el caso de rodamiento puro, su magnitud es igual a la presión de contacto máxima aplicada $p_{máx}$. Pero será mayor cuando el deslizamiento esté presente.

Para desarrollar resistencias permisibles a la fatiga superficial, el material se corre comúnmente en condiciones de carga controladas (es decir, $p_{máx}$ controlada), y se registra y reporta el número de ciclos de falla, junto con otros factores de carga como porcentaje de deslizamiento, lubricación, geometría del cuerpo, etcétera. Esta "resistencia virtual" se compara con la magnitud pico del esfuerzo de compresión de otras aplicaciones que tienen factores de carga similares. De este modo, la resistencia a la fatiga superficial reportada tan sólo tiene una relación indirecta con los esfuerzos reales que estuvieron presentes en la pieza de prueba y en la parte similarmente cargada. Aun cuando las ecuaciones de esfuerzo hertzianas en teoría sólo son válidas para cargas estáticas, Talbourdet encontró que los esfuerzos de compresión determinados a partir de sus pruebas extensivas estaban muy de acuerdo con los pronosticados por la ecuación de Hertz.[34]

La expresión del esfuerzo estático normal por compresión de Hertz en contacto cilíndrico se obtuvo al combinar las ecuaciones 5.14*b* (p. 375) y 5.17*a* (p. 376):

$$\sigma_z = -p_{máx} = \frac{2F}{\pi a L} \tag{5.25a}$$

* Tome nota, sin embargo, de que los avances recientes en la fabricación del acero han desarrollado el llamado acero "limpio", hecho con niveles tan bajos de impurezas que ofrece la evidencia de un límite de resistencia para vida infinita en fatiga superficial. [T.A. Harris, *Rolling Bearing Analysis,* John Wiley & Sons: Nueva York, pp. 872-888, 1991.]

Se sustituye la expresión de *a* de la ecuación 5.15*b* (p. 375), se eleva al cuadrado ambos lados y se simplifica:

$$\sigma_z^2 = \frac{2}{\pi}\frac{F}{L}\frac{B}{\left(m_1 + m_2\right)} \tag{5.25b}$$

Se despeja la carga *F*,

$$F = \sigma_z^2 \frac{\pi L\left(m_1 + m_2\right)}{2B} \tag{5.25c}$$

y se incluyen términos en una constante *K*,

$$F = \frac{KL}{2B} \tag{5.25d}$$

donde

$$K = \pi\left(m_1 + m_2\right)\sigma_z^2 \tag{5.25e}$$

Este factor *K* se llama *factor de carga experimental* y se utiliza para determinar la carga segura de resistencia *F* en un número especificado de ciclos, o bien, el número de ciclos que se pueden esperar antes de que ocurra la falla con una carga determinada.

La tabla 5-7 muestra factores de carga *K* experimentalmente determinados, resistencias de fatiga superficial S_c y factores de resistencia λ, ζ para varios materiales que operan contra sí mismos o contra acero endurecido para herramientas.[30] Para ver la lista completa, consulte la referencia original, ya que algunos materiales se omiten aquí debido a la falta de espacio. También se abordan dos modos diferentes de carga en secciones separadas de la tabla: rodamiento puro y rodamiento con 9% de deslizamiento. La primera columna de la tabla define el material. En cada sección, las siguientes dos columnas proporcionan el valor *K* y la resistencia superficial a la fatiga en 1*E*8 ciclos, como fueron probados. Las siguientes dos columnas contienen los factores de resistencia λ y ζ, los cuales representan la pendiente y la intersección en el diagrama *S-N* (sobre coordenadas log-log) para la resistencia de fatiga superficial del material, como se determinó por regresión sobre cantidades grandes de datos de prueba. Tales factores se utilizan en la ecuación de la línea *S-N* ajustada estadísticamente, para obtener el ciclo *N* de vida esperada con el nivel de esfuerzos aplicado.

$$\log_{10} K = \frac{\zeta - \log_{10} N}{\lambda} \tag{5.26}$$

Los valores de *K* en la tabla 5-7 se usan directamente en la ecuación 5-25*d* para calcular una carga *F* permisible para el material seleccionado en 1*E*8 ciclos de esfuerzo. Para otros ciclos de vida deseados en el diseño, primero se calcula el mayor esfuerzo radial negativo (compresivo) para su diseño, a partir de las ecuaciones adecuadas definidas en las secciones anteriores. Luego, se calcula *K* con la ecuación 5.25*e* y se emplea con los valores λ y ζ de la tabla 5-7 para obtener el valor de *N* para la aplicación de la ecuación 5.26. Como no existe límite de resistencia a la fatiga para la carga de fatiga superficial, se esperaría que la picadura se inicie después de aproximadamente *N* ciclos de esfuerzo, en el nivel de esfuerzo nominal contenido en el factor calculado *K*.

Alternativamente, se puede elegir un número deseado de ciclos *N* y un nivel de esfuerzo de diseño permisible σ_2 para un material seleccionado calculado con las ecuaciones 5.25*e* (p. 395) y 5.26. Se aplica un factor de seguridad seleccionando un material con un ciclo de vida mayor que el requerido para la aplicación, o bien, dando el

tamaño adecuado a las piezas para tener un nivel de esfuerzos por debajo del nivel de esfuerzos calculado permisible para un número de ciclos necesario.

Tabla 5-7 Datos de resistencia a la fatiga superficial para varios materiales

Parte 1: Materiales que operan contra un rodillo de acero para herramientas HRC 60-62

#	Material	Rodamiento puro				Rodamiento y 9% de deslizamiento			
		K psi	S_c @ 1E8 ciclos, psi	λ	ζ	K psi	S_c @ 1E8 ciclos, psi	λ	ζ
1	Acero 1020, carburizado, 0.045 in mín. de profundidad HRC 50-60	12 700	256 000	7.39	38.33	10 400	99 000	13.20	61.06
2	Acero 1020, HB 130-150	—	—	—	—	1 720	94 000	4.78	23.45
3	Acero 1117, HB 130-150	1 500	89 000	4.21	21.41	1 150	77 000	3.63	19.12
4	Acero X1340, endurecido por inducción, 0.045 in mín. de profundidad HRC 45-58	10 000	227 000	6.56	34.24	8 200	206 000	8.51	41.31
5	Acero 4150, tratamiento térmico, HB 270-300, con chapado de cromo muy delgado	6 060	177 000	11.18	50.29	—	—	—	—
6	Acero 4150, tratamiento térmico, HB 270-300, con chapado de fosfato	9 000	216 000	8.80	42.81	6 260	180 000	11.56	51.92
7	Acero colado 4150, tratamiento térmico, HB 270-300	—	—	—	—	2 850	121 000	17.86	69.72
8	Acero 4340, tratamiento térmico, endurecido por inducción, 0.045 in mín. de profundidad HRC 50-58	13 000	259 000	14.15	66.22	9 000	216 000	14.02	63.44
9	Acero 4340, tratamiento térmico, HB 270-300	—	—	—	—	5 500	169 000	18.05	75.55
10	Acero 6150, HB 300-320	1 170	78 000	3.10	17.51	—	—	—	—
11	Acero 6150, HB 270-300	—	—	—	—	1 820	97 000	8.30	35.06
12	Acero maraging para herramientas, 18% Ni, endurecido al aire, HRC 48-50	—	—	—	—	4 300	146 000	3.90	22.18
13	Hierro gris, Cl. 20, HB 140-160	790	49 000	3.83	19.09	740	47 000	4.09	19.72
14	Hierro gris, Cl. 30, HB 200-220	1 120	63 000	4.24	20.92	—	—	—	—
15	Hierro gris, Cl 30, tratamiento térmico (ausrevenido) HB 255-300, chapado de fosfato	2 920	102 000	5.52	27.11	2 510	94 000	6.01	28.44
16	Hierro gris, Cl. 35, HB 225-255	2 000	86 000	11.62	46.35	1 900	84 000	8.39	35.51
17	Hierro gris, Cl. 45, HB 220-240	—	—	—	—	1 070	65 000	3.77	19.41
18	Hierro nodular, Gr. 80-60-03, tratamiento térmico, HB 207-241	2 100	96 000	10.09	41.53	1 960	93 000	5.56	26.31
19	Hierro nodular, Gr. 100-70-03, tratamiento térmico, HB 240-260	—	—	—	—	3 570	122 000	13.04	54.33
20	Níquel bronce, HB 80-90	1 390	73 000	6.01	26.89	—	—	—	—
21	Fundido de arena, bronce-fósforo SAE 65, HB 65-75	730	52 000	2.84	16.13	350	36 000	2.39	14.08
22	Bronce fund.-cont. SAE 660, HB 75-80	—	—	—	—	320	33 000	1.94	12.87
23	Bronce aluminio	2 500	98 000	5.87	27.97	—	—	—	—
24	Zinc colado, HB 70	250	28 000	3.07	15.35	220	26 000	3.11	15.29
25	Resina de acetato	620	—	—	—	580	—	—	—
26	Caucho de poliuretano	240	—	—	—	—	—	—	—

Tabla 5-7 Datos de resistencia a la fatiga superficial para varios materiales
Parte 2: Materiales que operan contra el mismo material

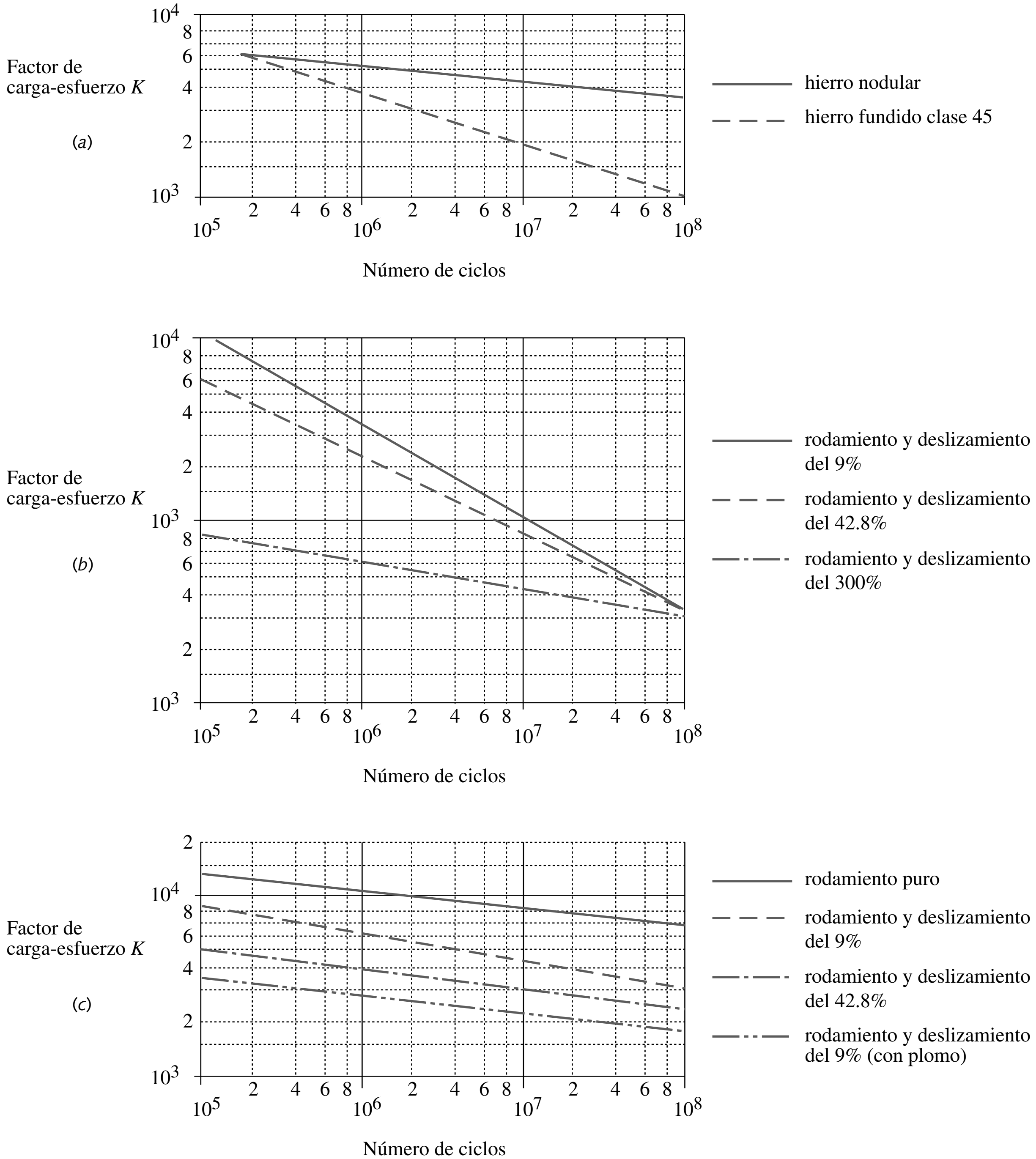
#	Material	Rodamiento puro				Rodamiento y 9% de deslizamiento			
		K psi	S_c @ 1E8 ciclos, psi	λ	ζ	K psi	S_c @ 1E8 ciclos, psi	λ	ζ
27	Acero 1020, HB 130-170 y el mismo chapado pero fosfatado	2 900	122 000	7.84	35.17	1 450	87 000	6.38	28.23
28	Acero 1144 CD acero, HB 260-290 (probado al esfuerzo)	—	—	—	—	2 290	109 000	4.10	21.79
29	Acero 4150, tratamiento térmico, HB 270-300 y el mismo chapado pero fosfatado	6 770	187 000	10.46	48.09	2 320	110 000	9.58	40.24
30	Acero 4150 con plomo, chapado con fosfato, tratamiento térmico, HB 270-300	—	—	—	—	3 050	125 000	6.63	31.1
31	Acero 4340, tratamiento térmico, HB 320-340, y el mismo chapado pero fosfatado	10 300	230 000	18.13	80.74	5 200	164 000	26.19	105.31
32	Hierro gris, Cl. 20, HB 130-180	960	45 000	3.05	17.10	920	43 900	3.55	18.52
33	Hierro gris, Cl. 30, tratamiento térmico (ausrevenido) HB 270-290	3 800	102 000	7.25	33.97	3 500	97 000	7.87	35.90
34	Hierro nodular, Gr. 80-60-03, tratamiento térmico HB 207-241	3 500	117 000	4.69	24.65	1 750	82 000	4.18	21.56
35	Meehanita, HB 190-240	1 600	80 000	4.77	23.27	1 450	76 500	4.94	23.64
36	Aluminio 6061-T6, chapado anodizado duro	350	—	10.27	34.15	260	—	5.02	20.12
37	Magnesio HK31XA-T6, chapado HAE	175	—	6.46	22.53	275	—	11.07	35.02

Fuente: R.A. Morrison, “Load/Life Curves for Gear and Cam Materials”, *Machine Design*, vol. 40, pp. 102-108, 1 de ago. de 1968, A Penton Publication, Cleveland, Ohio, con autorización del editor.

5

Los valores de resistencia de la tabla 5-7 se obtuvieron utilizando rodillos en contacto, lubricados con un aceite mineral ligero de 280-320 SSU a 100 °F. Los investigadores reportaron que “ocurre una transición ordenada de la fatiga por picadura al desgaste abrasivo, conforme se incrementa el porcentaje de deslizamiento”. Notaron que las fallas por picadura se presentaron con un deslizamiento tan alto como el 300% en algunos hierros fundidos, en tanto que el desgaste abrasivo se presentó con un porcentaje de deslizamiento tan bajo como el 9% en aceros endurecidos con altos esfuerzos. También observaron que el agregado de recubrimientos de óxido, los lubricantes fortalecidos (EP, presión extrema) o el plomo como un elemento de aleación reducían los niveles de esfuerzo tangencial, y se incrementó la vida a la fatiga o el porcentaje permisible de deslizamiento. La suma de recubrimientos de fosfato a las superficies redujo el centelleo de lubricante, redujo el coeficiente de fricción y también incrementó la vida a la fatiga. Se detectó evidencia del inicio del picado, tanto superficial con un porcentaje alto de deslizamiento, como debajo de la superficie en rodamiento puro o en situaciones con porcentaje bajo de deslizamiento.[30] El incremento en los porcentajes de deslizamiento reduce la vida a la fatiga, pero no linealmente. La figura 5-27 (p. 398) muestra algunas curvas *S-N* (de la referencia 30) para tres materiales con varios porcentajes de deslizamiento.

La velocidad del ciclo del esfuerzo sólo afecta a los materiales no metálicos, donde el calor por fricción ampolla el material o lo hace ceder. Sin embargo, la rigidez del material es un factor. Un módulo menor del material reduce el esfuerzo de contacto debido a que sus deflexiones grandes incrementan el área de la huella de contacto. El hierro fundido sobre hierro fundido tiene una vida más larga que el hierro fundido sobre acero endurecido. El grafito libre en hierro fundido también hace a éste una buena elección en situaciones de contacto, ya que actúa para retardar la adhesión como si fuera un lubricante seco, aun cuando los hierros fundidos de menor grado tienen resistencias demasiado bajas



Curvas típicas que muestran relaciones de carga-vida para materiales comunes para engranes y levas. Las curvas en el inciso (*a*) son para hierro nodular 100-70-30 (HB 240-260) y hierro colado gris clase 45 (HB 220-240); ambos materiales corren sobre acero al carbón para herramientas (HRC 60-62). Las curvas del inciso (*b*) son para bronce colado continuo que corre sobre acero endurecido. Las curvas en el inciso (*c*) son para acero 4150 con tratamiento térmico que corre contra el mismo material, pero recubierto con fosfato. En todas las gráficas, el 9% de velocidad de deslizamiento es de 54 fpm; la velocidad de deslizamiento de 42.8% es 221 fpm.

FIGURA 5-27

Curvas de carga-vida en algunas combinaciones de materiales con rodamiento y deslizamiento combinados Fuente: R.A. Morrison, "Load/Life Curves for Gear and Cam Materials", *Machine Design*, vol. 40, pp. 102-108, 1 de agosto de 1968, A. Penton Publication, Cleveland Ohio, con autorización

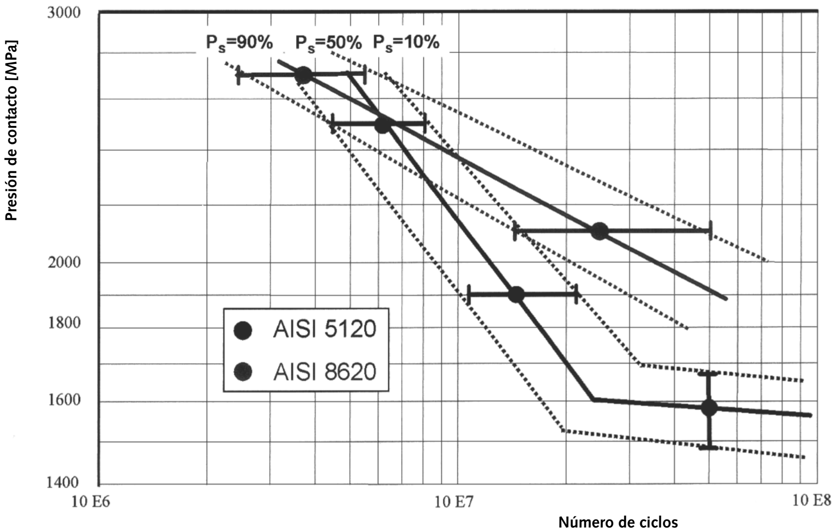


FIGURA 5-28

Diagramas *S-N* de fatiga superficial para dos casos de aceros con núcleo endurecido[35]

para usarse en esta situación. El hierro nodular en sus formas más duras sería una mejor elección. No se encontró una relación cercana entre la dureza del material y su resistencia superficial. Algunos aceros más blandos funcionaron mejor que los más duros.[30]

Datos de prueba más recientes sobre fatiga superficial fueron reportados por Hoffman y Jandeska.[35] Varios casos de aleaciones de acero con núcleo endurecido y materiales metálicos en polvo (PM), que se usan comúnmente en transmisiones automotrices, estuvieron sometidos a contacto de rodamiento cilíndrico bajo condiciones controladas de carga, lubricación y de porcentaje de deslizamiento. Se usaron los métodos actuales de Eddy para detectar la iniciación de grietas y la rapidez de crecimiento de las mismas. Observaron el inicio de las grietas en la superficie y debajo de ella en varias pruebas. Las grietas superficiales pueden iniciar en micropicaduras que se forman por lubricación insuficiente o por la existencia previa de inclusiones y crecen hacia adentro del material en un ángulo de 30°, conducidas por el esfuerzo cortante. Las grietas debajo de la superficie usualmente se forman en regiones con los mayores esfuerzos de Von Mises; primero crecen paralelas a la superficie antes de dirigirse hacia la superficie y formar picaduras. Un tercer modo de falla que se observó fue el aplastamiento del núcleo o fatiga de la subfunda sobre el núcleo más suave, debido a un tratamiento térmico insuficiente. La figura 5-28 muestra las curvas *S-N* con bandas de dispersión de dos aleaciones de acero con núcleo endurecido. Observe que las curvas nunca son horizontales, aunque una tiene la menor pendiente negativa después de una articulación de rodilla. Esto es evidencia adicional acerca de la carencia de una resistencia límite de fatiga superficial.

EJEMPLO 5-5

Obtención del factor de seguridad en fatiga superficial

Problema **Seleccione un material para proporcionar 10 años de vida a los rodillos del ejemplo 5-4.**

Se proporciona **Los rodillos tienen radios de 1.25 y 2.5 in y los dos tienen 24 in de largo. Los esfuerzos principales se muestran en el ejemplo 5-4. El rodillo más pequeño gira a 4 000 rpm.**

Suposiciones **Hay un deslizamiento de 9% combinado con rodamiento. Ambos materiales son del mismo acero. La máquina operará 3 turnos/día durante 345 días/año.**

Solución

1. Calcule los ciclos de vida requeridos para los datos proporcionados:

$$ciclos = 4\,000\frac{rev}{min}\cdot 60\frac{min}{hr}\cdot 24\frac{hr}{día}\cdot 345\ \frac{día}{año}\cdot 10\text{ año} = 2.0E10 \qquad (a)$$

2. El esfuerzo normal máximo calculado en el ejemplo 5-4 es de 49 771 psi por compresión. Su factor K se determina con la ecuación 5.25*d* (p. 395). Se necesitan las constantes del material m_1 y m_2 previamente calculadas:

$$m_1 = m_2 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} = \frac{1-0.28^2}{3E7} = 3.072E-8 \qquad (b)$$

$$K = \pi\left(m_1 + m_2\right)\sigma_z^2 = 2\pi(3.072E-8)(49\,771)^2 = 478 \qquad (c)$$

3. Se debe seleccionar un material de prueba de la tabla 5-7 (pp. 396-397). Con un K tan bajo como esto, se podría usar casi cualquiera de esos aceros. Se intentará con el acero SAE 1020 HB 130-170 recubierto con fosfato (# 27 en la parte 2 de la tabla), ya que los mismos materiales están corriendo juntos. Los factores de pendiente e intersección de este acero para rodamiento con 9% de deslizamiento son

$$\lambda = 6.38 \qquad\qquad \zeta = 28.23 \qquad (d)$$

4. Éstos se usan en la ecuación 5.26 (p. 395), junto con el valor de K de la ecuación *c* de arriba, para obtener el número de ciclos que se esperan con esta carga, antes de que se inicie la picadura.

$$\log_{10} K = \frac{\zeta - \log_{10} N_{vida}}{\lambda}$$
$$\log_{10} N_{vida} = \zeta - \lambda\log_{10} K = 28.23 - 6.38\log_{10}(478) \qquad (e)$$
$$N_{vida} = 10^{\left(28.23-6.38\log_{10}(478)\right)} = 1.4E11$$

5. Ahora se calcula el factor de seguridad contra el picado a partir de la razón entre el ciclo de vida proyectado y el número de ciclos deseado.

$$N_f = \frac{N_{vida}}{ciclos} = \frac{1.4E11}{2.0E10} = 6.9 \qquad (f)$$

6. Los archivos EX07-05 se encuentran en el CD-ROM.

5.14 RESUMEN

En este capítulo se presentó una breve introducción al tema tan amplio de desgaste superficial. En general, se considera que el desgaste se divide en cinco categorías: *desgaste adhesivo, desgaste abrasivo, erosión, desgaste corrosivo* y *fatiga superficial*. Otros mecanismos tales como la *fatiga por corrosión* y *desgaste por corrosión* combinan elementos de más de una categoría.

El desgaste por lo general requiere que haya movimiento relativo entre dos superficies. El **desgaste adhesivo** ocurre cuando las asperezas de dos superficies apareadas se adhieren entre sí y, luego, se rompen cuando ocurre deslizamiento, transfiriendo material de una pieza a la otra, o fuera del sistema. En el **desgaste abrasivo** intervienen una superficie áspera y dura que desgasta el material de una más blanda, o bien, partículas duras sueltas atrapadas entre las dos superficies que se desgastan.

El **desgaste por corrosión** ocurre cuando está presente una atmósfera corrosiva (como el oxígeno) que ataca la superficie del material, en combinación con el deslizamiento que rompe los óxidos u otros contaminantes libres en la superficie. Esto expone nuevo material a los elementos corrosivos y también convierte los productos frecuentemente duros de la corrosión en abrasivos. La fatiga por corrosión se refiere a la combinación de un ambiente corrosivo con esfuerzos cíclicos. Esta combinación es particularmente nociva y reduce en forma drástica la vida de los materiales. El desgaste por frotamiento ocurre en juntas apretadas (ajustes con interferencia) donde no hay movimiento brusco. Los movimientos vibratorios diminutos son suficientes para generar un proceso de desgaste corrosivo llamado desgaste por frotamiento, que puede remover con el tiempo volúmenes significativos de material.

La **fatiga superficial** ocurre en contactos de rodamiento puro o contactos de rodamiento-deslizamiento, pero no en situaciones de deslizamiento puro. Los esfuerzos de contacto muy altos generados en áreas de contacto pequeñas actúan para causar falla por fatiga del material, después de muchos miles de ciclos de esfuerzo repetido. El **picado** es la pérdida de pequeñas piezas de material de la superficie, que dejan atrás carcomidos, los cuales se convierten en áreas más grandes de material superficial escamado, llamadas **descascarado**. Normalmente se percibe una advertencia audible cuando se inicia el proceso de picadura. Si no se atiende, causará un gran daño a la pieza.

Se requieren materiales lisos de alta resistencia para aplicaciones de esfuerzos por contacto. **Ningún material muestra un límite de resistencia a la fatiga superficial** y, al final de cuentas, fallará por este mecanismo si está sujeto al número suficiente de esfuerzos de contacto invertidos.

Diseño para evitar fallas superficiales

Hay varias precauciones que un diseñador debe tomar para reducir las probabilidades de una falla por desgaste, debido a cualquiera de los mecanismos descritos en este capítulo.

1. **Adecuada selección de materiales:** Se deben atender el asunto de la compatibilidad de materiales. Es necesario poner mucha atención al acabado y la dureza superficiales, así como a la resistencia para reducir la abrasión e incrementar la vida de fatiga superficial. Los ambientes corrosivos requieren materiales especiales. Se deberían considerar los recubrimientos en algunas situaciones. Es deseable la homogeneidad de materiales en situaciones de esfuerzos por contacto. Los aceros más costosos procesados para crear mayor uniformidad y microestructuras libres de inclusiones pueden brindar un mejor servicio en casos de fatiga en superficies con esfuerzos altos y, a largo plazo, podrían ser menos costosos. En general, las superficies más duras reducen el desgaste adhesivo y el abrasivo, así como la fatiga superficial.

2. **Lubricantes apropiados:** Es raro que una junta fuertemente cargada se opere en seco (sólo si se presenta una preocupación grave, como el temor a la contaminación del producto con lubricante fugado). Se debe usar la lubricación hidrodinámica o hidrostática siempre que sea posible. La lubricación al límite es menos deseable, aun cuando con frecuencia no se puede evitar. Si se usa lubricación al límite, un lubricante de presión extrema quizá reduzca significativamente el desgaste adhesivo a expensas de algún desgaste corrosivo. Para conocer más acerca de la lubricación, véase el capítulo 7.

3. **Limpieza:** Se deben tomar medidas razonables para garantizar que no entren contaminantes ambientales o externos en los cojinetes o las juntas. Se deben instalar sellos u otro medio para protegerlos. Si no es factible eliminar algún tipo de contaminación (como ambientes sucios), se tienen que seleccionar materiales blandos para que los cojinetes permitan la incrustación de las partículas atrapadas.

4. **Esfuerzo:** Evitar o minimizar concentraciones de esfuerzos, sobre todo en aplicaciones de carga por fatiga. Evalúe el uso de material menos rígido para incrementar el área de la huella de contacto y reducir los esfuerzos en casos de fatiga superficial. Tenga extrema cautela con los casos donde se presenta cualquier clase de carga a la fatiga (no sólo fatiga superficial) en combinación con ambientes corrosivos, porque entonces la fatiga por corrosión sería el problema. Quizá sea necesario un programa de pruebas en esas situaciones, en vista de que existen pocos datos acerca de este fenómeno.
5. **Desgaste por frotamiento**: Evalúe la posibilidad de falla por picadura si se presentan vibraciones o deflexiones repetidas, en combinación con juntas a presión o juntas forzadas.

Ecuaciones importantes utilizadas en este capítulo

Para información adecuada sobre el uso de estas ecuaciones, véase las secciones referidas.

Área real de contacto (sección 5.3):

$$A_r \cong \frac{F}{S_p} \cong \frac{F}{3S_{yc}} \tag{5.1}$$

Coeficiente de fricción (sección 5.3):

$$\mu = \frac{f}{F} \cong \frac{S_{us}}{3S_{yc}} \tag{5.3}$$

Volumen de desgaste (sección 5.4):

$$V = K\frac{Fl}{H} \tag{5.7a}$$

Presión máxima, contacto esférico (sección 5.8):

$$p_{máx} = \frac{3}{2}\frac{F}{\pi a^2} \tag{5.8b}$$

Constantes del material (sección 5.8):

$$m_1 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \qquad m_2 = \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \tag{5.9a}$$

Constante geométrica para contacto esférico y cilíndrico (sección 5.8):

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{5.9b}$$

Radio de la huella de contacto en contacto esférico (sección 5.8):

$$a = \sqrt[3]{0.375\frac{m_1+m_2}{B}F} \tag{5.9d}$$

Esfuerzos máximos en contacto esférico (sección 5.8):

$$\sigma_{z_{máx}} = -p_{máx} \tag{5.11c}$$

$$\sigma_{x_{máx}} = \sigma_{y_{máx}} = -\frac{1+2\nu}{2} p_{máx} \tag{5.11d}$$

$$\tau_{13_{máx}} = \frac{p_{máx}}{2}\left[\frac{(1-2\nu)}{2} + \frac{2}{9}(1+\nu)\sqrt{2(1+\nu)}\right] \tag{5.12b}$$

$$z_{@\tau_{máx}} = a\sqrt{\frac{2+2\nu}{7-2\nu}} \tag{5.12c}$$

Presión máxima, contacto cilíndrico (sección 5.9):

$$p_{máx} = \frac{2F}{\pi a L} \tag{5.14b}$$

Mitad del ancho de la huella de contacto cilíndrico (sección 5.9):

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{m_1+m_2}{B}\frac{F}{L}} \tag{5.15b}$$

Esfuerzo máximo, contacto cilíndrico (sección 5.9):

$$\sigma_x = \sigma_z = -p_{máx} \qquad \sigma_y = -2\nu p_{máx} \tag{5.17a}$$

$$\tau_{13_{máx}} = 0.304 p_{máx} \qquad z_{@\tau_{máx}} = 0.786a \tag{5.17b}$$

Presión máxima, contacto general (sección 5.10):

$$p_{máx} = \frac{3}{2}\frac{F}{\pi ab} \tag{5.18b}$$

Dimensiones medias de la huella de contacto elíptico (sección 5.10; véase la tabla 5-5 para k_a y k_b):

$$a = k_a \sqrt[3]{\frac{3F(m_1+m_2)}{4A}} \qquad b = k_b \sqrt[3]{\frac{3F(m_1+m_2)}{4A}} \tag{5.19d}$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'}\right) \tag{5.19a}$$

Esfuerzos máximos, contacto general (sección 5.10):

$$\sigma_x = -\left[2\nu + (1-2\nu)\frac{b}{a+b}\right]p_{máx}$$
$$\sigma_y = -\left[2\nu + (1-2\nu)\frac{a}{a+b}\right]p_{máx} \tag{5.21a}$$
$$\sigma_z = -p_{máx}$$

Fuerza unitaria de fricción, rodamiento y deslizamiento en cilindros paralelos (sección 5.11):

$$f_{máx} = \mu p_{máx} \tag{5.22f}$$

Esfuerzos máximos, rodamiento y deslizamiento en cilindros paralelos (sección 5.11):

Cuando $z = 0$: si $|x| \le a$ entonces $\sigma_{x_n} = -p_{máx}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ de otro modo $\sigma_{x_n} = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{z_n} &= \sigma_{x_n} \\ \tau_{xz_n} &= 0 \end{aligned} \tag{5.23a}$$

$$\text{si } x \ge a \text{ entonces } \sigma_{x_t} = -2f_{máx}\left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$

$$\text{si } x \le -a \text{ entonces } \sigma_{x_t} = -2f_{máx}\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right) \tag{5.23b}$$

$$\text{si } |x| \le a \text{ entonces } \sigma_{x_t} = -2f_{máx}\frac{x}{a}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{z_t} = 0 \\ &\text{si } |x| \le a \text{ entonces } \tau_{xz_t} = -f_{máx}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \text{ de otro modo } \tau_{xz_t} = 0 \end{aligned} \tag{5.23c}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{x_n} + \sigma_{x_t} \\ \sigma_z &= \sigma_{z_n} + \sigma_{z_t} \\ \tau_{xz} &= \tau_{xz_n} + \tau_{xz_t} \end{aligned} \tag{5.24a}$$

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) \tag{5.24b}$$

Factor de resistencia a la fatiga superficial del material (sección 5.12):

$$K = \pi(m_1 + m_2)\sigma_z^2 \tag{5.25e}$$

Ecuación de la línea *S-N* para fatiga superficial (sección 5.12; véase la tabla 5-7 para λ y ζ):

$$\log_{10} K = \frac{\zeta - \log_{10} N}{\lambda} \tag{5.26}$$

5.15 REFERENCIAS

1. **E. Rabinowicz**, *Friction and Wear of Materials*. John Wiley & Sons: Nueva York, p. 110, 1965.
2. *Ibid.*, pp. 21 y 23.
3. *Ibid.*, p. 125.
4. *Ibid.,* p. 30.
5. **R. Davies**, Compatibility of Metal Pairs, en *Handbook of Mechanical Wear*, C. Lipson, ed., Univ. of Mich. Press: Ann Arbor, p. 7, 1961.
6. **D.J. Wulpi**, *Understanding How Components Fail*, American Society for Metals: Metals Park, OH, 1990.
7. **E. Rabinowicz**, *Friction and Wear of Materials*. John Wiley & Sons: Nueva York, p. 60, 1965.

5

8. *Ibid.*, p. 85.

9. **J.T. Burwell**, Survey of Possible Wear Mechanisms. *Wear*, **1**: pp. 119-141, 1957.

10. **E. Rabinowicz**, *Friction and Wear of Materials*. John Wiley & Sons: Nueva York, p. 179, 1965.

11. *Ibid*., p 180.

12. **J.R. McDowell**, Fretting and Fretting Corrosion, en *Handbook of Mechanical Wear*, C. Lipson y L.V. Colwell, ed., Univ. of Mich. Press: Ann Arbor, pp. 236-251, 1961.

13. **H. Hertz**, On the Contact of Elastic Solids. *J. Math*, **92**: pp. 156-171, 1881 (en alemán).

14. **H. Hertz**, Contact of Elastic Solids, en *Miscellaneous Papers*, P. Lenard, ed., McMillan & Co. Ltd.: Londres, pp. 146-162, 1896.

15. **H.L. Whittemore y S.N. Petrenko**, *Friction and Carrying Capacity of Ball and Roller Bearings*, Technical Paper 201, National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1921.

16. **H.R. Thomas y V.A. Hoersch**, *Stresses Due to the Pressure of One Elastic Solid upon Another*, boletín 212, U. Illinois Engineering Experiment Station, Champaign, Ill., 15 de jul. de 1930.

17. **E.I. Radzimovsky**, *Stress Distribution and Strength Condition of Two Rolling Cylinders,* boletín 408, U. Illinois Engineering Experiment Station, Champaign, Ill., feb. de 1953.

18. **J.O. Smith y C.K. Lui**, Stresses Due to Tangential and Normal Loads on an Elastic Solid with Application to Some Contact Stress Problems. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **75**: pp. 157-166, 1953.

19. **S.P. Timoshenko y J.N. Goodier**, *Theory of Elasticity*, 3a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, pp. 403-419, 1970.

20. **V.S. Mahkijani**, *Study of Contact Stresses as Developed on a Radial Cam Using Photoelastic Model and Finite Element Analysis*. M.S. Thesis, Worcester Polytechnic Institute, 1984.

21. **J. Poritsky**, Stress and Deformation due to Tangential and Normal Loads on an Elastic Solid with Applications to Contact of Gears and Locomotive Wheels, *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **72**: p. 191, 1950.

22. **E. Buckingham y G.J. Talbourdet**, *Recent Roll Tests on Endurance Limits of Materials*, in Mechanical Wear Symposium. ASM: 1950.

23. **S. Way**, Pitting Due to Rolling Contact. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, **57**: pp. A49-58, 1935.

24. **W.E. Littmann y R.L. Widner**, Propagation of Contact Fatigue from Surface and Subsurface Origins, *J. Basic Eng. Trans. ASME*, **88**: pp. 624-636, 1966.

25. **H. Styri**, *Fatigue Strength of Ball Bearing Races and Heat-Treated 52100 Steel Specimens*. Proceedings ASTM, **51**: p. 682, 1951.

26. **T.L. Carter** *et al.*, Investigation of Factors Governing Fatigue Life with the Rolling Contact Fatigue Spin Rig, *Trans. ASLE*, **1**: p. 23, 1958.

27. **H. Hubbell y P.K. Pearson**, *Nonmetallic Inclusions and Fatigue under Very High Stress Conditions, in Quality Requirements of Super Duty Steels*. AIME Interscience Publishers: p. 143, 1959.

5

28. **W.E. Littmann y R.L. Widner**, Propagation of Contact Fatigue from Surface and Subsurface Origins, *J. Basic Eng. Trans. ASME*, **88**: p. 626, 1966.

29. **H. Reusner**, The Logarithmic Roller Profile –the Key to Superior Performance of Cylindrical and Tapered Rolling Bearings, *Ball Bearing Journal*, SKF, **230**, junio de 1987.

30. **R.A. Morrison**, "Load/Life Curves for Gear and Cam Materials". *Machine Design*, v. 40, pp. 102-108, 1 de ago. de 1968.

31. **W.D. Cram**, Experimental Load-Stress Factors, en *Handbook of Mechanical Wear,* C. Lipson y L.V. Colwell, eds., Univ. of Mich. Press: Ann Harbor, pp. 56-91, 1961.

32. **J.F. Archard**, "Wear Theory and Mechanisms", en *Wear Control Handbook*, M.B. Peterson y W.O. Winer, eds., McGraw-Hill: Nueva York, pp. 35-80, 1980.

33. **E. Rabinowicz**, "Wear Coefficients-Metals", en *Wear Control Handbook*, M.B. Peterson y W.O. Winer, eds., McGraw-Hill: Nueva York, pp. 475-506, 1980.

34. **G.J. Talbourdet**, "Surface Endurance Limits of Various USMC Engineering Materials", Research Division of United Shoe Machinery Corporation, Beverly, MA, 1957.

35. **G. Hoffman y W. Jandeska**, "Effects on Rolling Contact Fatigue Performance", *Gear Technology*, ene./feb. de 2007, pp. 42-52.

36. **Y. Ding y J.A. Gear**, "Spalling Depth Prediction Model", *Wear* 267 (2009), pp. 1181-1190.

Tabla P5-0†
Matriz tema/problema

5.2 Superficies apareadas	5-1, 5-25, 5-27, 5-35, 5-37
5.3 Fricción	5-2, 5-26, 5-28, 5-36, 5-38
5.4 Desgaste adhesivo	5-12, 5-15, 5-29, 5-39
5.5 Desgaste abrasivo	5-13, **5-14**, 5-30, 5-46, 5-47
5.8 Contacto esférico	**5-4**, **5-5**, **5-6**, 5-16, 5-17, 5-40
5.9 Contacto cilíndrico	**5-7**, 5-8, **5-9**, **5-10**, **5-11**, 5-18, 5-19
5.10 Contacto general	5-20, 5-21, **5-22**, 5-41, 5-43, 5-44
5.11 Contacto dinámico	5-23, 5-31, 5-32, 5-42, 5-45
5.13 Resistencia a la fatiga	**5-3**, 5-24, 5-33, 5-34, 5-48, 5-49

5.16 PROBLEMAS

*5-1. Dos bloques de acero de 3 × 5 cm, con acabado maquinado $R_a = 0.6$ μm, se friccionan entre sí con una fuerza normal de 400 N. Calcule su área de contacto real, si su $S_y = 400$ MPa.

*5-2. Calcule el coeficiente seco de fricción entre las dos piezas del problema 5-1, si su $S_{ut} = 600$ MPa.

*†**5-3**. En la figura P5-1, para el montaje del brazo del pedal de la bicicleta, suponga que el ciclista aplica una fuerza que va de 0 a 400 N en cada ciclo del pedal. Determine los esfuerzos de contacto máximos en el punto de contacto entre un diente de la rueda dentada y el rodillo de la cadena. Suponga que un diente absorbe todo el torque aplicado, el rodillo de la cadena tiene 8 mm de diámetro, la rueda dentada tiene un diámetro nominal (paso) de 100 mm, y el diente de la rueda dentada es básicamente plano en el punto de contacto. Tanto el rodillo como la rueda dentada están hechos de acero SAE 1340, endurecido por inducción hasta HRC45-58. El rodillo y la rueda dentada están en contacto sobre una longitud de 8 mm. Suponga rodamiento y 9% de deslizamiento; calcule el número de ciclos para falla de esta combinación específica diente-rodillo.

***5-4**. Para el montaje del remolque del problema 1-4 de la p. 57 (véase también las figuras P5-2 y A-5, p. 860), determine los esfuerzos de contacto en la bola y la copa de la bola (que no se muestra). Suponga que la bola tiene 2 in de diámetro y el desajuste de la copa que la rodea tiene una superficie esférica interna con un diámetro 10% mayor que el de la bola.

5-5. Para el montaje del remolque del problema 1-5 de la p. 57 (véase también las figuras P5-2 y A-5, p. 860), determine los esfuerzos de contacto en la bola y la copa de la bola (que no se muestra). Suponga que la bola mide 2 in de diámetro y el desajuste de la copa que la rodea tiene una superficie esférica interna con un diámetro 10% mayor que el de la bola.

5-6. Para el montaje del remolque del problema 1-6 de la p. 57 (véase también las figuras P5-2 y A-5, p. 860), determine los esfuerzos de contacto en la bola y la copa de la bola (que no se muestra). Suponga que la bola mide 2 in de diámetro y el desajuste de la copa que la rodea tiene una superficie esférica interna con un diámetro 10% mayor que el de la bola.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares que tienen el mismo número identificador en capítulos anteriores.

5-7. Para el pasador de acero de 12 mm de diámetro del problema 1-7 (p. 57) obtenga el esfuerzo de contacto máximo, si la aceleración de 2 500 g es de ciclo invertido. El pistón de aluminio tiene un orificio para el pasador que es 2% mayor que el pasador y tiene una longitud de acoplamiento de 2 cm.

*5-8. Una máquina procesa rollos de papel que tienen una densidad de 984 kg/m^3. El rollo de papel es de 1.50 m de diámetro exterior × 0.22 m de diámetro interior × 3.23 m de largo; el módulo efectivo de elasticidad a la compresión es de 14 MPa y $\nu = 0.3$. Determine el ancho de la huella de contacto, cuando se asienta sobre una superficie de acero plana, cargado con su propio peso.

5-9. Para las pinzas de presión ViseGrip® dibujadas a escala en la figura P5-3, cuyas fuerzas se analizaron en el problema 1-9, obtenga la fuerza de sujeción necesaria para crear un plano de 0.25 mm de ancho en los dos lados de un perno de aluminio de 2 mm de diámetro apretado en sus mandíbulas de 5 mm de ancho.

***5-10**. En la figura P5-4*a* se muestra un trampolín indeterminado. Una persona de 100 kg está parada en el extremo libre. El trampolín se asienta sobre un punto de apoyo que tiene una superficie de contacto cilíndrica con radio de 5 mm. ¿Cuál es el tamaño de la huella de contacto entre la tabla y el fulcro de aluminio, si la tabla es de fibra de vidrio con $E = 10.3$ GPa y $\nu = 0.3$?

5-11. Repita el problema 5-10 suponiendo que la persona salta 25 cm hacia arriba y cae de nuevo sobre la tabla. Suponga también que la tabla pesa 29 kg y se flexiona 13.1 cm estáticamente cuando la persona se para sobre ella. ¿Cuál es el tamaño de la huella de contacto entre la tabla y el punto de apoyo de aluminio de 5 mm de radio, si la tabla es de fibra de vidrio con $E = 10.3$ GPa y $\nu = 0.3$?

5-12. Calcule el volumen del desgaste adhesivo esperado en un eje de acero HB270 de 40 mm de diámetro que gira a 250 rpm, tres turnos diarios de 8 horas durante 360 días al año en 10 años, en un buje plano de bronce, si la carga transversal es de 1 000 N.

a) Con lubricación deficiente.
b) Con buena lubricación.

*5-13. Calcule cuánto tiempo tomará limar 1 mm de un cubo de 2 cm de acero HB150, si el operario aplica 100 N sobre una carrera de 10 cm a 60 carreras/min.

a) Si se hace en seco.
b) Si se hace con lubricación.

†**5-14**. La figura P5-5 muestra un juguete infantil llamado “cangurín”. Un niño se para sobre las almohadillas del soporte y aplica la mitad de su peso en cada lado. Luego salta hacia arriba del suelo, manteniendo las almohadillas contra sus pies, y rebota junto con el resorte que amortigua el impacto y almacena energía para ayudar a cada rebote. Suponga un niño de 60 lb y una constante de resorte de 100 lb/in. El cangurín pesa 5 lb. Calcule la rapidez del desgaste abrasivo en la punta, la cual impacta el suelo, suponiendo una condición de granos abrasivos sueltos y secos (arena). Exprese la tasa de desgaste en número de saltos para remover 0.02 in de la punta de aluminio de 1 in de diámetro si su $S_{ut} = 50$ kpsi.

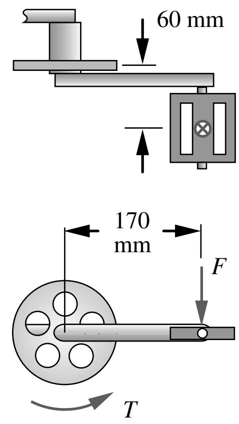


FIGURA P5-1

Problema 5-3 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

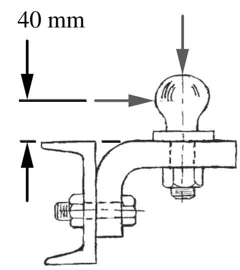


FIGURA P5-2

Problemas 5-4, 5-5, 5-6 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

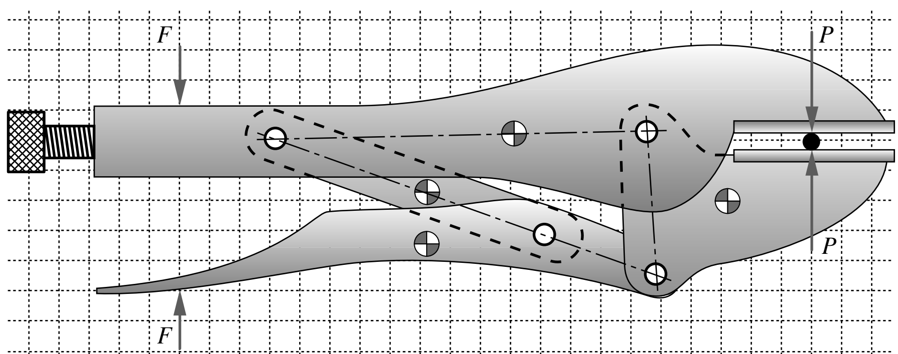


FIGURA P5-3

Problema 5-9 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares que atienen el mismo número identificador de capítulos anteriores.

‡ Véase la tabla 5-7 (pp. 396-397), para datos sobre las resistencias de los materiales de estos problemas.

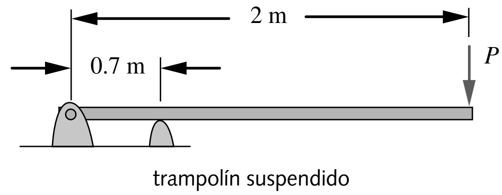


FIGURA P5-4

Problemas 5-10 y 5-11

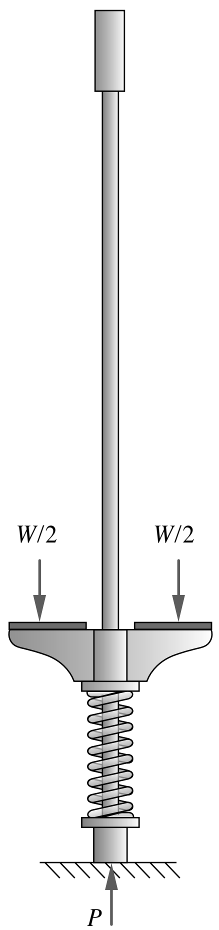


FIGURA P5-5

Problema 5-14

5-15. Con base en la compatibilidad metalúrgica, elabore una tabla de materiales aceptables para que operen contra un eje de acero. Clasifíquelos de acuerdo con su idoneidad.

*5-16. Determine el tamaño de la huella de contacto y los esfuerzos de contacto máximos de una bola de acero de 20 mm de diámetro, que rueda contra una placa plana de aluminio con 1 kN.

5-17. Determine el tamaño de la huella de contacto y los esfuerzos de contacto máximos de una bola de acero de 20 mm de diámetro, que rueda contra una bola de aluminio de 30 mm de diámetro con 800 N.

*5-18. Determine el tamaño de la huella de contacto y los esfuerzos de contacto máximos de un cilindro de acero de 40 mm de diámetro y 25 cm de largo, que rueda contra una placa plana de aluminio con 4 kN.

5-19. Determine el tamaño de la huella de contacto y los esfuerzos de contacto máximos de un cilindro de acero de 40 mm de diámetro y 25 cm de largo, que rueda contra un cilindro paralelo de acero de 50 mm de diámetro con 10 kN de fuerza radial.

*5-20. Determine el tamaño de la huella de contacto y los esfuerzos de contacto máximos de una bola de acero de 20 mm de diámetro, que rueda contra un cilindro de acero de 40 mm de diámetro y 25 cm de largo con 10 kN.

5-21. Un sistema leva-seguidor tiene una carga dinámica de 0 a 2 kN. La leva es cilíndrica con un radio de curvatura mínimo de 20 mm. El rodillo seguidor tiene una corona con radios de 15 mm en una dirección y de 150 mm en la otra dirección. Determine los esfuerzos de contacto y el factor de seguridad, si el seguidor es de acero 4150 HB300 con $S_{fc'}$ = 1 500 MPa y la leva es hierro nodular con HB207. Corren lubricados con menos del 1% de deslizamiento.†

***5-22**. La figura P5-6 muestra un patín con ruedas en línea. Las ruedas de poliuretano miden 72 mm de diámetro y 12 mm de espesor, con una corona de 6 mm de radio, y están espaciadas 104 mm de centro a centro. La combinación pie-bota-patín pesa 2 kg. La "razón efectiva del resorte" del sistema persona-patín es de 6 000 N/m. Determine los esfuerzos de contacto en las ruedas cuando una persona de 100 kg aterriza sobre un pie en concreto, luego de un salto de 0.5 m. Suponga que las ruedas de poliuretano tiene E = 600 MPa con $\nu = 0.4$, y el concreto tiene $E = 21E3$ Mpa a la compresión con $\nu = 0.2$.

a) Suponga que las cuatro ruedas aterrizan simultáneamente.
b) Suponga que una rueda absorbe toda la fuerza de aterrizaje.

*5-23. Un par de rodillos de acero cilíndricos de 12 in de diámetro ruedan juntos con 9% de deslizamiento. Obtenga los esfuerzos de contacto para una fuerza de contacto radial de 1 000 lb/in de longitud.†

5-24. Calcule los ciclos de vida de los rodillos del problema 5-23, si están hechos de hierro fundido gris clase 30, ausrevenido a HB270.†

5-25. El extremo plano de una zapata de hierro fundido gris, clase 30 de 12 mm de diámetro, está soportado por una placa plana de acero SAE 4340, templado y revenido a 800 °F. La fuerza sobre la zapata es de 3.8 kN. Calcule el área real de contacto, así como la razón entre el área real y el área de contacto aparente.

5-26. Calcule el coeficiente de fricción seca entre los dos materiales del problema 5-25, si la resistencia cortante del hierro fundido es S_{us} = 310 MPa. ¿Cómo se compara esto con el valor dado en la tabla 5-1?

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares que tienen el mismo número indicador de capítulos anteriores.

† Véase la tabla 5-7 (pp. 396-397) para los datos sobre las resistencias de los materiales de estos problemas.

5-27. Dos zapatas de acero 1040 rolado en caliente de 0.5 in × 1 in están en contacto con una fuerza de 900 lb. Calcule el área real de contacto, así como la razón entre el área de contacto real y la aparente.

5-28. Calcule el coeficiente de fricción seca entre los dos materiales del problema 5-27. ¿Cómo se compara esto con el valor dado en la tabla 5-1?

5-29. Se probaron dos materiales con un área de contacto de 10 mm^2 para determinar cuánto desgaste adhesivo toma la placa cuando trabajan juntos. La tabla P5-1 muestra los parámetros de prueba y la profundidad promedio del desgaste en 350 pruebas. Obtenga el coeficiente de desgaste promedio, si la dureza Brinell del material más blando de los dos materiales probados es de HB 277.

5-30. El espesor de una pieza de acero blando, con dureza HB = 280, se redujo por abrasión con un esmeril. Tanto la rueda del esmeril como la pieza de acero tienen el mismo ancho de 20 mm. En cada pasada del esmeril se elimina 0.1 mm de material. Si el coeficiente de desgaste abrasivo de esta operación es $E = 5E\text{-}1$, ¿cuál será la fuerza normal aproximada sobre la rueda del esmeril?

5-31. Dos engranes de acero con perfiles de diente de involuta se encuentran engranados. En la línea de contacto entre los engranes, éstos se pueden modelar como dos cilindros en contacto. Cuando el contacto está alejado del punto de paso, existe una combinación de rodamiento y deslizamiento. Determine y grafique los esfuerzos principales dinámicos de contacto sobre la superficie de los dientes para los engranes seguidores, si la fuerza de contacto es de 500 lb y el coeficiente de fricción es 0.15: R_1 = 2.0 in, R_2 = 6.0 in. El espesor (ancho de la cara) de ambos engranes es 0.5 in. También obtenga el valor de x/a para el cual los esfuerzos principales tienen valores extremos.

5-32. Dos engranes de acero con perfiles de diente de involuta se encuentran engranados. En la línea de contacto entre los engranes, éstos se pueden modelar como dos cilindros en contacto. Cuando el contacto está alejado del punto de paso, existe una combinación de rodamiento y deslizamiento. Determine los esfuerzos dinámicos de contacto sobre la superficie de los dientes para los engranes seguidores, si la fuerza de contacto es de 1 500 lb y el coeficiente de fricción es 0.33: R_1 = 2.5 in, R_2 = 5.0 in. El espesor (ancho de la cara) de ambos engranes es 0.625 in.

5-33. Se necesitan dos rodillos en contacto en la aplicación de una máquina. Los rodillos trabajan juntos con una combinación de rodamiento y 9% de deslizamiento. Ambos están hechos de acero SAE 1144 rolado en frío. La fuerza de contacto radial es de 1 200 N y el coeficiente de fricción es de 0.33. Los rodillos tienen el mismo radio y ambos miden 10 mm de largo. Si la vida de diseño es de 8E8 ciclos, determine un radio adecuado para los rodillos.

5-34. Se necesitan dos rodillos en contacto en la aplicación de una máquina. Los rodillos trabajan juntos con una combinación de rodamiento y 9% de deslizamiento. Ambos están hechos de Meehanita. Los rodillos tienen el mismo radio (30 mm) y ambos miden 45 mm de largo. Si la vida de diseño es de 1E8 ciclos, determine la carga permisible que aplica a estos rodillos.

5-35. El extremo plano de una zapata de hierro colado gris clase 20 de 25 mm de diámetro está soportado por el lado plano de una barra de acero de 30 mm de ancho hecha de acero SAE 4130, templado y revenido a 800 °F. La fuerza sobre la zapata es de 2 800 N. Calcule el área real de contacto, así como la razón entre el área real y el área de contacto aparente entre la zapata y la barra.

5-36. Calcule el coeficiente de fricción seca entre los dos materiales del problema 5-35, si la resistencia cortante del hierro colado es S_{us} = 310 MPa. ¿Cómo se compara esto con el valor dado en la tabla 5-1?

5-37. Dos zapatas de acero SAE 1020 rolado en caliente de 25 mm × 40 mm están en contacto con una fuerza de 9 kN. Calcule el área real de contacto, así como la razón entre el área real de contacto y la aparente.

5-38. Calcule el coeficiente de fricción seca entre los dos materiales del problema 5-37. ¿Cómo se compara esto con el valor dado en la tabla 5-1?

5-39. Un eje de acero de 25 mm de diámetro, con dureza HB420, gira a 700 rpm en un buje plano de bronce de 40 mm de longitud con una carga radial promedio de 500 N. Estime el tiempo que tomaría eliminar 0.05 mm de material del buje por desgaste



FIGURA P5-6

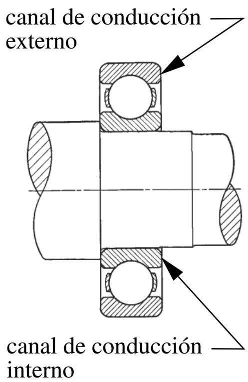
Problema 5-22

Tabla P5-1

Datos del problema 5-29

F N	l m	d mm	Núm. de pruebas
100	5 000	0.180	100
200	5 000	0.372	75
200	7 500	0.550	75
400	10 000	1.470	100

adhesivo, si la lubricación se suspendiera repentinamente considerando una rapidez de desgaste uniforme alrededor del buje.



5

FIGURA P5-7

Problema 5-41

5-40. Una máquina tiene una base de trípode que utiliza 11 bolas de nylon de 15 mm de diámetro como soporte para sus pies. El trípode descansa sobre una placa plana de acero. El peso de 360 N de la máquina se distribuye en partes iguales sobre las tres piernas del trípode. Determine el tamaño de la huella de contacto y los esfuerzos de contacto en las bolas de nylon. Suponga que la razón de Poisson para el nylon es de 0.25.

5-41. Un cojinete de bolas consiste en varias bolas de acero (separadas por una jaula) y dos anillos con canales de conducción, como se observa en la figura P5-7. Los canales de conducción tienen curvatura compuesta. En un plano que contiene el eje del cojinete, la curvatura es cóncava y se ajusta estrechamente con el radio de la bola. En un plano perpendicular al eje, la curvatura es convexa para el canal de conducción interior y está relacionada con el tamaño del soporte del cojinete. Determine el tamaño de la huella de contacto y los esfuerzos de contacto máximos entre una bola y el canal de conducción interior, con una carga radial de 5 200 N en un cojinete de acero con las siguientes dimensiones: diámetro de la bola = 8 mm, radio del canal de conducción para superficie cóncava = 4.05 mm, radio del canal de conducción para superficie convexa = 13 mm.

*5-42. Un par de rodillos de acero que se usan en un proceso de manufactura ruedan juntos con una combinación de rodamiento y deslizamiento. Un rodillo tiene un diámetro de 75 mm y el otro, un diámetro de 50 mm. Ambos tienen 200 mm de longitud. La fuerza de contacto, que es normal al plano de contacto, es de 18 500 N. Suponiendo que el coeficiente de fricción entre los rodillos es de 0.33, determine los esfuerzos de tensión, compresión y cortante máximos en los rodillos.

5-43. Repita el problema 5-41 para contacto entre una bola y el canal de conducción externo. El radio del canal de conducción externo para superficie cóncava es de 4.05 mm y el radio del canal de conducción externo para superficie convexa es de 17.02 mm.

5-44. Una máquina tiene dos rodillos cilíndricos con corona que ruedan uno contra otro, con una carga dinámica que varía de 0 a 3.5 kN. El primer rodillo tiene un radio principal de 14 mm con un radio de 80 mm en la corona. El segundo rodillo tiene un radio principal de 75 mm con un radio de 100 mm en la corona. Los dos ejes de rotación forman un ángulo de 30° entre sí. Obtenga los esfuerzos de contacto, si ambos rodillos son de acero.

5-45. Un sistema leva-seguidor tiene un movimiento combinado de rodamiento y deslizamiento. La leva cilíndrica tiene un radio de curvatura mínimo de 80 mm. El rodillo seguidor también es cilíndrico y tiene un radio de 14 mm. Ambos miden 18 mm de longitud. La fuerza de contacto máxima, que es normal al plano de contacto, es de 3 200 N. Tanto la leva como el rodillo son de acero endurecido. Suponga un coeficiente de fricción entre la leva y el rodillo seguidor de 0.33, y determine los esfuerzos de tensión, compresión y cortante máximos en la leva.

5-46. Determine cuánto tiempo tomará remover 2 μm de material de la superficie de 5 000 mm^2 de un bloque de acero HB110, si una máquina de pulido burdo aplica 80 N en cada carrera de 400 mm a 120 carreras por minuto.

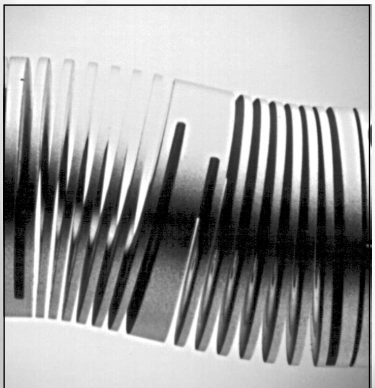
a) Si se hace en seco.
b) Si se hace con lubricación.

5-47. Se introducen por error granos de abrasivo suelto en el sistema de lubricación de un cojinete de empuje plano de bronce, que tiene una dureza de 60HB y un área superficial de 500 mm^2. Si una pieza endurecida de acero ejerce una fuerza de 50 N sobre el cojinete mientras oscila a través de él a 200 carreras/min con una carrera de 30 mm, ¿qué profundidad de desgaste ocurre en un turno de 8 horas?

5-48. Dos rodillos están en contacto con el 9% de deslizamiento combinado con rodamiento, y el esfuerzo máximo principal por compresión resultante en la zona de contacto es de 15 500 psi. Ambos rodillos son de aluminio anodizado duro 6061-T6. La vida de diseño de los rodillos es de cuatro años para una operación de dos turnos durante 260 días/año, y cada uno de ellos gira a 200 rpm. ¿Cuál es el factor de seguridad esperado contra la picadura para el par de rodillos?

5-49. Dos rodillos en contacto corren juntos en rodamiento puro. Ambos son de hierro gris clase 20, HB 130-180. Un rodillo tiene un diámetro de 2.75 in y el otro, un diámetro de 3.25 in. Ambos son de 10 in de largo. La carga aplicada es de 5 500 lbf. Si la vida de diseño es de 1*E*08 ciclos, determine el factor de seguridad contra falla por picadura.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.



6

EJES, CUÑAS Y ACOPLAMIENTOS

Cuanto mayor sea nuestro conocimiento, en mayor medida se revelará nuestra ignorancia.

John F. Kennedy

6.0 INTRODUCCIÓN

Los ejes de transmisión, o sólo ejes, se usan prácticamente en todas las piezas giratorias de las máquinas para transmitir movimiento de giro y torque de una ubicación a otra. Por lo tanto, el diseñador de máquinas enfrenta a menudo la tarea del diseño de ejes. El capítulo explora problemas comunes en esa labor. La tabla 6-0 muestra las variables que se usan en el capítulo, así como las ecuaciones o secciones donde aparecen.

Como mínimo, un eje normalmente transmite el torque desde un dispositivo impulsor (motor eléctrico o de gasolina) hacia la máquina. Algunas veces, los ejes impulsan engranes, poleas o ruedas dentadas, los cuales transmiten el movimiento de giro, a través de engranes conectados, bandas o cadenas, de un eje a otro. El eje puede ser una parte integral del impulsor, como el eje de un motor o el cigüeñal de una máquina o un eje independiente conectado a su vecino por algún tipo de acoplamiento. La maquinaria automática de producción con frecuencia tiene ejes en línea que se extienden a lo largo de la máquina (10 m o más) y conducen la potencia hacia todas las estaciones de trabajo. Los ejes se apoyan en cojinetes, en configuraciones simplemente apoyadas (montadas a horcajadas), voladizos o salientes, dependiendo de la configuración de la máquina. Los pros y contras de estos montajes y acoplamientos también se examinarán.

6.1 EJES CARGADOS

La carga sobre ejes de transmisión giratorios es de dos tipos principales: torsión debida al torque transmitido o flexión por una carga transversal sobre los engranes y las ruedas dentadas. Tales cargas frecuentemente se presentan combinadas, ya que, por ejemplo, el torque transmitido puede estar asociado con fuerzas en los dientes de los engranes o en las ruedas dentadas sujetas a los ejes.

Tabla 6-0 Variables utilizadas en este capítulo

Símbolo	Variable	Unidades ips	Unidades SI	Véase
A	área	in^2	m^2	varias
c	distancia a la fibra externa	in	m	Secc. 6.6
C_f	coeficiente de fluctuación	ninguna	ninguna	Ec. 6.19
d	diámetro	in	m	varias
e	excentricidad de un eje o disco	in	m	Ec. 6.26
E	módulo de Young	psi	Pa	varias
E_k, E_p	energía cinética, energía potencial	in-lb	joule	Ec. 6.25
F	fuerza o carga	lb	N	varias
F_l	fluctuación (en rapidez)	rad/seg	rad/seg	Ec. 6.19
f_n	frecuencia natural	Hz	Hz	Ec. 6.24
g	aceleración gravitacional	in/seg^2	m/seg^2	Seccs. 6.13, 6.14
G	módulo de corte, módulo de rigidez	psi	Pa	varias
I, J	2o momento, 2o momento polar de área	in^4	m^4	Seccs. 6.6, 6.14
I_m, I_s	momento de inercia de masa alrededor de un eje	$lb\text{-}in\text{-}seg^2$	$N\text{-}m\text{-}seg^2$	Secc. 6.13
k	razón de resorte o constante de resorte	lb/in	N/m	Secc. 6.14
K_f, K_{fm}	factores de concentración de esfuerzo por fatiga	ninguna	ninguna	Seccs. 6.6, 6.10
K_t, K_{ts}	factores de concentración de esfuerzo geométrico	ninguna	ninguna	Secc. 6.10
l	longitud	in	m	varias
m	masa	$lb\text{-}seg^2/in$	kg	Seccs. 6.13, 6.14
M	momento, función de momento	lb-in	N-m	varias
N_f	factor de seguridad contra la fatiga	ninguna	ninguna	Ecs. 6.5-6.8
N_y	factor de seguridad contra la fluencia	ninguna	ninguna	Ej. 6-7
P	potencia	hp	watts	Ec. 6.1
p	presión	psi	N/m^2	Secc. 6.12
r	radio	in	m	varias
S_e, S_f	límite de resistencia a la fatiga corregida, resistencia a la fatiga	psi	Pa	Ecs. 6.5-6.8
S_{ut}, S_y	resistencia última a la tensión, resistencia a la fluencia	psi	Pa	Ecs. 6.5-6.8
T	torque	lb-in	N-m	Ec. 6.1
W	peso	lb	N	varias
α	aceleración angular	rad/seg^2	rad/seg^2	Ec. 6.18
δ	deflexión	in	m	varias
ν	razón de Poisson	ninguna	ninguna	varias
θ	deflexión angular o pendiente de la viga	rad	rad	varias
γ	densidad de peso	lb/in^3	N/m^3	Ec. 6.23
σ	esfuerzo normal (con varios subíndices)	psi	Pa	varias
σ'	esfuerzo de von Mises (con varios subíndices)	psi	Pa	varias
τ	esfuerzo cortante (con varios subíndices)	psi	Pa	varias
ω	velocidad angular	rad/seg	rad/seg	Ec. 6.1
ω_n	frecuencia natural	rad/seg	rad/seg	Secc. 6.14
ζ	razón de amortiguamiento	ninguna	ninguna	Secc. 6.14

Las cargas de torque o flexión son constantes o varían con el tiempo. Las cargas de torque y flexión constantes y variables con el tiempo se presentan también en cualquier combinación sobre la misma flecha.

La fotografía capitular es cortesía de Helical Products Co., Inc., Santa María, Calif., 93456.

6

Si el eje es estacionario (no giratorio) y las poleas o los engranes giran con respecto a aquélla (sobre cojinetes), entonces se convierte en un elemento cargado estáticamente, siempre que las cargas sean constantes con el tiempo. Sin embargo, una flecha sin giro no es un eje de transmisión, ya que no transmite ningún torque. Tan sólo es un eje, o una viga redonda, por lo que se debe diseñar como tal. Este capítulo se relaciona con ejes giratorios de transmisión y su diseño contra la fatiga.

Observe que un eje giratorio sometido a una carga de flexión transversal constante experimentará un estado de ciclo de esfuerzos invertidos, como se ilustra en la figura 6-1*a*. Cualquier elemento de esfuerzo sobre la superficie del eje pasa de tensión a compresión, en cada ciclo, conforme el eje gira. Por lo tanto, incluso para cargas de flexión constantes, un eje giratorio se debe diseñar contra falla por fatiga. Si uno o ambos torques y cargas transversales varían con el tiempo, la carga de fatiga se vuelve más compleja; no obstante, los principios de diseño a la fatiga son los mismos que se explicaron en el capítulo 4. El torque, por ejemplo, puede ser repetido o variable, como se muestra en las figuras 6-1*b* y *c*, lo mismo que las cargas de flexión.

En primer lugar, se tratará el caso general, el cual considera la posibilidad de que ambas componentes sean uniformes y variables con el tiempo, tanto en cargas de flexión como de torsión. Si una carga carece de una componente uniforme o variable con el tiempo, en un caso determinado, sólo se iguala a cero un término en la ecuación general y el cálculo se simplifica.

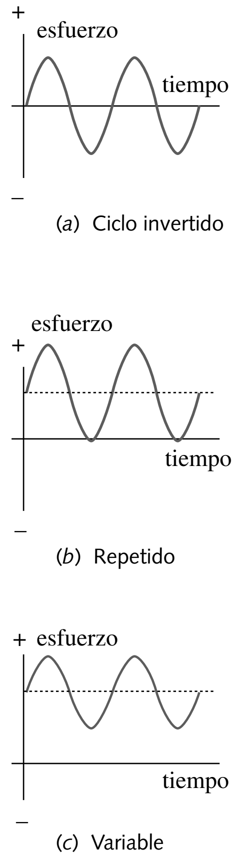


FIGURA 6-1

Esfuerzos variables con el tiempo

6

6.2 SUJECIONES Y CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS

Mientras que algunas veces es posible diseñar ejes de transmisión, cuya sección no cambia de diámetro a lo largo de su longitud, es más común que los ejes tengan varios escalones u hombros donde el diámetro cambia para alojar elementos sujetos como cojinetes, ruedas dentadas, engranes, etcétera, como se ilustra en la figura 6-2, la cual también presenta un conjunto de dispositivos que se utilizan comúnmente para sujetar o ubicar los elementos sobre el eje. Los escalones u hombros son necesarios para dar una ubicación axial precisa y consistente de los elementos agregados, así como para crear el diámetro adecuado para ajustar piezas estándar como cojinetes.

Con frecuencia se utilizan cuñas, chavetas circulares o pasadores transversales para sujetar con seguridad los elementos al eje y así transmitir el torque requerido o fijar la parte axialmente. Las cuñas requieren una ranura tanto en la flecha como en la pieza, y podrían necesitar un tornillo prisionero para impedir el movimiento axial. Las chavetas circulares ranuran el eje y los pasadores transversales producen un orificio en el eje. Cada uno de estos cambios en el contorno contribuye en algo a la concentración de esfuerzos, lo cual se debe tomar en cuenta en los cálculos de esfuerzo por fatiga para el eje. Se usan radios generosos donde sea posible y técnicas como las mostradas en la figura 2-37 (p. 121), 2-38 (p. 122) y 6-2 (en la polea y la chaveta circular) para reducir los efectos de tales concentraciones de esfuerzos.

Las cuñas y los pasadores se pueden eliminar usando la fricción para sujetar los elementos (engranes, ruedas dentadas) al eje. Existen muchos diseños de **collarines de sujeción** (ajustes sin cuña*), los cuales aprietan el diámetro exterior (*OD*) del eje con una gran fuerza de compresión para sujetar algo a ella, como la maza de la rueda dentada que se muestra en la figura 6-2 y en la figura 6-34 (p. 467). La maza tiene el diámetro interno ligeramente cónico, mientras un cono externo similar en este tipo de collarín de sujeción se fuerza en el espacio entre la maza y el eje mediante tornillos apretados. Ranuras axiales en la parte acuñada del collarín le permiten cambiar de diámetro y apretar el eje, creando la suficiente fricción para transmitir el torque. Otro tipo de collarín de sujeción, llamado **collarín deslizante**, emplea un tornillo para cerrar una ranura radial y abrazar el collarín al eje. Los **ajustes por interferencia y presión** también se usan para

* Consulte el estándar ANSI/AGMA 9003-A91, *Flexible Couplings—Keyless Fits.*

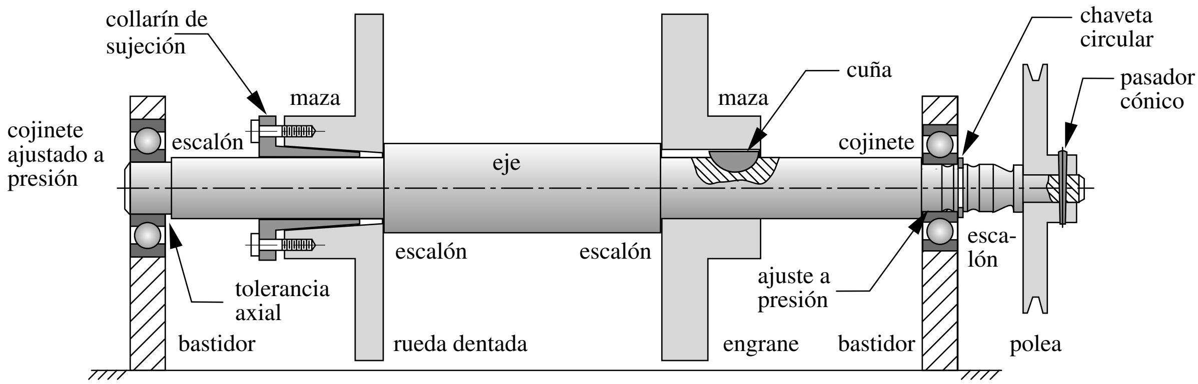


FIGURA 6-2

Varios métodos para sujetar elementos giratorios a los ejes

este propósito y se estudiarán en una sección posterior de este capítulo. Sin embargo, como se verá, tales acoplamientos de fricción también dan lugar a concentraciones de esfuerzos en el eje y pueden causar desgaste por corrosión, como se describió en la sección 5.6 (p. 364).

Algunas veces se utiliza un pasador cónico estándar para acoplar elementos a los ejes, como se observa en la polea de la figura 6-2. El orificio es escariado para que ajuste con el pasador cónico estandarizado y el pasador que se compra es colocado en su lugar. El cono poco profundo lo fija por fricción. Se debe retirar para el desensamble. Dicha técnica se debería utilizar con precaución en ubicaciones con grandes momentos de flexión, pues debilita el eje y también crea concentración de esfuerzos.

Los cojinetes con elementos rodantes que se presentan en la figura 6-2 fueron hechos para tener sus pistas interior y exterior ajustadas a presión, tanto al eje como a su carcasa, respectivamente. Lo anterior requiere un maquinado con poca tolerancia del diámetro del eje, así como que un escalón brinde un tope para el ajuste a presión y la fijación axial. Por lo tanto, uno debe empezar con un diámetro más grande del eje que el diámetro interior del cojinete (*ID*), así como maquinar el eje para ajustar el cojinete elegido, cuyos tamaños sean estandarizados (y métricos). Algunas veces se utiliza una chaveta circular para garantizar que no haya movimiento axial entre el eje y el cojinete, como se ilustra en el cojinete del extremo derecho del eje, donde se encuentra la polea en la figura 6-2. Las chavetas circulares se encuentran comercialmente en gran variedad de estilos y requieren que se maquine sobre el eje una pequeña ranura de poca tolerancia, con dimensiones específicas. Observe en la figura 6-2 cómo se logra la fijación axial del eje al aprisionar axialmente sólo uno de los cojinetes (el del lado derecho). El cojinete del extremo izquierdo tiene una holgura axial entre él y el escalón. Esto sirve para evitar esfuerzos axiales que se generan por expansión térmica del eje entre los dos cojinetes.

De ese modo, parece que no hay forma de escapar de los problemas de la concentración de esfuerzos en las máquinas reales. En el caso de los ejes, se necesita utilizar hombros, chavetas circulares u otros medios para fijar axialmente y con seguridad los componentes sobre el eje, y se tiene que instalar cuñas, sujetar o fijar el eje para transmitir el torque.

Cada uno de estos métodos de sujeción tiene sus ventajas y desventajas. Una cuña es fácil de instalar y sus tamaños están estandarizados con el diámetro del eje. Proporciona fases* seguras, además de que es fácil de desarmar y reparar. Es posible que no oponga resistencia al movimiento axial y no siempre brinda un acoplamiento de ajuste real para el torque debido a la ligera tolerancia entre la cuña y el cuñero. Las inversiones del torque pueden causar ligeros contragolpes en las piezas.

* Fase significa la ubicación angular relativa de los diferentes elementos sujetos al eje.

Un pasador cónico crea un acoplamiento ajustado real para el torque, además de que fija axial y radialmente las partes manteniéndolas en fase, aunque debilita el eje. Se desarma con un poco de mayor dificultad que una cuña. Un collarín de sujeción es fácil de instalar; sin embargo, no tiene fases repetidas. Lo anterior resulta desventajoso sólo si se requiere la sincronización de la rotación del eje con otros ejes del sistema. Si se desea, permite ajustar fácilmente la fase (aunque de forma insegura). Los ajustes a presión son conexiones semipermanentes que requieren equipo especial para desarmarlas. No proporcionan fases repetidas.

6.3 MATERIALES PARA EJES

Para minimizar las deflexiones, el acero es la elección lógica como material para ejes, debido a su alto módulo de elasticidad; no obstante, el hierro colado o nodular también se utiliza algunas veces, sobre todo cuando los engranes u otros accesorios se fundieron integralmente con el eje. Otras veces se emplea bronce o acero inoxidable en ambientes marinos o corrosivos. Donde el eje también sirve como soporte, corriendo contra un cojinete de mango, la dureza suele ser importante. En estos casos, el acero totalmente endurecido o con recubrimiento endurecido puede ser el material elegido para el eje. Remítase al capítulo 7 para el estudio de la dureza relativa deseada, así como la combinación de materiales para ejes y cojinetes. Los cojinetes con elementos rodantes no necesitan ejes endurecidos.

La mayoría de los ejes maquinados se fabrican con acero al bajo o medio carbonos, ya sea rolado en frío o rolado en caliente; sin embargo, cuando se necesitan mayores resistencias se emplean aleaciones de acero. El acero rolado en frío se utiliza con más frecuencia para los ejes con diámetro más pequeño ($<$ 3 in de diámetro, aproximadamente) y el acero rolado en caliente se emplea para tamaños más grandes. La misma aleación, rolada en frío, tiene mejores propiedades mecánicas que cuando se rola en caliente, debido al trabajo en frío; pero esto se obtiene a costa de esfuerzos residuales de tensión en la superficie. El maquinado de cuñeros, ranuras o escalones libera tales esfuerzos residuales locales y llega a causar distorsión (pandeo). Las barras roladas en caliente deben maquinarse en toda su superficie para eliminar la capa exterior carburada, en tanto que las partes de una superficie rolada en frío se pueden dejar sólo roladas, excepto donde se necesita el maquinado para ajustar las dimensiones de cojinetes, etc. Es posible adquirir acero, para ejes, preendurecido (30HRC) o rectificado a precisión (recto), en dimensiones pequeñas y maquinarse con herramientas de carburo. También existe material para ejes totalmente endurecido (60HRC) y rectificado, pero no se puede maquinar.

6.4 POTENCIA DEL EJE

La potencia transmitida a través de un eje se suele obtener a partir de principios básicos. En cualquier sistema giratorio, la potencia instantánea es el producto del torque por la velocidad angular,

$$P = T\omega \tag{6.1a}$$

donde ω se debe expresar en radianes por unidad de tiempo. Cualesquiera que sean las unidades base utilizadas para los cálculos, en general la potencia se convierte a unidades de caballos de potencia (hp), en cualquier sistema inglés, o a kilowatts (kW), en cualquier sistema métrico. (Consulte la tabla A-5 en la p. 870 para factores de conversión.) Tanto el torque como la velocidad angular pueden variar con el tiempo; sin embargo, la mayoría de la maquinaria giratoria se diseña para operar a rapideces constantes o casi constantes durante largos periodos de tiempo. En tales casos, el torque con frecuencia varía con el tiempo. La potencia media se obtiene a partir de

$$P_{prom} = T_{prom}\omega_{prom} \tag{6.1b}$$

6.5 CARGAS SOBRE EJES

El caso más general de carga sobre un eje es la combinación de un torque variable y un momento variable. También habrá cargas axiales, cuando la línea central del eje es vertical o está ajustado con engranes helicoidales o tornillos sinfín con una componente de fuerza axial. (Un eje debería diseñarse para minimizar la porción de su longitud sometida a cargas axiales, transfiriéndolas a tierra mediante cojinetes de empuje adecuados, tan cerca de la fuente de la carga como sea posible.) Tanto el torque como el momento pueden variar con el tiempo, como se indica en la figura 6-1, además de que ambos pueden tener componentes medio y alternante.

La combinación de un momento de flexión y un torque sobre un eje giratorio genera esfuerzos multiaxiales. Por consiguiente, los temas examinados en la sección 4.12 (p. 306) acerca de los esfuerzos multiaxiales de fatiga están relacionados. Si las cargas son asincrónicas, aleatorias o desfasadas, entonces se trata de un caso de esfuerzo *multiaxial complejo*. Pero, incluso si el momento y el torque están en fase (o 180° fuera de fase), todavía sigue siendo un caso de esfuerzo multiaxial complejo. El factor crítico para determinar si hay esfuerzos multiaxiales simples o complejos es la dirección del esfuerzo alternante principal sobre un elemento dado del eje. Si su dirección es constante con el tiempo, entonces se considera un caso de esfuerzo multiaxial simple. Si varía con el tiempo, entonces se trata de un caso de esfuerzo multiaxial complejo. La mayoría de los ejes giratorios cargados, tanto a la flexión como a la torsión, se encuentran en la categoría compleja. Como la dirección de la componente del esfuerzo por flexión alternante tiende a ser constante, la dirección de la componente de torsión varía conforme el elemento gira alrededor del eje. Al combinarlas en el círculo de Mohr, se verá que el resultado es un esfuerzo principal alternante de dirección variable. Una excepción a lo anterior es el caso de un torque constante superpuesto sobre un momento variable con el tiempo. Como el torque constante no tiene componente alternante, para cambiar la dirección del esfuerzo alternante principal, se convierte en un caso de esfuerzo multiaxial simple. Sin embargo, incluso dicha excepción no se debe considerar si existe una concentración de esfuerzos, como orificios o cuñeros en el eje, pues introducirán esfuerzos biaxiales locales y requerirán un análisis de fatiga multiaxial complejo.

Suponga que la función de momento de flexión a lo largo del eje se conoce o calcula a partir de los datos proporcionados y que tiene tanto un componente medio M_m como un componente alternante M_a. De la misma manera, suponga que el torque sobre el eje se conoce o se calcula a partir de los datos proporcionados y, también, tiene componentes medio y alternante, T_m y T_a. Entonces, se aplica el enfoque general definido en la lista identificada como **Pasos de diseño para esfuerzos fluctuantes** en la sección 4.11 (p. 290), en combinación con los temas de esfuerzo multiaxial estudiados en la sección 4.12 (p. 306). Cualquier ubicación a lo largo del eje, que parezca tener momentos y/o torques grandes (sobre todo si están combinados con concentraciones de esfuerzos), debe examinarse para posibles fallas por esfuerzo y para ajustar adecuadamente las dimensiones de la sección transversal o las propiedades del material.

6.6 ESFUERZOS EN EL EJE

En el entendido de que las siguientes ecuaciones deben aplicarse para una diversidad de puntos sobre el eje y también deberán considerarse sus efectos multiaxiales combinados, primero se debe obtener los esfuerzos aplicados en todos los puntos de interés. Los esfuerzos más grandes alternantes y medios de flexión se encuentran en la superficie exterior y se obtienen de

$$\sigma_a = k_f \frac{M_a c}{I} \qquad \sigma_m = k_{fm} \frac{M_m c}{I} \tag{6.2a}$$

donde k_f y k_{fm} son los factores de concentración de esfuerzos de fatiga por flexión en las componentes alternante y media, respectivamente (véase las ecuaciones 4.11 y 4.17 en las pp. 273 y 294). Como el eje típico es sólido de sección transversal redonda,* se sustituyen c e I:

$$c = r = \frac{d}{2} \qquad\qquad I = \frac{\pi d^4}{64} \tag{6.2b}$$

para obtener

$$\sigma_a = k_f \frac{32M_a}{\pi d^3} \qquad\qquad \sigma_m = k_{fm} \frac{32M_m}{\pi d^3} \tag{6.2c}$$

donde d es el diámetro local del eje en la sección de interés.

Los esfuerzos cortantes alternantes y de torsión medio se obtienen a partir de

$$\tau_a = k_{fs} \frac{T_a r}{J} \qquad\qquad \tau_m = k_{fsm} \frac{T_m r}{J} \tag{6.3a}$$

donde k_{fs} y k_{fsm} son los factores de concentración de esfuerzos de torsión por fatiga para las componentes media y alternativa, respectivamente (véase la ecuación 4.11 de la p. 273 para k_{fs}; utilice los esfuerzos cortantes aplicados y la resistencia a la fluencia por cortante en la ecuación 4.17 de la p. 294 para obtener k_{fsm}). Para una sección transversal sólida redonda,* se sustituyen r y J:

$$r = \frac{d}{2} \qquad\qquad J = \frac{\pi d^4}{32} \tag{6.3b}$$

para obtener

$$\tau_a = k_{fs} \frac{16T_a}{\pi d^3} \qquad\qquad \tau_m = k_{fsm} \frac{16T_m}{\pi d^3} \tag{6.3c}$$

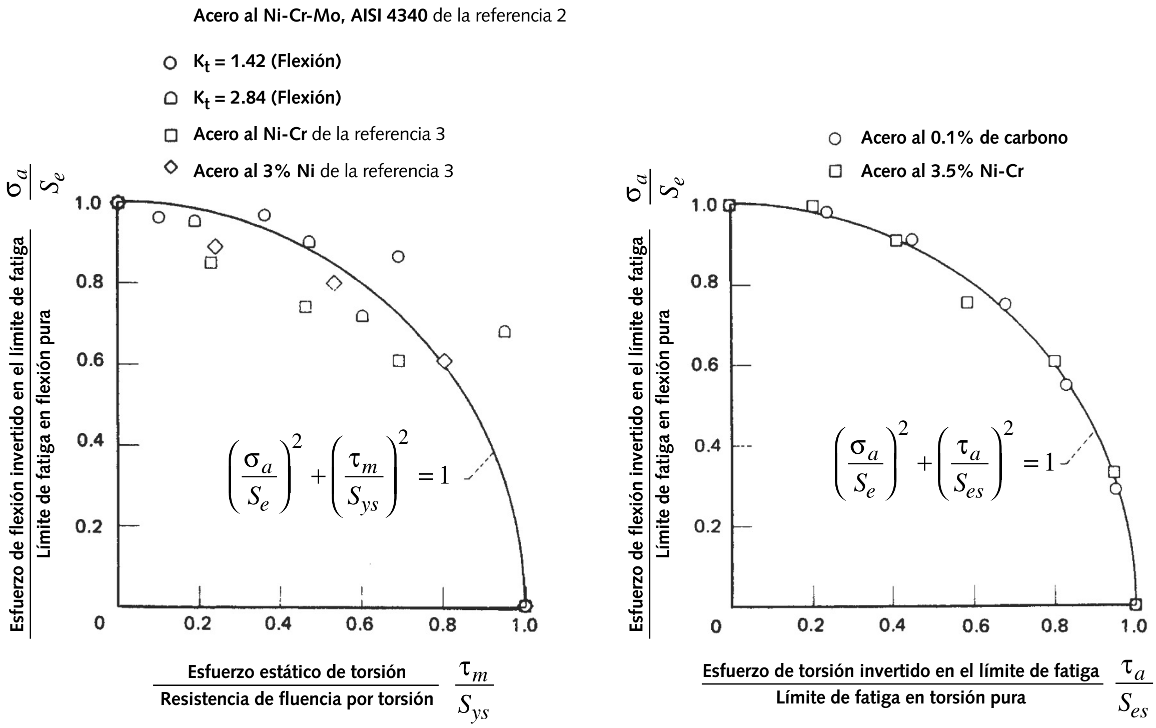
Si hay una carga de tensión axial F_z, normalmente sólo tiene una componente media (como el peso de los elementos) y se obtiene con

$$\sigma_{m_{axial}} = k_{fm} \frac{F_z}{A} = k_{fm} \frac{4F_z}{\pi d^2} \tag{6.4}$$

6.7 FALLA DEL EJE POR CARGAS COMBINADAS

En la década de 1930, Davies,[3] y Gough y Pollard,[5] en Inglaterra, realizaron extensos estudios originales de fallas por fatiga a la flexión y a la torsión combinadas, tanto en aceros dúctiles como en hierros colados frágiles. Estos primeros resultados se muestran en la figura 6-3, la cual se tomó del estándar ANSI/ASME B106.1M-1985 sobre *Diseño de eje de transmisión*. También se incluyen en las gráficas datos de investigaciones más recientes.[2,4] Se descubrió que, en los materiales dúctiles, la combinación de la torsión y la flexión por fatiga generalmente sigue la relación elíptica como la definen las ecuaciones de la figura. Se descubrió que los materiales frágiles colados (no mostrados) fallan con base en el esfuerzo principal máximo. Los descubrimientos son similares a los de esfuerzos combinados de torsión y de flexión en ciclo de carga invertida mostrados en la figura 4-15 (p. 251).

* Para un eje hueco, sustituya las expresiones adecuadas para *I* y *J*.



(*a*) Datos de prueba a la fatiga de esfuerzos combinados para flexión invertida combinada con torsión estática (de la referencia 4)

(*b*) Datos de prueba a la fatiga de esfuerzos combinados para flexión invertida combinada con torsión invertida (de la referencia 5)

FIGURA 6-3

Resultados de pruebas a la fatiga de muestras de acero sometidas a flexión y torsión combinadas (De *Design of Transmission Shafting*, Sociedad Estadounidense de Ingenieros Mecánicos, Nueva York, ANSI/ASME Estándar B106.1M-1985, con autorización)

6.8 DISEÑO DE EJES

En el diseño de ejes deben considerarse tanto los esfuerzos como las deflexiones. La deflexión suele ser el factor crítico, pues las deflexiones excesivas provocarán un desgaste rápido de los cojinetes del eje. Los engranes, las bandas o las cadenas impulsadas por el eje también tienen problemas por la desalineación introducida por las deflexiones del eje. Observe que los esfuerzos en un eje se pueden calcular localmente para varios puntos a lo largo del eje con base en las cargas conocidas y suponiendo secciones transversales. No obstante, los cálculos de la deflexión requieren que se defina la geometría total del eje, de modo que por lo general un eje se diseña aplicando consideraciones de esfuerzo y, luego, se calcula la deflexión una vez que la geometría está totalmente definida. También puede resultar crítica la relación entre las frecuencias naturales del eje (tanto a la flexión como a la torsión) y la frecuencia contenida en las funciones de fuerza y torque-tiempo. Si las funciones de fuerza son cercanas en frecuencia, a las frecuencias naturales del eje, la resonancia podría crear vibraciones, esfuerzos altos y deflexiones grandes.

Consideraciones generales

Para el diseño de ejes, se consideran algunas reglas prácticas generales como sigue:

1. Para minimizar tanto las deflexiones como los esfuerzos, la longitud del eje debe mantenerse tan corta como sea posible y tiene que minimizar los voladizos.

2. Una viga en voladizo tiene mayor deflexión que una simplemente soportada (montada sobre silletas) con las mismas longitud, carga y sección transversal, por lo que habrá de utilizarse el montaje sobre silletas a menos que, por requerimientos de diseño, sea obligatorio el eje en voladizo. (*La figura 6-2 muestra una situación donde, por cuestiones prácticas, se requiere una parte del eje en voladizo. La polea del extremo derecho del eje transporta una banda en V sinfín. Si la polea se montara entre los cojinetes, entonces el montaje del eje debería ser desarmado para cambiar una banda, lo cual no es razonable. En tales casos, el eje en voladizo sería el menor de los males.*)
3. Un eje hueco tiene una mejor razón rigidez/masa (rigidez específica), así como mayores frecuencias naturales que un eje sólido de rigidez o resistencia comparables, pero será más costoso y de mayor diámetro.
4. Si es posible, intente ubicar los incrementadores de esfuerzos alejados de las regiones con momentos de flexión altos, luego minimice sus efectos con radios y alivios generosos.
5. Si la preocupación principal es minimizar la deflexión, entonces el material indicado sería un acero al bajo carbono, puesto que su rigidez es tan alta como la del más costoso de los aceros, mientras un eje diseñado para bajas deflexiones suele tener bajos esfuerzos.
6. Las deflexiones en los engranes transportados sobre el eje no deberían exceder 0.005 in aproximadamente, en tanto que la pendiente relativa entre los ejes de los engranes debería ser menor de 0.03°, aproximadamente.[1]
7. Si se emplean cojinetes de manguito simple, la deflexión del eje a través de la longitud del cojinete debe ser menor que el espesor de la película de aceite en el cojinete.[1]
8. Si se utilizan cojinetes con elementos giratorios excéntricos y no de autocierre, la pendiente del eje en el cojinete deberá mantenerse por debajo de 0.04°, aproximadamente.[1]
9. Si hay cargas de empuje axial, deberán transferirse a tierra a través de un solo cojinete de empuje por cada dirección de carga. No divida las cargas axiales entre varios cojinetes de empuje, ya que la expansión térmica sobre el eje puede sobrecargar dichos cojinetes.
10. La primera frecuencia natural del eje debería ser por lo menos tres veces la frecuencia de la mayor fuerza esperada durante el servicio, y preferiblemente mucho más. (Un factor de 10 o más es preferible, pero con frecuencia es difícil de lograr en sistemas mecánicos.)

6

Diseño para ciclo de flexión y torsión constantes invertidas

Este caso de carga es un subconjunto del caso general de flexión variable y torsión variable, pero debido a la ausencia de una componente alternante de esfuerzo de torsión se considera un caso de fatiga multiaxial simple. (Sin embargo, la presencia de concentraciones locales de esfuerzos puede ocasionar esfuerzos multiaxiales complejos.) Este caso de carga simple se ha investigado experimentalmente, por lo que existen datos de falla de piezas cargadas de esta manera, como se ilustra en la figura 6-3. La ASME ha definido un procedimiento para el diseño de ejes cargados de este modo.

EL MÉTODO ASME El estándar ANSI/ASME para el *Diseño de ejes de transmisión* se publicó con el código B106.1M-1985. El estándar presenta un procedimiento simplificado para el diseño de ejes. El procedimiento ASME *supone que la carga es de*

ciclo de flexión invertida (componente media de la flexión igual a cero) y torque constante (componente del torque alternante igual a cero) a un nivel que genera esfuerzos por debajo de la resistencia a la fluencia por torsión del material. El estándar se justifica porque muchos ejes de máquinas entran en esta categoría. Se utilizan la curva elíptica de la figura 6-3, normalizada por la resistencia física a la flexión sobre el eje σ_a, y la **resistencia a la fluencia por tensión** sobre el eje σ_m, como la envoltura de falla. La resistencia a la fluencia por tensión se sustituye por la resistencia a la fluencia por torsión empleando la relación de Von Mises de la ecuación 3.9 (p. 181). La deducción de la ecuación ASME del eje es como sigue.

Partiendo de la relación de la envoltura de falla mostrada en la figura 6-3*a*:

$$\left(\frac{\sigma_a}{S_e}\right)^2+\left(\frac{\tau_m}{S_{ys}}\right)^2=1 \tag{6.5a}$$

se introduce un factor de seguridad N_f

$$\left(N_f\frac{\sigma_a}{S_e}\right)^2+\left(N_f\frac{\tau_m}{S_{ys}}\right)^2=1 \tag{6.5b}$$

Considerando la relación de Von Mises para S_{ys} de la ecuación 3.9 (p. 181):

$$S_{ys}=S_y/\sqrt{3} \tag{6.5c}$$

y sustituyéndola en la ecuación 6.5*b*.

$$\left(N_f\frac{\sigma_a}{S_e}\right)^2+\left(N_f\sqrt{3}\frac{\tau_m}{S_y}\right)^2=1 \tag{6.5d}$$

Sustituyendo la expresión para σ_a y τ_m de las ecuaciones 6.2*c* y 6.3*c*, respectivamente:

$$\left[\left(k_f\frac{32M_a}{\pi d^3}\right)\left(\frac{N_f}{S_e}\right)\right]^2+\left[\left(k_{fsm}\frac{16T_m}{\pi d^3}\right)\left(\frac{N_f\sqrt{3}}{S_y}\right)\right]^2=1 \tag{6.5e}$$

lo cual se puede replantear para resolver el diámetro d del eje como

$$d=\left\{\frac{32N_f}{\pi}\left[\left(k_f\frac{M_a}{S_f}\right)^2+\frac{3}{4}\left(k_{fsm}\frac{T_m}{S_y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} \tag{6.6a}$$

La notación utilizada en la ecuación 6.6 es ligeramente diferente a la del estándar ANSI/ASME para ser consistente con la notación que se usa en este texto. El estándar usa el procedimiento de reducción de resistencia a la fatiga S_f por el factor k_f de concentración de esfuerzo por fatiga, en vez de usar k_f como un incrementador de esfuerzos, como se ha venido haciendo de forma consistente en el libro. En la mayoría de los casos (incluyendo éste), el resultado es el mismo. El estándar ASME también supone que la concentración de esfuerzos para el esfuerzo medio k_{fsm} es 1 en todos los casos, lo cual da

$$d=\left\{\frac{32N_f}{\pi}\left[\left(k_f\frac{M_a}{S_f}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{T_m}{S_y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} \tag{6.6b}$$

La ASME abandonó el estándar de diseño de ejes, de modo que ahora sólo tiene valor histórico. Si se utiliza, la ecuación 6.6 se debería aplicar únicamente en situaciones donde las cargas son como se supone deben ser, es decir, un torque constante y un ciclo de momento invertido. **El estándar ASME proporciona resultados no conservadores si cualquiera de las componentes de carga que se suponen iguales a cero no lo son en un caso determinado. Para el diseño de ejes, se recomienda emplear el enfoque más general de la ecuación 6.8 (véase más adelante), que incluye todas las situaciones de carga.**

La figura 6-4 muestra la línea elíptica de falla de Gough de la figura 6-3 superpuesta sobre las líneas de Gerber, Soderberg y Goodman modificado. Observe que la elipse está muy cerca de la línea de Gerber en el lado izquierdo, pero se aleja al intersecar la resistencia a la fluencia sobre el eje de esfuerzo medio. La elipse tiene la ventaja de tomar en cuenta la posible fluencia sin necesidad de introducir una restricción adicional que implique la línea de fluencia. Sin embargo, aun cuando la línea elíptica de Gough se ajusta bien a los datos de falla, es menos conservadora que la combinación de la línea de Goodman y la línea de fluencia utilizada como la envoltura de falla.

6

Diseño con flexión y torsión fluctuantes

Cuando el torque no es constante, su componente alternante crea un estado de esfuerzo multiaxial complejo en el eje. Entonces se utiliza el procedimiento descrito en la sección 4.12 (p. 306), que calcula las componentes de Von Mises de los esfuerzos alternante y medio aplicando las ecuaciones 4.22 (p. 309). Un eje giratorio con flexión y torsión combinadas se encuentra en un estado de esfuerzo biaxial, lo cual permite el uso de la versión bidimensional de la ecuación 4.22*b*.

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}$$
$$\sigma'_m = \sqrt{\left(\sigma_m + \sigma_{m_{axial}}\right)^2 + 3\tau_m^2} \qquad (6.7a)$$

Con tales esfuerzos de Von Mises se introducen ahora al diagrama modificado de Goodman (MGD) para el material seleccionado, para obtener el factor de seguridad, o bien, se aplican las ecuaciones 4.18 (pp. 297-298) sin dibujar el MGD.

Para objetivos de diseño, cuando se desea calcular el diámetro del eje, las ecuaciones 6.2, 6.3 y 6.6, en la forma presentada, requieren iteración para obtener el valor de d a partir de las cargas conocidas y suponiendo las propiedades del material. Lo anterior no es difícil si se utiliza un resolvedor de ecuaciones con capacidad iterativa. No obstante, la solución con calculadora es muy engorrosa con las ecuaciones en esta forma. Si se supone un caso de falla específico para el diagrama modificado de Goodman, las ecuaciones se manipulan para obtener una ecuación de diseño (similar a la ecuación 6.6) y calcular así el diámetro d del eje en la sección de interés. Si el modelo de falla empleado es el caso 3 de la sección 4.11 (p. 290), el cual supone que las cargas media y alternante mantienen una razón constante,* la falla ocurrirá en el punto R de la figura 4-46*c* (p. 296). Entonces, el factor de seguridad definido en la ecuación 4.18*e* (p. 298) es

$$\frac{1}{N_f} = \frac{\sigma'_a}{S_f} + \frac{\sigma'_m}{S_{ut}} \qquad (6.7b)$$

donde N_f es el factor de seguridad deseado, S_f es la resistencia corregida a la fatiga en el ciclo de vida elegido (de la ecuación 4.10 en la p. 268) y S_{ut} es la resistencia última a la tensión del material.

* Observe que esta suposición también está implícita en la ecuación 6.6 del método ASME.

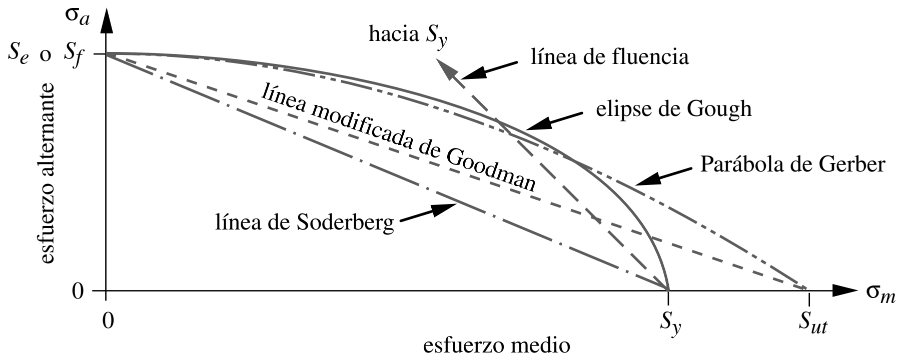


FIGURA 6-4

Línea elíptica de falla usando la resistencia a la fluencia, mostrada junto con otras líneas de falla para esfuerzos variables

6

Si ahora también se supone que la carga axial sobre el eje es cero y se sustituyen las ecuaciones 6.2*c*, 6.3*c* y 6.7*a* en la ecuación 6.7*b,* se tiene

$$d = \left\{ \frac{32 N_f}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\left(k_f M_a\right)^2 + \frac{3}{4}\left(k_{fs} T_a\right)^2}}{S_f} + \frac{\sqrt{\left(k_{fm} M_m\right)^2 + \frac{3}{4}\left(k_{fsm} T_m\right)^2}}{S_{ut}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}} \tag{6.8}$$

que se puede utilizar como una ecuación de diseño para obtener el diámetro del eje para cualquier combinación de carga de flexión y de torsión con los supuestos anotados arriba, de cero carga axial y razón constante entre los valores alternante y medio de carga en el tiempo.

EJEMPLO 6-1

Diseño de ejes para torsión constante y ciclo de flexión invertida

Problema **Diseñe un eje para sostener los accesorios mostrados en la figura 6-5 con un factor de seguridad mínimo de diseño igual a 2.5.**

Se proporciona **En la figura 6-5 se muestra un diseño preliminar de la configuración del eje. Debe transmitir 2 hp a 1 725 rpm. El torque y la fuerza sobre el engrane son constantes en el tiempo.**

Suposiciones **No existen cargas axiales aplicadas. Se usará acero para vida infinita. Suponga un factor de concentración de esfuerzos de 3.5 para los radios de los escalones en flexión, 2 para los radios de los escalones en torsión y 4 en los cuñeros.* Como el torque es constante y el momento de flexión es de ciclo invertido, se debe usar el método ASME de la ecuación 6.6, y se comparará con el método general usando la ecuación 6.8**

Solución **Véase las figuras 6-5 a 6-8.**

1. Primero determine el torque transmitido a partir de la potencia y la velocidad angular dadas usando la ecuación 6.1 (p. 415).

* Consulte R.E. Peterson, *Stress Concentration Factors*, John Wiley, 1974, figuras 72, 79 y 183, las cuales muestran estos números como máximos aproximados para estos contornos y cargas. Como se crea un diseño preliminar en esta etapa y no se tiene aún definido con detalle la geometría del eje, sería infructuoso intentar definir tales factores más exactamente. Lo anterior se puede hacer más tarde y refinar el diseño adecuadamente.

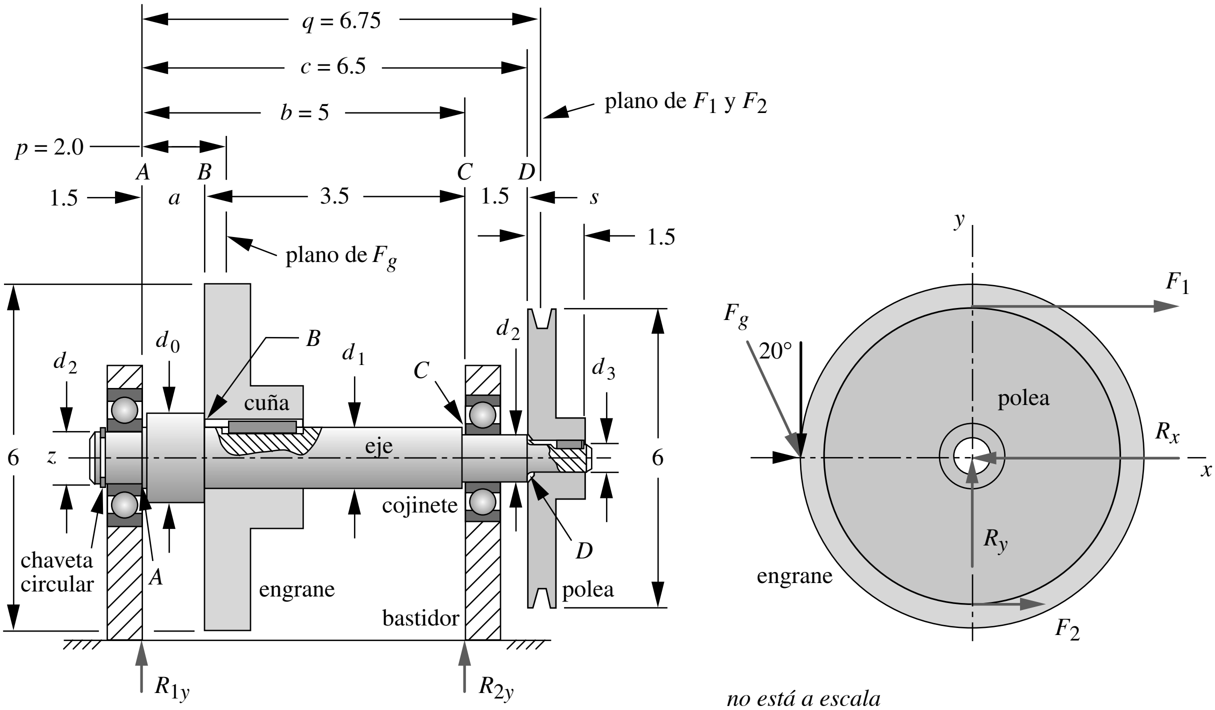


FIGURA 6-5

Geometría de un diseño preliminar en los ejemplos 6-1 a 6-3

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{2\ \text{hp}\left(6\,600\ \dfrac{\text{in - lb/seg}}{\text{hp}}\right)}{1\,725\ \text{rpm}\left(\dfrac{2\pi}{60}\ \dfrac{\text{rad/seg}}{\text{rpm}}\right)} = 73.1\ \text{lb - in} \tag{a}$$

Este torque sólo existe sobre la porción del eje entre la polea y el engrane, y es de magnitud uniforme a lo largo, como se indica en la figura 6-6.

2. Las fuerzas tangenciales sobre la polea y el engrane se obtienen a partir del torque y sus radios respectivos. La banda en V tiene tensión en ambos lados, mientras la razón entre la fuerza F_1 sobre el lado apretado y F_2 sobre el lado "flojo" se toma usualmente como 5. La fuerza neta asociada con el torque impulsor es $F_n = F_1 - F_2$, pero la fuerza que flexiona el eje es $F_s = F_1 + F_2$. Combinando tales relaciones, se tiene que $F_s = 1.5F_n$. Considerando el extremo de la polea:

$$F_n = \frac{T}{r} = \frac{73.1\ \text{lb - in}}{3\ \text{in}} = 24.36\ \hat{\mathbf{i}}\ \ \text{lb}$$

$$F_s = 1.5F_n = 36.54\ \hat{\mathbf{i}}\ \ \text{lb} \tag{b}$$

3. La fuerza tangencial en el diente de la rueda dentada es

$$F_{g_{tangencial}} = \frac{T}{r} = \frac{73.1\ \text{lb - in}}{3\ \text{in}} = -24.36\ \hat{\mathbf{j}}\ \ \text{lb} \tag{c}$$

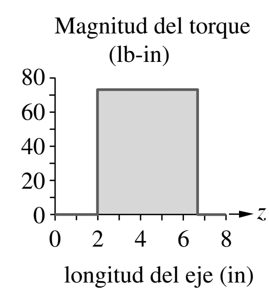


FIGURA 6-6

Torque del ejemplo 6-1

Como se muestra, el engrane recto tiene un ángulo de presión de 20°, lo cual significa que también hay una componente radial de fuerza en el diente del engrane igual a

$$F_{g_{radial}} = F_{g_{tangencial}} \tan(20°) = 8.87\ \hat{\imath}\ \text{lb} \tag{d}$$

4. Se considerará que las fuerzas en el engrane y la polea están concentradas en sus centros. Resuelva las fuerzas de reacción en los planos *xz* y *yz*, mediante $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_y = 0$, con las dimensiones supuestas de la viga, $a = 1.5$, $b = 5$ y $c = 6.5$, lo cual da $p = 2$ y $q = 6.75$.

$$\sum M_A = R_2 b + F_g p + F_s q = 0$$

$$R_2 = -\frac{1}{b}\left(F_g p + F_s q\right) = -\frac{1}{5}\left(2F_g + 6.75F_s\right) = -0.40F_g - 1.35F_s \tag{e}$$

$$\sum F = R_1 + F_g + F_s + R_2 = 0$$

$$R_1 = -F_g - F_s - R_2 = -F_g - F_s - \left(-0.40F_g - 1.35F_s\right) = -0.60F_g + 0.35F_s \tag{f}$$

Las ecuaciones (*e*) y (*f*) se despejan para R_1 y R_2 en cada plano, usando las componentes adecuadas de las cargas aplicadas F_g y F_s.

$$\begin{aligned}
R_{1_x} &= -0.60F_{g_x} + 0.35F_{s_x} = -0.60(8.87) + 0.35(36.54) = 7.47 \text{ lb}\\
R_{1_y} &= -0.60F_{g_y} + 0.35F_{s_y} = -0.60(-24.36) + 0.35(0) = 14.61 \text{ lb}\\
R_{2_x} &= -0.40F_{g_x} - 1.35F_{s_x} = -0.40(8.87) - 1.35(36.54) = -52.87 \text{ lb}\\
R_{2_y} &= -0.40F_{g_y} - 1.35F_{s_y} = -0.40(-24.36) - 1.35(0) = 9.74 \text{ lb}
\end{aligned} \tag{g}$$

5. Ahora se calculan la carga de cortante y el momento de flexión que actúan sobre el eje. Escriba una ecuación para la función de carga *q* usando funciones de singularidad, integrándolas para obtener la función de cortante *V*, e integrar otra vez para la función de momento *M*.

$$q = R_1\langle z-0\rangle^{-1} + F_g\langle z-2\rangle^{-1} + R_2\langle z-5\rangle^{-1} + F_s\langle z-6.75\rangle^{-1} \tag{h}$$

$$V = R_1\langle z-0\rangle^{0} + F_g\langle z-2\rangle^{0} + R_2\langle z-5\rangle^{0} + F_s\langle z-6.75\rangle^{0} \tag{i}$$

$$M = R_1\langle z-0\rangle^{1} + F_g\langle z-2\rangle^{1} + R_2\langle z-5\rangle^{1} + F_s\langle z-6.75\rangle^{1} \tag{j}$$

Recuerde que las constantes de integración C_1 y C_2 son cero cuando se incluyen las fuerzas de reacción en la ecuación.

6. Sustituya los valores de las cargas y las fuerzas de reacción para cada dirección de coordenadas en las ecuaciones (*h*), (*i*) y (*j*), luego evalúelas para todos los valores de *z* a lo largo del eje. Después, combine las componentes de la función del momento de los planos *xz* y *yz* (usando el teorema de Pitágoras) para obtener la magnitud máxima de la función de momento.

En la figura 6-7 se muestran las distribuciones de cortante y momento sobre la longitud del eje. El torque aplicado es uniforme sobre la porción del eje entre los puntos *B* y *D,* como se ilustra en la figura 6-6. Dentro de esa longitud, hay tres ubicaciones de interés, donde se presenta un momento combinado con una concentración de esfuerzos: el punto *B* en el escalón y el cuñero debajo del engrane ($M_B = \pm 33$ lb-in), el punto *C* a la derecha del cojinete, donde existe un escalón de radio pequeño para ajustar el cojinete ($M_C = \pm 63$ lb-in) y el punto *D* en el escalón de la polea ($M_D = \pm 9$ lb-in). Observe que debido a su alta concentración de esfuerzos, la ranura de la chaveta circular utilizada para la fijación axial se colocó en el extremo del eje, donde el momento y el torque son ambos iguales a cero.

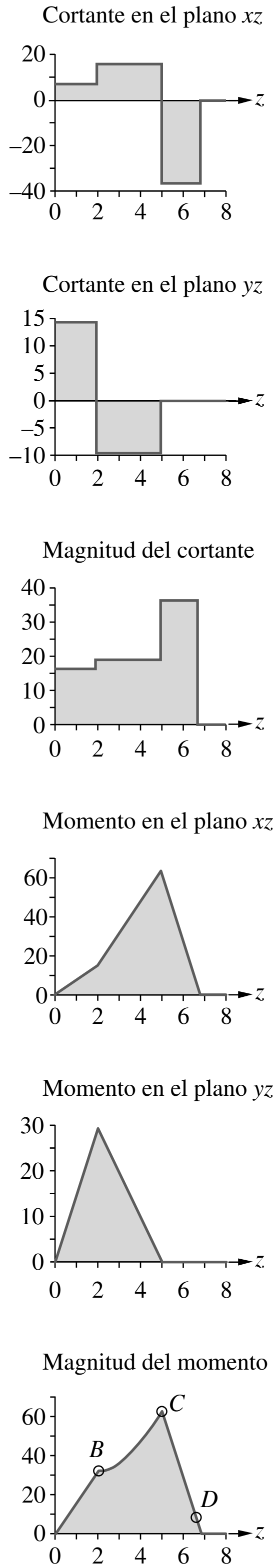


FIGURA 6-7
Carga del ejemplo 6-1

7. Se necesita elegir un material de prueba para realizar los cálculos. Se intentará primero con un acero barato rolado en frío al bajo carbono, como un SAE 1020 con S_{ut} = 65 kpsi y S_y = 38 kpsi. Aun cuando no es excepcionalmente fuerte, el material tiene baja sensibilidad a la muesca, lo cual es una ventaja, en vista de las grandes concentraciones de esfuerzos. Calcule la resistencia física sin corregir, con la ecuación 4.5 (p. 260):

$$S_{e'} = 0.5S_{ut} = 0.5(65\ 000) = 32\ 500 \text{ psi} \tag{k}$$

Lo anterior se debe reducir por varios factores para tomar en cuenta las diferencias entre la pieza y la muestra de prueba.

$$\begin{aligned} S_e &= C_{carga} C_{tamaño} C_{sup} C_{temp}\, C_{conf}\, S_{e'} \\ S_e &= (1)(1)(0.84)(1)(1)(32\ 500) = 27\ 300 \text{ psi} \end{aligned} \tag{l}$$

La carga es flexión y torsión, de modo que C_{carga} es 1. Como todavía no se conoce el tamaño de la pieza, temporalmente se supondrá que $C_{tamaño}$ = 1, pero se ajustará más adelante. Se elige C_{sup} para un acabado maquinado, ya sea de la figura 4-26 (p. 262) o con la ecuación 4.7*e* (p. 263). La temperatura no es elevada, de modo que C_{temp} = 1, por lo que se supone un 50% de confiabilidad en esta etapa de diseño preliminar con C_{conf} = 1.

8. La sensibilidad a la muesca del material se obtiene de la ecuación 4.13 (p. 273) o de la figura 4-36 (pp. 274-275) y es q = 0.5 a la flexión y q = 0.57 a la torsión, suponiendo un radio de la muesca igual a 0.01 in.

9. El factor de concentración de esfuerzos por fatiga se obtiene con la ecuación 4.11*b* (p. 273) usando la concentración de esfuerzo geométrico supuesta arriba. Para el esfuerzo de flexión en el escalón del punto *C*:

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.5(3.5 - 1) = 2.25 \tag{m}$$

La concentración de esfuerzos para el escalón cargado por torsión es menor que para la misma geometría carga por flexión:

$$K_{fs} = 1 + q(K_{ts} - 1) = 1 + 0.57(2 - 1) = 1.57 \tag{n}$$

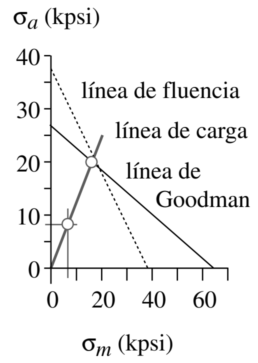
A partir de la ecuación 4.17 (p. 294) se encuentra que, en este caso, se debería usar el mismo factor sobre la componente del esfuerzo medio por torsión:

$$K_{fsm} = K_{fs} = 1.57 \tag{o}$$

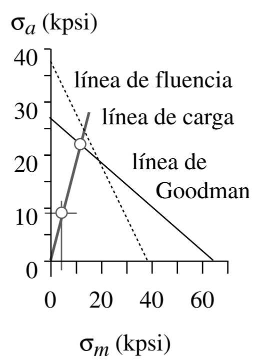
10. El diámetro del eje en el punto *C* se determina ahora de la ecuación 6.6, con la magnitud de momento en ese punto de 63.9 in-lb.

$$\begin{aligned} d_2 &= \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\left(k_f \frac{M_a}{S_f} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(k_{fsm} \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} \\ &= \left\{ \frac{32(2.5)}{\pi} \left[\left(2.25 \frac{63.9}{27\ 300} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(1.57 \frac{73.1}{38\ 000} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} = 0.531 \text{ in} \end{aligned} \tag{p}$$

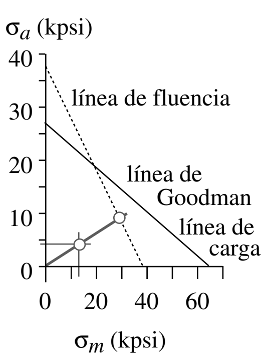
Si se hace que k_{fsm} sea igual a 1, como lo recomienda la ASME, la ecuación 6.6 da como resultado d = 0.520 in. Si se utiliza la ecuación más general 6.8, el resultado es d = 0.557 in. Observe que el método ASME es menos conservador que la



(a) Esfuerzos en el punto *B*



(b) Esfuerzos en el punto *C*



(c) Esfuerzos en el punto *D*

FIGURA 6-8

Diagramas modificados de Goodman para tres puntos sobre la flecha del ejemplo 6-1

ecuación 6.8, ya que proporciona diámetros de flecha menores para el mismo factor de seguridad. En la figura 6-8*b* se muestra un diagrama modificado de Goodman para estos elementos de esfuerzo, el cual predice la falla por fatiga.

11. En el punto *B*, debajo del engrane, el momento es menor, pero los factores de concentración de esfuerzo por fatiga K_f y K_{fs} son mayores y tienen que calcularse. En *B*:

$$
\begin{aligned}
K_f &= 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.5(4 - 1) = 2.50 \\
K_{fs} &= 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.57(4 - 1) = 2.70
\end{aligned}
\tag{q}
$$

12. El diámetro mínimo recomendado en el punto *B* de acuerdo con la ecuación 6.6 es

$$
d_1 = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\left(k_f \frac{M_a}{S_f} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(k_{fsm} \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}
$$

$$
= \left\{ \frac{32(2.5)}{\pi} \left[\left(2.50 \frac{32.8}{27\,300} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(2.71 \frac{73.1}{38\,000} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} = 0.517 \text{ in} \tag{r}
$$

Si k_{fsm} se hace igual a 1, como lo recomienda la ASME, la ecuación 6.6 nos da $d = 0.444$ in. Si se usa la ecuación general 6.8 más general, el resultado es $d = 0.524$ in. De nuevo, el método ASME es menos conservador, comparado con la ecuación 6.8. En la figura 6-8*a* se presenta el diagrama modificado de Goodman para este elemento de esfuerzo, el cual predice la falla por fatiga.

13. Otra ubicación de falla posible es el escalón contra el que se asienta la polea en el punto *D*. El momento es menor que en *C*, con un valor aproximado de 9.1 lb-in. (Véase la figura 6-7.) Sin embargo, el eje tiene ahí el diámetro más pequeño y el mismo orden de concentración de esfuerzos que en el punto *C*. (El cuñero de la polea está en una región de cero momento y, por lo tanto, se ignora). Mediante esos datos en la ecuación 6.6 (p. 420) para el punto *D*:

$$
d_3 = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\left(k_f \frac{M_a}{S_f} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(k_{fsm} \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}
$$

$$
= \left\{ \frac{32(2.5)}{\pi} \left[\left(2.25 \frac{9.1}{27\,300} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(1.57 \frac{73.1}{38\,000} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} = 0.411 \text{ in} \tag{s}
$$

Si k_{fsm} se hace igual a 1, como lo recomienda la ASME, la ecuación 6.6 nos da $d = 0.360$ in. Si se utiliza la ecuación 6.8 más general, el resultado es $d = 0.387$ in. En la figura 6-8*c* se muestra el diagrama modificado de Goodman para este elemento de esfuerzo, el cual predice la falla por fluencia.

14. A partir de estos cálculos preliminares, se determinarán tamaños razonables para los cuatro diámetros escalonados, d_0, d_1, d_2, y d_3 de la figura 6-5 (p. 423). El diámetro estándar inmediato mayor del cojinete de bolas para $d_2 = 0.531$ in calculado para el punto *C*, es de 15 mm, o bien, 0.591 in. Si se elige este valor para d_2, se hacen $d_3 = 0.50$ in y $d_1 = 0.625$ in. El tamaño de fábrica d_0 es entonces 0.75 in, dejando el rolado de fábrica para el diámetro exterior en la pestaña del engrane. Tales dimensiones

proporcionarán factores de seguridad que cumplen o exceden la especificación. Los esfuerzos y los factores de seguridad en los tres puntos se deberían recalcular ahora con una resistencia reducida más exacta (por ejemplo, $C_{tamaño}$) y factores de concentración de esfuerzos con base en las dimensiones finales.*

EJEMPLO 6-2

Diseño de un eje para torsión repetida con flexión repetida

Problema **Diseñe un eje para soportar los accesorios mostrados en la figura 6-5 (p. 423) con un factor de seguridad de diseño mínimo de 2.5.**

Se proporciona **El torque y el momento sobre el eje son variables con el tiempo y en modo repetido, es decir, sus componentes alternante y media son de igual magnitud. Las componentes alternante y media del torque son ambas de 73 lb-in, lo que hace que el torque pico sea del doble del valor medio del ejemplo 6-1. Las componentes media y alternante de momento son iguales en magnitud. La figura 6-9 muestra el momento pico y el torque pico, los cuales son dos veces el valor de sus contrapartes de ciclo invertido de la figura 6-5 y del ejemplo 6-1, debido a la presencia del momento medio.**

Suposiciones **No hay cargas axiales aplicadas. Se usará acero para vida infinita. Suponga un factor de concentración de esfuerzos de 3.5 para los radios del escalón en flexión, 2 para los radios del escalón en torsión y 4 en los cuñeros. Como la carga torsional no es constante y el momento de flexión no es de ciclo invertido, no se debe utilizar el método ASME de la ecuación 6.6 (p. 420).**

Solución **Véase las figuras 6-5 (p. 423), 6-9 y 6-10, y la tabla 6-1.**

1. Para efectos de comparación, con excepción de la carga, se mantendrán todos los factores iguales a los del ejemplo anterior. El mismo acero SAE 1020, rolado en frío al bajo carbono, tiene S_{ut} = 65 kpsi, S_y = 38 kpsi, y utiliza una S_e corregida igual a 27.3 kpsi. Su sensibilidad a la muesca es de 0.5.

2. Existen tres puntos de interés, identificados como *B*, *C* y *D*, en la figura 6-5 (p. 423). Los factores de concentración de esfuerzos por fatiga se asumen como los mismos en *C* y *D*, que son más grandes en *B*. Véase el ejemplo 6-1 (p. 422) para su cálculo.

3. El diámetro requerido del eje en el punto *C* se obtiene con la ecuación 6.8 (p. 422).

$$d_2 = \left\{ \frac{32 N_f}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\left(k_f M_a\right)^2 + \frac{3}{4}\left(k_{fs} T_a\right)^2}}{S_f} + \frac{\sqrt{\left(k_{fm} M_m\right)^2 + \frac{3}{4}\left(k_{fsm} T_m\right)^2}}{S_{ut}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{ \frac{32(2.5)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{[2.25(64)]^2 + \frac{3}{4}[1.57(73.1)]^2}}{27\,300} + \frac{\sqrt{[2.25(64)]^2 + \frac{3}{4}[1.57(73.1)]^2}}{65\,000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$d_2 = 0.614 \qquad (a)$$

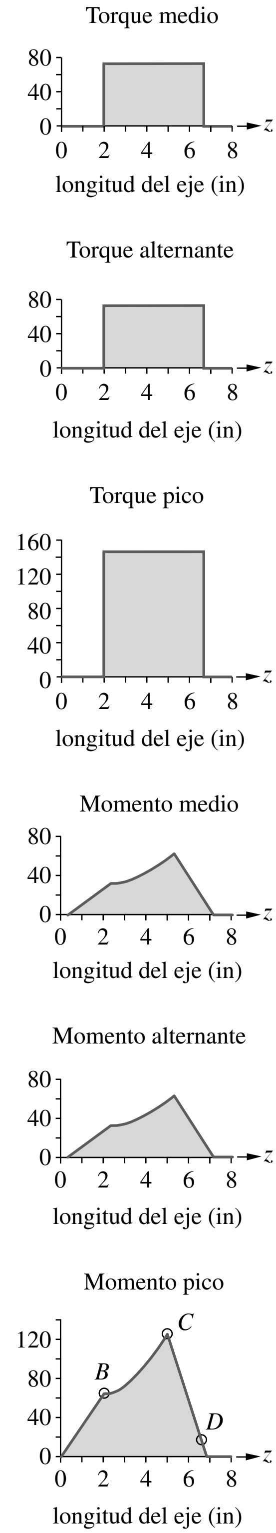


FIGURA 6-9

Torques y momentos del ejemplo 6-2 (lb-in)

* Los archivos EX10-01a, EX10-01b, EX10-01c, y EX10-01d se encuentran en el CD-ROM.

Compare esto con el valor de 0.557 de la misma ecuación del ejemplo anterior, cuando las cargas eran constantes.

4. En el punto B el diámetro requerido, aplicando la ecuación 6.8, es

$$d_1 = \left\{ \frac{32(2.5)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{[2.5(32.8)]^2 + \frac{3}{4}[2.71(73.1)]^2}}{27\,300} + \frac{\sqrt{[2.5(32.8)]^2 + \frac{3}{4}[2.71(73.1)]^2}}{65\,000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$d_1 = 0.632 \qquad (b)$$

Compare esto con el valor de 0.517 de la misma ecuación del ejemplo anterior, donde las cargas eran constantes.

5. Y en el punto D:

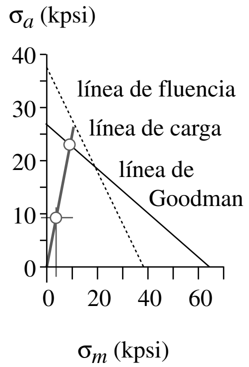
$$d_3 = \left\{ \frac{32(2.5)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{[2.25(9.1)]^2 + \frac{3}{4}[1.57(73.1)]^2}}{27\,300} + \frac{\sqrt{[2.25(9.1)]^2 + \frac{3}{4}[1.57(73.1)]^2}}{65\,000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$d_3 = 0.512 \qquad (c)$$

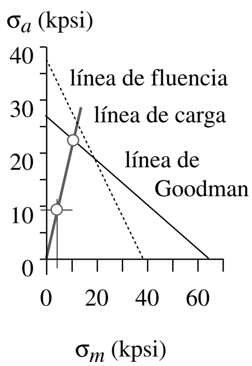
Compare esto con el valor de $d_3 = 0.411$ de la misma ecuación del ejemplo anterior, donde las cargas eran constantes.

6. La presencia de esfuerzos repetidos requiere un eje más grande para mantener el mismo factor de seguridad. Se necesita el cojinete estándar inmediato mayor en C, el cual tiene 17 mm (0.669 in) de diámetro interior. Seleccionando este valor para d_2, se intentan valores para $d_3 = 0.531$ in, que es el valor estándar inmediato menor en pulgadas y $d_1 = 0.750$ in, que es el valor estándar inmediato mayor en pulgadas. El tamaño de fábrica es ahora 0.875 in y se deja rolado en frío para el diámetro exterior en la pestaña del engrane. Estas dimensiones proporcionan factores de seguridad que cumplen o exceden las especificaciones, como se indica en los diagramas modificados de Goodman de la figura 6-10. Los esfuerzos y factores de seguridad de los tres puntos se deberían recalcular ahora usando una resistencia reducida más precisa, así como factores de concentración de esfuerzos con base en las dimensiones finales.

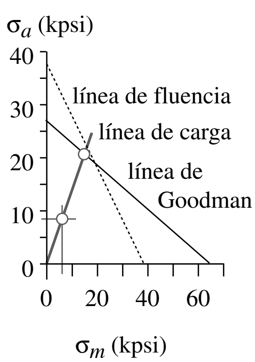
7. La tabla 6-1 compara los resultados de los ejemplos 6-1 y 6-2 para mostrar las diferencias en los diámetros necesarios del eje para carga constante o carga fluctuante. Observe que la carga pico del ejemplo 6-1 es la mitad de la del ejemplo 6-2. Los factores de seguridad finales son más grandes que los mínimos de diseño debido a la necesidad de dimensionar el eje para ajustarse a un tamaño de cojinete disponible. Los archivos EX10-02a, EX10-02b, EX10-02c y EX10-02d se encuentran en el CD-ROM.



(a) Esfuerzos en el punto B



(b) Esfuerzos en el punto C



(c) Esfuerzos en el punto D

FIGURA 6-10

Diagramas de Goodman modificados para tres puntos sobre el eje del ejemplo 6-2

6.9 DEFLEXIÓN EN EJES

Un eje es una viga que se flexiona transversalmente y también una barra de torsión que se flexiona por torsión. Es necesario analizar ambos modos de flexión. Los principios del análisis de flexión se revisaron en el capítulo 2 y no se repetirá el detalle aquí. En la sección 2.10 (p. 92) se desarrolló un procedimiento para el cálculo de las deflexiones en vigas, usando funciones de singularidad, y en la sección 2.12 (p. 107) se investigó la deflexión por torsión.

Tabla 6-1 Comparación de los resultados del diseño de eje para los ejemplos 6-1 y 6-2

Diámetros mínimos proporcionados $N_f = 2.5$ en cada punto

Diseño	Torque Alt. Máx.	Torque Medio Máx	Momento Alt. Máx	Momento Medio Máx.	d_0 (in) nom	d_1 (in) mín / nom	d_2 (in) mín / nom	d_3 (in) mín / nom	S_f en C
Ej. 6-1	0	73.1	63.9	0	0.750	0.517 / 0.625	0.557 / 0.591	0.411 / 0.500	2.5 / 3.0
Ej. 6-2	73.1	73.1	63.9	63.9	0.875	0.632 / 0.750	0.614 / 0.669	0.512 / 0.531	2.5 / 3.8

Ejes como vigas

Los métodos de la sección 2.10 son directamente aplicables. La única complicación es la presencia frecuente en un eje de los escalones que cambian las propiedades de la sección transversal en toda su longitud. La integración de la función M / EI se vuelve mucho más compleja por el hecho de que tanto I como M son ahora funciones de la dimensión a lo largo del eje-viga. En vez de hacer una integración analítica como se hizo en la sección 2.10 para el caso de I constante, se utilizará una técnica de integración numérica, como la regla de Simpson o la regla trapezoidal, para formar las funciones de pendiente y deflexión a partir de la función M / EI. Lo anterior se demostrará con un ejemplo. Si las cargas transversales y los momentos varían con el tiempo, entonces se deben emplear las magnitudes máximas absolutas para calcular las deflexiones. La función de deflexión dependerá de la carga y las condiciones limitantes de la viga, es decir, si es simplemente soportada, en voladizo o suspendida.

6

Ejes como barras de torsión

Los métodos de la sección 2.12 son directamente aplicables, sobre todo la ecuación 2.24 (p. 108), ya que la única sección transversal práctica para un eje es la circular. La deflexión angular θ (en radianes) para un eje de longitud l, módulo de cortante G, momento de inercia polar J, con torque T, es

$$\theta = \frac{Tl}{GJ} \tag{6.9a}$$

a partir de la cual es posible obtener la expresión para lo constante de resorte de torsión:

$$k_t = \frac{T}{\theta} = \frac{GJ}{l} \tag{6.9b}$$

Si el eje es escalonado, las secciones transversales que cambian complican el cálculo de la deflexión por torsión y de la constante del resorte debido al cambio del momento polar de inercia J.

Cualquier grupo de secciones adyacentes con diámetro diferente en el eje se pueden considerar un conjunto de resortes en serie, puesto que sus deflexiones se suman y el torque pasa sin modificación. Se calcula una constante de resorte efectiva o un módulo J efectivo para cualquier segmento del eje, con la finalidad de encontrar la deflexión relativa entre sus extremos. Para el segmento de un eje que contiene tres porciones de secciones transversales diferentes, J_1, J_2 y J_3, con sus longitudes correspondientes l_1, l_2 y l_3, la deflexión total es simplemente la suma de las deflexiones de cada sección sometida al mismo torque. Se supondrá que el material es consistente a todo lo largo.

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{T}{G}\left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} + \frac{l_3}{J_3}\right) \tag{6.9c}$$

La constante efectiva del resorte k_{ef} de un eje escalonado de tres segmentos es

$$\frac{1}{k_{t_{eff}}} = \frac{1}{k_{t_1}} + \frac{1}{k_{t_2}} + \frac{1}{k_{t_3}} \tag{6.9d}$$

Estas expresiones se pueden extender a cualquier número de segmentos del eje escalonado.

6

EJEMPLO 6-3

Diseño de un eje escalonado para minimizar la deflexión

Problema **Diseñe el mismo eje del ejemplo 6-2 que tenga una deflexión máxima por flexión de 0.002 in y una deflexión angular máxima de 0.5° entre la polea y el engrane.**

Se proporciona **La carga es la misma del ejemplo 6-2. El torque pico es de 146 lb-in. La figura 6-9 muestra la distribución del momento pico a través de la longitud del eje. Los valores son 65.6 lb-in en el punto *B*, 127.9 lb-in en el punto *C* y 18.3 lb-in en el punto *D*.**

Suposiciones **Las longitudes son las mismas que las del ejemplo previo, pero los diámetros se pueden cambiar para endurecer el eje, si es necesario. El material es el mismo del ejemplo 6-2.**

Solución **Véase las figuras 6-5 (p. 423), y 6-11 a 6-13.**

1. La deflexión por torsión se obtiene con las ecuaciones 6.9. Las longitudes de cada segmento son (de la figura 6-5 en la p. 423): $AB = 1.5$ in, $BC = 3.5$ in y $CD = 1.5$ in. Los momentos polares de inercia del área se calculan primero para cada segmento de diámetro diferente.

$$\text{de } A \text{ a } B: \qquad J = \frac{\pi d_{AB}^4}{32} = \frac{\pi(0.875)^4}{32} = 0.057\,5 \text{ in}^4$$

$$\text{de } B \text{ a } C: \qquad J = \frac{\pi d_{BC}^4}{32} = \frac{\pi(0.750)^4}{32} = 0.031\,1 \text{ in}^4 \tag{a}$$

$$\text{de } C \text{ a } D: \qquad J = \frac{\pi d_{CD}^4}{32} = \frac{\pi(0.669)^4}{32} = 0.019\,7 \text{ in}^4$$

y al aplicarse en la ecuación 6.9*c*.

$$\theta = \frac{T}{G}\left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} + \frac{l_3}{J_3}\right)$$

$$= \frac{146}{1.2E7}\left(\frac{1.5}{0.057\,5} + \frac{3.5}{0.031\,1} + \frac{1.5}{0.019\,7}\right) = 0.15 \text{ grad} \tag{b}$$

Tal deflexión está dentro de la especificación requerida.

2. La función de momento para este eje se dedujo mediante funciones de singularidad como la ecuación (*j*) del ejemplo 6-1 (p. 422). Ahora se debe dividir entre el producto de *E* y el momento de inercia del área *I* en cada punto a lo largo del eje de la

flecha. Mientras que E es constante, el valor de I varía con cada cambio diametral del eje escalonado.

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI}\left[R_1\langle z-0\rangle^1 + F_g\langle z-1.5\rangle^1 + R_2\langle z-5\rangle^1 + F_s\langle z-6.5\rangle^1\right] \qquad (c)$$

La figura 6.11a ilustra la función de momento para este eje como se dedujo en los ejemplos anteriores, en tanto que la figura 6.11b presenta la función M / EI para los diámetros de secciones definidos en el ejemplo 6-2.

3. La deflexión por flexión se obtiene integrando dos veces la función de momento.

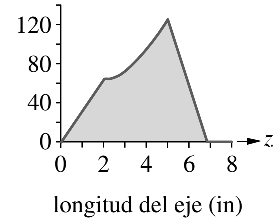
$$\theta = \int \frac{M}{EI}dz + C_3 \qquad (d)$$

$$\delta = \int\int \frac{M}{EI}dz + C_3 z + C_4 \qquad (e)$$

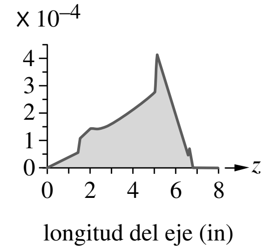
4. La primera integración de la función M / EI, a partir de la ecuación (c), da la pendiente de la viga, mientras que la segunda integración da la función de deflexión. En análisis previos sobre deflexión de vigas (véase la sección 2.10 en la p. 92 y los ejemplos 2-4 a 2-7 de las pp. 94 a 101), la sección transversal I de la viga era constante a través de su longitud. En un eje escalonado, I es una función de la longitud del eje. Esto hace mucho más complicada la integración analítica de la función M / EI. Un procedimiento más sencillo consiste en integrar numéricamente dos veces la función con la regla trapezoidal o la de Simpson. Dicha integración numérica se debe hacer para cada dirección de las coordenadas, con la finalidad de obtener las componentes de deflexión x y y. Luego, se combinan éstas vectorialmente para obtener las funciones de deflexión-magnitud y fase-ángulo a lo largo del eje.

5. Como la deflexión del eje es cero en $z = 0$, $C_4 = 0$. La otra constante de integración C_3 se puede determinar numéricamente. La figura 6-12a muestra la pendiente de la viga en la dirección y obtenida por la regla trapezoidal; además, muestra la función corregida de pendiente. El resultado integrado se modifica por la constante de integración C_3. Sin embargo, no se sabe cuál es el cruce adecuado con cero para esta función, de modo que no es posible determinar C_3 a partir de la función viga-pendiente.

6. La función de deflexión, integrada de la figura 6-12b, no es igual a cero en el segundo apoyo. Puesto que la deflexión realmente es cero aquí, el error en esta función



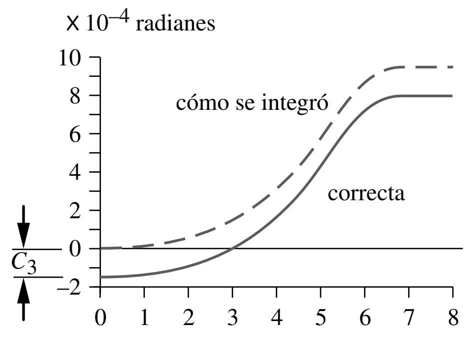
(a) Magnitud de momento



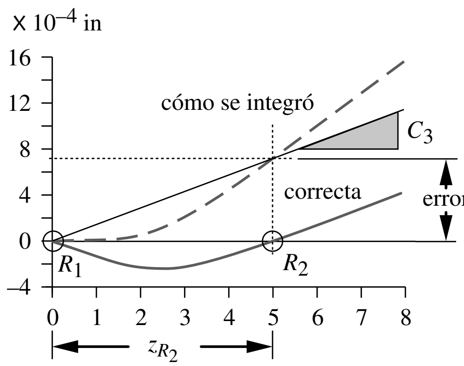
(b) Momento / $E\,I$

FIGURA 6-11

Funciones de momento y momento / EI del ejemplo 6-3



(a) Pendiente de la viga



(b) Deflexión de la viga

FIGURA 6-12

Integración numérica de la función de momento y obtención de la constante de integración C_3

integrada sirve para determinar la constante de integración C_3. En la figura 6-12*b* se traza una línea a partir del origen hacia el punto sobre la curva en $z = 5$, donde la función debe ser cero. La pendiente de esta línea recta es la constante C_3 para la dirección *y*, la cual se obtiene a partir de

$$C_{3_y} = \frac{error_y}{z_{R2}} = \frac{0.0007}{5.0} = 0.00014 \text{ in} \qquad (f)$$

La constante para la dirección *x* se determina de forma similar. Luego se recalculan las funciones usando los valores correctos de C_3.

7. Estas funciones de deflexión están graficadas en la figura 6-13 para los diámetros del eje $d_0 = 0.875$, $d_1 = 0.750$, $d_2 = 0.669$, $d_3 = 0.531$ del ejemplo 6-2. La magnitud de la deflexión en el engrane es 0.0003 in, lo cual es correcto dentro de la especificación solicitada. La deflexión en la polea es 0.001 in, que también está dentro de la especificación. La deflexión en el extremo derecho del eje es de 0.002 in. Los archivos EX10-03a y EX09-02b se encuentran en el CD-ROM.

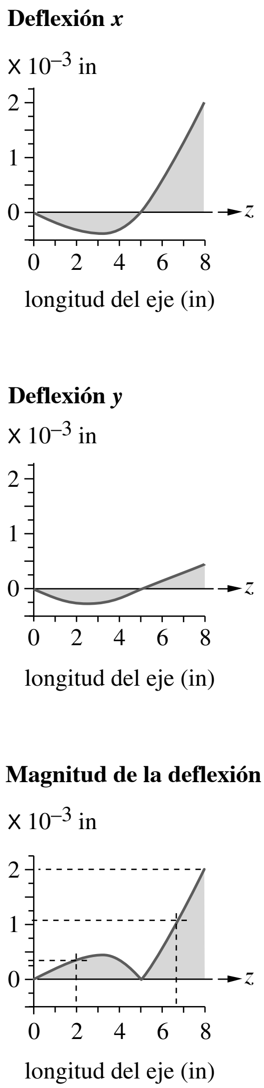


FIGURA 6-13

Funciones de deflexión del ejemplo 6-3

6.10 CUÑAS Y CUÑEROS

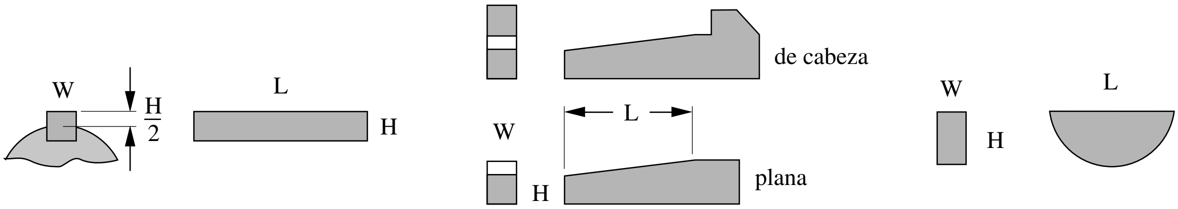
La ASME define una **cuña** como *una pieza de maquinaria desmontable que, cuando se ensambla en los cuñeros, brinda un medio positivo de transmisión del torque entre el eje y la maza*. Tanto el tamaño como la forma de las cuñas fueron estandarizados de varias maneras.* Una **cuña paralela** tiene sección transversal cuadrada o rectangular con altura y ancho constantes a lo largo de su longitud. (Véase la figura 6-14*a*.) Una **cuña cónica** es de ancho constante, pero su altura varía como un cono lineal de 1/8 in por pie, y se introduce en una ranura cónica en la masa hasta que se bloquea. Puede tener o no una **cabeza de cuña** para facilitar su remoción. (Véase la figura 6-14*b*.) Una **cuña Woodruff** es semicircular de ancho plano y constante. Se ajusta en un cuñero semicircular maquinado en el eje con un cortador circular estándar. (Véase la figura 6-14*c*.) La cuña cónica sirve para fijar axialmente la masa sobre el eje, pero las cuñas paralelas o las Woodruff requieren, además, de algún otro medio de fijación axial. Algunas veces se utilizan anillos de retención o collarines para este propósito.

Cuñas paralelas

Las cuñas paralelas son las que se usan más comúnmente. Los estándares ANSI e ISO definen tamaños particulares de secciones transversales de cuñas y profundidades de cuñeros, como una función del diámetro del eje en el asiento de la cuña. En la tabla 6-2 se presenta una parte de dicha información para el intervalo menor de diámetros del eje. Para tamaños de ejes mayores, consulte los estándares respectivos. Las cuñas cuadradas se recomiendan para ejes de hasta 6.5 in de diámetro (US), o 25 mm de diámetro (ISO), y las cuñas rectangulares para diámetros más grandes. La cuña paralela se coloca con la mitad de su altura en el eje y la otra mitad en la maza, como se indica en la figura 6-14*a*.

Las cuñas paralelas se producen normalmente con material de fábrica estándar rolado en frío, el cual tiene convencionalmente "tolerancia negativa", lo cual significa que nunca será más grande que su dimensión nominal, pero sí más pequeño. Por ejemplo, una barra cuadrada de 1/4 in nominal tendrá una tolerancia sobre el ancho y la altura de +0.000, −0.002 in. Por consiguiente, el asiento de la cuña se puede cortar con un cortador estándar de 1/4 in y la cuña con material de fábrica se ajustará con ligera tolerancia. También hay una cuña de material especial, con tolerancia positiva (p. ej., 0.250 +0.002, −0.000).

* Los estándares ANSI B17.1-1967, *Keys and Keyseats*, y B17.2-1967, *Woodruff Keys and Keyseats*, están disponibles en la Sociedad Estadounidense de Ingenieros Mecánicos, 345 East 47th St., Nueva York, N.Y. 10017.



(a) Cuña paralela *(b)* Cuñas cónicas *(c)* Cuña Woodruff

FIGURA 6-14

Diversos estilos de cuñas

Se utiliza cuando se desea un ajuste muy estrecho entre la cuña y el asiento de la cuña, y quizá requiera maquinado del material para darle su dimensión final.

El ajuste de la cuña puede ser preocupante cuando la carga de torque es alternante de positivo a negativo en cada ciclo. Cuando el torque cambia de signo, la tolerancia entre la cuña y el cuñero se reducirá repentinamente, pero causará un impacto y altos esfuerzos. Esto se llama **juego**. Un tornillo prisionero en la maza, colocado a 90° de la cuña, puede fijar la masa axialmente y estabilizar la cuña para eliminar el juego. El estándar ANSI también define el tamaño del tornillo prisionero que se debe utilizar para cada tamaño de cuña, como se indica en la tabla 6-2. La longitud de la cuña tiene que ser aproximadamente 1.5 veces menor que el diámetro del eje para evitar un giro excesivo por la deflexión del eje. Si se necesita mayor resistencia, se deberían usar dos cuñas, orientadas a 90° y 180°, por ejemplo.

Cuñas cónicas

El ancho de una cuña cónica para un diámetro determinado de eje es el mismo que para una cuña paralela, como se indica en la tabla 6-2. El tamaño del cono y de la cabeza los define el estándar. El cono es de bloqueo, lo cual significa que la fuerza de fricción entre

Tabla 6-2 Cuñas estándar y tamaños de tornillos prisioneros en medidas estadounidenses y métricas para ejes

Diámetro del eje (in)	Ancho nominal de la cuña (in)	Diámetro del tornillo prisionero (in)	Diámetro del eje (mm)	Ancho × alto de la cuña (mm)
$0.312 < d \leq 0.437$	0.093	#10	$8 < d \leq 10$	3 x 3
$0.437 < d \leq 0.562$	0.125	#10	$10 < d \leq 12$	4 x 4
$0.562 < d \leq 0.875$	0.187	0.250	$12 < d \leq 17$	5 x 5
$0.875 < d \leq 1.250$	0.250	0.312	$17 < d \leq 22$	6 x 6
$1.250 < d \leq 1.375$	0.312	0.375	$22 < d \leq 30$	8 x 7
$1.375 < d \leq 1.750$	0.375	0.375	$30 < d \leq 38$	10 x 8
$1.750 < d \leq 2.250$	0.500	0.500	$38 < d \leq 44$	12 x 8
$2.250 < d \leq 2.750$	0.625	0.500	$44 < d \leq 50$	14 x 9
$2.750 < d \leq 3.250$	0.750	0.625	$50 < d \leq 58$	16 x 10
$3.250 < d \leq 3.750$	0.875	0.750	$58 < d \leq 65$	18 x 11
$3.750 < d \leq 4.500$	1.000	0.750	$65 < d \leq 75$	20 x 12
$4.500 < d \leq 5.500$	1.250	0.875	$75 < d \leq 85$	22 x 14
$5.500 < d \leq 6.500$	1.500	1.000	$85 < d \leq 95$	25 x 14

las superficies mantiene la cuña axialmente en su lugar. La cabeza de la cuña es opcional y brinda una superficie para tirar con fuerza de la cuña hacia fuera cuando el extremo no es accesible. Las cuñas cónicas tienden a crear excentricidad entre la maza y el eje, porque la tolerancia radial total se corre hacia un lado.

Cuñas Woodruff

Las cuñas Woodruff se usan en ejes más pequeños y son autoalineables, de modo que se prefieren en lugar de las flechas cónicas. La penetración de una cuña Woodruff en la maza es la misma que en la de una cuña cuadrada, es decir, la mitad del ancho de la cuña. La forma semicircular crea un cuñero más profundo en el eje, el cual se resiste al rodamiento de la cuña, pero debilita el eje en comparación con el cuñero de una cuña cuadrada o cónica. Los anchos de la cuña Woodruff, como una función del diámetro del eje, son esencialmente los mismos que los de las cuñas cuadradas incluidas en la tabla 6-2. Las otras dimensiones de las cuñas Woodruff están definidas en el estándar ANSI, y los cortadores de los cuñeros se consiguen fácilmente para cumplir con estas dimensiones. La tabla 6-3 reproduce una muestra de las especificaciones cuña-tamaño del estándar. A cada tamaño de cuña se le asigna un número, en el cual se codifican sus dimensiones. El estándar ANSI establece: “Los últimos dos dígitos representan el diámetro nominal de la cuña en octavos de pulgada, en tanto que los dos dígitos precedentes dan el ancho nominal en 32avos de pulgada”. Por ejemplo, el número de cuña 808 define un tamaño de cuña de $8/32 \times 8/8$ o 1/4 de ancho $\times$ 1 in de diámetro. Para información dimensional completa sobre cuñas, consulte la referencia 6.

Esfuerzos en cuñas

En las cuñas hay dos modos de falla: cortante y por contacto. Ocurre una falla cortante cuando una cuña se corta a lo ancho en el punto de contacto entre el eje y la maza. La falla de presión por contacto ocurre cuando se incrustan cualquiera de los lados debido a la compresión.

Tabla 6-3 Tamaños de cuñas Woodruff de acuerdo con el estándar ANSI
Lista parcial: Para la información completa, véase el estándar y la figura 6-14*c* para simbología

Número de cuña	Tamaño nominal de la cuña W x L	Altura H
202	0.062 x 0.250	0.106
303	0.093 x 0.375	0.170
404	0.125 x 0.500	0.200
605	0.187 x 0.625	0.250
806	0.250 x 0.750	0.312
707	0.218 x 0.875	0.375
608	0.187 x 1.000	0.437
808	0.250 x 1.000	0.437
1208	0.375 x 1.000	0.437
610	0.187 x 1.250	0.545
810	0.250 x 1.250	0.545
1210	0.187 x 1.250	0.545
812	0.250 x 1.500	0.592
1212	0.375 x 1.500	0.592

FALLA POR CORTANTE El esfuerzo promedio debido al cortante directo se definió en la ecuación 2.9, que se repite aquí:

$$\tau_{xy} = \frac{F}{A_{cortante}} \tag{6.10}$$

donde F es la fuerza aplicada y $A_{cortante}$ es el área de corte. En este caso, $A_{cortante}$ es el producto del ancho por la longitud de la cuña. La fuerza sobre la cuña se obtiene del cociente del torque del eje entre el radio de ésta. Si el torque del eje es constante en el tiempo, la fuerza también lo es; el factor de seguridad se obtiene comparando el esfuerzo cortante con la resistencia a la fluencia por cortante del material. Si el torque del eje varía con el tiempo, es posible una falla de la cuña al cortante por fatiga. Entonces, el procedimiento consiste en calcular las componentes media y alternante del esfuerzo cortante, así como en utilizarlas para calcular los esfuerzos medio y alternante de Von Mises. Esto se puede usar en un diagrama modificado de Goodman, para determinar el factor de seguridad, como se describe en la sección 4.13 (p. 311).

FALLA DE PRESIÓN POR CONTACTO El esfuerzo promedio de presión por contacto se definió como

6

$$\sigma_x = \frac{F}{A_{contacto}} \tag{6.11}$$

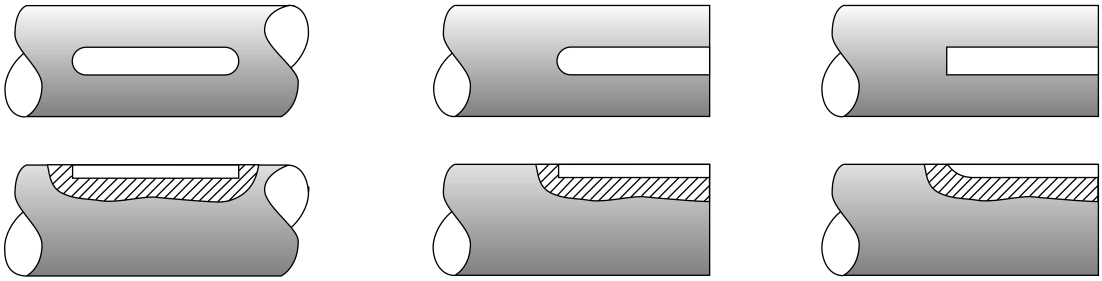
donde F es la fuerza aplicada y el área de presión por contacto es el área de contacto entre un lado de la cuña y el eje o la maza. Para una cuña cuadrada, ésta será la mitad de su altura por su longitud. La cuña Woodruff tiene un área de presión por contacto diferente en la maza, comparada con la del eje. El área de presión por contacto en la maza Woodruff es mucho menor y fallará primero. El esfuerzo de presión por contacto se debe calcular usando la fuerza aplicada máxima, sea constante o variable con el tiempo. Como los esfuerzos de compresión no provocan fallas por fatiga, los esfuerzos de presión por contacto se consideran estáticos. El factor de seguridad se obtiene comparando el esfuerzo de presión por contacto máximo con la resistencia a la fluencia del material en compresión.

Materiales para cuñas

Como las cuñas tienen cargas cortantes, se utilizan materiales dúctiles. La elección más común es el acero dulce al bajo carbono, a menos que un ambiente corrosivo exija una cuña de latón o de acero inoxidable. Las cuñas cuadradas o rectangulares con frecuencia se hacen de material de fábrica rolado en frío y simplemente se cortan a la longitud deseada. El material especial para cuñas mencionado anteriormente se emplea cuando se requiere un ajuste muy estrecho entre la cuña y el cuñero. Las cuñas cónicas y Woodruff también se suelen elaborar con acero dulce rolado en frío.

Diseño de cuñas

Existen sólo unas cuantas variables de diseño cuando se dimensiona una cuña. El diámetro del eje en el asiento de la cuña determina el ancho de la cuña. La altura de la cuña (o su penetración en la maza) también está determinada por el ancho de la cuña. Esto deja sólo a la longitud de la cuña y al número de cuñas utilizadas por el cubo como variables de diseño. Una cuña recta o cónica será tan larga como la maza lo permita. Una cuña Woodruff puede tener un intervalo de diámetros para un ancho determinado, el cual determina efectivamente su longitud de sujeción a la maza. Desde luego, conforme se incrementa el diámetro de la cuña Woodruff, más se debilita el eje con la mayor profundidad del asiento de la cuña. Si una sola cuña no puede manejar el torque con esfuerzos razonables, se agrega una cuña adicional, girada a 90° de la primera.



(a) Cuñero con extremo fresado con dos extremos

(b) Cuñero con extremo fresado con un extremo

(c) Cuñero de corredera deslizante con un extremo

FIGURA 6-15

Varios estilos de cuñeros en ejes

Es usual dimensionar la cuña para que falle antes que el asiento de la cuña u otra ubicación del eje fallen en caso de una sobrecarga. La cuña actúa entonces como un perno de corte en un motor fuera de borda, con la finalidad de proteger del daño a los elementos más costosos. Una cuña no es costosa y es relativamente fácil de sustituir, si el asiento de la cuña no está dañado. Ésta es una de las razones para usar sólo materiales blandos y dúctiles para la cuña, cuya resistencia sea menor que el eje, de modo que la falla de presión por contacto afectará selectivamente la cuña en vez del cuñero, si el sistema se expone a una sobrecarga más allá de su intervalo de diseño.

Concentraciones de esfuerzos en cuñeros

Como las cuñas tienen esquinas relativamente afiladas (< 0.02 in de radio), los cuñeros también las tienen. Esto causa concentraciones de esfuerzos significativas. El cuñero está escariado en la maza y corre a lo largo de su longitud, pero el eje se debe fresar en uno o en los dos extremos. Si se fresa un extremo, el cuñero lucirá como el de la figura 6-15*a* y tendrá esquinas afiladas en el lado que mira a uno o a ambos extremos, así como a lo largo de cada lado. Si en cambio se corta un cuñero con corredor deslizante o rastra, como se muestra en la figura 6-15*c*, se elimina la esquina puntiaguda en el extremo y se reduce la concentración de esfuerzos. El asiento de un cuñero Woodruff sobre el eje también tiene un radio grande en el lado que mira, pero padece (como todos los asientos de cuñeros) de esquinas afiladas en los lados.

Peterson[7] obtuvo experimentalmente las curvas derivadas de la concentración de esfuerzos en asientos de cuñas, con extremo fresado en ejes bajo cargas de flexión o de torsión. Éstas se reproducen en la figura 6-16. Tales factores se encuentran entre 2 y 4 aproximadamente, y dependen de la razón entre el radio de la esquina y el diámetro del eje. Se han realizado ajustes a las curvas de la figura 6-16 y se han creado las funciones para dichas curvas, de modo que se pueda determinar el factor de concentración de esfuerzos “sobre la marcha” durante el cálculo del diseño de ejes. Como ejemplo, consulte los archivos SHFTDES. Estos factores se deberían aplicar a los esfuerzos de flexión y cortante en el eje en la ubicación del cuñero, como se hizo en los ejemplos 6-1 y 6-2.

EJEMPLO 6-4

Diseño de cuñas para ejes

Problema **Diseñe la cuña para el eje de los ejemplos 6-2 (p. 427) y 6-3 (p. 430) y afine la estimación de los factores de seguridad del eje, con base en las**

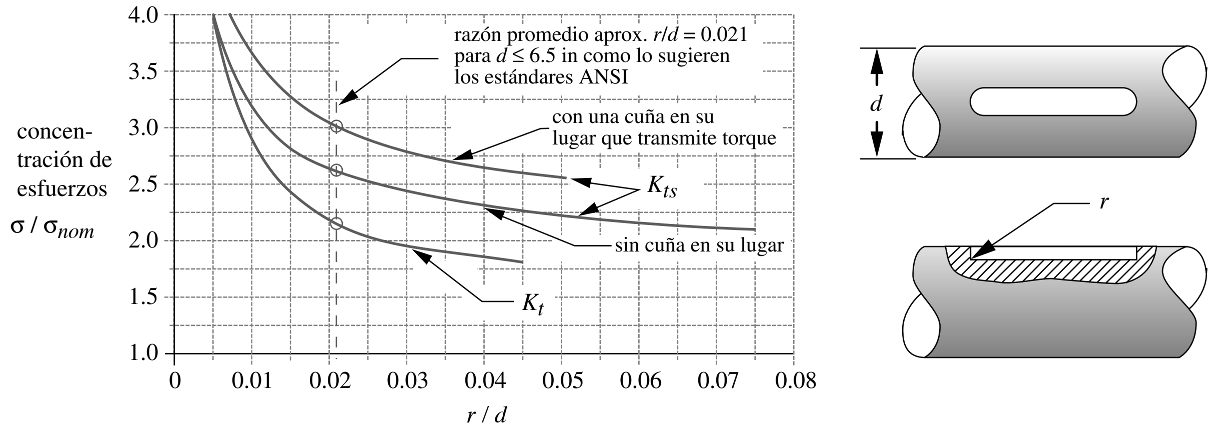


FIGURA 6-16

Factores de concentración de esfuerzos de cuñero, con extremo fresado, en flexión (K_t) y en torsión (K_{ts}) Fuente: R.E. Peterson, *Stress Concentration Factors*, 1974, figuras 182 y 183, pp. 266-267, reimpreso con autorización de John Wiley & Sons, Inc.

6

dimensiones del diseño preliminar de un ejemplo anterior y con los factores de concentración de esfuerzos afinados.

Se proporciona **La carga es la misma que en el ejemplo 6-2. El torque pico es de 146 lb-in. La figura 6-9 (p. 427) muestra la distribución del momento pico a lo largo del eje. Los valores son 65.6 lb-in en el punto *B* y 18.3 lb-in en el punto *D*. Los diámetros preliminares del eje en las cuñas son de d_1 = 0.750 in en *B* y de d_3 = 0.531 in en *D*. Véase la figura 6-5 (p. 423) para la simbología.**

Supuestos **Utilice cuñas cuadradas paralelas con cuñeros fresados en los extremos. El material del eje es el mismo del ejemplo 6-3. Se empleará un acero SAE 1010 al bajo carbono para las cuñas. Su S_{ut} = 53 kpsi y S_y = 44 kpsi. Se calculó S_e igual a 22 990 psi. Véase la figura 6-16 para los factores de concentración de esfuerzos.**

Solución **Véase la figura 6-5 (p. 423).**

1. Hay dos ubicaciones con cuñas sobre este eje: los puntos *B* y *D*. Los diámetros diseñados elegidos para estas secciones en el ejemplo 6-3 fueron $d_1 = 0.750$ in en *B* y $d_3 = 0.531$ in en *D*. La tabla 6-2 (p. 433) muestra que el ancho estándar de la cuña para d_1 es 0.187 in y para d_3 es 0.125 in. La longitud de la cuña es ajustable para cada ubicación.

2. En el punto *B*, las componentes media y alternante de la fuerza sobre la cuña se obtienen a partir de la componente del torque dividida entre el radio del eje en ese punto.

$$F_a = \frac{T_a}{r} = \frac{73.1}{0.375} = 194.67 \text{ lb}$$
$$F_m = \frac{T_m}{r} = \frac{73.1}{0.375} = 194.67 \text{ lb} \qquad (a)$$

3. Suponga que la longitud de la cuña es igual a 0.5 in y calcule las componentes de esfuerzos cortantes alternante y medio a partir de

$$\tau_a = \frac{F_a}{A_{cortante}} = \frac{194.67}{0.187(0.500)} = 2\,082 \text{ psi}$$
$$\tau_m = \frac{F_m}{A_{cortante}} = \frac{194.67}{0.187(0.500)} = 2\,082 \text{ psi} \qquad (b)$$

4. Para obtener el factor de seguridad a la fatiga por cortante de la cuña, se calculan los esfuerzos equivalentes de Von Mises para cada una de estas componentes, a partir de la ecuación 3.7*d* (p. 179),

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{3(2\,082)^2} = 3\,606 \text{ psi}$$
$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{3(2\,082)^2} = 3\,606 \text{ psi} \qquad (c)$$

y se utilizan en la ecuación 4.18*e* (p. 298) para determinar el factor de seguridad contra la fatiga:

$$N_f = \frac{1}{\dfrac{\sigma'_a}{S_e} + \dfrac{\sigma'_m}{S_{ut}}} = \frac{1}{\dfrac{3\,606}{22\,990} + \dfrac{3\,606}{53\,000}} = 4.4 \qquad (d)$$

5. El esfuerzo de presión por contacto sobre la cuña es de compresión y, por lo tanto, se considera una carga estática. Se calcula mediante la fuerza máxima sobre la cuña:

$$\sigma_{máx} = \frac{F_m + F_a}{A_{contacto}} = \frac{194.67 + 194.67}{0.093\,5(0.500)} = 8\,328 \text{ psi} \qquad (e)$$

6. Se calcula el factor de seguridad para falla de presión por contacto a partir de:

$$N_s = \frac{S_y}{\sigma_{máx}} = \frac{44\,000}{4\,164} = 5.3 \qquad (f)$$

7. En el punto *D*, la fuerza sobre la cuña es

$$F_a = \frac{T_a}{r} = \frac{73.1}{0.266} = 275 \text{ lb}$$
$$F_m = \frac{T_m}{r} = \frac{73.1}{0.266} = 275 \text{ lb} \qquad (g)$$

8. Suponga una longitud de la cuña de 0.50 in y calcule las componentes alternante y media del esfuerzo cortante a partir de

$$\tau_a = \frac{F_a}{A_{cortante}} = \frac{275}{0.125(0.50)} = 4\,400 \text{ psi}$$
$$\tau_m = \frac{F_m}{A_{cortante}} = \frac{275}{0.125(0.50)} = 4\,400 \text{ psi} \qquad (h)$$

9. Calcule los esfuerzos de Von Mises equivalentes para cada una de estas componentes a partir de la ecuación 3.7*d*,

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{3(4\,399)^2} = 7\,620 \text{ psi}$$
$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{3(4\,399)^2} = 7\,620 \text{ psi} \qquad (i)$$

y utilícelas en la ecuación 4.18*e*:

$$N_f = \frac{1}{\dfrac{\sigma'_a}{S_e} + \dfrac{\sigma'_m}{S_{ut}}} = \frac{1}{\dfrac{7\,620}{22\,990} + \dfrac{7\,620}{53\,000}} = 2.1 \qquad (j)$$

10. El esfuerzo de presión por contacto sobre la cuña se calcula mediante la fuerza máxima sobre la cuña:

$$\sigma_{máx} = \frac{F_m + F_a}{A_{contacto}} = \frac{275 + 275}{0.0625(0.50)} = 17\,600 \text{ psi} \qquad (k)$$

11. Calcule el factor de seguridad para falla de presión por contacto a partir de

$$N_s = \frac{S_y}{\sigma_{máx}} = \frac{44\,000}{17\,600} = 2.5 \qquad (l)$$

12. Los factores de seguridad para el eje en estas ubicaciones se recalcula ahora usando el factor de concentración de esfuerzos en los cuñeros, que toma en cuenta el diámetro real del eje y los radios reales de la muesca. Los cálculos del diseño previo en el ejemplo 6-2 se hicieron suponiendo el peor de los casos para tales valores. La figura 6-16 muestra las funciones de concentración de esfuerzos para cuñeros con extremo fresado, tanto por flexión como por torsión. Para utilizar estas gráficas se debe calcular la razón r / d del radio del extremo fresado contra el diámetro del eje. Suponga un radio sobre el extremo fresado de 0.010 in. Las razones r / d para los dos puntos son, entonces,

para el punto B: $\quad \frac{r}{d} = \frac{0.010}{0.750} = 0.0133$

para el punto D: $\quad \frac{r}{d} = \frac{0.010}{0.531} = 0.0188 \qquad (m)$

Los factores de concentración de esfuerzos correspondientes se leen en la figura 6-16 como

para el punto B: $\quad K_t = 2.5 \qquad K_{ts} = 2.9$

para el punto D: $\quad K_t = 2.2 \qquad K_{ts} = 2.7 \qquad (n)$

13. Éstos se usan en las ecuaciones (m), (n) y (o) del ejemplo 6-1 para obtener los factores de concentración de esfuerzos por fatiga, los cuales, para un material con una sensibilidad a la muesca $q = 0.5$, son

para el punto B: $\quad K_f = 1.75 \qquad K_{fs} = 2.09$

para el punto D: $\quad K_f = 1.60 \qquad K_{fs} = 1.97 \qquad (o)$

para ambos puntos: $\quad K_{fm} = K_f \qquad K_{fsm} = K_{fs}$

14. Los nuevos factores de seguridad se calculan entonces con la ecuación 6.8 (p. 422), con los datos de las ecuaciones (b) y (c) del ejemplo 6-2, con los valores de diseño del diámetro del eje y con los valores anteriores de concentración de esfuerzos obtenidos. Para el punto B:

$$0.75 = \left\{ \frac{32(N_f)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{[1.75(32.8)]^2 + \frac{3}{4}[2.09(73.1)]^2}}{27\,300} + \frac{\sqrt{[1.75(32.8)]^2 + \frac{3}{4}[2.09(73.1)]^2}}{65\,000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$N_f = 5.5 \qquad (p)$$

para el punto D:

$$0.531 = \left\{ \frac{32(N_f)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{[1.60(9.1)]^2 + \frac{3}{4}[1.97(73.1)]^2}}{27\,100} + \frac{\sqrt{[1.60(9.1)]^2 + \frac{3}{4}[1.97(73.1)]^2}}{65\,000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$N_f = 2.2 \qquad (q)$$

En el punto *B,* el factor de seguridad es mayor que el valor especificado de 2.5. En el punto *D,* es más bajo. Si se incrementa el diámetro en *D* a 0.562 in, da un factor de seguridad de 2.7. Entonces, los factores de seguridad para falla de la cuña (4.4 en *B* y 2.1 en *D*) son menores que los de falla del eje, lo cual es muy deseable, ya que así las cuñas fallarán antes que los ejes, en caso de sobrecarga. Ahora se tiene un diseño viable y aceptable.*

6.11 RANURAS

Cuando se debe transmitir más torque del que se maneja con cuñas, es posible utilizar en su lugar ranuras. Las ranuras son esencialmente "cuñas integradas" que bordean el exterior del eje y el interior de la maza con formas dentadas. Las primeras ranuras tenían dientes de sección transversal cuadrada; sin embargo, más adelante se sustituyeron con dientes en forma de involuta, como se ilustra en la figura 6-17. El diente en forma de involuta se emplea universalmente en engranes, y se usa la misma tecnología de corte para fabricar ranuras. Además de sus ventajas de manufactura, el diente de involuta tiene menos concentración de esfuerzos que un diente cuadrado y es más fuerte. La SAE define estándares tanto para dientes de ranuras de forma cuadrada como para dientes con forma de involuta, mientras la ANSI publica estándares para ranuras de involuta.† El estándar de ranuras de involuta tiene un ángulo de presión de 30° y la mitad de la profundidad de un diente de engrane estándar. El tamaño del diente se define por una fracción, cuyo numerador es el paso diametral (que define el ancho del diente; véase el capítulo 8 para mayor información sobre tales términos) y cuyo denominador controla la profundidad del diente (siempre el doble del numerador). Los pasos diametrales estándar son 2.5, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 32, 40 y 48. Las ranuras estándar tienen de 6 a 50 dientes, así como raíz plana o fileteada; ambas formas se muestran en la figura 6-17. Consulte la referencia 8 para información dimensional completa sobre ranuras estándar.

Algunas ventajas de las ranuras son la resistencia máxima en la raíz del diente, la precisión en la forma del diente debido al uso de cortadores estándar y el buen acabado de maquinado superficial por el proceso estándar de corte de engranes (cortado), lo cual elimina el esmerilado. La mayor ventaja de las ranuras sobre las cuñas es su capacidad (con tolerancias adecuadas) para permitir grandes movimientos axiales entre el eje y la maza, al mismo tiempo que transmite torque. Se utilizan para conectar el eje de salida de la transmisión con el eje impulsor en automóviles y camiones, donde el movimiento

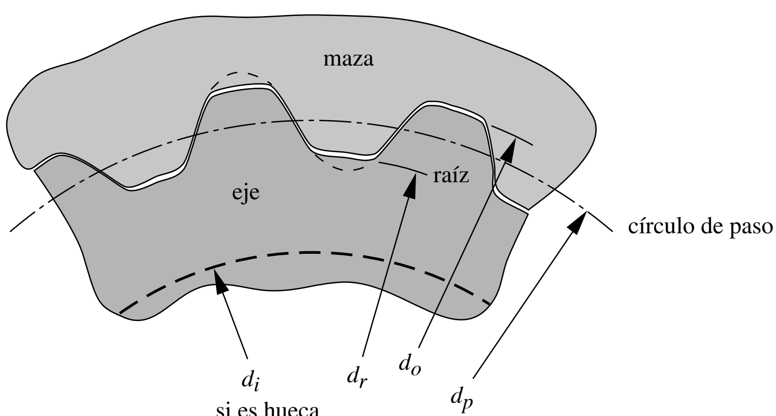


FIGURA 6-17

Geometría de la involuta de una ranura

* Los archivos EX10-04A, EX10-04B, EX10-04C y EX10-04D se encuentran en el CD-ROM.

† Estándares ANSI B92.1 y B92.2M, del Instituto Nacional Estadounidense de Estándares, 11 West 42nd St., Nueva York, N.Y., 10036

de la suspensión causa movimientos axiales entre los accesorios. También se emplean en el interior de transmisiones asincrónicas manuales de camiones, con la finalidad de acoplar axialmente a sus ejes los engranes de cambios. Asimismo, el torque del motor de gasolina usualmente pasa hacia la transmisión a través de una ranura que conecta el embrague del motor con el eje de entrada de la transmisión y permite el movimiento axial necesario para desacoplar el embrague desde el volante.

La carga sobre una raura es generalmente de torsión pura, ya sea constante o variable. Aunque es posible que haya cargas de flexión superpuestas, una buena práctica de diseño disminuye los momentos de flexión colocando adecuadamente los cojinetes y manteniendo el voladizo de la ranura tan corto como sea posible. Como en las cuñas, se pueden presentar dos modos de falla, de presión por contacto o cortante. La falla por cortante es normalmente la que fija el límite. A diferencia de las cuñas, hay muchos dientes para compartir la carga en algún grado. Idealmente, la longitud de la ranura l requiere ser sólo tan grande como sea necesario para desarrollar una resistencia al cortante del diente combinada igual a la resistencia al cortante por torsión del eje mismo. Si la ranura estuviera perfectamente elaborada, es decir, sin variación en el espesor o el espaciamiento de los dientes, todos los dientes compartirían la misma carga. Sin embargo, la realidad de las tolerancias de manufactura imposibilita dicha condición ideal. La SAE establece que "la realidad ha demostrado que, debido a las imprecisiones en el espaciado y forma del diente, el equivalente de aproximadamente el 25% de los dientes están en contacto, de modo que una buena fórmula de aproximación para (longitud) un eje con ranuras es

6

$$l \cong \frac{d_r^3\left(1-d_i^4/d_r^4\right)}{d_p^2} \tag{6.12}$$

donde d_r es el diámetro de la raíz de la ranura externa, d_i es el diámetro interno (si existe) de un eje hueco y d_p es el diámetro de paso de la ranura, que se encuentra aproximadamente a la mitad del diente. La variable l representa la longitud comprometida real de un diente con otro de la ranura, además de que se considera como el valor mínimo necesario para desarrollar la resistencia en los dientes de un eje con diámetro equivalente.

El esfuerzo cortante se calcula en el diámetro de paso de la ranura, donde el área cortante es

$$A_{cortante} = \frac{\pi d_p l}{2} \tag{6.13a}$$

El esfuerzo cortante se calcula aplicando la hipótesis de la SAE de que sólo el 25% de los dientes comparten realmente la carga en cualquier momento, si se considera que sólo 1/4 del área cortante se encuentra bajo esfuerzo:

$$\tau \cong \frac{4F}{A_{cortante}} = \frac{4T}{r_p A_{cortante}} = \frac{8T}{d_p A_{cortante}} = \frac{16T}{\pi d_p^2 l} \tag{6.13b}$$

donde T es el torque sobre el eje. Los esfuerzos de flexión sobre la ranura también se deben calcular y combinar adecuadamente con este esfuerzo cortante. Si la carga es de torsión pura y estática, entonces el esfuerzo cortante de la ecuación 6.13b se compara con la resistencia de fluencia por cortante del material para obtener el factor de seguridad. Si las cargas son variables o hay flexión, los esfuerzos aplicados se deberían convertir a esfuerzos por tensión de Von Mises equivalentes y compararse con un criterio de resistencia apropiado usando el diagrama modificado de Goodman.

6.12 AJUSTES DE INTERFERENCIA

Otro medio común para acoplar una maza a un eje consiste en utilizar **un ajuste de presión** o **de contracción**, llamado también **ajuste de interferencia**. Un ajuste de presión se obtiene maquinando el orificio de la maza de un diámetro ligeramente más pequeño que el del eje, como se muestra en la figura 6-18. Luego, las dos piezas se fuerzan juntas lentamente a presión, de preferencia aplicando aceite lubricante a la junta. Las deflexiones elásticas, tanto del eje como de la maza, actúan para crear grandes fuerzas normales y de presión entre las piezas. La fuerza de fricción transmite el torque del eje a la maza y resiste el movimiento axial. La Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes (AGMA) publica el estándar AGMA 9003-A91, *Flexible Couplings—Keyless Fits,* el cual define fórmulas para los cálculos de ajustes de interferencia.

Tan sólo las piezas relativamente pequeñas logran ajustarse a presión, sin exceder la capacidad de fuerza de una prensa típica. Para piezas más grandes, se puede hacer un **ajuste de contracción** calentando la maza con la finalidad de expandir su diámetro interior, y/o un **ajuste de expansión** enfriando el eje para reducir su diámetro. Las piezas caliente y fría se pueden deslizar juntas con un poco de fuerza axial, pero cuando equilibran su temperatura ambiente, su cambio dimensional provoca la interferencia deseada por el contacto de fricción. Otro método consiste en expandir hidráulicamente la maza con aceite a presión aplicado a través de pasillos en el eje o en la maza. La técnica, además, se utiliza para remover una maza.

La cantidad de interferencia necesaria para crear una junta ajustada varía con el diámetro del eje. Por lo común, se utiliza un aproximado de 0.001 a 0.002 unidades de interferencia diametral por unidad del diámetro del eje (regla de las milésimas); cuanto más pequeñas sean las cantidades usadas, mayores serán los diámetros del eje. Por ejemplo, la interferencia para un diámetro de 2 in sería de aproximadamente 0.004 in; no obstante, un diámetro de 8 in recibiría sólo cerca de 0.009 a 0.010 in de interferencia. Otra regla práctica (y más sencilla) para el operador es manejar 0.001 in de interferencia para diámetros hasta de 1 in, y 0.002 in para diámetros de 1 a 4 in.

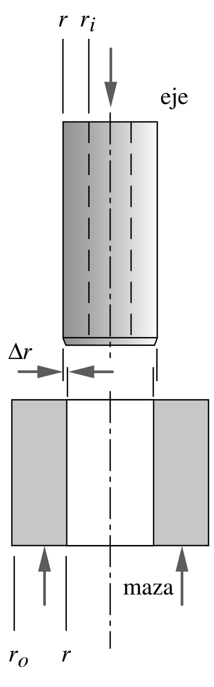


FIGURA 6-18

Un ajuste de interferencia

Esfuerzos en ajustes de interferencia

Un ajuste de interferencia crea el mismo estado de esfuerzos en el eje que el de una presión externa uniforme sobre su superficie. La maza experimenta los mismos esfuerzos que un cilindro de pared delgada sujeto a presión interna. Las ecuaciones de los esfuerzos en un cilindro de pared delgada, que se presentaron en la sección 2.17 (p. 133), y dependen de las presiones aplicadas y de los radios de los elementos. La presión p creada por el ajuste a presión se obtiene a partir de la deformación de los materiales causada por la interferencia.

$$p = \frac{0.5\delta}{\dfrac{r}{E_o}\left(\dfrac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} + \nu_o\right) + \dfrac{r}{E_i}\left(\dfrac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} - \nu_i\right)} \tag{6.14a}$$

donde $\delta = 2\Delta r$ es la interferencia diametral total entre las dos piezas, r es el radio nominal del punto de contacto entre las piezas, r_i es el radio interior (si existe) de un eje hueco y r_o es el radio exterior de la maza, como se indica en la figura 6-18. E y ν son los módulos de Young y las razones de Poisson de las dos piezas, respectivamente.

El torque que se transmite por el ajuste de interferencia se puede definir en términos de la presión p en el punto de contacto, lo cual crea la fuerza de fricción en el radio del eje.

$$T = 2\pi r^2 \mu p l \tag{6.14b}$$

donde l es la longitud del acoplamiento de la maza, r es el radio del eje y μ es el coeficiente de fricción entre el eje y la maza. El estándar AGMA sugiere un valor de $0.12 \leq \mu \leq 0.15$ para mazas expandidas hidráulicamente y $0.15 \leq \mu \leq 0.20$ para ajustes de contracción o de presión en las mazas. La AGMA supone (y recomienda) un acabado superficial de 32 μin rms (1.6 μmR_a), lo cual requiere un acabado esmerilado en ambos diámetros. Las ecuaciones 6.14*a* y 6.14*b* se combinan para llegar a una expresión que defina el torque que se obtendrá a partir de una deformación particular, el coeficiente de fricción y la geometría.

$$T = \frac{\pi l r \mu \delta}{\dfrac{1}{E_o}\left(\dfrac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} + \nu_o\right) + \dfrac{1}{E_i}\left(\dfrac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} - \nu_i\right)} \tag{6.14c}$$

La presión p se utiliza en las ecuaciones 2.47 (p. 134) para calcular los esfuerzos radiales y tangenciales en cada pieza. Para el eje:

$$\sigma_{t_{eje}} = -p\frac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} \tag{6.15a}$$

$$\sigma_{r_{eje}} = -p \tag{6.15b}$$

donde r_i es el radio interior de un eje hueco. Si el eje es sólido, r_i será cero.

Para la maza:

$$\sigma_{t_{maza}} = p\frac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} \tag{6.16a}$$

$$\sigma_{r_{maza}} = -p \tag{6.16b}$$

Tales esfuerzos necesitan mantenerse por debajo de las resistencias a la fluencia de los materiales para mantener el ajuste. Si los materiales ceden, la maza se afloja sobre el eje.

Concentración de esfuerzos en ajustes de interferencia

Aun cuando no haya trastornos en la superficie lisa de un eje con ajuste a presión, debido a escalones o cuñeros, un ajuste de interferencia crea, no obstante, concentraciones de esfuerzo en el eje y en los bordes de la maza debido a la transición abrupta de la descompresión a la compresión del material. La figura 6-19*a* muestra un estudio fotoelástico de una maza ajustada a presión sobre un eje. Las pestañas muestran concentración de esfuerzos en las esquinas. La figura 6.19*b* ilustra cómo se reduce la concentración de esfuerzos mediante ranuras de alivio circunferencial en las caras de la maza cerca del diámetro del eje. Tales ranuras permiten que el material en el borde de la maza sea más proclive a flexionarse lejos del eje y que se reduzca localmente el esfuerzo. Este procedimiento es similar a las técnicas de reducción de la concentración de esfuerzos mostradas en la figura 2-38 (p. 122).

La figura 6-20 muestra las curvas de los factores de concentración de esfuerzos por ajustes de interferencia entre mazas y ejes desarrollados a partir del estudio fotoelástico de la figura 6-19*a*. Los valores en las abscisas son razones entre la longitud de la maza y el diámetro del eje. Dichos factores de concentración de esfuerzos geométricos se

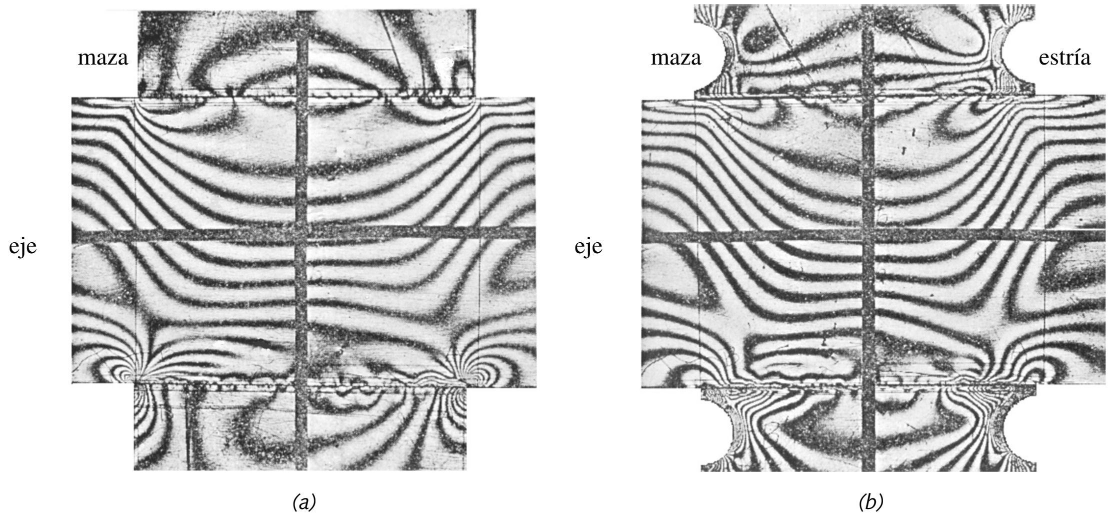


FIGURA 6-19

Análisis de esfuerzo fotoelástico de (*a*) un montaje plano ajustado a presión y (*b*) un montaje ajustado a presión con ranura en la maza
Fuente: R.E. Peterson y A.M. Wahl, "Fatigue of Shafts at Fitted Members, with a Related Photoelastic Analysis". *ASME J. App. Mech.*, vol. 57, p. A1, 1935.

aplican de la misma forma que antes. En carga estática, necesitan utilizarse para determinar si la fluencia local comprometerá el ajuste de interferencia. En carga dinámica, se modifican por la sensibilidad a la muesca del material, con la finalidad de obtener un factor de concentración de esfuerzo por fatiga y usarlo en la ecuación 6.8 (p. 422) en el diseño de ejes.

Desgaste por frotamiento con corrosión

Este problema se analizó en el capítulo 5. Los ajustes de interferencia son las primeras víctimas de problemas de desgaste por frotamiento. Aun cuando el mecanismo de desgaste por frotamiento no se comprende todavía muy bien, se conocen algunas medidas para ayudar a reducir su severidad. Consulte la sección 5.6 (p. 364) para mayores detalles.

$$p/\sigma = \frac{\text{presión nominal del ajuste a presión}}{\text{esfuerzo nominal a flexión}}$$

$$l\,/\,d = \frac{\text{longitud de la maza}}{\text{diámetro del eje}}$$

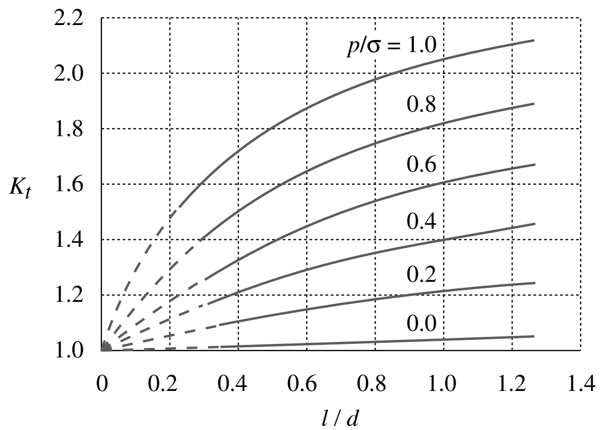


FIGURA 6-20

Concentración de esfuerzos en un ajuste a presión o contracción en una maza ajustada sobre un eje Fuente: R.E. Peterson y A.M. Wahl, "Fatigue of Shafts at Fitted Members, with a Related Photoelastic Analysis". *ASME J. App. Mech.*, vol. 57, p. A73, 1935.

EJEMPLO 6-5

Diseño de un ajuste de interferencia

Problema **Rediseñe el sujetador del engrane del eje de la figura 6-5 (p. 423), para convertirlo en un ajuste de interferencia en vez de una unión acuñada. Defina las dimensiones del orificio del eje y del engrane, así como sus tolerancias para un ajuste a presión.**

Se proporciona **La carga es la misma del ejemplo 6-2 (p. 427). El torque pico en el engrane (punto *B*) es de 146 lb-in. Use los diámetros nominales del eje d_0 = 0.875 in, d_1 = 0.750 in. Consulte la figura 6-5 para la simbología. El diámetro del cubo del engrane es de 3 in y su longitud es de 1.5 in.**

Suposiciones **El material del eje es el mismo del ejemplo 6-2. Se utiliza hierro colado gris clase 40 para el engrane, con S_{ut} = 42 kpsi y E = 14 Mpsi. Consulte la figura 6-20 para los factores de concentración de esfuerzos. El diámetro de 0.750 del eje se incrementará ligeramente para un diámetro nominal de 0.780, donde ajusta a presión el cubo del engrane para permitir al engrane deslizarse sobre el resto del montaje del eje.**

6

Solución **Véase la figura 6-5 y la tabla 6-4.**

1. El diámetro nominal del eje en el cubo del engrane es de 0.780 in. Con base en la regla de las milésimas, una interferencia diametral razonable sería de 0.0015 in. A partir de este supuesto, la presión por contacto después de la presión se determina con la ecuación 6.14 (pp. 442-443).

$$p = \frac{0.5\delta}{\dfrac{r}{E_o}\left(\dfrac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} + \nu_o\right) + \dfrac{r}{E_i}\left(\dfrac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} - \nu_i\right)}$$

$$= \frac{0.5(0.001\,5)}{\dfrac{0.390}{1.4E7}\left(\dfrac{1.5^2 + 0.390^2}{1.5^2 - 0.390^2} + 0.28\right) + \dfrac{0.390}{3.0E7}\left(\dfrac{0.390^2 + 0}{0.390^2 - 0} - 0.28\right)} \tag{a}$$

$$p = 15\,288 \text{ psi}$$

2. Los esfuerzos en el eje, después de la presión, se calculan con las ecuaciones 6.16 (p. 443).

$$\sigma_{t_{eje}} = -p\frac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} = -15\,288\frac{0.390^2 + 0}{0.390^2 - 0} = -15\,288 \text{ psi} \tag{b}$$

$$\sigma_{r_{eje}} = -p = -15\,288 \text{ psi} \tag{c}$$

3. Los esfuerzos en la maza, después de la presión, se calculan con las ecuaciones 6.16 (p. 443).

$$\sigma_{t_{maza}} = p\frac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} = 15\,288\frac{1.5^2 + 0.390^2}{1.5^2 - 0.390^2} = 17\,505 \text{ psi} \tag{d}$$

$$\sigma_{r_{maza}} = -p = -15\,288 \text{ psi} \tag{e}$$

4. Para obtener el factor de concentración de esfuerzos, se necesita la razón entre la longitud del cubo y el diámetro del eje, l/d:

$$\frac{l}{d} = \frac{1.500}{0.780} = 1.923 \tag{f}$$

y la razón entre la presión del ajuste a presión y el esfuerzo nominal por flexión:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{65.6(0.390)64}{\pi\left(0.780^4\right)} = 1\,408 \text{ psi} \tag{g}$$

$$\frac{p}{\sigma} = \frac{15\,288}{1\,408} = 10.9 \tag{h}$$

5. Tomando estos valores de la figura 6-20, se observa que están fuera de la gráfica. Se supondrá un valor aproximado para este factor de concentración de esfuerzos de:

$$K_t \cong 2.4 \tag{i}$$

6. Los factores de seguridad contra la falla durante el ajuste a presión se calcula ahora con:

$$N_{s_{eje}} = \frac{S_y}{K_t \sigma_{t_{eje}}} = \frac{-38\,000}{2.4(-15\,288)} = 1.0 \tag{j}$$

$$N_{s_{maza}} = \frac{S_{ut}}{K_t \sigma_{t_{maza}}} = \frac{42\,000}{2.4(17\,505)} = 1.0 \tag{k}$$

7. Ambas piezas están en falla con esta cantidad de interferencia. Los cálculos se repitieron con intervalos de valores de interferencia de 0.0008 a 0.0015 in, cuyos resultados se muestran en la tabla 6-4. Los factores de seguridad se encuentran entre 2.0 y 1.0.

8. Se aceptaría un intervalo de tolerancia de, por lo menos, 0.0002 in sobre cada pieza o una variación total de la interferencia de al menos 0.0004 in para un conjunto de piezas producidas en masa, de modo que se elige establecer el intervalo de interferencia entre 0.0008 y 0.0013 in, que es un intervalo total de 0.0005 in.

9. Las dimensiones de la pieza se establecen entonces como

$$\begin{aligned} \textit{diá. de la maza} &= 0.7799 + 0.0003/-0.0000 = \frac{0.7802}{0.7799} \text{ in} \\ \textit{diá. del eje} &= 0.7812 + 0.0000/-0.0002 = \frac{0.7812}{0.7810} \text{ in} \end{aligned} \tag{l}$$

y da como resultado un intervalo de interferencia de

$$\begin{aligned} \text{interferencia mín.} &= 0.7810 - 0.7802 = 0.0008 \text{ in} \\ \text{interferencia máx.} &= 0.7812 - 0.7799 = 0.0013 \text{ in} \end{aligned} \tag{m}$$

10. ¿Qué torque transmitirá esta junta a presión con la interferencia mínima, suponiendo $\mu = 0.15$? A partir de la ecuación 6.14*c* (p. 443):

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi l r \mu \delta}{\frac{1}{E_o}\left(\frac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} + \nu_o\right) + \frac{1}{E_i}\left(\frac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} - \nu_i\right)} \\ T &= \frac{\pi(1.5)(0.375)(0.15)(0.000\,8)}{\frac{0.375}{1.4E7}\left(\frac{1.5^2 + 0.390^2}{1.5^2 - 0.390^2} + 0.28\right) + \frac{0.375}{3.0E7}\left(\frac{0.390^2 + 0}{0.390^2 - 0} - 0.28\right)} \\ T &= 1\,753 \text{ in - lb} \end{aligned} \tag{n}$$

Esto es adecuado para el exceso del torque pico de operación de 146 in-lb, de modo que funcionará.*

* Véase el archivo EX10-05 del CD-ROM.

Tabla 6-4 Factores de seguridad para varias interferencias del ejemplo 6-5

Interferencia (in)	p (psi)	p/σ	K_t	$N_{s_{eje}}$	$N_{s_{maza}}$
0.000 8	8 154	5.8	2.3	2.0	1.9
0.000 9	9 173	6.5	2.4	1.8	1.7
0.001 0	10 192	7.2	2.4	1.6	1.5
0.001 1	11 212	8.0	2.4	1.4	1.4
0.001 2	12 231	8.7	2.4	1.3	1.3
0.001 3	13 250	9.4	2.4	1.2	1.2
0.001 4	14 269	10.1	2.4	1.1	1.1
0.001 5	15 288	10.9	2.4	1.0	1.0

6.13 DISEÑO DE VOLANTES*

Un volante se utiliza para suavizar las variaciones de rapidez en un eje, causadas por las fluctuaciones en el torque. Muchas máquinas tienen patrones de carga, los cuales hacen que la función torque-tiempo varíe durante un ciclo. Los compresores de pistón, las prensas troqueladoras, las trituradoras de piedra, etcétera, tienen cargas que varían con el tiempo. El generador de fuerza motriz también puede introducir oscilaciones de torque al eje de transmisión. Los motores de combustión interna de uno o dos cilindros son un buen ejemplo. Otros sistemas pueden tener tanto fuentes de torque suave como cargas suaves, como un generador eléctrico impulsado por una turbina de vapor. Tales dispositivos que actúan suavemente no necesitan un volante. Si la fuente del torque impulsor o el torque de carga son de naturaleza fluctuante, entonces por lo general se requiere un volante.

Un volante es un dispositivo de almacenamiento de energía que absorbe y almacena energía cinética cuando gira rápidamente, pero regresa la energía al sistema cuando la necesita, reduciendo su velocidad de rotación. La energía cinética E_k en un sistema giratorio es

$$E_k = \frac{1}{2} I_m \omega^2 \tag{6.17a}$$

donde I_m es el momento de inercia de masa de toda la masa giratoria sobre el eje alrededor del eje de rotación y ω es la velocidad de giro. Lo anterior incluye el I_m del rotor del motor y cualquier cosa que gire con el eje más el volante.

Los volantes son tan simples como un disco cilíndrico de material sólido, o bien, están construidos con una maza en forma de aro y rayos de bicicleta. Esta última configuración utiliza más eficientemente el material, sobre todo en volantes grandes, pues concentra el volumen de su masa en el aro, la cual se encuentra en el radio mayor. Como el momento de inercia de masa I_m de un volante es proporcional a mr^2, la masa en el radio mayor contribuye mucho más. Si se imagina la geometría de un disco sólido de radio interior r_i y radio exterior r_o, el momento de inercia de masa es

$$I_m = \frac{m}{2}\left(r_o^2 + r_i^2\right) \tag{6.17b}$$

La masa de un disco sólido circular de espesor constante t y que tiene un orificio central es

$$m = \frac{W}{g} = \pi \frac{\gamma}{g}\left(r_o^2 - r_i^2\right)t \tag{6.17c}$$

* Partes de esta sección se adaptaron de R.L. Norton, *Design of Machinery*, 4a. ed., McGraw-Hill, 2008, pp. 596-602, con la autorización del editor.

Al sustituir en la ecuación 6.17*b* da como resultado la expresión para I_m en términos de la geometría del disco:

$$I_m = \frac{\pi}{2}\frac{\gamma}{g}\left(r_o^4 - r_i^4\right)t \tag{6.17d}$$

donde γ es la densidad del peso del material y *g* es la constante gravitacional.

Hay dos etapas en el diseño de un volante. Primero se debe obtener la cantidad de energía necesaria para el grado de uniformidad deseado y el momento de inercia requerido para absorber la energía determinada. Luego, habrá que definir la geometría del volante que suministre tanto el momento de inercia de masa, en un paquete razonablemente dimensionado, como su seguro contra falla a las velocidades de diseño.

Variación de la energía en un sistema en rotación

La figura 6-21 muestra un volante diseñado como un disco circular plano sujeto al eje de un motor. El motor suministra un torque de magnitud T_m que sería conveniente fuera tan constante como sea posible, es decir, igual al torque promedio T_{prom}. Suponga que la carga sobre el otro lado del disco demanda un torque T_l variable con el tiempo, como se ilustra en la figura 6-22. Dicha variación del torque puede causar que la rapidez del eje varíe dependiendo de la característica torque-velocidad del motor impulsor. Se necesita determinar cuánto I_m agregar en forma de volante para reducir la variación de rapidez del eje a un nivel aceptable. Escriba la ley de Newton para el diagrama de cuerpo libre en la figura 6-21.

$$\sum T = I_m\,\alpha$$

$$T_l - T_m = I_m\,\alpha \tag{6.18a}$$

pero se desea $\quad T_m = T_{prom}$

entonces $\quad T_l - T_{prom} = I_m\,\alpha \qquad (6.18b)$

Sustituyendo $\quad \alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d\omega}{dt}\left(\dfrac{d\theta}{d\theta}\right) = \omega\dfrac{d\omega}{d\theta}$

lo cual da $\quad T_l - T_{prom} = I_m\,\omega\dfrac{d\omega}{d\theta}$

$$\left(T_l - T_{prom}\right)d\theta = I_m\,\omega\,d\omega \tag{6.18c}$$

Integrando

$$\int_{\theta\,@\,\omega_{mín}}^{\theta\,@\,\omega_{máx}}\left(T_l - T_{prom}\right)d\theta = \int_{\omega_{mín}}^{\omega_{máx}} I_m\,\omega\,d\omega$$

$$\int_{\theta\,@\,\omega_{mín}}^{\theta\,@\,\omega_{máx}}\left(T_l - T_{prom}\right)d\theta = \frac{1}{2}I_m\left(\omega_{máx}^2 - \omega_{mín}^2\right) \tag{6.18d}$$

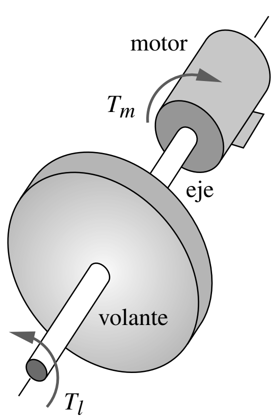


FIGURA 6-21

Volante sobre un eje de transmisión

El lado izquierdo de esta expresión representa el cambio en la energía cinética E_k entre las ω máxima y mínima del eje, y es igual al área debajo del diagrama torque-tiempo de la figura 6-22 entre esos valores extremos de ω. El lado derecho de la ecuación 6.18*c* es el cambio en la energía cinética almacenada en el volante. La única forma de

extraer energía cinética del volante es hacer que disminuya su velocidad, como se indica en la ecuación 6.17*a*. Al agregar energía cinética, se acelera. Es imposible obtener una velocidad exactamente constante en el eje en la cara donde la carga requiere un cambio de energía. Lo mejor es minimizar la variación de rapidez ($\omega_{máx} - \omega_{mín}$), lo cual proporciona un volante con I_m lo suficientemente grande.

EJEMPLO 6-6

Determinación de la variación de energía en una función torque-tiempo

Problema **Obtenga la variación de energía por ciclo en una función torque-tiempo que necesita ser absorbida por un volante para operar uniformemente.**

Se proporciona **La función torque-tiempo que varía durante el ciclo, como se muestra en la figura 6-22. El torque varía durante los 360° del ciclo alrededor de su valor promedio.**

Suposiciones **La variación del torque mostrada en un ciclo es representativa de la condición de estado uniforme. La energía entregada por la fuente a la carga se considerará positiva y la energía regresada por la carga a la fuente se considerará negativa.**

Solución

1. Calcule el valor promedio de la función torque-tiempo durante un ciclo usando integración numérica. En este caso, es de 7 020 lb-in. (Observe que en algunos casos el valor promedio puede ser cero.)
2. Note que la integración del lado izquierdo de la ecuación 6.18*c* se realiza con respecto a la línea promedio de la función del torque, no con respecto al eje θ. (Por la definición del promedio, la suma del área positiva arriba de la línea promedio es

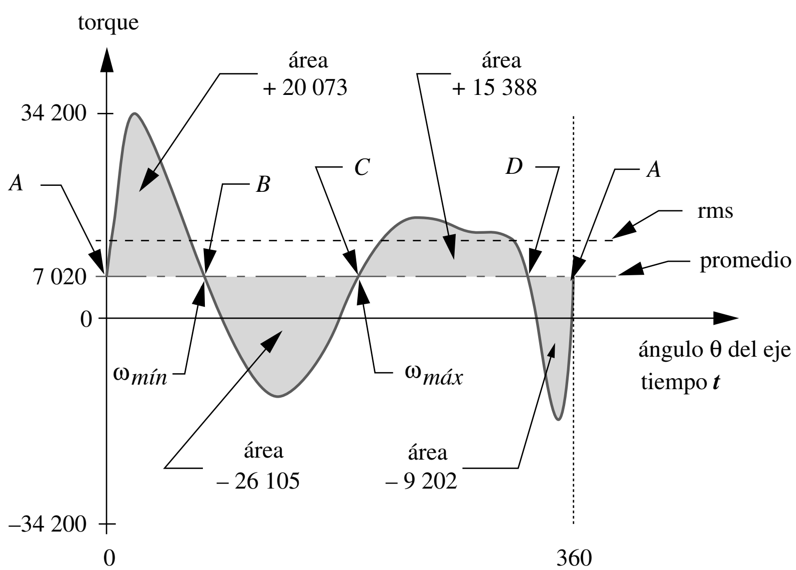


FIGURA 6-22

Integración de los pulsos por arriba y por abajo del valor promedio de la función torque-tiempo

Tabla 6-5 Acumulación de pulsos de energía bajo la curva torque-tiempo

De	ΔÁrea = ΔE	Suma acumulada = E	Mín. y máx.
A a *B*	+20 073	+20 073	$\omega_{mín}$ @ *B*
B a *C*	–26 105	–6 032	$\omega_{máx}$ @ *C*
C a *D*	+15 388	+9 356	
D a *A*	–9 202	+154	

ΔEnergía total = E @ $\omega_{máx}$ – E @ $\omega_{mín}$

= (–6 032) – (+20 073) = –26 105 in-lb

igual a la suma del área negativa debajo de la línea.) Los límites de integración en la ecuación 6.18 son del ángulo θ del eje, en los cuales la ω del eje es mínima hasta el ángulo θ del eje, donde la ω es máxima.

3. La ω mínima ocurrirá después de que se haya entregado la energía positiva máxima del motor a la carga, es decir, en el punto θ donde la suma de energía positiva (área) de los pulsos de torques se encuentra en su valor positivo más grande.
4. La ω máxima ocurrirá después de que la energía negativa máxima regresa a la carga, es decir, en el punto donde la suma de energía negativa (área) de los pulsos de torque se encuentra en su mayor valor negativo.
5. Para obtener estas ubicaciones de θ correspondientes a las ω máxima y mínima y, por lo tanto, determinar la cantidad de energía necesaria que se almacene en el volante, se requiere integrar numéricamente cada pulso de esta función de cruzamiento a cruzamiento con la línea promedio. Los puntos de cruce se han identificado como *A*, *B*, *C* y *D;* las áreas entre éstos se ilustran en la figura 6-22.
6. La tarea final es sumar estas áreas de pulsos empezando en un cruzamiento arbitrario (en este caso, el punto *A*) y procesando pulso por pulso a través del ciclo. La tabla 6-5 muestra este proceso y el resultado.
7. En la tabla 6-5, observe que la rapidez mínima del eje ocurre después de que el mayor pulso de energía positiva acumulada (+20 073 in-lb) ha sido entregado por el eje impulsor al sistema. Tal entrega de energía disminuye la velocidad del motor. La rapidez máxima del eje ocurre después de que el mayor pulso de energía negativa acumulada (−6 032 in-lb) ha sido recibido de regreso desde la carga por el eje. Este regreso de energía almacenada tiende a incrementar la velocidad del motor. La variación total de energía es la diferencia algebraica entre los dos valores extremos, que en este ejemplo es de −26 105 in-lb. La energía que regresa de la carga necesita ser absorbida por el volante y regresarse más tarde al sistema dentro de cada ciclo, con la finalidad de suavizar las variaciones en la velocidad del eje. Revise los archivos EX09-07a y EX09-07b que también contienen los cálculos del ejemplo 6.6.

Determinación de la inercia del volante

Ahora se necesita determinar qué tan grande debe ser el volante para absorber esta energía con un cambio aceptable en la rapidez. El cambio en la velocidad del eje durante un ciclo se conoce como fluctuación *Fl* y es igual a

$$Fl = \omega_{máx} - \omega_{mín} \tag{6.19a}$$

Se puede normalizar esto como una razón adimensional dividiéndola entre la rapidez promedio del eje. A la razón se le llama coeficiente de fluctuación C_f.

$$C_f = \frac{(\omega_{máx} - \omega_{mín})}{\omega_{prom}} \tag{6.19b}$$

Este coeficiente de fluctuación es un parámetro de diseño que debe elegir el diseñador. Usualmente se toma un valor entre 0.01 y 0.05 para maquinaria de precisión, y tan alto como 0.2 para maquinaria de triturado o martilleo, lo cual corresponde de un 1% a un 5% de fluctuación en la rapidez del eje. Cuanto menor sea el valor seleccionado, mayor tendrá que ser el volante. Éste es un diseño compensatorio. Cuanto más grande sea el volante, agregará más costo y peso al sistema, los cuales son factores que deben considerarse contra la uniformidad de la operación deseada.

Se obtiene el cambio requerido en la energía cinética E_k al integrar la curva del torque,

$$\int_{\theta @ \omega_{mín}}^{\theta @ \omega_{máx}} \left(T_l - T_{prom}\right) d\theta = E_k \tag{6.20a}$$

ahora puede hacerlo igual al segundo miembro de la ecuación 6.18*c*:

$$E_k = \frac{1}{2} I_m \left(\omega_{máx}^2 - \omega_{mín}^2\right) \tag{6.20b}$$

Factorizando la expresión:

$$E_k = \frac{1}{2} I_m \left(\omega_{máx} + \omega_{mín}\right)\left(\omega_{máx} - \omega_{mín}\right) \tag{6.20c}$$

Si la función torque-tiempo fuera movimiento armónico puro, entonces su valor promedio se podría expresar exactamente como

$$\omega_{prom} = \frac{(\omega_{máx} + \omega_{mín})}{2} \tag{6.21}$$

Las funciones de torque rara vez son movimientos armónicos puros, pero el error que se introduce al utilizar dicha expresión como aproximación del promedio es aceptable. Ahora se pueden sustituir las ecuaciones 6.19*b* y 6.21 en la ecuación 6.20*c* para obtener la expresión del momento de inercia de masa I_s necesario en todo el sistema giratorio, para obtener el coeficiente de fluctuación elegido.

$$E_k = \frac{1}{2} I_s \left(2\omega_{prom}\right)\left(C_f\, \omega_{prom}\right)$$
$$I_s = \frac{E_k}{C_f \omega_{prom}^2} \tag{6.22}$$

La ecuación 6.22 se puede usar para diseñar el volante físico eligiendo el coeficiente de fluctuación deseado C_f, y usando el valor de E_k de la integración numérica de la curva de torque (véase la tabla 6-5 para un ejemplo) y la ω promedio del eje para calcular el I_s necesario en el sistema. El momento de inercia de masa del volante físico I_m se hace entonces igual al I_s requerido por el sistema. Pero si se conocen los momentos de inercia de los otros elementos giratorios sobre el mismo eje (como el motor), el volante físico I_m necesario se puede reducir en tales cantidades.

El diseño más eficiente del volante en términos de maximización de I_m para utilizar el mínimo del material es aquel donde la masa se concentra en su aro y está soportada por rayos, como la rueda de un carruaje. Lo anterior coloca la mayoría de la masa en el radio más grande posible y minimiza el peso para un I_m dado. Incluso, si se elige un disco circular sólido como diseño del volante, ya sea por sencillez de fabricación o para contar con una superficie plana para otras funciones (como el embrague de un automóvil), el diseño se debería hacer con un orificio para reducir peso y, de ese modo, el costo. Como, en general, $I_m = mr^2$, un disco delgado de diámetro grande necesitará menos libras de material, para obtener un I_m determinado, que un disco más grueso con diámetro menor. Evidentemente, materiales densos como el hierro colado y el acero son buenas elecciones para un volante. El aluminio se emplea raras veces. Aun cuando muchos metales (como plomo, oro, plata, platino) son más densos que el hierro y el acero, sería muy difícil convencer al departamento de finanzas para utilizarlos en un volante.

6

La figura 6-23 muestra el cambio en el torque de la figura 6-22, después de haber agregado un volante dimensionado para proporcionar un coeficiente de fluctuación de 0.05. La oscilación del torque alrededor de un valor promedio constante es ahora del 5%, mucho menos de lo que sería sin un volante. Observe que el valor pico es ahora de 87 en lugar de 372 lb-in. Ahora es posible utilizar un motor con muchos menos caballos de potencia, ya que el volante es apto para absorber la energía que regresa de la carga durante el ciclo.

Esfuerzos en volantes

Conforme un volante gira, la fuerza centrífuga actúa sobre su masa distribuida e intenta separarlo. Las fuerzas centrífugas son similares a las ocasionadas por la presión interna en un cilindro. Por consiguiente, el estado de esfuerzos en un volante giratorio es análogo al de un cilindro de pared delgada bajo presión interna (véase la sección 2.17 en la p. 133). El esfuerzo tangencial en un volante de disco sólido, como función del radio r, es

$$\sigma_t = \frac{\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r_i^2 + r_o^2 + \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right) \tag{6.23a}$$

y el esfuerzo radial es

$$\sigma_r = \frac{\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r_i^2 + r_o^2 - \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - r^2\right) \tag{6.23b}$$

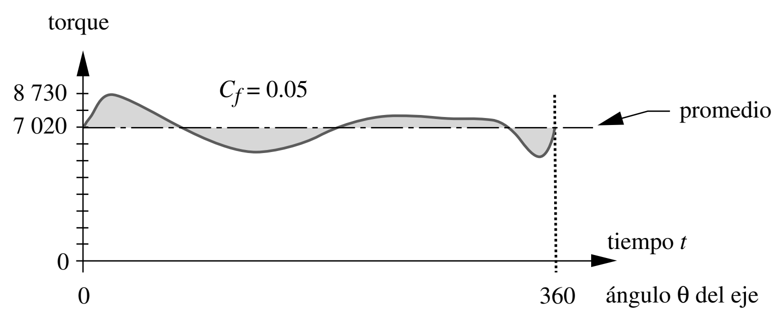


FIGURA 6-23

Función torque-tiempo de la figura D-22 después de agregar un volante con $C_f = 0.05$

donde γ = densidad de peso del material, ω = velocidad angular en rad/seg, ν = razón de Poisson, r es el radio a un punto de interés y r_i, r_o son los radios interior y exterior del volante de disco sólido.

La figura 6-24 muestra cómo varían estos esfuerzos sobre el radio del volante. El esfuerzo tangencial es máximo en el radio interno. El esfuerzo radial es cero en los radios interno y externo, y es pico en un punto interior; sin embargo, en todas partes es menor al esfuerzo tangencial. Entonces, el punto de mayor interés se encuentra en el radio interior. El esfuerzo de tensión tangencial en ese punto es lo que hace fallar al volante y, cuando se fractura en ese punto, por lo general se fragmenta y explota con resultados extremadamente peligrosos. Como las fuerzas que causan el esfuerzo están en función de la rapidez de giro, siempre habrá una velocidad a la que falla el volante. Se debe calcular la velocidad máxima segura de operación para el volante y algún modo para descartar su operación a mayores rapideces, como un control de velocidad o un regulador. Se puede determinar un factor de seguridad contra velocidad excesiva como el cociente de la velocidad de operación entre la velocidad que causará la fluencia, $N_{os} = \omega / \omega_{fluencia}$.

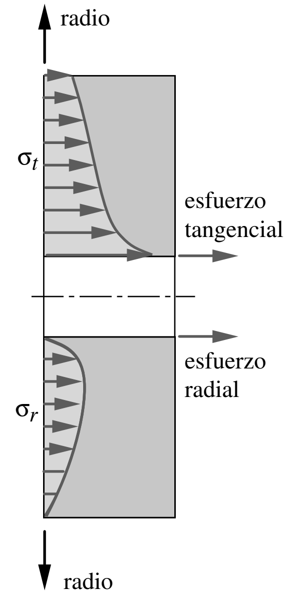


FIGURA 6-24

Distribuciones de esfuerzos a lo largo del radio de un volante giratorio

6

Criterio de falla

Si el volante pasa la mayoría de su vida de operación en velocidad básicamente constante, entonces se puede considerar estáticamente cargado y usar la resistencia a la fluencia como criterio de falla. El número de ciclos arranque-alto de su régimen de operación determinará si se debe considerar un escenario de carga-fatiga. Cada aceleración hasta la velocidad de operación y cada desaceleración de la misma a cero constituyen un ciclo de esfuerzo fluctuante. Si el número de estos ciclos arranque-alto es lo bastante largo, durante la vida proyectada del sistema, entonces se tendría que aplicar un criterio de fatiga-falla. Un régimen de fatiga de bajo ciclo podría requerir un análisis de falla por fatiga, con base en la deformación, en lugar de uno con base en el esfuerzo, sobre todo si existe la posibilidad de sobrecargas pasajeras que hagan que los esfuerzos locales excedan el esfuerzo a la fluencia en las concentraciones de esfuerzo.

EJEMPLO 6-7

Diseño de un volante de disco sólido

Problema **Diseñe un volante adecuado para el sistema del ejemplo 6-6. Se desea un factor de seguridad contra velocidad excesiva de por lo menos 2.**

Se proporciona **La función torque-tiempo de entrada varía durante su ciclo, como se muestra en la figura 6-22 (p. 449). El torque varía durante los 360° del ciclo alrededor de su valor promedio, y la variación de la energía por ciclo es de 26 105 in-lb, como se indica en la tabla 6-5 (p. 450). La ω del eje es igual a 800 rad/seg.**

Suposiciones **El ciclo de variación del torque mostrado es representativo de la condición de estado constante. El coeficiente de fluctuación deseado es 0.05. El sistema está en operación continua con ciclos mínimos de arranque-alto. Se empleará un acero con resistencia a la fluencia de 62 kpsi. No se utiliza cuñero, con el objetivo de reducir las concentraciones de esfuerzos. En cambio, una maza de cerradura cónica la acoplará por fricción al eje y la maza se atornillará axialmente al volante.**

Solución **Véase la figura 6-25 y la tabla 6-6.**

1. Se conoce la cantidad de energía que se necesita por el diagrama de torque-tiempo del ejemplo 6-6, y se tiene definida la ω del eje y el coeficiente de fluctuación deseado. A partir de tales datos, es posible determinar el momento de inercia de masa I_s requerido para el sistema, con la ecuación 6.22 (p. 451).

$$I_s = \frac{E}{C_f \omega_{prom}^2} = \frac{26\,105}{0.05(800)^2} = 0.816 \text{ lb - in seg}^2 \tag{a}$$

El volante sólo necesita suministrar una parte de esta cantidad, si otras masas giratorias, como la armadura del motor, están presentes. Sin embargo, en este ejemplo se supondrá que el volante proporcionará toda la inercia requerida, haciendo $I_m = I_s$.

2. Las dimensiones del volante para este momento de inercia se pueden definir a partir de la ecuación 6.17*d*. Se supondrá un material de acero con $\gamma = 0.28$ lb/in^3 y un radio interior $r_i = 1$ in.

$$I_m = \frac{\pi}{2}\frac{\gamma}{g}\left(r_o^4 - r_i^4\right)t = 0.816$$

$$0.816 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{0.28}{386}\right)\left(r_o^4 - 1^4\right)t$$

$$716.14 = \left(r_o^4 - 1\right)t \tag{b}$$

de modo que el I_m requerido se obtiene con combinaciones infinitas del radio r_o y el espesor t del volante para los datos considerados.

3. La mejor solución de la ecuación (*b*) será aquella que equilibre los valores en conflicto del tamaño del volante, peso, esfuerzos y factor de seguridad. Considere dos diseños posibles: uno con un espesor pequeño t y el otro con un t grande. El volante delgado tendrá un diámetro más grande, pero será considerablemente más ligero que el grueso debido a la falta de linealidad de los términos que intervienen en r_o. Pero conforme r_o crece, los esfuerzos también lo harán, porque la masa con el radio más grande ejerce mayor fuerza centrífuga sobre el material.

4. Para obtener un valor de r_o, que sea consistente con cualquier factor de seguridad deseado, la ecuación 6.23*a* del esfuerzo tangencial se resuelve hacia atrás con valores supuestos de $\sigma_t = S_y / N_y$, r_i, así como con los parámetros ν y γ del material,

$$\sigma_t = \frac{\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r_i^2 + r_o^2 + \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right) = \frac{S_y}{N_y}$$

$$\frac{62\,000}{N_y} = \frac{0.28}{386}(800)^2\left(\frac{3+0.28}{8}\right)\left(1 + r_o^2 + \frac{r_o^2}{1} - \frac{1+3(0.28)}{3+0.28}(1)\right) \tag{c}$$

$$r_o^2 = \frac{162.9}{N_y} - 0.535$$

El valor de r_o se emplea entonces en la ecuación (*b*) para obtener el espesor del volante. Para un factor de seguridad de diseño contra la fluencia de 2.5 y los valores supuestos en la ecuación (*c*), se obtiene $r_o = 8.06$ in y $t = 0.172$ in.

5. Con la geometría del volante definida ahora, la velocidad giratoria a la cual se iniciará la fluencia se calcula con la ecuación 6.17*d* usando la resistencia a la fluencia para el valor del esfuerzo.

Tabla 6-6 Datos del ejemplo 6-7 con I_m = 0.816 lb-in-seg^2

Espesor (in)	Diámetro (in)	razón r/t	Peso (lb)	Esfuerzo (psi)	Factor de seguridad contra fluencia	Factor de seguridad contra exceso de velocidad
0.125	17.40	69.6	8.20	28 896	2.1	1.5
0.250	14.63	29.3	11.60	20 459	3.0	1.7
0.375	13.22	17.6	14.10	16 722	3.7	1.9
0.500	12.31	12.3	16.20	14 494	4.3	2.1
0.625	11.64	9.3	18.10	12 974	4.8	2.2
0.750	11.12	7.4	19.70	11 852	5.2	2.3
0.875	10.70	6.1	21.30	10 980	5.6	2.4
1.000	10.35	5.2	22.70	10 277	6.0	2.5
1.125	10.05	4.5	24.00	9 695	6.4	2.5
1.250	9.79	3.9	25.20	9 202	6.7	2.6

6

$$\sigma_t = S_y = \frac{\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r_i^2 + r_o^2 + \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right)$$

$$62\,000 = \frac{0.28}{g}\omega_{fluencia}^2\left(\frac{3+0.28}{8}\right)\left(1+8.06^2 + \frac{8.06^2}{1} - \frac{1+3(0.28)}{3+0.28}(1)\right) \qquad (d)$$

$$\omega_{fluencia} = 1\,265 \text{ rad/seg}$$

Como esta velocidad de operación causa falla, se calcula un factor de seguridad contra el exceso de velocidad a partir de

$$N_{os} = \frac{\omega_{fluencia}}{\omega} = \frac{1\,265 \text{ rad/seg}}{800 \text{ rad/seg}} = 1.6 \qquad (e)$$

6. Para demostrar la variación de parámetros con la geometría del volante, este conjunto de ecuaciones se resolvió para una lista de posibles espesores t, elegidos en un intervalo de diseño razonable entre 0.125 y 1.25 in. La tabla 6-6 presenta los resultados y la figura 6-25 grafica las tendencias. Observe que el peso *se incrementa* conforme el diámetro exterior *disminuye* y el espesor aumenta. El esfuerzo tangencial máximo en el radio interior *disminuye* conforme *disminuye* r_o, el factor de seguridad contra la fluencia se incrementa de 2.1 a 6.7, mientras el factor de seguridad para exceso de velocidad varía de 1.5 a 2.6 en este rango de grosores.

7. El diseño final elegido es t = 0.438 in y r_o = 6.36 in debido a que tiene una mezcla razonable de valores de parámetros (tamaño, peso) y da como resultado un factor de seguridad contra el exceso de velocidad igual a 2. En otras palabras, el volante podría correr hasta dos veces su velocidad de diseño antes de ceder. El factor de seguridad contra la fluencia en la rapidez de diseño más baja siempre será más alto y ahora es de 4. La selección de mayores factores de seguridad impone una penalización al peso, como se observa en la figura 6-25. Revise los archivos EX10-07a y EX10-07b, que también contienen los cálculos del ejemplo 6-6.

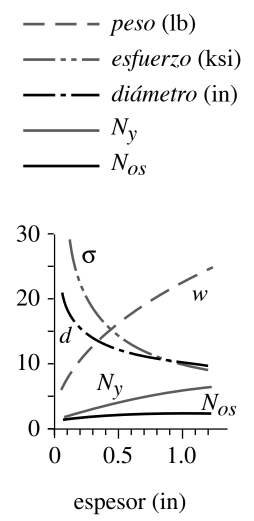


FIGURA 6-25

Variación de peso, esfuerzo, factores de seguridad y diámetro con el espesor del volante del ejemplo 6-7

6.14 VELOCIDADES CRÍTICAS EN EJES

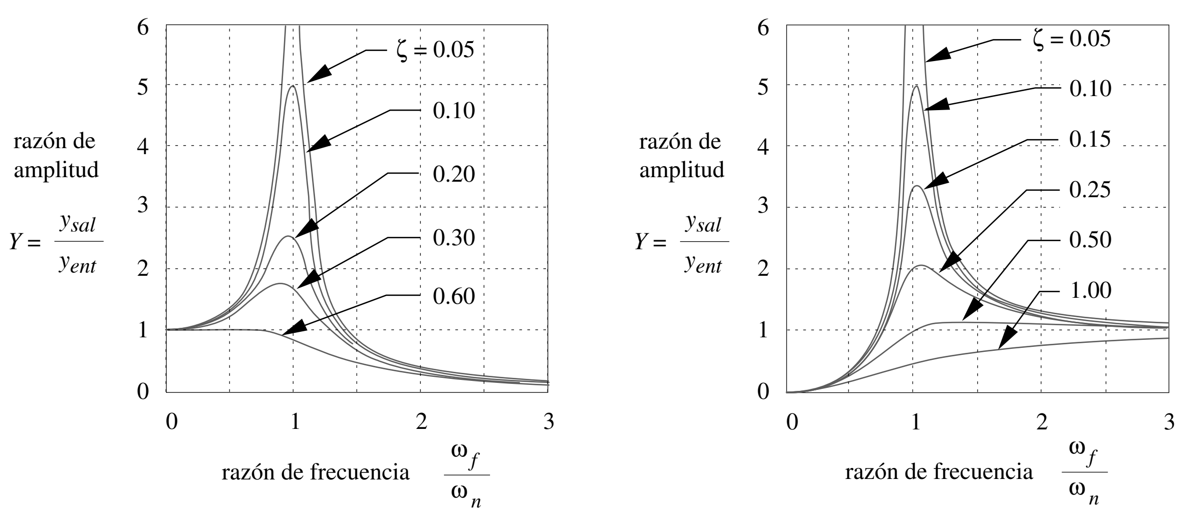
Todos los sistemas que contienen elementos que almacenan energía poseen un conjunto de frecuencias naturales, donde el sistema vibrará con amplitudes potencialmente grandes. Cualquier masa que se mueve almacena energía cinética y cualquier resorte alma-

cena energía potencial. Todos los elementos de máquinas fueron hechos de materiales elásticos; por lo tanto, pueden actuar como resortes. Todos los elementos tienen masa, pero si también tienen velocidad, almacenarán energía cinética. Cuando un sistema dinámico vibra, dentro del sistema ocurre una transferencia repetitiva de energía potencial a energía cinética a energía potencial, etcétera. Los ejes cumplen con este criterio girando a alguna velocidad y flexionándose tanto por torsión como por flexión.

Si un eje, o cualquier elemento relacionado, se somete a una carga que varía con el tiempo, vibrará. Incluso si sólo recibe carga transitoria, como un martillazo, vibrará a sus frecuencias naturales, justo como una campana cuando se golpea. Lo anterior se conoce como **vibración libre**. Esta vibración transitoria o libre se extingue finalmente debido al amortiguamiento presente en el sistema. Si se mantiene la carga que varía con el tiempo, como por ejemplo de manera senoidal, el eje u otro elemento continuarán vibrando a la **frecuencia forzada** de la función impulsora. Si la frecuencia forzada coincide con alguna de las frecuencias naturales del elemento, entonces la amplitud de la respuesta vibratoria será mucho mayor que la amplitud de la función impulsora. Se dice entonces que el elemento está en **resonancia**.

La figura 6-26*a* ilustra la respuesta de amplitud de una vibración forzada, y la figura 6-26*b*, una vibración autoexcitada, como una función de la razón entre la frecuencia forzadora y la frecuencia natural del sistema ω_f/ω_n. Cuando esta razón es 1, el sistema está en resonancia y la amplitud de la respuesta se aproxima al infinito en ausencia de amortiguamiento. La respuesta de la amplitud en la figura 6.26 se muestra como una razón adimensional de amplitudes de salida a amplitudes de entrada. Cualquier amortiguamiento, mostrado como una razón de amortiguamiento ξ, reduce la razón de amplitud de resonancia. A la frecuencia natural se le llama también **frecuencia crítica** o **velocidad crítica**. *Se debe evitar la excitación de un sistema a su frecuencia (resonancia) crítica o cerca de ella, ya que las deflexiones resultantes a menudo causarán esfuerzos lo suficientemente grandes como para que la pieza falle rápidamente*.

Se puede considerar que un sistema consistente en agrupamientos discretos de masas conectadas con elementos de resorte discretos tiene un número finito de frecuencias naturales, equivalente a su número de grados de libertad cinemática. Sin embargo, un sistema continuo como una viga o eje tiene un número infinito de partículas, cada una



(*a*) Respuesta de vibración forzada externamente

(*b*) Respuesta de vibración autoexcitada

FIGURA 6-26

Respuesta de un sistema con un solo grado de libertad a frecuencias forzadas o de autoexcitación variables

de las cuales es capaz de tener movimiento elástico en relación con sus partículas circundantes. Por lo tanto, un sistema continuo tiene un número infinito de frecuencias naturales. En cualquier caso, la frecuencia natural más baja, es decir, la fundamental, es por lo general la de mayor interés.

Las frecuencias naturales de vibración de un sistema se pueden expresar como una frecuencia circular ω_n en rad/seg o rpm o como una frecuencia lineal f_n en hertz (Hz). Se trata de las mismas frecuencias expresadas en unidades diferentes. La expresión general de la frecuencia natural fundamental es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{rad/seg} \tag{6.24a}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Hz} \tag{6.24b}$$

donde k es la constante de resorte del sistema y m su masa. Las frecuencias naturales son propiedades físicas del sistema, que, una vez incorporadas, las conserva casi sin modificar, a menos que pierda o gane masa o rigidez durante su vida útil. Las ecuaciones 6.24 definen la frecuencia natural sin amortiguamiento. El amortiguamiento reduce ligeramente la frecuencia natural. Los ejes, las vigas y la mayoría de las piezas de máquinas tienden a estar ligeramente amortiguadas, de modo que se logre manejar el valor sin tal amortiguamiento con un error pequeño.

La estrategia frecuente de diseño es mantener todas las frecuencias forzadas, o autoexcitadas, por debajo de la primera frecuencia crítica con un margen conveniente. Cuanto mayor sea este margen será mejor, aunque es deseable un factor de por lo menos 3 o 4. Lo anterior mantiene la razón amplitud-respuesta cerca de uno o de cero, como se ilustra en las figuras 6-26*a* y 6-26*b*. En algunos casos, la frecuencia fundamental de un sistema de eje no puede ser mayor que la frecuencia de giro requerida. Si el sistema se acelera lo suficientemente para que pase rápido por la frecuencia de resonancia, antes de que las vibraciones tengan la oportunidad de crecer en amplitud, entonces el sistema se puede operar a una velocidad superior a la de resonancia. Las plantas de energía estacionaria están en esta categoría. La masa de las turbinas y los generadores tiene una frecuencia fundamental baja (véase la ecuación 6.24), pero deben trabajar a alta velocidad para generar la frecuencia adecuada de corriente alterna. Por consiguiente, operan a la derecha del pico de la figura 6-14*b*, donde la razón de amplitud se aproxima a uno a razones altas de ω_f / ω_n. Los arranques y las desconexiones suelen ser escasos pero siempre deben hacerse rápidamente para rebasar el pico de resonancia antes de que se cause algún daño por las deflexiones excesivas. También tiene que haber suficiente potencia impulsora disponible para proporcionar la energía absorbida durante la resonancia por las oscilaciones, además de la aceleración de la masa giratoria. Si el impulsor carece de potencia suficiente, entonces el sistema se puede atascar por la resonancia, y sería incapaz de incrementar su velocidad de cara a las vibraciones potencialmente destructivas. Esto se conoce como efecto de Sommerfeld.[9]

Hay tres tipos de vibraciones de ejes de interés:

1. Vibración lateral
2. Balanceo de eje
3. Vibración torsional

Las primeras dos implican deflexiones por flexión y la última deflexión por torsión en el eje.

Vibración lateral de flechas y vigas: método de Rayleigh

Un análisis completo de las frecuencias naturales de un eje o una viga es un problema complicado, sobre todo si la geometría es compleja, por lo que es mejor resolverlo con la ayuda del software de *análisis de elemento finito*. Se puede hacer un **análisis modal** sobre un modelo de elemento finito de, incluso, geometrías complejas, lo que producirá un gran número de frecuencias naturales (en tres dimensiones) a partir de la fundamental. Éste es el procedimiento preferido y que se usa con frecuencia cuando se analiza a detalle un diseño maduro completo. Sin embargo, en las primeras fases del diseño, cuando las geometrías de la pieza no están aún totalmente definidas, es muy útil un método rápido y fácil de aplicar para obtener por lo menos una frecuencia fundamental aproximada. El **método de Rayleigh** sirve para tal propósito. Se trata de un método de energía que proporciona resultados dentro de un porcentaje bajo de la ω_n real. Se aplica tanto a un sistema continuo como a un modelo del sistema en parámetro agrupado. Por lo general, se prefiere el último procedimiento por su sencillez.

6

MÉTODO DE RAYLEIGH Iguala las energías potencial y cinética del sistema. La energía potencial se encuentra en forma de energía de deformación en el eje flexionado y es máxima en la deflexión más grande. La energía cinética es máxima cuando la vibración del eje pasa por la posición no flexionada del eje a máxima velocidad. Este método supone que el movimiento vibratorio lateral del eje es senoidal y que hay alguna excitación externa para forzar la vibración lateral (figura 6-26*a*).

Para ilustrar la aplicación de este método, considere un eje simplemente apoyado con tres discos (engranes, poleas, etcétera) sobre ella, como se indica en la figura 6-27. Se modelará esto como tres masas conocidas sobre un eje sin masa. La geometría del eje definirá la constante de resorte por flexión, agrupando así todo el "resorte" del eje. La energía potencial total almacenada en la deflexión máxima es la suma de energías potenciales de cada grupo de masa:

$$E_p = \frac{g}{2}\left(m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + m_3\delta_3\right) \tag{6.25a}$$

donde todas las deflexiones se toman como positivas, sin importar la forma local de la curva de deflexión, porque la energía de deformación no se ve afectada por el sistema coordenado externo. La energía del eje flexionado se ignora, puesto que es pequeña comparada con la energía del disco.

La energía cinética total es la suma de las energías cinéticas individuales:

$$E_k = \frac{\omega_n^2}{2}\left(m_1\delta_1^2 + m_2\delta_2^2 + m_3\delta_3^2\right) \tag{6.25b}$$

donde las velocidades se toman como positivas.

Al igualar esto da como resultado

$$\omega_n = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i^2}} = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n} (W_i/g)\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} (W_i/g)\delta_i^2}} = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i\delta_i^2}} \tag{6.25c}$$

la segunda versión que resulta de la sustitución de $m = W/g$, donde las W_i son los pesos de los agrupamientos discretos en que se divide el sistema, y δ_i son las deflexiones dinámicas en las ubicaciones de los pesos debidas a su vibración. Todos los pesos y las deflexiones se toman como positivos para representar las máximas energías almacenadas.

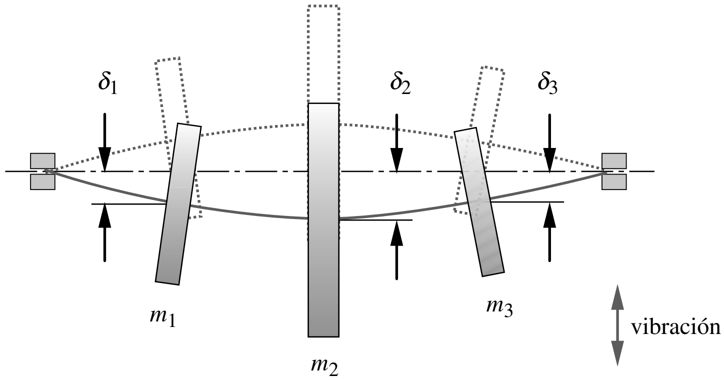


FIGURA 6-27

Eje con vibración lateral (amplitud muy exagerada)

El problema es que, por lo general, no se conocen las deflexiones dinámicas del sistema *a priori*. Rayleigh demostró que prácticamente cualquier estimación de la curva de deflexión es suficiente, siempre y cuando tal curva represente razonablemente la deflexión máxima y las condiciones de frontera de la curva dinámica real. La curva de deflexión estática, debida a los pesos de los supuestos agrupamientos (incluyendo o no el peso del eje), es una estimación muy adecuada. Observe que las cargas externas aplicadas no se incluyen en estos cálculos de la deflexión, sólo las fuerzas gravitacionales. La ω_n aproximada que resulta siempre será mayor que la frecuencia fundamental verdadera por un pequeño porcentaje, sin importar la forma de la curva de deflexión asumida. Si se realiza más de un cálculo de la curva de deflexión, se debe usar la ω_n de valor más bajo, puesto que será la aproximación más cercana.

La ecuación 6-25*c* se aplica a un sistema de cualquier complejidad descomponiéndolo en muchos agrupamientos. Si los engranes, las poleas, etcétera, se encuentran sobre el eje, son agrupamientos con masas lógicas. Si la masa del eje es significativo o dominante, se puede descomponer en elementos discretos a lo largo de su longitud y cada una de las piezas aporta un término a la suma.

Teóricamente el método de Rayleigh sirve para obtener frecuencias mayores que la fundamental, pero hacerlo es difícil si no se tiene una buena estimación de la forma de la curva de deflexión del más alto orden. Hay métodos más precisos de aproximación, tanto para la frecuencia fundamental como para frecuencias más grandes, aunque son algo más complicados de implementar. Ritz modificó el método de Rayleigh (Rayleigh-Ritz) para permitir la iteración para frecuencias superiores. El método de Holzer es más preciso y puede obtener frecuencias múltiples. Para mayor información, consulte la referencia 10.

Cabeceo de ejes

El cabeceo de un eje es un fenómeno vibratorio de autoexcitación, al cual están potencialmente expuestos todos los ejes. Aun cuando es una práctica común y recomendable equilibrar dinámicamente todos los elementos giratorios de una máquina (sobre todo si opera a grandes velocidades), no es posible lograr un equilibrio dinámico exacto, excepto por casualidad. (Para el estudio de balanceo dinámico, consulte la referencia 12.) Cualquier desbalanceo residual de un elemento giratorio causa que su centro de masa real sea excéntrico en relación con el eje de giro del eje. Tal excentricidad crea una fuerza centrífuga que tiende a flexionar el eje en la dirección de la excentricidad, incrementando ésta y por lo mismo aumentando la fuerza centrífuga. La única resistencia a esta fuerza se

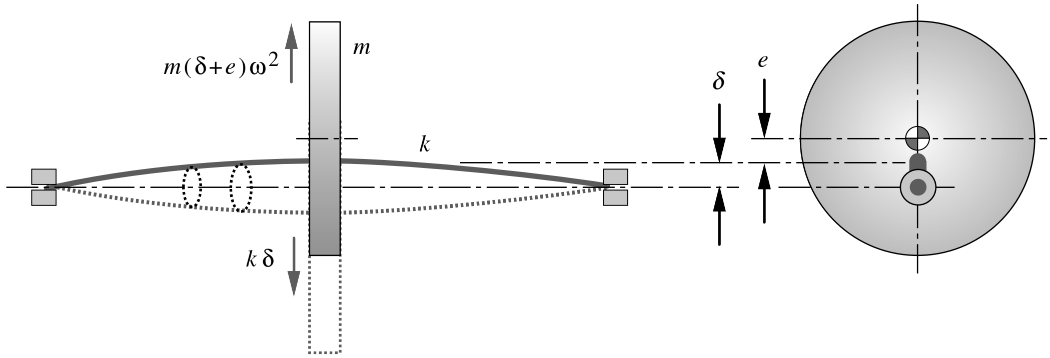


FIGURA 6-28

Cabeceo de flecha (amplitud muy exagerada)

debe a la rigidez elástica del eje, como se ilustra en la figura 6-28. La excentricidad inicial del eje está representada por *e* y la deflexión dinámica es δ. Un diagrama de cuerpo libre muestra que las fuerzas que se generan son

$$k\delta = m(\delta + e)\omega^2 \tag{6.26a}$$

$$\delta = \frac{e\,\omega^2}{(k/m) - \omega^2} \tag{6.26b}$$

La deflexión dinámica del eje provocada por esta fuerza centrífuga causa un cabeceo alrededor de su eje de rotación, mientras los puntos del centro del eje flexionado describen círculos alrededor del eje. Observe en la ecuación 6.26*b* que la deflexión se vuelve infinita cuando $\omega^2 = k / m$. Conforme la velocidad de giro del eje se aproxima a la velocidad natural fundamental (o crítica) de la vibración lateral, ocurre un fenómeno similar al de resonancia para esa vibración lateral. Observe en la ecuación 6.26*b* que cuando $\omega^2 = k / m$, $\delta = \infty$. La ecuación 6.26*b* se puede normalizar para una forma adimensional, la cual muestra claramente la relación:

$$\frac{\delta}{e} = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{6.26c}$$

La ecuación 6.26*c* y la figura 6-29 muestran la amplitud de la deflexión del eje normalizado para la excentricidad original (δ / e), como una función de la razón entre la frecuencia de giro y la frecuencia crítica ω / ω_n. Note que cuando $\omega / \omega_n = 0$, no hay respuesta, a diferencia de la vibración forzada de la sección anterior, lo cual se debe a que no hay fuerza centrífuga, a menos que el eje gire. Conforme la velocidad del eje se incrementa, la deflexión aumenta rápidamente. Si no hay amortiguamiento ($\xi = 0$), en $\omega / \omega_n = 0.707$), la deflexión del eje es igual a la excentricidad y teóricamente se vuelve infinita en la resonancia ($\omega / \omega_n = 1$). Desde luego, siempre habrá algún amortiguamiento, pero si el valor de ξ es pequeño, la deflexión será muy grande en la resonancia y puede causar esfuerzos lo suficientemente grandes para que el eje falle.

Observe qué sucede cuando la velocidad del eje rebasa ω_n, la fase cambia 180°, lo cual significa que la deflexión cambia abruptamente de lado en resonancia. A mayores razones de ω / ω_n, la deflexión se aproxima a $-e$, lo cual significa entonces que el sistema gira alrededor del centro de masa de la masa excéntrica y la línea central del eje es excéntrica. La conservación de la energía hace que el sistema intente girar alrededor de su verdadero centro de masa. Lo anterior ocurrirá en cualquier sistema donde los elementos

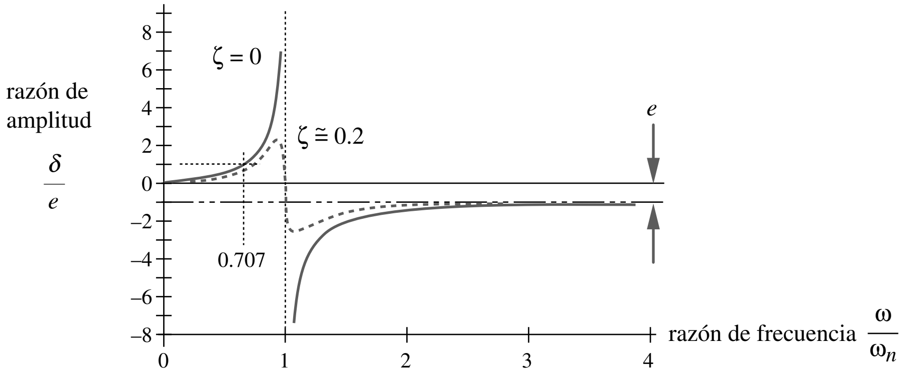


FIGURA 6-29

Respuesta de amplitud de un sistema de cabeceo de eje autoexcitado en función de la razón de frecuencia

giratorios sean excéntricos y grandes, comparados con el eje. Tal vez haya observado un ventilador de techo cuyo centro de motor orbita alrededor de su eje de rotación. Las aspas del ventilador generalmente no están en equilibrio perfecto y el montaje gira alrededor del centro de masa del montaje del aspa, en lugar de que gire alrededor de la línea central del sistema motor/eje.

Debe quedar claro que conviene evitarse la rotación de un sistema en su frecuencia crítica o cerca de ella. La frecuencia crítica para el cabeceo de un eje es la misma de la vibración lateral y se puede obtener aplicando el método de Rayleigh o cualquiera otra técnica adecuada. Debido a que esta razón de amplitud de vibración en un eje que cabecea inicia en cero, en lugar de en uno (como en las vibraciones forzadas), la frecuencia forzada puede estar más cerca de la frecuencia crítica que con la vibración lateral. Normalmente se tendrán buenos resultados manteniendo la velocidad de operación por debajo de la mitad de la frecuencia crítica de cabeceo del eje, a menos que la excentricidad inicial sea excesiva (lo cual no debe permitirse).

Observe la diferencia entre *vibración lateral* del eje y *cabeceo del eje*. La **vibración lateral** es una *vibración forzada*, que para generarse requiere de alguna fuente externa de energía, como las vibraciones de otras piezas de la máquina, y entonces el eje vibra en uno o más planos laterales, ya sea que esté girando o no. El **cabeceo del eje** es una *vibración autoexcitada*, causada por el giro del eje que actúa sobre una masa excéntrica. *Siempre* ocurrirá cuando estén presentes tanto el giro como la excentricidad. El eje asume una forma flexionada, la cual entonces gira o cabecea alrededor del eje, algo muy parecido al salto de la cuerda al que juegan los niños.

Vibración torsional

Así como un eje vibra lateralmente, también vibra por torsión y tiene una o más frecuencias naturales torsionales. Se pueden usar las mismas ecuaciones que describen las vibraciones laterales para las vibraciones torsionales. Los sistemas son análogos. La fuerza se convierte en torque, la masa en momento de inercia de masa y la constante lineal de resorte en constante torsional de resorte. La ecuación 6.24 (p. 457) para la frecuencia natural circular se vuelve la de un sistema giratorio con un solo grado de libertad:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{I_m}} \quad \text{rad/seg} \tag{6.27a}$$

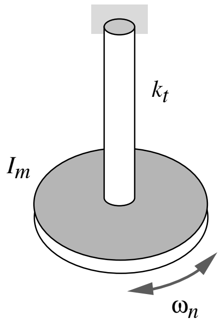


FIGURA 6-30
Disco sobre un eje con vibración torsional

La constante torsional de resorte k_t para un eje sólido circular es

$$k_t = \frac{GJ}{l} \quad \text{lb - in/rad o N - m/rad} \tag{6.27b}$$

donde G es el módulo de rigidez del material y l es la longitud del eje. El segundo momento polar de área J de un eje sólido circular es

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \quad \text{in}^4 \ \text{o} \ \text{m}^4 \tag{6.27c}$$

Si el eje es escalonado, entonces se obtiene un segundo momento polar de área equivalente J_{ef} a partir de

$$J_{ef} = \frac{l}{\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{J_i}} \tag{6.27d}$$

donde l es la longitud total del eje y J_i, y l_i son los momentos polares y las longitudes de las subsecciones de diferentes diámetros del eje, respectivamente.

El momento de inercia de masa de un disco sólido circular alrededor de su eje de rotación es:

$$I_m = \frac{mr^2}{2} \quad \text{in - lb - seg}^2 \ \text{o kg - m}^2 \tag{6.27e}$$

donde r es el radio del disco y m es su masa.

Estas ecuaciones son suficientes para obtener la frecuencia crítica de un disco montado sobre un eje fijo, como se ilustra en la figura 6-30.

Dos discos sobre un eje común

Un problema más interesante es el de dos (o más) discos colocados sobre un eje común, como se indica en la figura 6-31. Los dos discos mostrados oscilan torsionalmente en la misma frecuencia natural, 180° fuera de fase. Existe un punto llamado nodo, en algún lugar sobre el eje, en el cual no hay deflexión angular. A cada lado del nodo, los puntos

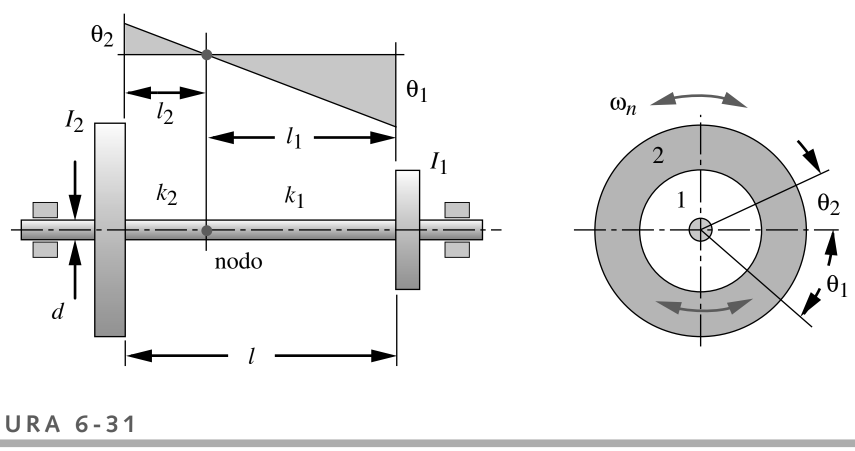


FIGURA 6-31
Vibración torsional de dos discos sobre un eje común

sobre el eje giran en direcciones angulares opuestas cuando están vibrando. El sistema se puede modelar como dos sistemas separados con masa individual, acoplados en este nodo estacionario. Uno tiene momento de masa y constante de resorte I_1, k_1; el otro, I_2, k_2. Su frecuencia natural común es entonces

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{I_1}} = \sqrt{\frac{k_2}{I_2}} \tag{6.28a}$$

Las constantes de resorte de cada uno de los segmentos de eje se obtienen a partir de $k_1 = JG / l$, suponiendo que J es constante a través del nodo.

$$\sqrt{\frac{JG}{l_1 I_1}} = \sqrt{\frac{JG}{l_2 I_2}}$$

y

$$l_1 I_1 = l_2 I_2 = I_2 (l - l_1)$$

entonces

$$l_1 = \frac{I_2 l}{I_1 + I_2} \tag{6.28b}$$

La ecuación 6.28*b* permite obtener la ubicación del nodo. Sustituyendo esta expresión en la ecuación 6.28*a*, da como resultado

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{I_1}} = \sqrt{\frac{JG}{l_1 I_1}} = \sqrt{\frac{JG}{l}\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}$$

$$\omega_n = \sqrt{k_t \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}} \quad \text{o} \quad \omega_n^2 = k_t \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \tag{6.28c}$$

la cual define la rapidez crítica para vibración torsional, en términos de las propiedades conocidas de la masa de los dos discos y la constante de resorte total del eje.

Es necesario eliminar la frecuencia crítica en las funciones de fuerza aplicadas al eje, para descartar la resonancia torsional y con ello una sobrecarga. Los dispositivos sujetos al eje, como pistones de motor o pistones de bomba, tienen frecuencias en sus funciones torque-tiempo que corresponden a los pulsos de su operación, multiplicados por su frecuencia de giro. Por ejemplo, un motor de gasolina de cuatro cilindros tiene una componente de alta frecuencia forzada igual a cuatro veces sus rpm. Si estos cuatro movimientos armónicos coinciden con la frecuencia crítica del eje, habría problemas. Cuando se diseña un eje, las características de la frecuencia de los dispositivos impulsores e impulsados, sujetos a ella, se deben tomar en cuenta, junto con su frecuencia de giro primaria.

Discos múltiples sobre una flecha común

Dos discos sobre un eje tienen un nodo y una frecuencia natural de torsión. Tres discos tienen dos nodos y dos frecuencias naturales. Este patrón se mantiene para cualquier número de discos, suponiendo en todos los casos que las masas de los discos dominan la masa del eje, por lo que puede ignorarse. N discos tienen $N - 1$ nodos y $N - 1$ frecuencias naturales. El grado de la ecuación de las frecuencias naturales también será $N - 1$ si se considera la variable ω_n^2 en vez de ω_n. Observe que la ecuación 6.28*c* para dos masas es lineal con este supuesto. La ecuación para tres masas es cuadrática en ω_n^2 y para cuatro masas es cúbica en ω_n^2.

Para los tres casos de masas, los cuadrados de las frecuencias naturales son las dos raíces de

$$I_1 I_2 I_3 \left(\omega_n^2\right)^2 - \left[k_2\left(I_1 I_2 + I_1 I_3\right) + k_1\left(I_2 I_3 + I_1 I_3\right)\right]\omega_n^2 + k_1 k_2\left(I_1 + I_2 + I_3\right) = 0 \quad (6.29)$$

Se pueden deducir polinomios de orden superior para masas adicionales y utilizar un método iterativo de búsqueda de raíces para resolverlas.

También existen métodos de aproximación para calcular las frecuencias naturales torsionales de cualquier número de masas. Esto permite que la masa del eje se tome en cuenta con facilidad, si se desea descomponerla en masas discretas. El método de Holzer se utiliza comúnmente en vibración torsional y lateral de ejes. Para la deducción y el estudio de tales métodos, consulte la referencia 10 o cualquier libro de vibraciones. El espacio no permite el tratamiento completo de ellos.

Control de las vibraciones torsionales

Cuando los ejes son largos y/o tienen varias masas distribuidas a lo largo de su longitud, las vibraciones torsionales suelen ser un problema serio de diseño. Los cigüeñales de los motores de combustión interna son un ejemplo. Una mayor longitud en el brazo del cigüeñal reduce drásticamente la rigidez torsional, lo cual disminuye su frecuencia natural. Esto, combinado con los mayores movimientos armónicos fuertes de las explosiones del cilindro en el torque, pueden originar una falla anticipada por fatiga torsional. El motor de gasolina de ocho cilindros en línea tan popular en la década de 1930 fue menos exitoso que su primo de seis cilindros en línea, debido en parte a los problemas de vibraciones torsionales en los ocho muñones largos del cigüeñal. El motor V-8 con sus cuatro muñones más cortos del cigüeñal sustituyó completamente al de ocho cilindros en línea. Incluso en tales máquinas más pequeñas, las vibraciones torsionales del cigüeñal llegan a ser un problema.

Hay varios métodos para contrarrestar los efectos de una correspondencia indeseable entre las frecuencias forzadas y las frecuencias naturales del sistema. La primera línea de defensa es rediseñar las propiedades de masa y rigidez del sistema, con la finalidad de obtener las frecuencias críticas tan arriba de la máxima frecuencia forzada como sea posible. Lo anterior normalmente requiere el incremento de la rigidez mientras se reduce la masa, algo que no siempre es fácil de hacer. Se necesita el uso efectivo de la geometría para obtener la rigidez máxima con un mínimo de material. El término **rigidez específica** se refiere a la *razón entre la rigidez y la masa* de un objeto. Se desea maximizar la rigidez específica para incrementar las frecuencias naturales. El análisis de elemento finito suele ser muy útil en la optimización de una geometría de diseño para alterar su frecuencia natural, debido a la información detallada que se obtiene con ese análisis.

Otro procedimiento es agregar un **absorbedor sintonizado** del sistema. Un absorbedor sintonizado es una combinación masa-resorte agregada al sistema, cuya presencia altera el conjunto de frecuencias naturales para alejarlo de las frecuencias forzadas dominantes. El sistema está efectivamente sintonizado lejos de las frecuencias indeseables. Tal enfoque es bastante efectivo en algunos casos y se utiliza tanto en movimientos lineales como en sistemas torsionales.

Generalmente se agrega un **amortiguador torsional** al extremo del cigüeñal de un motor para reducir sus oscilaciones. Este dispositivo, también llamado amortiguador tipo Lanchester —en honor a su inventor—, es un disco acoplado al eje a través de un medio que absorbe energía como caucho o aceite. El amortiguamiento con aceite proporciona amortiguamiento viscoso y el caucho tiene una histéresis de amortiguamiento significativa. Su efecto consiste en reducir la amplitud pico en resonancia, como se observa en la figura 6-26 (p. 456) para valores mayores de ζ. Para mayor información sobre todos estos métodos, se remite al lector a la referencia 11.

EJEMPLO 6-8

Determinación de las frecuencias críticas de un eje

Problema **Determine las frecuencias críticas de cabeceo y torsión del eje del ejemplo 6-2 y compárelas con su frecuencia forzada.**

Se proporciona **Las dimensiones del eje de acero son 0.875 in de diámetro por un largo de 1.5 in, 0.750 in de diámetro por un largo de 3.5 in, 0.669 in de diámetro por un largo de 1.5 in y 0.531 in de diámetro por un largo de 1.5 in. Su velocidad de giro es de 1 725 rpm. Los apoyos del eje se encuentran a 0 y 5 in sobre un eje de 8 in de longitud. El engrane de acero pesa 10 lb y actúa en z = 2 in. Tiene un momento de inercia de masa de 0.23 lb-in-seg^2. La polea de aluminio pesa 3 lb y actúa en z = 6.75 in. Tiene un momento de masa de inercia de 0.07 lb-in-seg^2.**

Suposiciones **La deflexión estática del eje, debido a los pesos del engrane y la polea, se usarán como una estimación del método de Rayleigh; no obstante, los pesos del engrane y la polea se aplicarán en las direcciones que den la mayor deflexión estática. El peso del eje se ignorará.**

Solución **Véase las figuras 6-5 (p. 423) y 6-32.**

1. La deflexión del eje escalonado se calcula con la misma técnica utilizada en el ejemplo 6-3 (p. 430). En este caso, las cargas se toman justo como los pesos de los dos discos. Se considerará que la fuerza del peso del engrane actúa hacia abajo y que la fuerza del peso de la polea actúa hacia arriba, ya que cualquier arreglo que represente mejor la situación dinámica donde las fuerzas de inercia actúan hacia afuera de los ejes, en cualquier dirección, incrementará la deflexión. Si se dirigen ambas fuerzas de peso hacia abajo, en este caso, se obtendría una menor deflexión máxima y una forma de curva diferente a la de la deflexión dinámica. La figura 6-32 muestra las fuerzas de peso aplicadas y la curva de deflexión para este eje. La magnitud de la deflexión en el engrane es de 6.0E-5 in y en la polea es de 1.25E-4 in. Estos valores se necesitan en la ecuación 6.25c (p. 458).

2. Calcule la frecuencia crítica de cabeceo del eje con la ecuación 6.25c:

$$\omega_n = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i\delta_i^2}} = \sqrt{386\frac{10(6.0E-5)+3(1.25E-4)}{10(6.0E-5)^2+3(1.25E-4)^2}} = 2\,131 \text{ rad/seg} \qquad (a)$$

   Observe que todas las magnitudes de las fuerzas de los pesos y sus deflexiones correspondientes se toman como positivas, sin importar sus direcciones vectoriales, como en el caso de la deflexión estática.

3. Compare la frecuencia crítica de cabeceo con la frecuencia forzada.

$$\frac{\omega_n}{\omega_f} = \frac{30/\pi(2\,131 \text{ rad/seg})}{1\,725 \text{ rpm}} = \frac{20\,350 \text{ rpm}}{1\,725 \text{ rpm}} = 11.8 \qquad (b)$$

   Éste es un margen muy cómodo. Si en este ejemplo, el peso del eje se incluye tanto en los cálculos de la deflexión como en los cálculos de la frecuencia crítica, la frecuencia crítica será de 20 849 rpm, la cual es 12.1 veces la frecuencia forzada. Incluso con los discos relativamente ligeros sobre este eje, ignorando el peso del eje, no se introduce un error considerable. Estos dos valores del método de Rayleigh son más grandes que la frecuencia natural real. El lector puede revisar sus diferencias en los modelos suministrados cambiando simplemente la densidad del material del eje

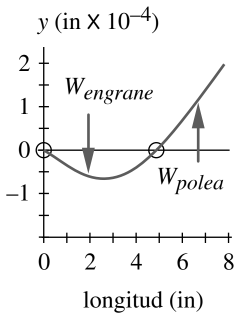


FIGURA 6-32
Deflexión estática provocada por las fuerzas del peso de los discos sobre el eje, orientados para dar la deflexión máxima de una forma similar a la deflexión dinámica

de 0.28 lb/in^3 (para el acero) a cero para eliminar el efecto del eje en los cálculos. Los modelos incluyen el peso del eje en los cálculos, dividiéndola en 50 incrementos sobre su longitud.

4. Para determinar la frecuencia crítica torsional de un eje escalonado se requiere una constante efectiva de resorte para las secciones combinadas de los escalones. La parte de interés del eje se encuentra entre la polea y el engrane. La constante de resorte de cualquier sección es

$$k_t = \frac{GJ}{l} = \frac{G\pi d^4}{32l} \text{ lb - in/rad}$$

$$k_{t_1} = \pi\frac{11.5E6(0.75)^4}{32(3.5)} = 102\,065 \text{ lb - in/rad} \tag{c}$$

$$k_{t_2} = \pi\frac{11.5E6(0.669)^4}{32(1.5)} = 150\,769 \text{ lb - in/rad}$$

Como todas las secciones del eje tienen el mismo torque, pero deflexiones diferentes (las cuales se suman a la deflexión total, como se indica en la ecuación 6.9*b* de la p. 429), actúan como resortes en serie. La constante de resorte efectiva k_{tef}, de la parte escalonada del eje entre las dos cargas de torque, se calculan con la ecuación 6.9*d*:

$$\frac{1}{k_{t_{ef}}} = \frac{1}{k_{t_1}} + \frac{1}{k_{t_2}} = \frac{1}{102\,065} + \frac{1}{150\,769}$$

$$k_{t_{ef}} = 60\,863 \text{ lb - in/rad} \tag{d}$$

5. La frecuencia torsional crítica se obtiene con la ecuación 6.28*c* (p. 463).

$$\omega_n = \sqrt{k_{t_{ef}}\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}} = \sqrt{60\,863\frac{0.23 + 0.07}{(0.23)(0.07)}} = 1\,065 \text{ rad/seg} \tag{e}$$

6. Compare la frecuencia torsional crítica con la frecuencia forzada.

$$\frac{\omega_n}{\omega_f} = \frac{30/\pi(1\,065 \text{ rad/seg})}{1\,725 \text{ rpm}} = \frac{10\,170 \text{ rpm}}{1\,725 \text{ rpm}} = 5.9 \tag{f}$$

Éste es un margen aceptable.

7. Los archivos EX10-08 se encuentran en el CD-ROM.

6.15 ACOPLAMIENTOS

Hay una gran variedad de acoplamientos de ejes comerciales, desde acoplamientos rígidos simplemente acuñados hasta diseños elaborados que utilizan engranes, elastómeros o fluidos para transmitir torque de uno a otro ejes o a otros dispositivos, en presencia de varios tipos de desalineaciones. Los acoplamientos se dividen *grosso modo* en dos categorías: rígidos y flexibles. Elástico en este contexto significa que el acoplamiento puede absorber algo de la desalineación entre los dos ejes y rígido implica que no se permite desalineación entre los ejes conectados.

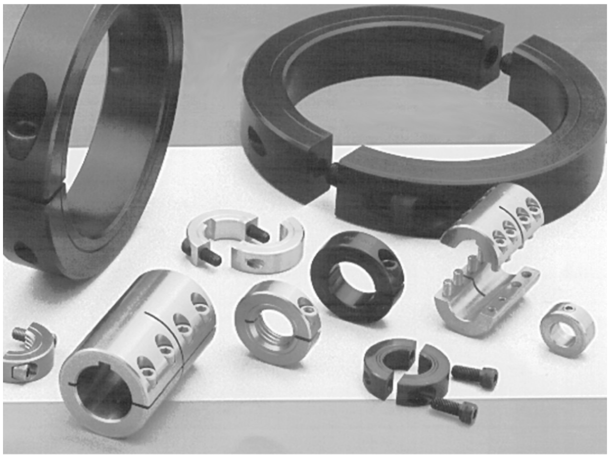


FIGURA 6-33

Varios tipos y tamaños de acoplamientos rígidos para ejes *Cortesía de Ruland Manufacturing Inc., Watertown, Mass.*

Acoplamientos rígidos

Los acoplamientos rígidos conectan los ejes sin permitir movimiento relativo entre ellas; sin embargo, es posible algún ajuste axial en el montaje. Se utilizan cuando la precisión y la fidelidad de la transmisión del torque es de primordial importancia como, por ejemplo, cuando la relación de fase entre el dispositivo impulsor y el dispositivo impulsado se debe mantener con precisión. Por consiguiente, la maquinaria de producción impulsada por grandes ejes en línea usa con frecuencia acoplamientos rígidos entre las secciones del eje. Los servomecanismos necesitan también conexiones sin juego en el tren impulsor. En contraparte, la alineación de los ejes de los ejes acoplados se ajusta con precisión para eliminar la introducción de grandes fuerzas y momentos laterales, cuando el acoplamiento se sujeta en su lugar.

La figura 6-33 muestra algunos ejemplos de acoplamientos rígidos comerciales. Hay tres tipos generales: acoplamiento de tornillo prisionero, acoplamientos acuñados y acoplamientos de sujeción.

ACOPLAMIENTOS DE TORNILLO PRISIONERO Éstos utilizan un tornillo prisionero duro que se incrusta en el eje para transmitir torque y cargas axiales. Éstos no son recomendables salvo para aplicaciones con cargas ligeras y se pueden aflojar con la vibración.

ACOPLAMIENTOS ACUÑADOS Usan cuñas estándar como las estudiadas en la sección anterior y pueden transmitir un torque considerable. Con frecuencia se emplean los tornillos prisioneros (opresores) junto con una cuña, ubicando el tornillo a 90° de la cuña. Para operar adecuadamente contra la vibración, se utiliza un tornillo prisionero con punta de copa que se incrusta en el eje. Para mayor seguridad, se debe hacer un orificio poco profundo en el eje debajo del tornillo, con la finalidad de proporcionar una interferencia mecánica contra deslizamiento axial en vez de confiar en la fricción.

ACOPLAMIENTOS DE SUJECIÓN Se fabrican con varios diseños, de los cuales los más comunes son los acoplamientos deslizantes de una o dos piezas, que se abrazan alrededor de los dos ejes y transmiten torque a través de la fricción, como se muestra en la figura 6-33. Un acoplamiento de bloqueo cónico utiliza una hendidura en forma de cono, que está apretada entre el eje y el alojamiento del acoplamiento cónico para sujetar el eje, como se indica en la figura 6-34.

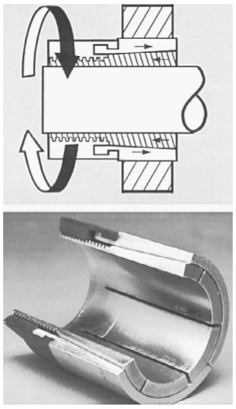


FIGURA 6-34

Un acoplamiento *trantorque* de bloqueo cónico; *Cortesía de Fenner Manheim, Manheim, Pa., 17545*

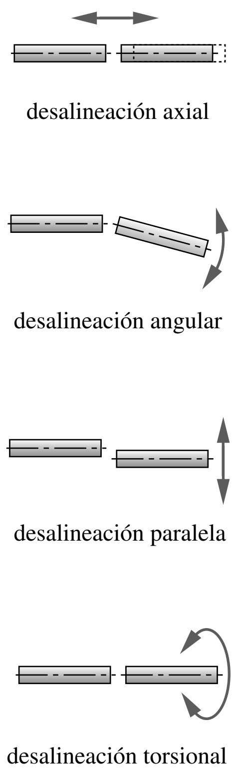


FIGURA 6-35

Tipos de desalineación en ejes

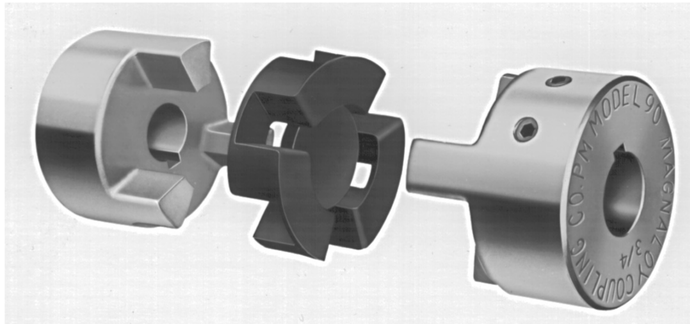


FIGURA 6-36

Vista esquemática de acoplamiento de quijada que muestra insertos de quijada y elastómero *Cortesía de Magnaloy Coupling Company, Alpena, Mich. 49707*

Acoplamientos flexibles

Un eje, como un cuerpo rígido, tiene seis grados potenciales de libertad (GDL) con respecto a un segundo eje. Sin embargo, debido a la simetría sólo cuatro de estos GDL son de interés. Se trata de las desalineaciones **axial**, **angular**, **paralela** y **torsional**, como se ilustra en la figura 6-35, que pueden ocurrir individualmente o combinados, y se presentan en los ensambles debido a las tolerancias de fabricación, o quizás ocurran durante la operación como resultado de los movimientos relativos de los dos ejes. La transmisión final de un automóvil tiene movimiento relativo entre los extremos del eje de transmisión. El extremo del eje impulsor está fijo a la estructura y el extremo impulsado está sobre el camino. La estructura y el camino están separados por la suspensión del carro, de modo que los acoplamientos del eje de transmisión absorben las desalineaciones angulares y axiales, conforme el auto pasa los baches.

A menos que se tomen precauciones para alinear los dos ejes adyacentes, en las máquinas puede haber desalineación axial, angular y paralela. Las desalineaciones angulares ocurren dinámicamente, cuando la carga impulsada intenta guiar o demorar al impulsor. Si el acoplamiento permite cualquier tolerancia torsional, se presenta un juego cuando el torque cambia de signo. Esto es indeseable si lo que se necesita es una fase precisa, como en los servomecanismos. En un acoplamiento flexible sería deseable la tolerancia a la torsión, si el impulsor se debe aislar de cargas de choque o vibraciones de torsión grandes.

Se fabrican numerosos diseños de acoplamientos con tolerancia y cada uno ofrece una combinación de características diferentes. El diseñador generalmente encuentra el acoplamiento comercial adecuado para cualquier aplicación. Los acoplamientos flexibles se dividen en varias subcategorías, que se listan en la tabla 6-7, junto con algunas de sus características. Las razones de torque no se muestran porque varían mucho con el tamaño y los materiales. Se pueden manejar niveles de potencia de fracciones de caballo a miles de caballos con acoplamientos de varios tamaños.

ACOPLAMIENTOS DE QUIJADA Tienen dos mazas (frecuentemente idénticas) con quijadas prominentes, como se ilustra en la figura 6-36. Las quijadas se traslapan axialmente y se traban torsionalmente a través de un inserto flexible de caucho o un metal blando. Las holguras permiten algo de desalineación axial, angular y paralela, aunque también pueden permitir un juego indeseable.

ACOPLAMIENTOS DE DISCO FLEXIBLE Son similares a los acoplamientos de quijada, donde sus dos mazas están conectadas por un elemento con tolerancia (disco), como un elastómero o un resorte metálico, como se muestra en la figura 6-37. Esto permite desalineación axial, angular y paralela, además de alguna tolerancia a la torsión con un poco o nada de juego.

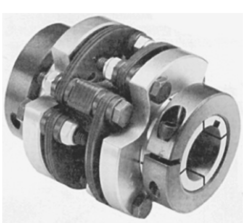


FIGURA 6-37

Acoplamiento de disco flexible *Cortesía de Zero-Max, Minneapolis, Minn., 55441*

ACOPLAMIENTOS DE ENGRANE Y RANURA Utilizan engranes externos con dientes rectos o curvos, como se indica en la figura 6-38, que permiten movimientos axiales sustanciales entre los ejes y, según la forma del diente y las holguras, también absorben pequeñas desalineaciones angulares y paralelas. Tienen gran capacidad de torque por el número de dientes engranados.

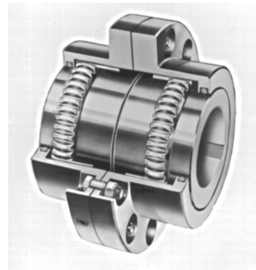


FIGURA 6-38

Acoplamiento flexible de engrane *Cortesía de Amerigear/Zum Industries, Inc, Erie Pa., 16514*

ACOPLAMIENTOS HELICOIDALES Y DE FUELLE Son diseños de una sola pieza que usan sus deflexiones elásticas para permitir desalineaciones axiales, angulares y paralelas, con un poco de juego o sin él. Los acoplamientos helicoidales (figura 6-39 y la fotografía inicial del capítulo 6) se fabrican con un cilindro sólido metálico cortado con una ranura helicoidal para incrementar su flexibilidad. Los acoplamientos de fuelle de metal (figura 6-40) se fabrican con una hoja de metal delgada soldando una serie de arandelas huecas juntas, moldeando hidráulicamente un tubo dentro de la forma, o colocando un recubrimiento electrolítico grueso sobre un mandril. Dichos acoplamientos tienen una capacidad de torque limitada comparados con otros diseños, pero ofrecen cero juego y alta rigidez a la torsión, en combinación con desalineación axial, angular y paralela.

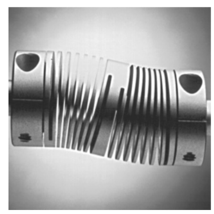


FIGURA 6-39

Acoplamiento helicoidal. *Cortesía de Helical Products Co., Inc, Santa María, Calif., 93456*

ACOPLAMIENTOS DE ESLABÓN O acoplamientos de Schmidt (figura 6-41) conectan dos ejes a través de una red de eslabones, que permiten una desalineación paralela significativa sin cargas laterales, o pérdidas de torque, y sin juego. Algunos diseños permiten pequeñas cantidades de desalineación angular y axial. Tales acoplamientos se utilizan con frecuencia donde se necesitan grandes ajustes paralelos o movimientos dinámicos entre los ejes.

JUNTAS UNIVERSALES Son de dos tipos comunes, el acoplamiento de Hooke (figura 6-42), el cual no tiene velocidad constante (CV), y el acoplamiento de Rzeppa, que sí la tiene. Los acoplamientos de Hooke se usan generalmente en pareja para eliminar su error en la velocidad. Ambos tipos pueden manejar desalineaciones angulares muy grandes y, en pareja, también proporcionan grandes desplazamientos paralelos. Éstos se

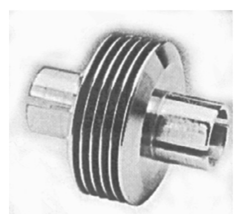


FIGURA 6-40

Acoplamiento de fuelle metálico. *Cortesía de Senior Flexonics Inc., Metal Bellows Division, Sharon, Mass., 02067*

Tabla 6-7 Características de varios tipos de acoplamientos

	Desalineación tolerada				
Clase	**Axial**	**Angular**	**Paralela**	**Torsional**	**Comentarios**
Rígida	grande	ninguna	ninguna	ninguna	requiere alineación precisa
Quijada	ligera	ligera (< 2°)	ligera (3% *d*)	moderada	absorción de choque; juego significativo
Engrane	grande	ligera (< 5°)	ligera (< 1/2% *d*)	ninguna	juego ligero; gran capacidad de torque
Ranura	grande	ninguna	ninguna	ninguna	juego ligero; gran capacidad de torque
Helicoidal	ligera	grande (20°)	ligera (< 1% *d*)	ninguna	una pieza, compacta; sin juego
Fuelle	ligera	grande (17°)	moderada (20% *d*)	ninguna	sujeto a falla por fatiga
Disco flexible	ligera	ligera (3°)	ligera (2% *d*)	de ligera a ninguna	absorción de choque; sin juego
Eslabón (Schmidt)	ninguna	ligera (5°)	grande (200% *d*)	ninguna	sin juego; sin cargas laterales sobre el eje
Hooke	ninguna	grande	grande (en pares)	ninguna	juego ligero; variación de rapidez a menos que se use en pares
Rzeppa	ninguna	grande	ninguna	ninguna	velocidad constante



FIGURA 6-41

Acoplamiento desplazado de Schmidt *Cortesía de Zero-Max/Helland Co., Minneapolis, Minn., 55441*

emplean en ejes de transmisión en automóviles, los acoplamientos Hooke por pares en el eje de transmisión trasero y los Rzeppas (llamados juntas de CV) en el impulsor delantero del automóvil.

La variedad de acoplamientos disponibles exige que el diseñador busque información más detallada sobre sus capacidades con los fabricantes, quienes siempre están dispuestos a ayudar en la selección del tipo de acoplamiento adecuado para una aplicación. Los fabricantes a menudo ofrecen datos de prueba sobre las capacidades de carga y alineación de sus acoplamientos específicos.



FIGURA 6-42

Acoplamiento de Hooke
Cortesía de Lovejoy, Inc, Downers Grove, Ill. 60515

6

6.16 ESTUDIO DE CASO

Ahora se abordará el diseño de ejes en uno de los ensambles de un caso de estudio definido en el apéndice C.

Diseño del eje de transmisión de un compresor portátil de aire

El diseño preliminar de este dispositivo se muestra en la figura C-1 (repetida en la página opuesta). Existen dos ejes, el de entrada y el de salida. El eje de salida debe tener un torque más grande en este caso, ya que tiene la menor rapidez de 1 500 rpm. El torque sobre el eje se definió en el estudio de caso 8A del apéndice C y se muestra en la figura C-3 (que se repite en la página opuesta). Como este es un torque variable con el tiempo, el eje debe diseñarse para carga por fatiga. Adicionalmente al torque sobre los ejes, existirán cargas laterales de los engranes que aplican momentos de flexión y propician una situación de carga combinada. Observe en la figura C-1 que los ejes se presentan muy cortos, además de que tienen sólo la longitud necesaria para alojar el engrane y los cojinetes. Lo anterior se hace para minimizar los momentos de flexión de las fuerzas de los engranes.

Como apenas se van a diseñar los engranes, se deben hacer algunos supuestos acerca de sus diámetros y espesores para realizar un diseño preliminar de los ejes. La selección posterior de los cojinetes también puede requerir algunos cambios en el diseño del eje. Esto es normal en los problemas de diseño, pues todos los elementos interactúan. Es necesaria la iteración para afinar los diseños de todos los elementos.

ESTUDIO DE CASO 8B

Diseño preliminar de los ejes del tren de transmisión de un compresor

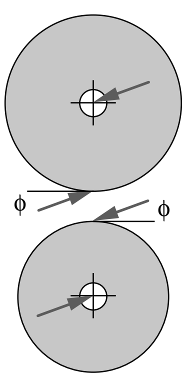


FIGURA 6-43

Fuerzas sobre un tren de engranes

Problema — **Determine tamaños razonables para los ejes de entrada y de salida de la caja de transmisión de la figura D-1 (página siguiente), con base en las cargas definidas en el estudio de caso 8A, y especifique un tipo de acoplamiento adecuado.**

Se proporciona — **La función de torque-tiempo sobre el eje de salida es como se ilustra en la figura D-3. La razón de engrane requerida es de 2.5:1 de reducción de velocidad de la entrada al eje de salida.**

Suposiciones — **Trate con un diámetro del engrane de entrada (piñón) de 4 in y un diámetro del engrane de salida de 10 in, ambos de 2 in de espesor y 20° de ángulo de presión. Se utilizarán sobre los ejes cojinetes de bolas de diámetro estándar.**

Solución — **Véase las figuras D-1, D-3 y 6-43.**

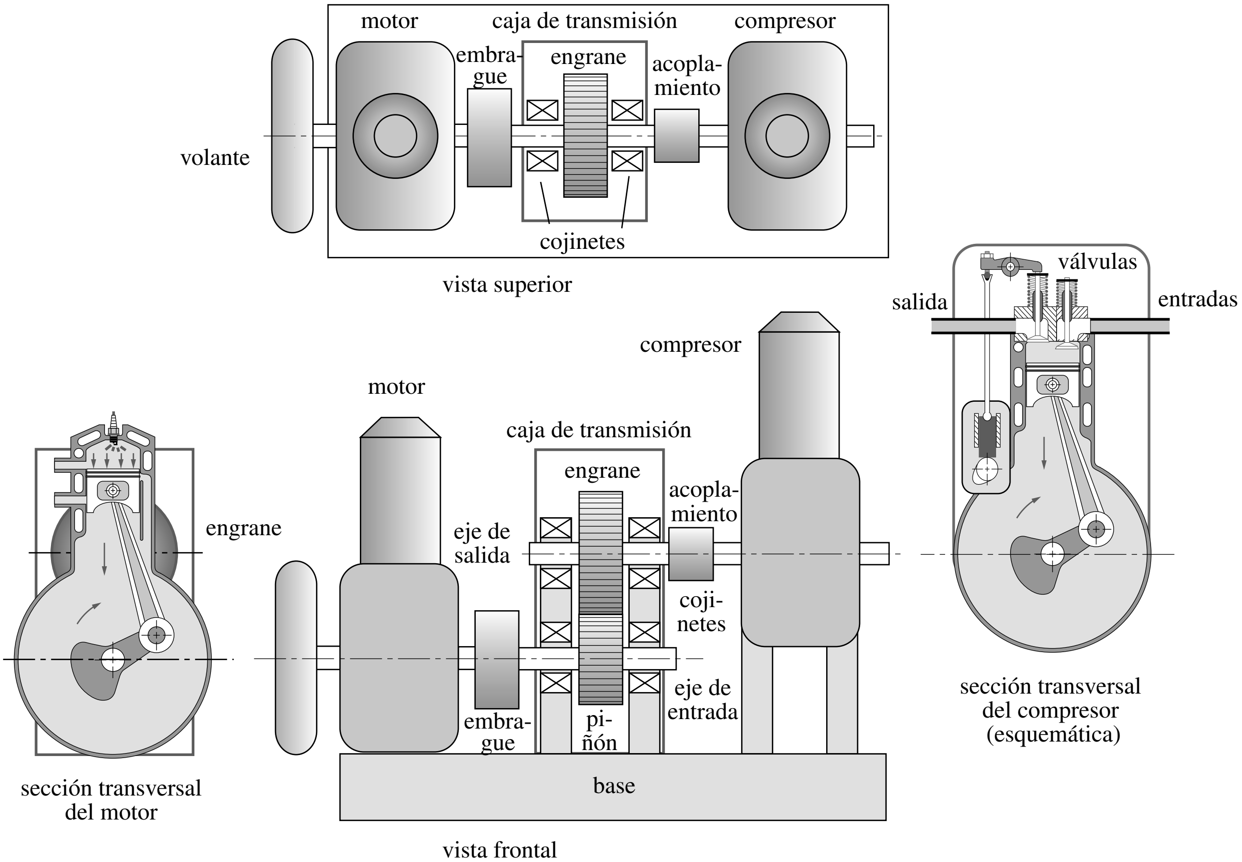


FIGURA D-1 Repetida

Diseño esquemático preliminar de un compresor portátil de aire impulsado por un motor de gasolina, y la caja de transmisión, acoplamientos, ejes y cojinetes

6

1. El torque variable con el tiempo sobre el eje de salida se definió en la figura D-3 (repetida abajo) como variable entre −175 y +585 lb-in. A partir de estos datos y los diámetros supuestos de los engranes, se determinan las fuerzas en el engranaje al que se somete el eje. La figura 6-43 presenta un diagrama de cuerpo libre de la caja de transmisión. Debido al ángulo de presión φ entre los engranes, hay componentes de fuerza radial y tangencial en el engranaje. La componente tangencial se obtiene a partir del torque conocido y el radio supuesto del engrane:

$$F_{t_{máx}} = \frac{T_{máx}}{r_g} = \frac{585 \text{ lb - in}}{5 \text{ in}} = 117 \text{ lb}$$

$$F_{t_{mín}} = \frac{T_{mín}}{r_g} = \frac{-175 \text{ lb - in}}{5 \text{ in}} = -35 \text{ lb} \qquad (a)$$

2. Las fuerzas resultantes máxima y mínima se obtienen de:

$$F_{\text{máx}} = \frac{F_{t_{\text{máx}}}}{\cos\phi} = \frac{117 \text{ lb}}{\cos 20°} = 124.5 \text{ lb}$$

$$F_{\text{mín}} = \frac{F_{t_{\text{mín}}}}{\cos\phi} = \frac{-35 \text{ lb}}{\cos 20°} = -37.25 \text{ lb} \qquad (b)$$

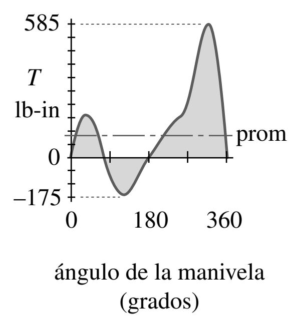


FIGURA D-3 Repetida

Función total torque-tiempo de la manivela con ω constante

Observe que estas fuerzas son las mismas sobre el eje de entrada, cuyo torque es 0.4 veces el del eje de salida, debido a la razón de engrane de 1:2.5.

3. Ahora se pueden obtener los momentos máximo y mínimo sobre el eje. Se supondrá que los engranes estarán centrados entre los cojinetes simplemente soportados, agrupados por separado de cuatro en cuatro. Entonces las fuerzas de reacción en el cojinete son iguales a la mitad de los máximos de las fuerzas del engrane y los momentos de flexión en el centro con una magnitud de

$$M_{máx} = F_{máx}\frac{l}{4} = 124.5\frac{4}{4} = 124.5 \text{ lb - in}$$

$$M_{mín} = F_{mín}\frac{l}{4} = -37.25\frac{4}{4} = -37.25 \text{ lb - in} \qquad (c)$$

4. En última instancia, los ejes necesitan estar escalonados debido a los cojinetes en cada extremo y, también, escalonados o con ranuras axiales para proporcionar una ubicación axial a los engranes. En esta etapa de diseño, se supondrá un diámetro constante del eje, con la finalidad de obtener un tamaño aproximado de la carga de torque y de momento.

6

Como probablemente se requerirá un cuñero para el engrane, se supondrá un factor de concentración de esfuerzos igual a 3, tanto a la flexión como a la torsión, en esa ubicación crítica, donde son mayores las componentes del torque y el momento. (Véase la figura 6-16, p. 437.) Después de que se diseñaron los engranes y se seleccionaron los cojinetes, se puede afinar el diseño, incluyendo los hombros de los escalones con factores de concentración de esfuerzos más precisos.

5. La carga es una combinación de momento y torque variables que son sincrónicos. Para los cálculos del esfuerzo se necesitan las componentes media y alternante del momento y el torque.

$$M_m = \frac{M_{máx} + M_{mín}}{2} = \frac{124.5 - 37.25}{2} = 43.6 \text{ lb - in}$$

$$M_a = \frac{M_{máx} - M_{mín}}{2} = \frac{124.5 + 37.25}{2} = 80.9 \text{ lb - in} \qquad (d)$$

$$T_m = \frac{T_{máx} + T_{mín}}{2} = \frac{585 - 175}{2} = 205 \text{ lb - in}$$

$$T_a = \frac{T_{máx} - T_{mín}}{2} = \frac{585 + 175}{2} = 380 \text{ lb - in} \qquad (e)$$

6. Se necesita seleccionar un material de prueba para los cálculos. Primero se intentará con un acero de bajo costo, rolado en frío, al bajo carbono, como el SAE 1018, con S_{ut} = 64 kpsi y S_y = 54 kpsi. Aun cuando no es excepcionalmente fuerte, este material tiene baja sensibilidad a la muestra, lo cual será una ventaja, dadas las concentraciones de esfuerzos. Calcule la resistencia física sin corregir mediante la ecuación 4.5 (p. 260):

$$S_{e'} = 0.5S_{ut} = 0.5(64\,000) = 32\,000 \text{ psi} \qquad (f)$$

Esto se debe reducir por varios factores debido a las diferencias entre la pieza y la muestra de prueba.

$$S_e = C_{carga}C_{tamaño}C_{sup}C_{temp}C_{conf}S_{e'}$$

$$S_e = (1)(1)(0.84)(1)(1)(32\,000) \cong 27\,000 \text{ psi} \qquad (g)$$

La carga es de flexión y de torsión, por lo que C_{carga} = 1. Como aún no se conoce el tamaño de la pieza, se supondrá temporalmente $C_{tamaño}$ = 1 y se ajustará más tarde. Se elige C_{sup} para un acabado maquinado de la figura 4-26 (p. 262) o con la ecuación 4.7*e* (p. 263). La temperatura no se eleva, entonces C_{temp} = 1, y se supone el 50% de confiabilidad con C_{conf} = 1.

7. La sensibilidad a la muesca del material se obtiene de la ecuación 4.13 (p. 273) o de la figura 4-36 (pp. 274-275) y para la flexión es $q = 0.50$, mientras que para la torsión es $q = 0.57$, ambas con un radio de muesca supuesto de 0.01 in.

8. El factor de concentración de esfuerzos de flexión-fatiga se obtiene con la ecuación 4.11*b* (p. 273) y el factor de concentración de esfuerzos geométricos supuesto.

   Para esfuerzo por flexión en el cuñero:

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.50(3.0 - 1) = 2.00 \qquad (h)$$

   Para esfuerzo por torsión en el cuñero:

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0.57(3.0 - 1) = 2.15 \qquad (i)$$

9. Con la ecuación 4.17 (p. 294) se encuentra que, en este caso, se debe utilizar el mismo factor sobre las componentes medias de esfuerzo:

$$\begin{aligned} K_{fm} &= K_f = 2.00 \\ K_{fsm} &= K_{fs} = 2.15 \end{aligned} \qquad (j)$$

10. El diámetro del eje se determina ahora a partir de la ecuación 6.8 (p. 422), con el factor de seguridad supuesto de 3, para tomar en cuenta las incertidumbres en este diseño preliminar. Observe que la ecuación ASME (6.6) de la p. 420 no se puede utilizar con seguridad en este caso, ya que supone un torque constante. Se debe aplicar el procedimiento más general de la línea modificada de Goodman de la ecuación 6.8.

$$d_{salida} = \left\{ \frac{32 N_{sf}}{\pi} \left[\frac{\sqrt{(k_f M_a)^2 + \frac{3}{4}(k_{fs} T_a)^2}}{S_f} + \frac{\sqrt{(k_{fm} M_m)^2 + \frac{3}{4}(k_{fsm} T_m)^2}}{S_{ut}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{ \frac{32(3)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{[2.00(80.9)]^2 + \frac{3}{4}[2.15(380)]^2}}{27\,000} + \frac{\sqrt{[2.00(43.6)]^2 + \frac{3}{4}[2.15(205)]^2}}{64\,000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$d_{salida} = 1.00 \text{ in} \qquad (k)$$

   De modo que el diámetro nominal de 1 in del eje parece aceptable para el eje de salida.

11. El eje de entrada tiene los mismos momentos medio y alternante de flexión que el eje de salida; sin embargo, su torque es sólo del 40% del eje de salida. Los torque medio y alternante sobre ella son de 82 y 152 lb-in, respectivamente. Cuando éstos se introducen en la ecuación 6.8, con todos los demás factores iguales, se obtiene un diámetro del eje más pequeño.

$$d_{entrada} = \left\{ \frac{32(3)}{\pi} \left[\frac{\sqrt{[2.00(80.9)]^2 + \frac{3}{4}[2.15(152)]^2}}{27\,000} + \frac{\sqrt{[2.00(43.6)]^2 + \frac{3}{4}[2.15(82)]^2}}{64\,000} \right] \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$d_{entrada} = 0.768 \text{ in} \qquad (l)$$

De modo que el eje de entrada tiene un diámetro nominal de 0.781 in, el cual es tamaño de fábrica.

12. Los acoplamientos entre el motor y el eje de entrada, así como entre el eje de salida y el compresor, tienen que ser capaces de absorber las desalineaciones angular y paralela debidas a las tolerancias en el ensamble del motor, la caja de transmisión y el compresor. La tolerancia a la torsión en los acoplamientos también serviría para absorber una parte del choque asociado con la inversión del torque que se indica en la figura D-3 (apéndice D).

    Con tales restricciones, un acoplamiento de quijada con un inserto de algún elastómero sería una buena elección para ambos acoplamientos. El juego inherente en los acoplamientos no sería problema, ya que la fase de los tres ensambles no es crítica en esta aplicación. También se puede usar un acoplamiento de disco flexible. Un acoplamiento rígido requeriría más precisión en el empalme de los ensambles, que no se garantiza de este modo. Consulte la tabla 6-7 (p. 469) para información sobre las características de acoplamiento.

13. Los archivos CASE8B-1 y CASE8B-2 se encuentran en el CD-ROM.

6.17 RESUMEN

Los ejes se utilizan en todas las máquinas giratorias. El acero es el material usual para obtener rigidez alta para pequeñas deflexiones. Los ejes pueden ser de acero al bajo carbono dulce, o bien, de acero al medio o alto carbonos, para una mayor resistencia, o si se necesita un acabado superficial duro para resistencia al desgaste. Los ejes de las máquinas normalmente tienen hombros escalonados para la ubicación axial de los elementos que se sujetan, como cojinetes, engranes o ruedas dentadas (ranuradas). Tales hombros crean concentraciones de esfuerzos que se deben tomar en cuenta en el análisis de esfuerzos. Los cuñeros o ajustes por interferencia también crean concentraciones de esfuerzos.

La carga sobre los ejes generalmente es una combinación de torsión y flexión, donde una o ambas pueden variar con el tiempo. El caso común de carga de torque variable, con flexión variable, requiere el enfoque del diagrama modificado de Goodman para el análisis de falla. Para el caso común del torque y el momento de flexión relacionados a través de fuerzas comunes, el enfoque del diagrama modificado de Goodman está contenido en la ecuación 6.8 (p. 422), la cual es una herramienta de diseño para determinar el diámetro de un eje, conociendo las cargas variables, las concentraciones de esfuerzos, las resistencias del material y el factor de seguridad elegido. La ecuación 6.6 (p. 420) de la ASME, para diseño de ejes, se aplica sólo para los casos de torque constante con un momento de flexión aplicado constante, que es de ciclo invertido debido a la rotación del eje. La ecuación 6.6 se utiliza únicamente en situaciones que cumplan con esta restricción de carga. Siempre es mejor usar la ecuación de diseño general 6.8 (p. 422), que considerar los momentos y los torques fluctuantes si se encuentran presentes.

Para sujetar los elementos a los ejes se utilizan comúnmente varias técnicas o dispositivos como cuñas, ranuras y ajustes por interferencia. Las cuñas están estandarizadas con el diámetro del eje. Consulte el estándar ANSI o la referencia 3 para los datos de intervalo en tamaños no incluidos en este capítulo. Las ranuras tienen una mayor capacidad de torque que las cuñas. Los ajustes de interferencia pueden ser por presión directa o por expansión térmica, o bien, por encogimiento de uno o ambos miembros. Es posible crear esfuerzos muy altos con estas técnicas, con falla probable de la pieza durante el ensamble.

Los volantes se usan cuando se necesita suavizar el torque o la velocidad. El volante tiene que estar dimensionado para proporcionar el coeficiente de fluctuación de velocidad deseado y, luego, debe verificarse para el esfuerzo a la velocidad de operación. Los

esfuerzos máximos en un volante ocurren en el diámetro interior. Hay que determinar la rapidez máxima segura, conforme el esfuerzo se incrementa con el cuadrado de la rapidez de giro. Cuando un volante falla mientras gira, generalmente vuela separándose y causa daños severos.

Todos los ejes giratorios tienen frecuencias críticas, a las cuales resuenan con deflexiones grandes, causando fallas. Las frecuencias fundamentales lateral y de torsión son diferentes; ambas se deben eliminar de la operación, manteniendo la velocidad de giro muy por debajo de la menor frecuencia crítica del eje.

Existe una gran variedad de acoplamientos comerciales para ejes. En este capítulo se estudiaron brevemente algunos tipos y sus características. Se debería consultar a los fabricantes para obtener información más completa y actualizada.

Ecuaciones importantes utilizadas en este capítulo

Para el uso adecuado de estas ecuaciones, consulte las secciones referenciadas.

Relación de potencia-torque (sección 6.4):

$$P = T\omega \tag{6.1a}$$

Ecuación ASME para diseño de ejes (sección 6.8):

$$d = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\left(k_f \frac{M_a}{S_f} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} \tag{6.6b}$$

Ecuación general de diseño de ejes (sección 6.8):

$$d = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\left(k_f M_a\right)^2 + \frac{3}{4}\left(k_{fs} T_a\right)^2}}{S_f} + \frac{\sqrt{\left(k_{fm} M_m\right)^2 + \frac{3}{4}\left(k_{fsm} T_m\right)^2}}{S_{ut}} \right] \right\}^{\frac{1}{3}} \tag{6.8}$$

Deflexión torsional del eje (sección 6.9):

$$\theta = \frac{Tl}{GJ} \tag{6.9a}$$

Presión generada por un ajuste de interferencia (sección 6.11):

$$p = \frac{0.5\delta}{\frac{r}{E_o}\left(\frac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} + \nu_o \right) + \frac{r}{E_i}\left(\frac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} - \nu_i \right)} \tag{6.14a}$$

Esfuerzos tangenciales en el eje y la maza en un ajuste de interferencia (sección 6.11):

$$\sigma_{t_{flecha}} = -p\frac{r^2 + r_i^2}{r^2 - r_i^2} \tag{6.15a}$$

$$\sigma_{t_{maza}} = p\frac{r_o^2 + r^2}{r_o^2 - r^2} \tag{6.16a}$$

Energía almacenada en un volante giratorio (sección 6.13):

$$E_k = \frac{1}{2} I_m \omega^2 \tag{6.17a}$$

Momento de inercia de masa de un volante de disco sólido (sección 6.13):

$$I_m = \frac{\pi}{2}\frac{\gamma}{g}\left(r_o^4 - r_i^4\right)t \tag{6.17d}$$

Inercia necesaria en el volante para un coeficiente de fluctuación determinado (sección 6.13):

$$E_k = \frac{1}{2} I_s \left(2\omega_{prom}\right)\left(C_f\,\omega_{prom}\right)$$

$$I_s = \frac{E_k}{C_f\,\omega_{prom}^2} \tag{6.22}$$

Esfuerzo tangencial en un volante giratorio (sección 6.13):

$$\sigma_t = \frac{\gamma}{g}\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r_i^2 + r_o^2 + \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right) \tag{6.23a}$$

Frecuencia natural de un sistema de un solo grado de libertad (sección 6.14):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{rad/seg} \tag{6.24a}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Hz} \tag{6.24b}$$

Primera frecuencia crítica lateral (aproximada) (sección 6.14):

$$\omega_n = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i^2}} = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n} (W_i/g)\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} (W_i/g)\delta_i^2}} = \sqrt{g\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i\delta_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i\delta_i^2}} \tag{6.25c}$$

Primera frecuencia crítica de torsión de dos masas sobre un eje sin peso (sección 6.14):

$$\omega_n = \sqrt{k_t\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}} \quad \text{o} \quad \omega_n^2 = k_t\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \tag{6.28c}$$

6.18 REFERENCIAS

1. **R.C. Juvinall y K.M. Marshek**, *Fundamentals of Machine Component Design*, 2a. ed., John Wiley & Sons: Nueva York, p. 656, 1991.
2. **D.B. Kececioglu y V.R. Lalli**, "Reliability Approach to Rotating Component Design", *Technical Note TN D-7846*, NASA, 1975.

3. **V.C. Davies, H.J. Gough y H.V. Pollard**, "Discussion to the Strength of Metals Under Combined Alternating Stresses", *Proc. of the Inst. Mech. Eng.*, **131**(3): pp. 66-69, 1935.

4. **S.H. Loewenthal**, "Proposed Design Procedure for Transmission Shafting Under Fatigue Loading", *Technical Note TM-78927*, NASA, 1978.

5. **H.J. Gough y H.V. Pollard**, "The Strength of Metals Under Combined Alternating Stresses", *Proc. of the Inst. Mech. Eng.*, **131**(3): pp. 3-103, 1935.

6. **E. Oberg y F.D. Jones**, eds., *Machinery's Handbook*, 17a. ed., Industrial Press Inc.: Nueva York, pp. 867-883, 1966.

7. **R.C. Peterson**, *Stress-concentration factors*, John Wiley & Sons: Nueva York, pp. 266-267, 1974.

8. **E. Oberg y otros**, *Machinery's Handbook*, 25a. ed., Industrial Press Inc.: Nueva York, pp. 2042-2070, 1996.

9. **M. Dimentber y otros**, "Passage Through Critical Speed with Limited Power by Switching System Stiffness", AMD-vol. 192/DE-vol. 78, *Nonlinear and Stochastic Dynamics,* ASME, 1994.

10. **C.R. Mischke,** *Elements of Mechanical Analysis*, Addison Wesley: Reading, Mass., pp. 317-320, 1963.

11. **R.M. Phelan**, *Dynamics of Machinery*, McGraw-Hill: Nueva York, pp. 178-196, 1967.

12. **R.L. Norton**, *Design of Machinery*, 3a ed., McGraw-Hill: Nueva York, p. 608, 2004.

Tabla P6-0 †
Matriz tema/problema

6.4 Potencia del eje
6-15, 6-16, 6-41, 6-42

6.8 Diseño del eje
6-1, ***6-2***, ***6-3***, ***6-8***, *6-31*, *D-32*, *6-33*, *6-34*, *6-35*

6.9 Deflexión del eje
6-4, 6-5, 6-17b, 6-18, 6-21

6.10 Cuñas y cuñeros
6-6, 6-7, *6-9*, *6-10*, 6-17a, *6-19*, *6-20*, 6-28, 6-29, D-30, *6-36*

6.12 Ajustes de interferencia
6-11, *6-37*, *6-40*, 6-43, 6-44

6.13 Diseño de volantes
6-12, *6-38*, *6-39*, 6-45, *6-46*

6.14 Velocidades críticas
6-13, 6-14, 6-17c, 6-22, D-23, 6-24, 6-25, 6-26, 6-27

6

6.19 PROBLEMAS

*† ***6-1***. En la figura P6-1 se muestra un eje simplemente apoyado. Se aplica una carga transversal constante P, conforme el eje gira, sometida a un torque que varía con el tiempo de $T_{mín}$ a $T_{máx}$. Para los datos en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1, encuentre el diámetro del eje requerido para obtener un factor de seguridad de 2, en carga a la fatiga, si el eje es de acero con una S_{ut} = 108 kpsi y S_y = 62 kpsi. Las dimensiones están en pulgadas, la fuerza en libras y el torque en lb-in. Suponga que no hay concentraciones de esfuerzos.

* ***6-2***. En la figura P6-2 se muestra un eje simplemente apoyado. Se aplica una carga unitaria p de magnitud constante y uniformemente distribuida, conforme el eje gira sometido a un torque que varía con el tiempo de $T_{mín}$ a $T_{máx}$. Para los datos en la(s) fila(s)

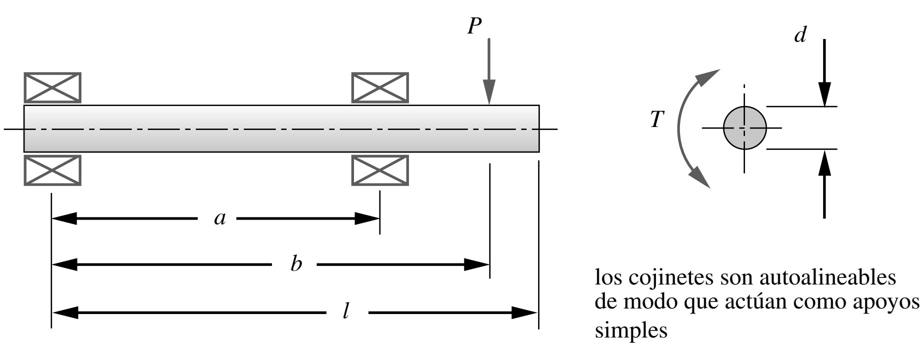


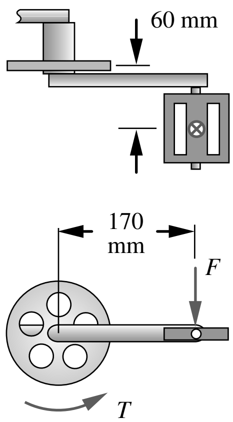
FIGURA P6-1
Diseño del eje de los problemas 6-1, 6-4 y 6-15

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son problemas ampliados de problemas similares en capítulos anteriores con el mismo número identificador.

Tabla PD-1 Datos para los problemas

Fila	l	a	b	P o p	$T_{mín}$	$T_{máx}$
a	20	16	18	1 000	0	2 000
b	12	2	7	500	–100	600
c	14	4	12	750	–200	400
d	8	4	8	1 000	0	2 000
e	17	6	12	1 500	–200	500
f	24	16	22	750	1 000	2 000



Repetida

FIGURA P4-1

Problema 6-3

asignada(s) de la tabla P6-1, encuentre el diámetro del eje requerido para obtener un factor de seguridad de 2, en carga a la fatiga, si el eje es de acero con S_{ut} = 745 MPa y S_y = 427 MPa. Las dimensiones están en centímetros, la fuerza distribuida en N/cm y el torque en N-m. Suponga que no hay concentraciones de esfuerzos.

6-3. Para el montaje del brazo del pedal de la bicicleta de la figura P4-1 (repetida aquí), suponga una fuerza aplicada por el ciclista que va de 0 a 1500 N en cada pedal por cada ciclo. Diseñe un eje adecuado para conectar los dos brazos de los pedales y fijar la rueda dentada contra un escalón. Use un factor de seguridad contra la fatiga de 2 y un material con S_{ut} = 500 MPa. El eje tiene un detalle cuadrado en cada extremo donde se insertan los brazos de los pedales.

*6-4. Determine las deflexiones máximas por torsión y por flexión del eje mostrado en la figura P6-1 para los datos en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1, si el diámetro del eje de acero es de 1.75 in.

*6-5. Determine las deflexiones máximas a la torsión y a la flexión del eje mostrado en la figura P6-2 para los datos en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1, si el diámetro del eje de acero es de 4 cm.

*6-6. Determine el tamaño necesario de la cuña para proporcionar un factor de seguridad de por lo menos 2 contra fallas por cortante y por presión por contacto, para el diseño mostrado en la figura P6-3, mediante los datos en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1. Suponga un diámetro del eje de 1.75 in. El eje es de acero de S_{ut} = 108 kpsi y S_y = 62 kpsi. La cuña es de acero de S_{ut} = 88 kpsi y S_y = 52 kpsi.

6-7. Determine el tamaño necesario de la cuña para proporcionar un factor de seguridad de por lo menos 2 contra fallas por cortante y por presión por contacto, para el diseño mostrado en la figura P6-4, mediante los datos en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1. Suponga un diámetro del eje de 4 cm. El eje es de acero con S_{ut} = 745 MPa y S_y = 427 MPa. La cuña es de acero con S_{ut} = 600 MPa y S_y = 360 MPa.

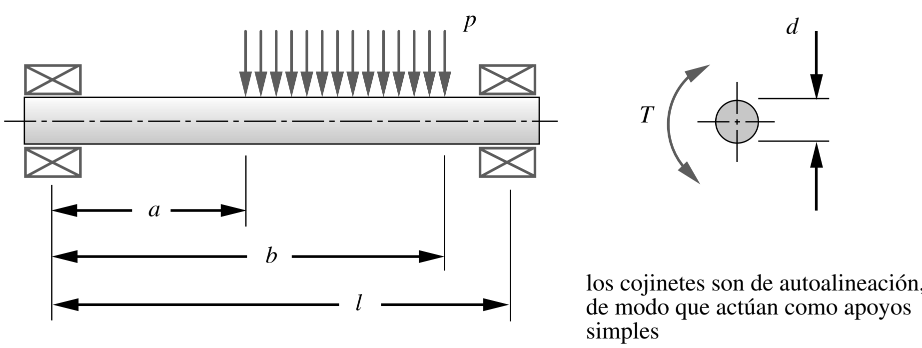


FIGURA P6-2

Diseño del eje de los problemas 6-2, 6-5 y 6-16 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son problemas ampliados de problemas similares en capítulos anteriores con el mismo número identificador.

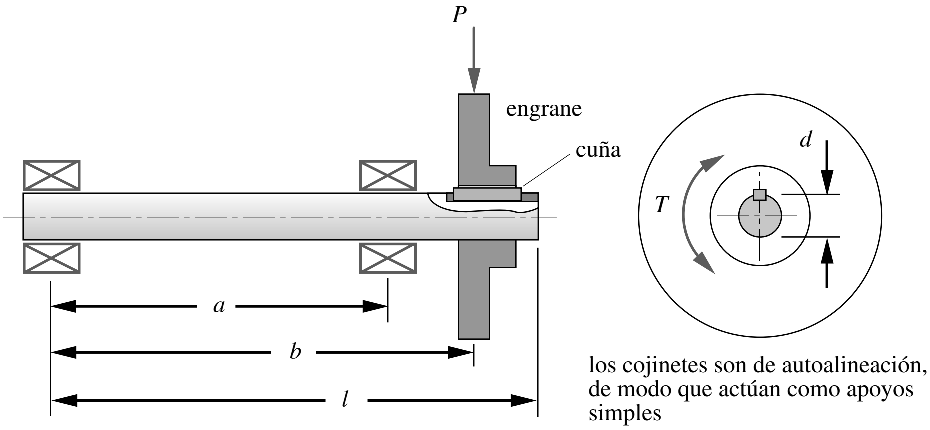


FIGURA P6-3

Diseño del eje para los problemas 6-6, 6-9, 6-11 y 6-12 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

*_**6-8**_. Una máquina papelera procesa rollos de papel cuya densidad es de 984 kg/m^3. El rollo de papel tiene un diámetro exterior de 1.50 m (*OD*) × 22 cm de diámetro interior (*ID*) × 3.23 m de longitud y se encuentra sobre un eje de acero, hueco, simplemente apoyado, con S_{ut} = 400 MPa. Obtenga el diámetro interior del eje necesario para lograr un factor de seguridad dinámico de 2 para una vida de 10 años, si el diámetro exterior del eje es de 22 cm y el rollo gira a 50 rpm, con una absorción de 1.2 hp.

**_6-9_*. Repita el problema 6-1 considerando la concentración de esfuerzos en el cuñero, como se indica en la figura P6-3.

6-10. Repita el problema 6-2 considerando las concentraciones de esfuerzos en los cuñeros, como se indica en la figura P6-4.

**_6-11_*. Determine la cantidad necesaria de interferencia diametral para proporcionar un ajuste de interferencia adecuado para el engrane de 6 in de diámetro y 1 in de espesor de la figura P6-3, usando un eje con diámetro de 1.75 in, de modo que los esfuerzos en la maza y en el eje sean seguros el torque de la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1 se pueda transmitir a través del ajuste de interferencia. Suponga una S_{ut} = 108 kpsi y S_y = 62 kpsi.

6-12. Suponga que el dispositivo acuñado al eje de la figura P6-3 es un volante de hierro fundido clase 50 de 20 in de diámetro exterior y 1 in de espesor. La maza tiene 4 in

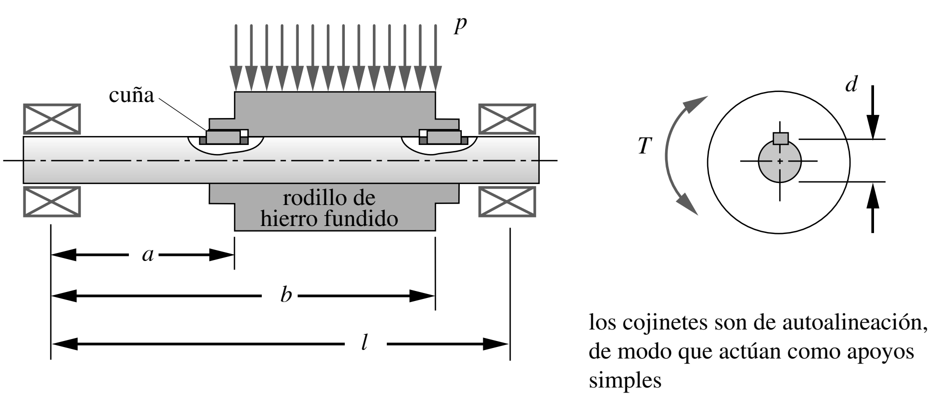


FIGURA P6-4

Diseño del eje de los problemas 6-7, 6-10 y 6-14 (un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son problemas ampliados de problemas similares en capítulos anteriores con el mismo número identificador.

de diámetro y 3 in de espesor. Determine la velocidad máxima a la cual puede trabajar con seguridad usando un factor de seguridad de 2. Utilice las dimensiones y otros datos adecuados del problema 6-6 con los datos de la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1. Considere que, en este caso, la fuerza transversal *P* es igual a cero.

*6-13. Determine la frecuencia crítica de cabeceo del eje para el montaje mostrado en la figura PD-3, mediante las dimensiones de la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1 y un diámetro para el eje de acero de 2 in. Use las dimensiones del volante del problema 6-12.

6-14. Determine la frecuencia crítica de cabeceo del eje para el montaje, mostrado en la figura PD-4, mediante las dimensiones de la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1, y un diámetro para el eje de acero de 4 cm. El diámetro del rodillo de hierro fundido es 3 veces mayor que el diámetro del eje.

*6-15. ¿Cuáles son los valores de potencia máxima, mínima y promedio para el eje mostrado en la figura P6-1, con los datos de la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1, si la velocidad del eje es de 750 rpm?

*6-16. ¿Cuáles son los valores de potencia máxima, mínima y promedio para el eje mostrado en la figura P6-2, con los datos de la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1, si la velocidad del eje es de 50 rpm?

*6-17. La figura P6-5 muestra el montaje de un rodillo impulsado por un engrane. El rodillo se extiende en el 80% de la longitud *a* y está centrado en esa dimensión. El rodillo ocupa el 95% de la longitud expuesta del eje entre las caras de los cojinetes. El eje es de acero con S_y = 427 MPa y S_{ut} = 745 MPa. Para los datos de la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1, calcule:

a) El factor de seguridad contra falla por fatiga para un diámetro del eje igual a 40 mm.
b) La deflexión máxima por torsión entre el engrane y el rodillo.
c) La frecuencia natural de torsión del eje.

*6-18. La figura P6-5 muestra el montaje de un rodillo impulsado por un engrane. El rodillo se extiende en el 80% de la longitud *a* y está centrado en esa dimensión. El rodillo ocupa el 95% de la longitud expuesta del eje entre las caras de los cojinetes. Para los datos de la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1, obtenga la deflexión máxima por flexión del eje de 40 mm de diámetro.

**6-19.* La figura P6-6 muestra dos engranes sobre el mismo eje. Suponga que la fuerza radial constante P_1 es el 40% de P_2. Para los datos de la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1, obtenga el diámetro del eje requerido para obtener un factor de seguridad de 2 con carga por fatiga, si el eje es de acero con S_{ut} = 108 kpsi y S_y = 62 kpsi. Las dimensiones están en pulgadas, la fuerza en lb y el torque en lb-in.

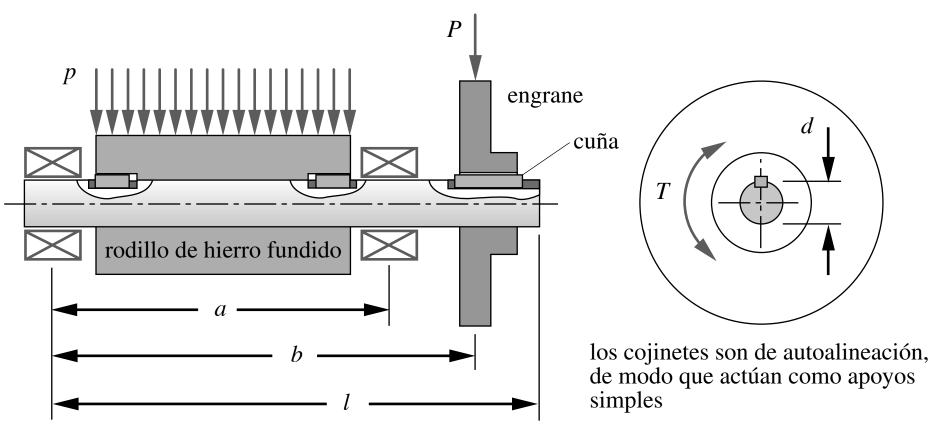


FIGURA P6-5

Diseño del eje de los problemas 6-17 y 6-18 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

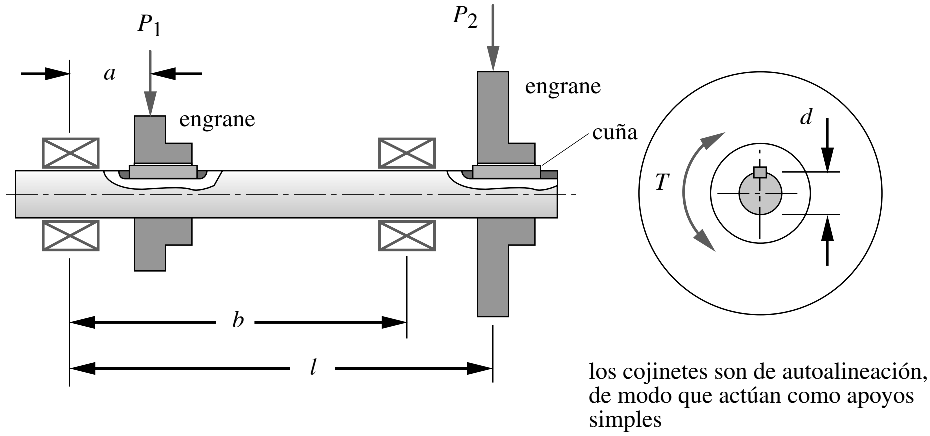


FIGURA P6-6

Diseño del eje del problema 6-19 (Un modelo en Solidworks de esto se encuentra en el CD)

6

6-20. Un eje recto, sólido, de 300 mm de longitud está apoyado en cada extremo por cojinetes de autoalineación. Un engrane está sujeto en la parte media del eje con una cuña cuadrada de 10 mm de acero en una ranura. El factor de concentración de esfuerzos geométricos en la ranura de la cuña es de 2.5 y el radio de la esquina es de 0.5 mm. El engrane impulsa una carga variable, la cual crea un momento de flexión que varía de +10 N-m a +100 N-m y un torque que varía de −35 N-m a +170 N-m cada ciclo. El material elegido es acero 4140 rolado en frío, endurecido y revenido a Rockwell C45 (S_{ut} = 1250 MPa). Diseñe el eje para vida infinita y determine el diámetro necesario para un factor de seguridad de 1.5.

6-21. La figura P6-7 muestra un ensamble de un disco giratorio de acero sólido, con 500 mm de diámetro por 16 mm de espesor, y está atornillado en la parte superior de la pestaña del eje. Éste tiene 70 mm de diámetro en la longitud L_1 y 40 mm de diámetro en la longitud L_2 y está apoyado sobre cojinetes de rodillo cónicos. Todos los radios de los filetes del eje son de 0.5 mm. Un motor de 5 kw impulsa el eje a través de una caja de transmisión, con una reducción de 20:1, y de un acoplamiento comercial de fuelle. El torque máximo estimado del motor es de 17.75 N-m y su torque para detenerse es 3x su torque estimado. Obtenga el esfuerzo máximo y la deflexión angular máxima del eje en condiciones del disco sujeto y el motor apagado o detenido.

6-22. Para el ensamble del disco del problema 6-21 y la figura P6-7, obtenga la primera frecuencia natural de torsión del montaje eje-disco como la siente el eje del motor. La caja de transmisión tiene una rigidez torsional de 1.56*E*5 N-m/rad y el acoplamiento tiene una rigidez torsional de 5.1*E*5 N-m/rad. Suponga que el disco no tiene herramientas y todos los apoyos de la estructura son infinitamente rígidos.

6-23. Repita el problema 6-22 cuando se ajusta el disco con 20 conjuntos de herramientas atornilladas en la superficie de arriba, equidistantes 416 mm sobre un círculo de fijación. Cada montaje de herramienta pesa 75.62 N. Suponga que todos los soportes de la estructura son infinitamente rígidos.

6-24. Repita el problema 6-22 cuando el montaje del disco tiene un motor con una rigidez de torsión de 2.44*E*5 N-m/rad.

6.25. Las herramientas sobre el montaje del disco del problema 6-21 y la figura P6-7 imparten al disco un torque variable con el tiempo, que va de un pico de 30% del torque estimado del motor (en el motor) a cero, 20 veces por revolución del disco. Si la velocidad del motor es de 600 rpm, encuentre el peor caso de esfuerzo-tiempo y las funciones de deflexión-tiempo del eje. Elija un material del eje para tener un factor de seguridad contra falla de por lo menos 3. Ignore la respuesta del sistema a las vibraciones forzadas.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

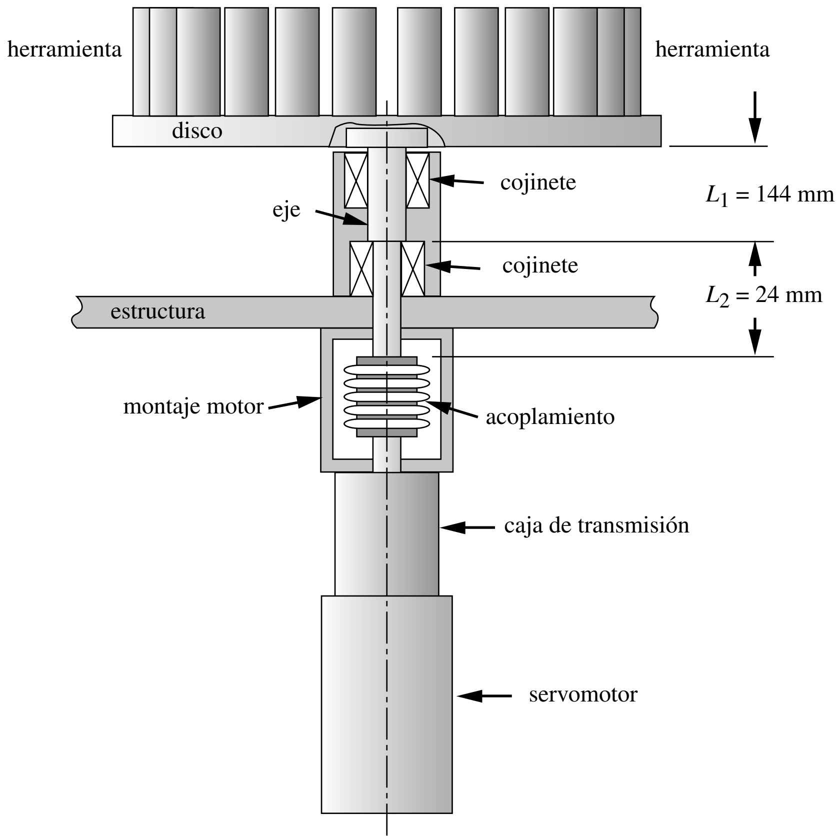


FIGURA P6-7

Diseño de la flecha de los problemas 6-21 a 6-28

6-26. Con la combinación de los datos de los problemas 6-23 y 6-25, (*a*) obtenga la razón entre la frecuencia forzada torsional y la primera frecuencia natural torsional del montaje del disco; (*b*) mediante la razón de frecuencia calculada en el inciso (*a*), repita el problema 6-25 considerando la vibración forzada de respuesta del sistema si la razón de amortiguamiento es de $\xi = 0.20$.

6-27. Repita el problema 6-25 para una carga de impacto de 500 N, aplicada tangencialmente al aro del disco 20 veces por revolución y equidistante en el tiempo.

6-28. Para el montaje del disco del problema 6-21 y la figura P6-7, dimensione una cuña cuadrada para acoplar el eje de 40 mm de diámetro del disco al acoplamiento.

6-29. Repita el problema 6-28 con la carga del problema 6-25.

6-30. Repita el problema 6-28 con la carga del problema 6-27.

†*6-31*. En la figura P6-1 se muestra un eje simplemente apoyado con carga suspendida. Conforme el eje gira, se aplica una fuerza transversal P de magnitud constante. El eje también está sometido a un torque constante $T_{máx}$. Para los datos de la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1 (ignorando $T_{mín}$), obtenga el diámetro del eje requerido para obtener un factor de seguridad contra la fatiga de 2.5 si el eje es de acero con S_{ut} = 118 kpsi y S_y = 102 kpsi. Las dimensiones están en pulgadas, la fuerza en libras y el torque en lb-in. Suponga que no hay concentraciones de esfuerzos, el eje está maquinado, la confiabilidad requerida es del 90% y el eje opera a temperatura ambiente.

† Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

6-32. Repita el problema 6-31 considerando la concentración de esfuerzos en el cuñero mostrado en la figura P6-3.

6-33. En la figura P6-2 se ilustra un eje simplemente apoyado. Conforme el eje gira, se aplica una carga distribuida unitaria p de magnitud constante. El eje también está sometido a un torque constante $T_{máx}$. Para los datos de la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1 (ignorando $T_{mín}$), obtenga el diámetro del eje requerido para obtener un factor de seguridad contra la fatiga de 2.5 si el eje es de acero con S_{ut} = 814 MPa y S_y = 703 MPa. Las dimensiones están en cm, la fuerza distribuida en N/cm y el torque en N-m. Suponga que no hay concentraciones de esfuerzos, el eje está maquinado, la confiabilidad requerida es del 90% y el eje opera a temperatura ambiente.

6-34. Repita el problema 6-33 considerando la concentración de esfuerzos en los cuñeros mostrados en la figura P6-4.

6-35. La figura P6-8 muestra la última etapa de una caja de transmisión con dos salidas. El engrane se fabricó integrado al eje, el cual está apoyado por dos cojinetes de bolas de autoalineación. Los brazos de las manivelas están conectados a cada extremo del eje. La carga sobre las manivelas produce fuerzas transversales variables iguales sobre los extremos del eje, así como torques variables iguales. El torque se transmite a través de cuñeros con acabado de fábrica en la manivela y el eje, y una cuña paralela que se ajusta bien en cada cuñero. La manivela se ubica axialmente con un hombro que se encuentra a L = 50 mm del plano donde actúa la carga transversal. La razón entre el radio del filete y el diámetro del eje es r/d = 0.05, mientras que la razón entre el diámetro del hombro y el diámetro del eje es D/d = 1.2. El material del eje y el engrane es acero SAE 4130 Q&T @ 1200F. La fuerza transversal varía de 8kN a 16.5 kN, en tanto que el torque varía de 1.1 kN-m a 2.2 kN-m. Para un factor de seguridad de 2.5 contra la falla por fatiga para vida infinita, determine un diámetro d adecuado para el eje.

6-36. Determine el tamaño de la cuña necesario para tener un factor de seguridad de, por lo menos, 2 contra fallas por cortante y por presión de contacto, para la conexión manivela/eje del problema 6-35. Suponga un diámetro del eje de 58 mm y una cuña de acero SAE 1040 rolado en frío.

**6-37.* Como una alternativa a la conexión acuñada del problema 6-35 determine la cantidad de interferencia diametral necesaria para proporcionar un ajuste de interferencia adecuado para la manivela de la figura P6-8, mediante un diámetro del eje de 58 mm, de modo que los esfuerzos en la maza y en el eje sean seguros y el torque máximo se pueda transmitir a través del ajuste de interferencia. El material de la manivela es el mismo que el del eje y su longitud a lo largo del eje es de 64 mm. El diámetro exterior efectivo de la manivela es de 150 mm.

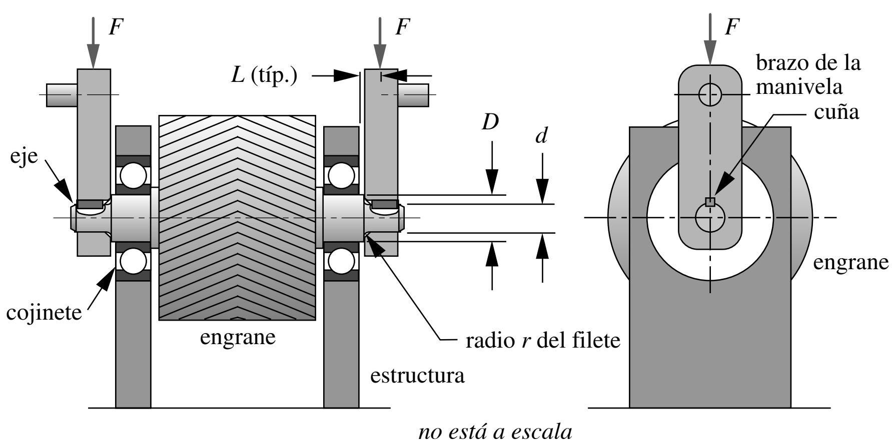


FIGURA P6-8

Problemas 6-35 a 6-37

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

6

6-38. Un eje impulsado por un motor eléctrico tiene una carga de torque variable, que la gira a una velocidad promedio de 1 600 rpm. El torque varía senoidalmente una vez por revolución del eje, con un torque pico de 29 500 in-lb. El diámetro del eje es de 2 in. Diseñe un volante adecuado para este sistema, el cual proporcione un coeficiente de fluctuación de 0.05 y un factor de seguridad contra el exceso de velocidad de, por lo menos, 4. El volante debe ser un disco circular sólido de espesor constante, hecho de acero SAE 1020 rolado en frío.

6-39. Repita el problema 6-38 para un torque de carga pico de 40 500 in-lb y la función torque-posición del eje igual a $Tl = Tpico$ (sen θ + sen 2θ).

6-40. Como una alternativa a la conexión acuñada del problema 6-6, determine la cantidad de interferencia diametral necesaria para proporcionar un ajuste de interferencia adecuado para el engrane de la figura P6-3, mediante los datos del problema 6-6 y la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P6-1. El diámetro de la maza del engrane es de 3.50 in, su longitud a lo largo del eje es de 2 in y tiene las mismas propiedades que las del material del eje.

6

6-41. La figura P6-6 muestra un eje que corre a 400 rpm con dos engranes sujetos a ella. El engrane de la derecha (2) proporciona una carga de torque y el engrane de la izquierda (1) un torque de entrada igual, pero de dirección opuesta. El torque varía de 2.2 kN-m a 6.2 kN-m. Determine las potencias máxima, mínima y promedio transmitida por el eje.

6-42. La figura P6-6 muestra un eje que corre a 750 rpm con dos engranes sujetos a ella. El engrane derecho (2) proporciona una carga de torque; el engrane izquierdo (1), un torque de entrada igual, pero de dirección opuesta. Las fuerzas sobre un engrane actúan en el diámetro de paso y tienen una componente radial (*P* en la figura) y una tangencial (que no se muestra). Si el diámetro de paso del engrane 1 es de 250 mm y la fuerza tangencial varía de 15 kN a 60 kN, determine las potencias mínima, máxima y promedio transmitida por el eje.

6-43. Determine la cantidad de interferencia diametral necesaria para proporcionar un ajuste de interferencia adecuado (en lugar del elemento acuñado mostrado) para el engrane (1) de 5 in de diámetro y 1.5 in de espesor de la figura P6-6, mediante un diámetro del eje de 1.5 in, de modo que los esfuerzos en la maza y en el eje sean seguros, y que el torque de entrada de 1 500 lbf-in se pueda transmitir a través del ajuste de interferencia. Ambas piezas son de acero SAE 4130 normalizado @ 1650F.

6-44. Determine la cantidad de interferencia diametral necesaria para proporcionar un ajuste de interferencia adecuado (en lugar del elemento acuñado mostrado) para el engrane (1) de 125 mm de diámetro y 75 mm de espesor de la figura P6-6, usando un diámetro del eje de 80 mm, de modo que los esfuerzos en la maza y en el eje sean seguros y el torque de entrada de 170 N-m se pueda transmitir a través del ajuste de interferencia. Ambas piezas son de acero SAE 4140 normalizado @ 1650F.

Tabla P6-2
Datos del problema 6-45

Ángulos del eje	Energía delta
0° a 75°	–1040 N-m
75° a 195°	+2260 N-m
195° a 330°	–2950 N-m
330° a 360°	+1740 N-m

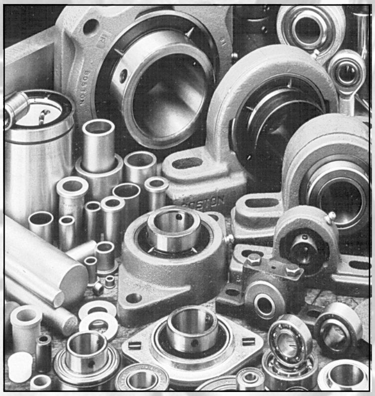
6-45. La tabla P6-2 indica los pulsos de energía entregados a un sistema giratorio (positiva) y desde éste (negativa), junto con los ángulos de la flecha a los cuales la función de torque cruza la línea de torque promedio en una función torque-tiempo. Con estos datos, determine los ángulos del eje a los cuales ocurren las rapideces mínima y máxima, así como el cambio total en energía a partir de la posición donde ocurre la rapidez máxima y la posición donde ocurre la rapidez mínima.

6-46. Un eje impulsado por un motor eléctrico tiene una carga de torque variable que la gira a una velocidad promedio de 1 950 rpm. Los pulsos de energía entregados al sistema impulsor (positiva), y desde éste (negativa), se proporcionan en la tabla P6-2. El diámetro del eje es de 50 mm. Diseñe un volante adecuado para este sistema que dé un coeficiente de fluctuación de 0.05 y un factor de seguridad de, por lo menos, 5 contra exceso de rapidez. El volante debe ser un disco circular hueco de espesor constante y hecho de acero SAE 1040 rolado en frío.

[*] Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

7

COJINETES Y LUBRICACIÓN



El conocimiento del hombre es como las aguas,
algunas veces baja y otras veces sube.

Francis Bacon

7.0 INTRODUCCIÓN

Aquí se utilizará el término **cojinete** en su acepción más general. Siempre que dos piezas tienen movimiento relativo, forman un cojinete por definición, sin importar su forma ni su configuración. Generalmente es necesario lubricar cualquier cojinete para reducir la fricción y eliminar el calor. Los cojinetes pueden rodar o deslizarse, o bien, hacer ambas cuestiones al mismo tiempo.

Los *cojinetes planos* están formados por dos materiales con frotamiento mutuo, ya sea una polea alrededor de un eje o una superficie plana debajo de un deslizador. En un cojinete plano una de las partes en movimiento es de acero o de hierro fundido, o de algún otro material estructural, que le permita alcanzar la resistencia y dureza requeridas. Por ejemplo, los ejes de transmisión, los eslabones y los pernos se encuentran en esta categoría. Las piezas contra las que se mueven están fabricadas normalmente con un material "para cojinetes" como el bronce, el *babbit* (un polímero no metálico). Un cojinete radial plano se extiende axialmente para ensamblarse a un eje, o forma un círculo completo conocido como **buje**. Un **cojinete de empuje** soporta cargas axiales.

Como alternativa para obtener una fricción muy baja, se utiliza un cojinete de rodamiento con bolas o rodillos de acero endurecido entre pistas de acero endurecido. Los cojinetes planos normalmente se diseñan en especial para una aplicación determinada, en tanto que los cojinetes de rodamiento normalmente se eligen de los catálogos de los fabricantes para manejar adecuadamente cargas, rapideces y vida deseada de la aplicación específica. Los cojinetes de rodamiento pueden soportar cargas radiales, de empuje, o una combinación de ambas, dependiendo de su diseño.

En este capítulo se estudiarán los cojinetes en general, tanto los deslizantes (o planos) como los de rodamiento. También se analizará la teoría de lubricación, que se aplica a estos tipos de cojinetes. La tabla 7-0 muestra las variables usadas en este capítulo, así como las notas, ecuaciones o secciones donde aparecen por primera vez.

7

Tabla 7-0 Variables utilizadas en este capítulo

Símbolo	Variable	unidades ips	unidades SI	Véase
A	área	in^2	m^2	Secc. 7.5
a, b	mitad del ancho, longitud de la huella de contacto	in	m	Ec. 7.18
C	razón de carga dinámica básica	lb	N	Secc. 7.10
C_0	razón de carga estática básica	lb	N	Secc. 7.10
c_d, c_r	holgura diametral y radial	in	m	Secc. 7.5
d	diámetro	in	m	varios
E'	módulo de Young efectivo	psi	Pa	Ec. 7.16
F	fuerza (con varios subíndices)	lb	N	Ec. 7.22
f	fuerza de fricción	lb	N	Ec. 7.11
h	espesor de la película lubricante	in	m	Secc. 7.5
K_ε	parámetro adimensional	ninguna	ninguna	Secc. 7.5
l	longitud	in	m	Secc. 7.5
L	vida de fatiga de cojinetes giratorios	10^6 revs	10^6 revs	Ec. 7.19
n'	velocidad angular	rps	rps	Secc. 7.5
O_N	número de Ocvirk	ninguna	ninguna	Ec. 7.12
P	fuerza o carga	lb	N	Secc. 7.5
p	presión	psi	N/m^2	Secc. 7.5
r	radio	in	m	Secc. 7.5
R'	radio efectivo	in	m	Ec. 7.16
S	número de Sommerfeld	ninguna	ninguna	Secc. 7.5
T	torque	lb-in	N-m	Secc. 7.5
U	velocidad lineal	in/seg	m/seg	Secc. 7.5
X, Y	factores de fuerzas radial y axial	ninguna	ninguna	Ec. 7.22
α	exponente presión-viscosidad	in^2/lb	m^2/N	Ec. 7.15
ε	razón de excentricidad	ninguna	ninguna	Ec. 7.3
ε_x	razón de excentricidad empírica	ninguna	ninguna	Ec. 7.13
ϕ	ángulo de la fuerza resultante	rad	rad	Secc. 7.5
Φ	potencia	hp	watts	Ec. 7.10
η	viscosidad absoluta	reyn	cP	Ec. 7.1
Λ	espesor específico de la película	ninguna	ninguna	Ec. 7.14
μ	coeficiente de fricción	ninguna	ninguna	Ec. 7.11
ν	razón de Poisson	ninguna	ninguna	Ec. 7.17
$\theta_{máx}$	ángulo de presión máxima	rad	rad	Secc. 7.5
ρ	densidad de masa	$blob/in^3$	kg/mm^3	Ec. 7.1
τ	esfuerzo cortante (con varios subíndices)	psi	Pa	Secc. 7.5
υ	viscosidad cinemática	in^2/seg	cS	Ec. 7.1
ω	velocidad angular	rad/seg	rad/seg	Ec. 7.10

La fotografía de inicio del capítulo es cortesía de Boston Gear, una división de IMO Industries, Quincy, Mass.

A. G. M. Michell, un pionero en teoría y diseño de cojinetes, además de uno de los inventores del cojinete de almohadilla inclinada, definió una vez lo que se desea de un cojinete de la siguiente manera:

> Para el diseñador de maquinaria todos los cojinetes son, desde luego, males necesarios que no contribuyen en nada a la productividad o a la funcionalidad de la máquina; y cualquier virtud que pudieran tener es de orden negativo. Sus méritos son absorber la menor cantidad de energía que sea posible, desgastarse lo más lento posible, que ocupen el menor espacio posible y que cuesten lo menos posible.[1]

Advertencia

La teoría de la lubricación en superficies con movimiento relativo es muy compleja matemáticamente hablando. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales que rigen su comportamiento se basan en supuestos de simplificación que tan sólo brindan soluciones aproximadas. Este capítulo no intenta presentar un estudio o una explicación completos de todos los fenómenos complicados de la lubricación dinámica, ya que eso va más allá del alcance de la obra. En cambio, se presenta un estudio introductorio de unos cuantos casos comunes en el diseño de máquinas. Asimismo, se exponen y describen las lubricaciones límite, hidrostática, hidrodinámica y elastohidrodinámica, así como la teoría de las dos últimas clases se analiza sin la presentación completa de la deducción de las ecuaciones que las gobiernan debido a las limitaciones de espacio.

Temas como la teoría de prensado de la película y los remolinos de aceite no se tratan en absoluto, ni tampoco los temas de suministro de lubricante al cojinete y transferencia de calor desde el cojinete. Se han escrito libros completos sobre dichos temas, por lo que se remite al lector a esas fuentes para obtener una información más completa. La deducción de las ecuaciones regidoras se presenta en la mayoría de los trabajos referenciados. La referencia 2 ofrece una introducción excelente a la teoría de la lubricación con muy pocas matemáticas, en tanto que la referencia 3 es un tratado muy completo de la materia actualizado y matemáticamente riguroso.

En este capítulo se presenta un enfoque sencillo y razonablemente exacto del diseño de cojinetes de muñón cortos, que permitan fabricarlos para cargas y velocidades requeridas en la mayoría de las máquinas comunes. También se examina la lubricación de contactos sin un ajuste perfecto, como los dientes de engranes y los sistemas leva-seguidor. Finalmente, se incluye información de los fabricantes acerca de un estudio sobre una selección de cojinetes de rodamiento. El tema de los cojinetes de rodamiento es tan complicado como el de los cojinetes planos, pero también se han escrito libros sobre esa materia. El lector debe consultar las referencias 3 y 4 para actualizarse y completar el tratamiento de la teoría de cojinetes de rodamiento y la lubricación. Las referencias de este capítulo identifican lecturas adicionales sobre el complejo tema de la lubricación y el diseño de cojinetes. Aquí apenas “se empaparán” con esta materia tan complicada. Se espera que esto “le abra el apetito” para aprender más acerca del asunto.

7.1 LUBRICANTES

La introducción de un lubricante a un punto de contacto deslizante tiene varios efectos benéficos sobre el coeficiente de fricción. Los lubricantes pueden ser líquidos, sólidos o gaseosos. Los lubricantes líquidos o sólidos comparten las propiedades de baja resistencia al corte y alta resistencia a la compresión. Un lubricante líquido como el aceite derivado del petróleo es básicamente incompresible a los niveles de esfuerzo que se encuentran en los cojinetes, pero se corta fácilmente. Por lo tanto, resulta el material más débil en el punto de contacto, mientras su baja resistencia al corte reduce el coeficiente de fricción (véase la ecuación 5.3 de la p. 354). Los lubricantes también pueden actuar

como contaminantes en las superficies metálicas y las cubren con una sola capa de moléculas que inhibe la adhesión, inclusive entre metales compatibles.

Los lubricantes líquidos son los que se utilizan con más frecuencia y los aceites minerales, los más comunes entre ellos. Las grasas son aceites mezclados con jabones que forman un lubricante más adherente y más grueso que se usa en lugares donde los líquidos no se pueden aplicar o no se mantienen en las superficies. Los lubricantes sólidos se emplean en casos donde los líquidos no se pueden mantener sobre la superficie o carecen de alguna propiedad requerida, como resistencia a temperaturas altas. Los lubricantes gaseosos se utilizan en situaciones especiales, como cojinetes neumáticos, con la finalidad de obtener una fricción extremadamente baja. Los lubricantes, especialmente los líquidos, también eliminan el calor en el punto de contacto. Las menores temperaturas en los cojinetes reducen la interacción de las superficies y el desgaste.

LUBRICANTES LÍQUIDOS Son, en gran parte, derivados del petróleo o aceites sintéticos; no obstante, el agua se usa algunas veces como lubricante en ambientes acuosos. Muchos aceites lubricantes comerciales están mezclados con varios aditivos que reaccionan con los metales para formar una sola capa de moléculas contaminantes. Los llamados lubricantes de EP (*presión extrema*) agregan ácidos grasos u otros compuestos al aceite que atacan al metal químicamente; además, forman una capa contaminante que protege y reduce la fricción, incluso cuando la película de aceite es expulsada por las altas cargas en el punto de contacto. Los aceites se clasifican tanto por su viscosidad como por la presencia de aditivos en las aplicaciones de presión extrema. La tabla 7-1 muestra algunos lubricantes líquidos comunes, sus propiedades y aplicaciones típicas. Se debe consultar a los fabricantes de lubricantes para aplicaciones específicas.

LUBRICANTES DE PELÍCULA SÓLIDA Son de dos tipos: materiales que presentan bajos esfuerzos cortantes, como el grafito y el bisulfato de molibdeno, los cuales se agregan al punto de contacto, y recubrimientos como los fosfatos, óxidos o sulfuros que se forman sobre las superficies del material. Los grafitos y el MoS_2 se suministran en forma de polvo y pueden transportarse al punto de contacto mediante una capa de grasa de petróleo

Tabla 7-1 Tipos de lubricantes líquidos

Tipo	Propiedades	Usos típicos
Aceites derivados del petróleo (aceites minerales)	Capacidad de lubricación básica, pero los aditivos generan gran mejora. Acción lubricante deficiente a altas temperaturas	Muy amplios y generales
Poliglicoles	Lubricantes bastante buenos; no forman sedimentos con la oxidación	Líquido para frenos
Silicios	Capacidad de lubricación deficiente, sobre todo contra el acero. Buena estabilidad térmica	Sellos de hule. Amortiguadores mecánicos
Clorofluorocarbonos	Buenos lubricantes, buena estabilidad térmica	Compresores de oxígeno. Equipo de procesos químicos
Éteres de polifenil	Intervalo líquido muy amplio. Excelente estabilidad térmica. Capacidad de lubricación aceptable	Sistemas de deslizamiento a altas temperaturas
Ésteres de fosfatos	Buenos lubricantes—Acción de presión extrema	Fluido hidráulico y lubricante
Ésteres dibásicos	Buenas propiedades de lubricación. Resisten mayores temperaturas que los aceites minerales	Motores de propulsión

Fuente: E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, 1965, reimpreso con autorización de John Wiley & Sons, Inc.

u otro material. Los lubricantes secos tienen la ventaja de su baja fricción y su resistencia a las altas temperaturas; sin embargo, esta última podría verse limitada por la selección del contenedor que los transporta. Los recubrimientos como los fosfatos o los óxidos pueden depositarse química o electrolíticamente. Tales recubrimientos son delgados y tienden a desgastarse completamente en corto tiempo. Los aditivos de presión extrema de algunos aceites proporcionan una renovación continua de sulfuros u otros recubrimientos inducidos químicamente. La tabla 7-2 muestra algunos lubricantes comunes de película sólida, así como sus propiedades y sus usos más frecuentes.

7.2 VISCOSIDAD

La viscosidad es una medida de la resistencia al corte de un fluido, que varía inversamente con la temperatura y directamente con la presión, ambas de manera no lineal. Se expresa como **viscosidad absoluta** η o como **viscosidad cinemática** υ. Las dos están relacionadas como

$$\eta = \upsilon\rho \tag{7.1}$$

donde ρ es la densidad de masa del fluido. Las unidades de la viscosidad absoluta η son lb-seg/in^2 (reyn) en el sistema inglés o Pa-s en unidades *SI*. Con frecuencia se expresa como μreyn y mPa-s para adaptar mejor sus magnitudes típicas. Un centipoise (cP) es 1 mPa-s. Los valores típicos de la viscosidad absoluta a 20 °C (68 °F) son 0.0179 cP (0.0026 μreyn) para el aire, 1.0 cP (0.145 μreyn) para el agua y 393 cP (57 μreyn) para aceite de motor SAE 30. Por lo general, los aceites que funcionan normalmente en cojinetes calientes tienen viscosidades entre 1 y 5 μreyn. El término viscosidad usado sin adjetivo significa viscosidad absoluta.

VISCOSIDAD CINEMÁTICA Se mide con un *viscosímetro*, el cual es de dos clases: giratorio o capilar. Un viscosímetro capilar mide la velocidad de flujo del fluido a través de un tubo capilar a una temperatura determinada, normalmente 40 o 100 °C. Un viscosímetro giratorio mide el torque y la velocidad de giro de un eje vertical o de un cono que corre dentro de un cojinete con sus aros concéntricos, llenos con el fluido de prueba a la

Tabla 7-2 Tipos de lubricantes de película sólida

Tipo	Propiedades	Usos comunes
Grafito y/o MoS_2 más contenedor	Los mejores lubricantes de propósito general. Fricción baja (0.12-0.06) razonable vida larga ($\cong 10^4$ a 10^6 ciclos)	Cerraduras y otros mecanismos intermitentes
Teflón + contenedor	Vida un poco más grande que el tipo anterior, pero mejor resistencia a algunos líquidos	Igual que arriba
Grafito a presión o película de MoS_2	Fricción muy baja (0.10 a 0.04), pero vida bastante corta (10^2 a 10^4 ciclos)	Embutido profundo y otros trabajos en metal
Metal blando (plomo, iridio, cadmio)	Fricción más alta (0.30 a 0.15) y su vida no es tan grande como los tipos de resina pegada	Protección de asentamiento (temporal)
Película anodizada con algún fosfato. Otros recubrimientos químicos	Alta fricción ($\cong 0.20$). Preventivo contra el desgaste deja una capa superficial “esponjosa”	Recubrimiento por debajo de una capa de película de resina pegada

Fuente: E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, 1965, reimpreso con permiso de John Wiley & Sons, Inc.

7

temperatura de prueba. Las unidades *SI* de la viscosidad cinemática son cm^2/seg (stoke) y las unidades inglesas son in^2/seg. Los stokes son bastante grandes, de modo que con más frecuencia se emplean los centistokes (cS).

VISCOSIDAD ABSOLUTA Se necesita para el cálculo de las presiones y los flujos de los lubricantes dentro de los cojinetes. Se determinan a partir de la viscosidad cinemática medida y la densidad del fluido a la temperatura de prueba. La figura 7-1 muestra una gráfica de la variación de la viscosidad absoluta con la temperatura para varios aceites comunes derivados del petróleo, identificados por sus números ISO y sus números SAE, en las escalas de aceite para motor y aceite para engranes.

7.3 TIPOS DE LUBRICACIÓN

En los cojinetes se presentan tres tipos de lubricación: **película completa**, **película mixta** y **lubricación límite**. La lubricación de película completa describe el caso en el que las superficies del cojinete están completamente separadas por la película lubricante, lo cual elimina cualquier contacto. La lubricación de película completa es **hidrostática**, **hidrodinámica** o **elastohidrodinámica**, cada una de las cuales se analiza más adelante. La lubricación límite describe el caso donde, por razones de geometría, aspereza superficial, carga excesiva o escasez de lubricante, las superficies del cojinete entran en contacto físicamente y se presenta un desgaste adhesivo o abrasivo. La lubricación de película mixta describe una combinación de película lubricante parcial y algún contacto de las asperezas de las superficies.

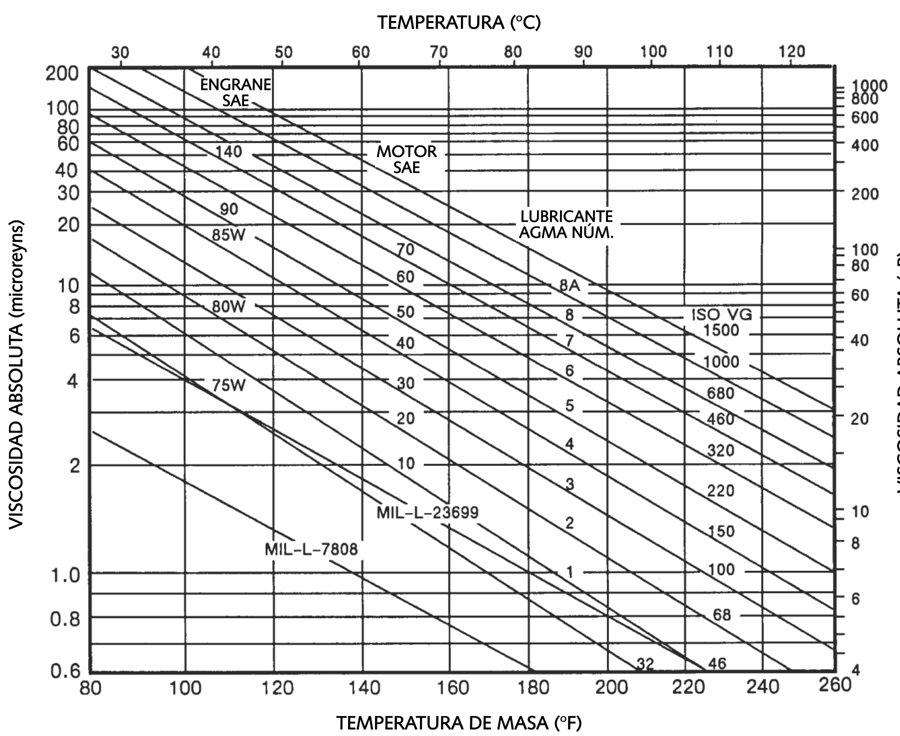


FIGURA 7-1

Viscosidad absoluta contra temperatura de aceites lubricantes derivados del petróleo, con grados de viscosidad ISO Fuente: Tomado del estándar AGMA 2001-B88, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, con autorización del editor, Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314

La figura 7-2 muestra la curva que describe la relación entre la fricción y la velocidad de deslizamiento relativa en un cojinete. A bajas velocidades, la lubricación límite se presenta asociada con alta fricción. Conforme la velocidad de deslizamiento se incrementa más allá del punto *A*, la película de fluido hidrodinámico comienza a tomar forma, reduciendo así el contacto en asperezas y la fricción en el régimen de película mixta. A mayores velocidades, se forma una película completa en el punto *B*, lo que separa las superficies completamente con fricción reducida. (Éste es el mismo fenómeno que causa que los neumáticos de los automóviles planeen en caminos mojados. Si la velocidad relativa del neumático contra el camino mojado excede un cierto valor, el movimiento de la llanta bombea una película de agua hacia el punto de contacto, levantando el neumático del camino. El coeficiente de fricción del neumático se reduce drásticamente, y la pérdida de tracción repentina podría causar un derrape peligroso.) A velocidades aún más altas, la pérdida de viscosidad en el lubricante cortado incrementa la fricción.

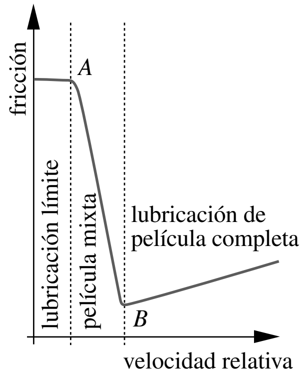


FIGURA 7-2

Cambio de la fricción con la velocidad relativa de un cojinete de deslizamiento

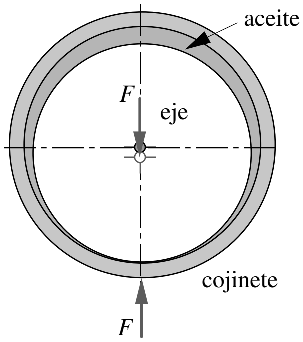
En los cojinetes (manguitos) de muñón giratorios se experimentan los tres regímenes, durante el arranque y la conclusión de la operación. Conforme el eje empieza a girar, se encuentra en lubricación límite. Si su velocidad se eleva lo suficiente, pasa a través del régimen mixto y llega al régimen de película completa deseado, donde el desgaste se reduce prácticamente hasta cero si el lubricante se mantiene limpio y sin sobrecalentamiento. Se analizarán brevemente las condiciones que determinan estos estados de lubricación, luego se explorarán algunas de ellas con mayor detalle.

Lubricación de película completa

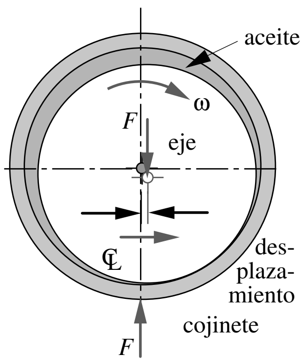
La lubricación de película completa se crea por tres mecanismos: lubricación **hidrostática**, **hidrodinámica** y **elastohidrodinámica**.

LUBRICACIÓN HIDROSTÁTICA Se refiere al suministro continuo de un lubricante (usualmente aceite) en el punto de contacto del deslizamiento con presión hidrostática elevada ($\approx 10^2$ a 10^4 psi). Lo anterior requiere de un depósito (cárter) para almacenar, una bomba para presurizar y tuberías para distribuir el lubricante. Cuando se hace bien, con las tolerancias adecuadas en el cojinete, este mecanismo puede eliminar completamente el contacto metal-metal en el punto de contacto durante el deslizamiento. Las superficies se separan por una película de lubricante, la cual, si se mantiene limpia y libre de contaminantes, reduce las velocidades de desgaste prácticamente a cero. Con la velocidad relativa igual a cero, la fricción es prácticamente cero. Con velocidad relativa, el coeficiente de fricción en un punto de contacto lubricado hidrostáticamente es aproximadamente de 0.002 a 0.010, el cual también es el principio del llamado cojinete de aire, que se utiliza sobre "paletas de aire" para impulsar (empujar) la carga de la superficie, permitiéndole moverse a los lados con muy poco esfuerzo. Un aerodeslizador opera con el mismo principio. Algunas veces se usa agua en los cojinetes hidrostáticos. El estadio Mile High de Denver tiene un cupo de 21 000 asientos que se deslizan hacia atrás sobre películas de agua hidrostática que convierten el estadio de béisbol en uno de fútbol.[5] Los cojinetes de empuje hidrostático son más comunes que los radiales.

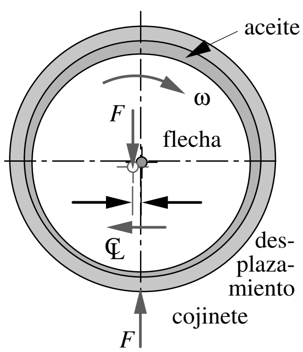
LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA Se refiere al suministro de lubricante suficiente (usualmente un aceite) para el punto de contacto de deslizamiento que permita la velocidad relativa de las superficies apareadas, con la finalidad de bombear el lubricante dentro del espacio y separar las superficies sobre una película dinámica de líquido. Esta técnica es más efectiva en cojinetes planos, donde el eje y el cojinete crean un anillo delgado dentro de su holgura que atrapa el lubricante, de modo que el eje pueda bombearlo alrededor del anillo. Existe una ruta de fuga en los extremos, de modo que se debe suministrar continuamente el aceite para reponer las pérdidas. Tal suministro debe realizarse por gravedad o presión. Éste es el sistema que se utiliza para lubricar los cojinetes del cigüeñal y del árbol de levas de un motor de combustión interna. Se bombea aceite filtrado a los cojinetes con una presión, relativamente baja, para reponer el aceite perdido a través de los extremos de los cojinetes; no obstante, la condición dentro del cojinete es hidrodinámica y crea presiones mucho más altas para soportar las cargas del cojinete.



(*a*) Eje estacionario
– contacto metálico
– fuerzas y centros alineados



(*b*) Eje que gira lentamente
– lubricación límite
– punto de contacto enfrente de la línea central



(*c*) Eje que gira rápidamente
– lubricación hidrodinámica
– sin contacto del metal
– fluido bombeado por el eje
– el eje se queda atrás de la línea central del cojinete

FIGURA 7-3

Condiciones de lubricación límite e hidrodinámica en un cojinete de manguito; movimientos y holguras exagerados

En un cojinete de manguito hidrodinámico en reposo, el eje o buje se asienta en contacto con la parte inferior del cojinete, como se indica en la figura 7-3*a,* y se encuentra en lubricación límite. Conforme comienza a girar, la línea central del eje se desplaza excéntricamente dentro del cojinete y el eje actúa como una bomba jalando la película de aceite pegada alrededor de su superficie, como se muestra en la figura 7-3*b*, llevándola al régimen de película mixta de la figura 7-2. (El "lado exterior" de la película de aceite se pega al cojinete estacionario.) Se crea un flujo de la película de aceite dentro del pequeño espesor. Con una velocidad relativa suficiente, el eje "se monta" en la cuña de aceite bombeado y elimina el contacto metal-metal con el cojinete, como se ilustra en la figura 7-3*c*. Ahora se encuentra en el régimen hidrodinámico de la figura 7-2.

Entonces, las superficies de un cojinete lubricado hidrodinámicamente se tocan sólo cuando está detenido o cuando gira por debajo de su velocidad de "hidroplaneo". Ello significa que el desgaste adhesivo se presenta sólo durante el arranque o al detenerse. Siempre que existan lubricante limpio y velocidad suficientes para permitir el impulso hidrodinámico del eje fuera del cojinete en su velocidad de operación, básicamente no hay desgaste adhesivo. Lo anterior incrementa enormemente la vida al desgaste en un escenario de contacto continuo. Como en la lubricación hidrostática, el aceite debe estar libre de contaminantes para evitar otras formas de desgaste como, por ejemplo, la abrasión. El coeficiente de fricción en un punto de contacto lubricado hidrodinámicamente se encuentra aproximadamente entre 0.002 y 0.010.

LUBRICACIÓN ELASTOHIDRODINÁMICA Cuando las superficies en contacto no se ajustan exactamente, como los dientes de un engrane o la leva y el seguidor mostrados en la figura 7-4, entonces, es más difícil que se forme una película completa de lubricante, porque las superficies no ajustadas tienden a expulsar en lugar de retener el fluido. A velocidades bajas, estas juntas se encuentran en lubricación límite, además de que se presentan altas tasas de desgaste con posibles arañazos y estriación. La carga crea una huella de contacto debido a la deflexión elástica de las superficies, como se vio en el capítulo 5. Esta pequeña huella de contacto puede ofrecer una superficie plana suficiente para que se forme una película hidrodinámica completa, cuando la velocidad relativa de deslizamiento es lo suficientemente alta (véase la figura 7-2). Esta condición se conoce como **lubricación elastohidrodinámica** (EHD), ya que resulta de las deflexiones elásticas de las superficies y porque las grandes presiones (100 a 500 kpsi) en las zonas de contacto incrementan enormemente la viscosidad del fluido. (En contraste, la presión de la película en cojinetes que se ajustan perfectamente es tan sólo de varios miles de psi y el cambio de viscosidad por esta presión es lo suficientemente pequeño como para tomarlo en cuenta.)

Los dientes del engrane operan en cualquiera de las tres condiciones descritas en la figura 7-2. La lubricación límite se presenta en el arranque-término de la operación, pero si se prolonga causará desgaste severo. Las juntas de un sistema leva-seguidor también pueden experimentar cualquiera de los regímenes de la figura 7-2, pero es más probable que se encuentren en el modo de lubricación límite en las ubicaciones sobre la leva de radio de curvatura pequeño. Los cojinetes de rodamiento también pueden experimentar cualquiera de los tres regímenes.

El parámetro más importante que define la situación que se presenta en contactos no ajustados es la razón entre el espesor de la película de aceite y la aspereza superficial. Para alcanzar una lubricación de película completa y eliminar el contacto de las asperezas, la rms promedio de la aspereza superficial (R_q) no debe ser mayor de 1/2 a 1/3 del espesor de la película de aceite. El espesor de una película completa de EHD es normalmente del orden de 1 μm. Con cargas muy altas o a velocidades pequeñas, el espesor de la película de EHD puede volverse muy pequeño para separar las asperezas superficiales y presentar situaciones de lubricación límite o de lubricación mixta. Los factores que más influyen en la creación de condiciones de EHD son el incremento de la velocidad relativa, de la viscosidad del lubricante y del radio de curvatura en el punto de contacto. La reducción de la carga unitaria y de la rigidez del material tienen menos efecto.[6].

Lubricación límite

La lubricación límite se refiere a situaciones donde una combinación de la geometría del punto de contacto, niveles altos de carga, baja velocidad o cantidad insuficiente de lubricante evitan el inicio de la condición hidrodinámica. En tal situación, las propiedades de las superficies en contacto y las propiedades del lubricante, más que la viscosidad de la masa, determinan la fricción y el desgaste. La viscosidad del lubricante no es un factor. Observe en la figura 7-2 que la fricción es independiente de la velocidad en la lubricación límite. Esto es consistente con la definición de la fricción de Coulomb en la sección 5.3 (p. 354). Véase la tabla 5-1 en la p. 356.

La lubricación límite implica que siempre existe un contacto metal-metal en el punto de contacto. Si la película lubricante no es lo suficientemente gruesa para "enterrar" las asperezas de las superficies, lo anterior resulta cierto. Las superficies ásperas generan esta situación. Si la velocidad relativa o el suministro de lubricante se reducen en el punto de contacto hidrodinámico, se volverá una situación de lubricación límite. Las superficies como los dientes de los engranes y las de un sistema leva-seguidor (véase la figura 7-4), donde ninguna envuelve a la otra, se encuentran en un modo de lubricación límite, si no prevalecen las condiciones de EHD. Los cojinetes de bolas y rodillos también funcionan en modo de lubricación límite, si la combinación de velocidades y cargas no permiten que ocurra la condición de EHD.

La condición de lubricación límite es una condición menos deseable que los otros tipos descritos anteriormente, ya que permite que las asperezas superficiales entren en contacto y se desgasten con rapidez. En ocasiones, no se puede evitar como en los ejemplos citados de las levas, los engranes y los cojinetes de rodamiento. Los lubricantes de EP mencionados se elaboraron para estas aplicaciones de lubricación límite, sobre todo para engranes hipoidales, los cuales están sujetos a velocidades altas de deslizamiento y a grandes cargas. El coeficiente de fricción en un punto de contacto de deslizamiento, con lubricación límite, depende tanto de los materiales que se utilizan como del lubricante; no obstante, se encuentra en el rango de 0.05 a 0.15, la mayoría con un valor aproximado de 0.10.

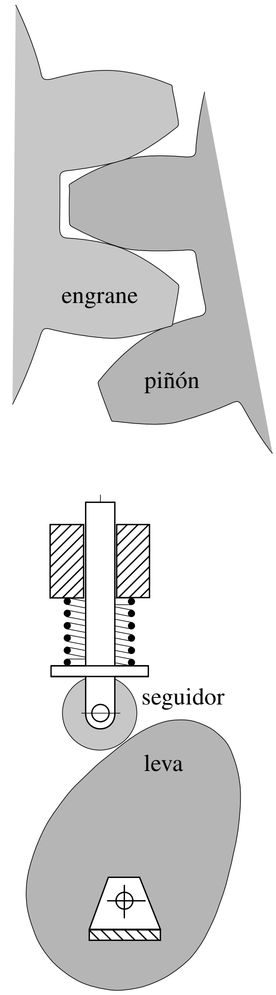


FIGURA 7-4

Uniones abiertas que pueden tener lubricación EHD, mixta o límite

7.4 COMBINACIONES DE MATERIALES EN COJINETES DE DESLIZAMIENTO

La figura 5-6 (p. 358) muestra combinaciones de materiales y el pronóstico de su capacidad de deslizamiento, con base en su insolubilidad mutua y otros factores. En esta sección se analizan algunas combinaciones de materiales que han demostrado tener éxito o ser inútiles en aplicaciones de ingeniería, que implican cojinetes o deslizadores.

Algunas de las propiedades que se buscan en un material para cojinetes son suavidad relativa (para absorber partículas extrañas), resistencia razonable, capacidad para maquinarse (para conservar tolerancias), lubricidad, resistencia a la temperatura y a la corrosión, así como, en algunos casos, porosidad (para absorber lubricante). El material de un cojinete debería tener menos de 1/3 de la dureza del material contra el que corre, con el propósito de facilitar la incrustación de partículas abrasivas.[7] Asimismo, los temas de compatibilidad abordados en la sección 5.4 (p. 356) sobre desgaste adhesivo son también importantes; dependen también del material apareado. Se pueden utilizar varias clases de materiales como cojinetes, pero usualmente se usan los basados en plomo, estaño o cobre. El aluminio por sí solo no es un buen material para cojinetes; sin embargo, se emplea como un elemento aleatorio en algunos materiales.

Babbits La familia completa de aleaciones con base en el plomo y el estaño, combinadas con otros elementos, son muy efectivas, sobre todo las recubiertas con películas delgadas aplicadas por electrólisis sobre un sustrato más fuerte como el acero. El babbit, probablemente el ejemplo más común de esta familia, se usa en los cojinetes de cigüeñales y árboles de leva en los motores de combustión interna.Su suavidad permite

la incrustación de partículas diminutas y puede tener un acabado superficial con poca aspereza. Una capa delgada de babbit electrolítico posee mejor resistencia a la fatiga que un buje grueso de babbit, que tampoco permite la incrustación de partículas. Se requiere una buena lubricación hidrodinámica o hidrostática, cuando el babbit tiene una temperatura de fusión baja y fallará rápidamente en condiciones de lubricación límite. Los ejes o los cojinetes de babbit deberían tener una dureza mínima de 150-200 HB y un acabado superficial esmerilado* de R_a = 0.25 a 0.30 μm (10 a 12 μin).[8]

BRONCES La familia de aleaciones de cobre, principalmente los bronces, son una magnífica elección para operar contra acero o hierro fundido. El bronce es más blando que los materiales ferrosos, pero tiene buenas resistencia general, capacidad para maquinarse y resistencia a la corrosión, además de que opera bien contra aleaciones ferrosas cuando está lubricado. Hay cinco aleaciones de cobre comunes que se utilizan en cojinetes: cobre-plomo, bronce al plomo, bronce al estaño, bronce al aluminio y cobre al berilio. Tienen un rango de dureza que va desde la del babbit hasta cerca de la del acero.[8] Los bujes de bronce pueden resistir la lubricación límite y soportar cargas y temperaturas altas. Los bujes de bronce y las barras planas de fábrica están disponibles comercialmente en varios tamaños, tanto sólidos como sinterizados (véase más adelante).

HIERRO FUNDIDO GRIS Y EL ACERO Son materiales razonables para cojinetes cuando corren uno contra otro a bajas velocidades. El grafito libre del hierro colado agrega lubricidad, pero también se necesita lubricante líquido. El acero también puede correr contra sí mismo cuando ambas partes están endurecidas y lubricadas. Ésta es una elección común en rodamiento de contacto como en los cojinetes. De hecho, con lubricación adecuada, el acero endurecido opera contra casi cualquier material. En general, la dureza parece proteger contra la adhesión.

7

MATERIALES SINTERIZADOS Están formados por polvo y conservan poros microscópicos después del tratamiento térmico. Dicha porosidad les permite tomar cantidades significativas de lubricante y retenerla por efecto de la capilaridad, liberándolo en el cojinete cuando se calienta. El bronce aglomerado se utiliza ampliamente para operar contra acero o hierro fundido.

MATERIALES NO METÁLICOS Algunos tipos ofrecen la posibilidad de operar en seco si tienen suficiente lubricidad. Un ejemplo es el grafito. Algunos termoplásticos, como el nylon, el acetal y el teflón relleno, tienen un bajo coeficiente de fricción μ contra cualquier metal, pero también bajas resistencias y bajas temperaturas de fusión, lo cual, cuando se combina con su deficiente conducción del calor, limita severamente las cargas y velocidades de operación que logra soportar. El teflón posee un μ muy bajo (considerando los valores de rodamiento), pero requiere de rellenos para elevar su resistencia a niveles útiles. Los rellenos inorgánicos, como el talco o la fibra de vidrio, agregan resistencia y rigidez significativas a cualquier termoplástico, pero con la contraparte de un μ mayor y el incremento en la abrasión. Asimismo, el polvo de grafito y el de MoS_2 sirven como rellenos, pero también agregan lubricidad y resistencia, además de resistencia a la temperatura. También hay algunas mezclas de polímeros como el acetal-teflón. Los cojinetes de termoplásticos sólo son prácticos en aplicaciones donde las cargas y las temperaturas son bajas. Las combinaciones prácticas de materiales para ejes y cojinetes son realmente muy pocas. La tabla 7-3 muestra algunas combinaciones utilizables de materiales metálicos para cojinetes e indica sus razones de dureza contra ejes de acero típicos.[9]

7.5 TEORÍA DE LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Considere el cojinete de manguito mostrado en la figura 7-3. La figura 7-5*a* ilustra un muñón similar y su cojinete, pero concéntricos y con el eje vertical. La holgura diametral c_d entre el buje y el cojinete es muy pequeña, generalmente alrededor de una milésima del diámetro. Se puede modelar esto como dos placas planas, ya que el hueco h es muy

* Véase la sección 5.1 y la figura 5-2 de la p. 352 para el análisis de acabados superficiales y la definición de R_a.

Tabla 7-3 Materiales recomendados para cojinetes de deslizamiento contra acero o hierro fundido

Material del cojinete	Dureza kg/mm^2	Dureza mínima del eje kg/mm^2	Razón de dureza
Base de plomo con babbit	15-20	150	8
Base de estaño con babbit	20-30	150	6
Plomo con álcali endurecido	22-26	200-250	9
Cobre-plomo	20-23	300	14
Plata (chapeada)	25-50	300	8
Base de cadmio	30-40	200-250	6
Aleación de aluminio	45-50	300	6
Bronce al plomo	40-80	300	5
Bronce al estaño	60-80	300-400	5

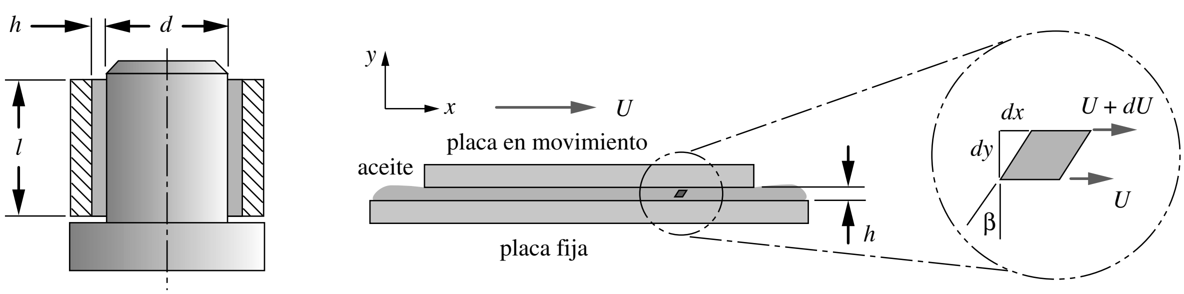
Fuente: Wilcock y Booser, *Bearing Design and Application*, McGraw-Hill, 1957.

pequeño comparado con el radio de curvatura. La figura 7-5*b* muestra las dos placas separadas por una película de aceite en un hueco de dimensión *h*. Si las placas son paralelas, la película de aceite no soportará una carga transversal. Esto también es cierto para un buje y un cojinete concéntricos. Un buje concéntrico horizontal se vuelve excéntrico debido al peso del eje, como en la figura 7-3. Si el eje es vertical, como en la figura 7-5*a*, el buje podría girar concéntricamente con el cojinete, pues no existe fuerza de gravedad transversal.

Ecuación de Petroff para torque sin carga

Si se mantiene estacionaria la placa inferior de la figura 7-5*b* y se mueve la placa de arriba a la derecha con una velocidad *U*, el fluido entre las placas se corta de la misma manera que en el hueco concéntrico de la figura 7-5*a*. El fluido moja y se adhiere a ambas placas, haciendo su velocidad igual a cero en la placa estacionaria e igual a *U* en la placa en movimiento. La figura 7-5*c* muestra un elemento diferencial del fluido en el hueco. El gradiente de velocidad causa la distorsión angular β. En el límite, $\beta = dx / dy$. El esfuerzo cortante τ_x que actúa sobre un elemento diferencial del fluido en el espacio es proporcional a la tasa de corte:

$$\tau_x = \eta \frac{d\beta}{dt} = \eta \frac{d}{dt}\frac{dx}{dy} = \eta \frac{d}{dy}\frac{dx}{dt} = \eta \frac{du}{dy} \tag{7.2a}$$



(*a*) Buje concéntrico en un cojinete (*b*) Placas paralelas que cortan una película de aceite (*c*) Elemento diferencial al corte

FIGURA 7-5

Una película de aceite al corte entre dos superficies paralelas no puede soportar una carga transversal (holguras muy exageradas)

y la constante de proporcionalidad es la viscosidad η. En una película de espesor constante h, el gradiente de velocidad $du / dy = U / h$ y es constante. La fuerza para cortar la película completa es

$$F = A\tau_x = \eta A \frac{U}{h} \tag{7.2b}$$

donde A es el área de la placa.

Para el muñón y el cojinete concéntricos de la figura 7-5*a*, sea el hueco $h = c_d / 2$, donde c_d es la holgura diametral. La velocidad es $U = \pi dn'$ donde n' son revoluciones por segundo y el área de corte es $A = \pi dl$. El torque T_0 requerido para cortar la película es, entonces,

$$T_0 = \frac{d}{2} F = \frac{d}{2} \eta A \frac{U}{h} = \frac{d}{2} \eta \pi \, dl \frac{\pi d n'}{c_d / 2}$$

$$T_0 = \eta \frac{\pi^2 d^3 l n'}{c_d} \tag{7.2c}$$

Ésta es la *ecuación de Petroff* para el torque sin carga en una película de fluido.

Ecuación de Reynolds para cojinetes planos excéntricos

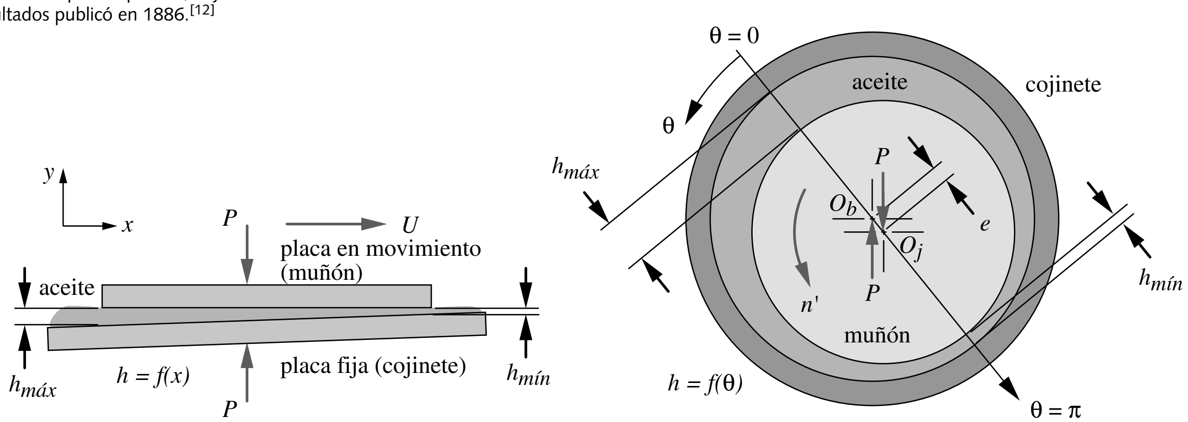
Para soportar una carga transversal, las placas de la figura 7-5*b* no deben ser paralelas. Si se gira ligeramente la placa inferior de la figura 7-5*b* en contra de las manecillas del reloj y se mueve a la derecha la placa superior con una velocidad U, el fluido entre las placas será transportado al hueco decreciente, como se ilustra en la figura 7-6*a*, desarrollando así una presión capaz de soportar la carga transversal P. El ángulo entre las placas es análogo a la variación de la tolerancia debido a la excentricidad e del muñón y el cojinete de la figura 7-6*b*.* Cuando se aplica una carga transversal a un muñón, adopta una excentricidad con respecto al cojinete para formar un hueco variable para soportar la carga generando presión en la película.†

La figura 7-6*b* muestra una excentricidad e exageradamente grande y un hueco h para un cojinete de muñón. La excentricidad e se mide a partir del centro O_b del cojinete al

* El tamaño del ángulo necesario para crear una fuerza de soporte es sorprendentemente pequeño. Por ejemplo, en un cojinete de aproximadamente 32 mm de diámetro, la circunferencia es de 100 mm. Una holgura de entrada típica $h_{máx}$ podría ser de 25 μm (0.0010 in) y el hueco de salida $h_{mín}$, 12.5 μm (0.0005 in). Entonces la pendiente es 0.0125/100 o alrededor de 7/1000 de un grado (26 segundos de arco). Esto equivale aproximadamente a 1 cm de elevación en un lado de un campo de fútbol de 100 yardas de largo.

† En Inglaterra, en 1880 Beauchamp Tower estaba investigando experimentalmente la fricción en cojinetes lubricados hidrodinámicamente para la industria ferrocarrilera (no obstante, el término hidrodinámico y su teoría estaban apenas a punto de descubrirse). Sus resultados mostraron unos coeficientes de fricción mucho menores de los esperados. Taladró radialmente un orificio sobre el cojinete para agregar aceite mientras operaba, pero se sorprendió al descubrir que el aceite salía del orificio cuando el eje giraba. Puso un corcho en el orificio, pero aquél fue expulsado. Tapó el orificio con madera, pero también saltó hacia afuera. Cuando puso un calibrador de presión en el orificio, midió presiones bien arriba de la presión promedio esperada a partir de un cálculo de carga/área. Entonces, trazó un mapa de la distribución de presión sobre 180° del cojinete y descubrió la ahora familiar distribución de presión (véase la figura 7-8), cuyo valor promedio es carga/área. Con el aprendizaje de este descubrimiento, Osborne Reynolds se puso en camino para desarrollar la teoría matemática para explicarlo, cuyos resultados publicó en 1886.[12]

7



(*a*) Placas no paralelas que cortan una película de aceite

(*b*) Un buje excéntrico es equivalente a placas no paralelas

FIGURA 7-6

Una película de aceite cortada entre superficies no paralelas puede soportar una carga transversal

centro del muñón O_j. Los ejes cero-a-π de la variable independiente θ se establecen a lo largo de la línea O_bO_j como se indica en la figura 7-6*b*. El valor máximo posible de *e* es $c_r = c_d / 2$, donde c_r es la tolerancia radial. La excentricidad se convierte entonces a una razón de excentricidad ε adimensional:

$$\varepsilon = \frac{e}{c_r} \tag{7.3}$$

la cual varía de 0 sin carga a 1 en carga máxima, cuando el muñón contacta el cojinete. Una expresión aproximada del espesor *h* de la película en función de θ es

$$h = c_r(1 + \varepsilon\cos\theta) \tag{7.4a}$$

El espesor *h* de la película es máximo en θ = 0 y mínimo en θ = π, y se obtiene de

$$h_{mín} = c_r(1-\varepsilon) \qquad h_{máx} = c_r(1+\varepsilon) \tag{7.4b}$$

Considere el cojinete de muñón mostrado en la figura 7-7. En el análisis que sigue, el hueco está dado por la ecuación 7.4*a*. Se toma el origen de un sistema de coordenadas *xy*, en cualquier punto sobre la circunferencia del cojinete como el identificado por *O*. Entonces, el eje *x* es tangente al cojinete, el eje *y* pasa por el centro del cojinete O_b y el eje *z* (que no se muestra) es paralelo al eje del cojinete. Generalmente, el cojinete es estacionario y sólo gira el muñón; no obstante, en algunos casos puede ser a la inversa, o quizás ambos giren como en el eje planetario de un tren de engranes epicíclicos. Así se muestran tanto la velocidad tangencial U_1 para el cojinete como la velocidad tangencial T_2 para el muñón. Observe que sus direcciones (ángulos) no son las mismas debido a la excentricidad. La velocidad tangencial T_2 del buje puede resolverse por el método de componentes en las direcciones *x* y *y* como U_2 y V_2, respectivamente. El ángulo entre T_2 y U_2 es tan pequeño que su coseno es prácticamente 1 y se puede hacer a $U_2 \cong T_2$. La componente V_2 en la dirección *y* se debe al cierre (o apertura) del hueco *h* conforme gira y es $V_2 = U_2\partial h/\partial x$.

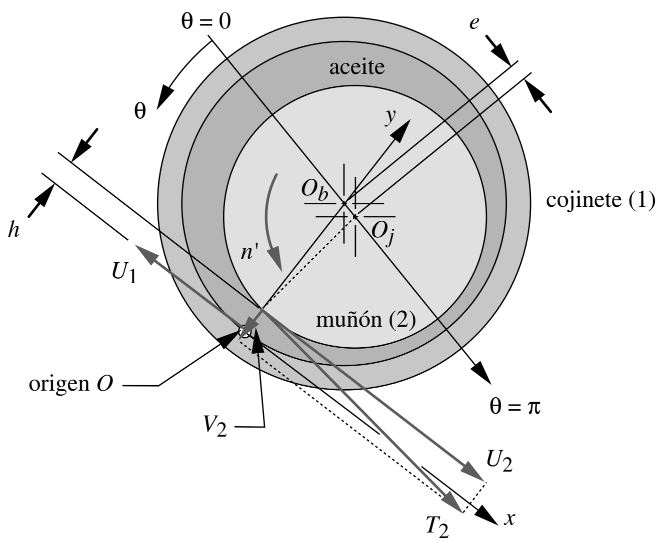


FIGURA 7-7

Componentes de velocidad en un cojinete plano excéntrico

Usando las suposiciones anteriores, se escribe la ecuación de Reynolds,* que relaciona la variación del espesor del hueco h, las velocidades relativas entre el muñón y el cojinete V_2 y $U_1 - U_2$, así como la presión p en el fluido como una función de las dos dimensiones x y z, suponiendo que el buje y el cojinete son paralelos en la dirección z y la viscosidad η es constante,

$$\frac{1}{6\eta}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right]=\left(U_1-U_2\right)\frac{\partial h}{\partial x}+2V_2$$

$$=\left(U_1-U_2\right)\frac{\partial h}{\partial x}+2U_2\frac{\partial h}{\partial x}=\left(U_1+U_2\right)\frac{\partial h}{\partial x}=U\frac{\partial h}{\partial x} \tag{7.5a}$$

donde $U = U_1 + U_2$.

Solución para cojinetes largos La ecuación 7.5*a* no tiene una solución de forma cerrada pero se resuelve numéricamente. Raimondi y Boyd lo hicieron en 1958 y obtuvieron un gran número de gráficas de diseño para su aplicación en cojinetes de longitud finita.[11] Reynolds resolvió una versión simplificada en forma de serie (en 1886),[12] suponiendo que el cojinete es infinitamente largo en la dirección z, lo cual hace al flujo igual a cero y a la distribución de la presión sobre esa dirección constante; por lo tanto, hace al término $\partial p/\partial z = 0$. Con esta simplificación, la ecuación de Reynolds se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)=6\eta U\frac{\partial h}{\partial x} \tag{7.5b}$$

En 1904, A. Sommerfeld encontró una solución de forma cerrada para la ecuación 7.5*b* de cojinetes infinitamente largos

$$p=\frac{\eta U r}{c_r^2}\left[\frac{6\varepsilon(\operatorname{sen}\theta)(2+\varepsilon\cos\theta)}{\left(2+\varepsilon^2\right)(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\right]+p_0 \tag{7.6a}$$

la cual da la presión p en la película lubricante en función de la posición angular θ alrededor del cojinete para dimensiones determinadas del radio r del muñón, la tolerancia radial c_r, la razón de excentricidad ε, la velocidad U de la superficie y la viscosidad η. El término p_0 toma en cuenta cualquier presión suministrada en una posición diferente de cero presión en $\theta = 0$. A la ecuación 7.6*a* se le conoce como la *solución Sommerfeld* o la *solución de cojinetes largos*.

Si se calcula p con esta ecuación desde $\theta = 0$ a 2π, pronosticará presiones negativas desde $\theta = \pi$ hasta 2π con magnitudes absolutas iguales a las presiones positivas de 0 a π. Como un líquido no puede soportar grandes presiones negativas sin cavitación, la ecuación se evalúa normalmente de 0 a π y se considera la presión como p_0 sobre la otra mitad de la circunferencia. Lo anterior se conoce como la solución de la mitad de Sommerfeld.

Sommerfeld también determinó una ecuación para la carga total P sobre un cojinete largo como

$$P=\frac{\eta U l r^2}{c_r^2}\frac{12\pi\varepsilon}{\left(2+\varepsilon^2\right)\left(1+\varepsilon^2\right)^{1/2}} \tag{7.6b}$$

Esta ecuación se puede replantear en forma adimensional para proporcionar un número característico del cojinete llamado el **número de Sommerfeld** S. Primero se reagrupan los términos:

$$\frac{\left(2+\varepsilon^2\right)\left(1+\varepsilon^2\right)^{1/2}}{12\pi\varepsilon}=\eta\frac{Ul}{P}\left(\frac{r}{c_r}\right)^2 \tag{7.6c}$$

7

* Para la deducción de la ecuación de Reynolds, consulte las referencias 2, 3, 4 o 10.

La presión promedio p_{prom} sobre el cojinete es

$$p_{prom} = \frac{P}{A} = \frac{P}{ld} \tag{7.6d}$$

La velocidad $U = \pi dn'$ donde n' está en revoluciones por segundo y $c_r = c_d/2$. Al sustituir, resulta

$$\frac{\left(2+\varepsilon^2\right)\left(1+\varepsilon^2\right)^{1/2}}{12\pi\varepsilon} = \eta\frac{(\pi dn')l}{dl\,p_{prom}}\left(\frac{d}{c_d}\right)^2 = \eta\left(\frac{\pi n'}{p_{prom}}\right)\left(\frac{d}{c_d}\right)^2 = S \tag{7.6e}$$

Observe que S es una función sólo de la razón de excentricidad ε, pero también se expresa en términos de geometría, presión, velocidad y viscosidad.

Solución para cojinetes cortos Los cojinetes largos no se utilizan con frecuencia en las máquinas modernas por diversas razones. Las deflexiones pequeñas en el eje o la desalineación puede reducir la tolerancia radial a cero en un cojinete largo, mientras las condiciones de alojamiento requieren a menudo cojinetes cortos. Las razones típicas l/d de los cojinetes modernos se encuentran en el intervalo de 1/4 a 2. La solución de cojinetes largos (Sommerfeld) supone que no hay fugas de aceite en el extremo del cojinete, pero con estas pequeñas razones l/d las fugas en el extremo serían un factor significativo. Ocvirk y DuBois[13]a[16] resolvieron una forma de la ecuación de Reynolds, que incluye el término de la fuga del extremo.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\eta U\frac{\partial h}{\partial x} \tag{7.7a}$$

Esta forma ignora el término que toma en cuenta el flujo circunferencial de aceite alrededor del cojinete, con la premisa de que es más pequeño en comparación con el flujo en la dirección z (fuga) de un cojinete corto. La ecuación 7.7*a* se integra para obtener una expresión de la presión en la película de aceite en función tanto de θ como de z:

$$p = \frac{\eta U}{rc_r^2}\left(\frac{l^2}{4} - z^2\right)\frac{3\varepsilon\,\text{sen}\,\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3} \tag{7.7b}$$

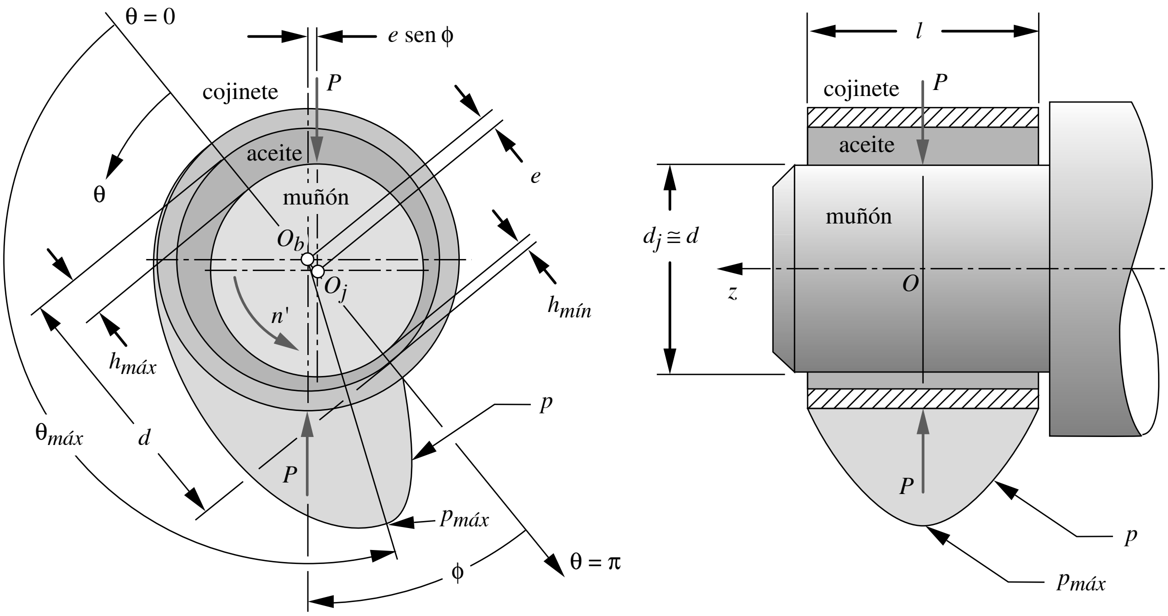
La ecuación 7.7*b* se conoce como la *solución de Ocvirk* o la *solución para cojinete corto*. Se evalúa generalmente para $\theta = 0$ a π, con el supuesto de que la presión es igual a cero en la otra mitad de la circunferencia.

La figura 7-8 muestra distribuciones de presión típica sobre θ y z. La posición de $\theta = 0$ se toma en $h = h_{máx}$, y el eje θ pasa por O_b y O_j. La distribución de presión p con respecto a z es parabólica, y es pico en el centro de la longitud l del cojinete, y cero en $z = \pm l/2$. La presión p varía de forma no lineal sobre θ y es pico en el segundo cuadrante. El valor de $\theta_{máx}$ en $p_{máx}$ se determina a partir de

$$\theta_{máx} = \cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1+24\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right) \tag{7.7c}$$

y el valor de $p_{máx}$ se obtiene sustituyendo $z = 0$ y $\theta = \theta_{máx}$ en la ecuación 7.7*b*.

La figura 7-9 compara la variación de la presión p en la película de $\theta = 0$ a π para la solución de cojinete largo de Sommerfeld (tomada como la referencia del 100%) y la solución de cojinete corto de Ocvirk a varias razones de l/d a partir de 1/4 a 1. Observe



7

FIGURA 7-8

Distribución de presión en un cojinete plano corto—Grosor de la película exagerado enormemente

el gran error que se presentaría si la solución de cojinete largo se utilizara para razones < 1. Para $l/d = 1$, las dos soluciones dan resultados similares con la solución de Ocvirk, que pronostica una presión pico ligeramente superior que la solución de Sommerfeld. DuBois y Ocvirk encontraron en sus pruebas[13],[14] que la solución del cojinete corto daba resultados muy cercanos a las mediciones experimentales para razones l/d de 1/4 a 1 y los datos experimentales también coincidían hasta $l/d = 2$, si la razón se mantenía igual a 1 para los cálculos en cojinetes, con razones reales entre 1 y 2. Puesto que la mayoría de los cojinetes modernos tienden a razones l/d entre 1/4 y 2, la solución de Ocvirk es un método conveniente y razonablemente preciso. La solución de Sommerfeld brinda resultados precisos para razones de l/d arriba de 4. El método de Boyd y Raimondi[11] da resultados más precisos para razones de l/d intermedias, pero es más laborioso.

Observe en la figura 7-8 que la presión pico se presenta en el ángulo $\theta_{máx}$, como se define en la ecuación 7.7*c*. Este ángulo se mide a partir de cero en el eje θ, el cual se encuentra a lo largo de la línea de centros del cojinete y el buje. Pero, ¿qué determina el ángulo de esta línea excéntrica entre los centros O_b y O_j? Generalmente, la línea de acción de la fuerza P aplicada al muñón se define por los factores externos. Esta fuerza P se presenta vertical en la figura y el ángulo entre la fuerza y el eje $\theta = \pi$ se muestra como ϕ. (Se utiliza el ángulo ϕ en lugar del ángulo θ_P, medido a partir de $\theta = 0$, porque ϕ siempre será un ángulo agudo.) El ángulo ϕ se calcula a partir de

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right) \tag{7.8a}$$

y la magnitud de la fuerza resultante P se relaciona con los parámetros del cojinete como

$$P = K_\varepsilon \frac{\eta U l^3}{c_r^2} \tag{7.8b}$$

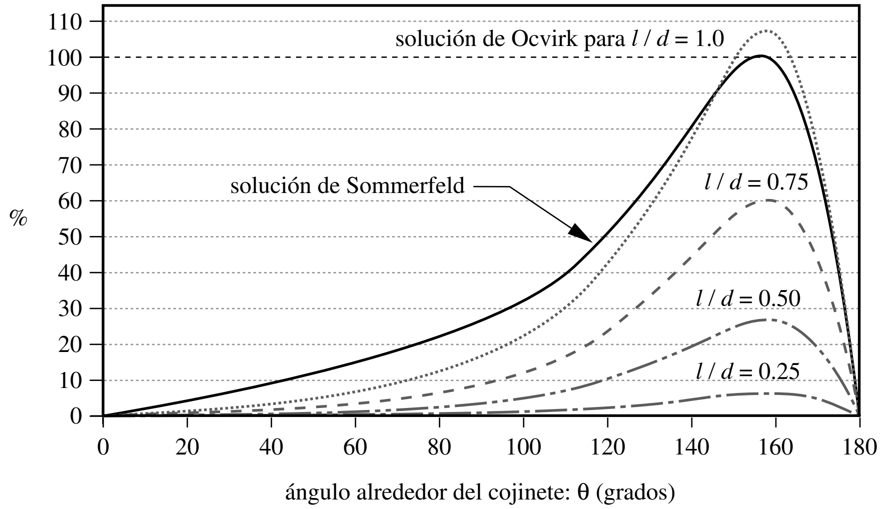


FIGURA 7-9

Comparación de la aproximación del cojinete corto de Ocvirk para varias razones l / d, con la aproximación del cojinete largo de Sommerfeld a la presión en la película de aceite de 0 a 180°

donde K_ε es un parámetro adimensional que está en función de la razón de excentricidad ε:

$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon\left[\pi^2\left(1-\varepsilon^2\right)+16\varepsilon^2\right]^{\frac{1}{2}}}{4\left(1-\varepsilon^2\right)^2} \tag{7.8c}$$

La velocidad lineal U se expresa como

$$U = \pi d n' \tag{7.8d}$$

y sustituyendo en la ecuación 7.8*b*, junto con $c_r = c_d/2$, se obtiene

$$P = K_\varepsilon \frac{\eta U l^3}{c_r^2} = K_\varepsilon \frac{4\pi\eta d n' l^3}{c_d^2} \tag{7.8e}$$

Pérdida de torque y potencia en cojinetes planos

La figura 7-8 muestra la película de fluido que se está cortando entre el muñón y el cojinete. La fuerza cortante que actúa sobre cada elemento crea torques en direcciones opuestas, T_r sobre el elemento giratorio y T_s sobre el elemento estacionario. Sin embargo, los torques T_r y T_s no son iguales debido a la excentricidad. En el par de fuerzas P, en la figura 7-8, un miembro actúa en el centro del muñón O_j y el otro en el centro del cojinete O_b, por lo que forman un par de magnitud $P\ e$ *sen* ϕ, *el cual se suma al torque estacionario para formar el torque giratorio*.

$$T_r = T_s + P\, e \operatorname{sen}\phi \tag{7.9a}$$

El torque estacionario T_s se obtiene a partir de

$$T_s = \eta \frac{d^2 l\left(U_2 - U_1\right)}{c_d} \frac{\pi}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2}} \tag{7.9b}$$

Sustituyendo la ecuación 7.8*d* en 7.9*b*, para ponerla en términos de las velocidades giratorias del muñón y el cojinete:

$$T_s = \eta \frac{d^3 l (n_2' - n_1')}{c_d} \frac{\pi^2}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \tag{7.9c}$$

Observe la similitud de la ecuación 7.9*c* con la ecuación de Petroff 7.2*c*, para muñones concéntricos con torque T_0 sin carga. Se forma una razón del torque estacionario en un cojinete excéntrico al torque sin carga como

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{1/2}} \tag{7.9d}$$

la cual, sin que sorprenda, es una función tan sólo de la razón de excentricidad ε. Se obtiene también una razón similar entre el torque giratorio T_r y la ecuación de Petroff de torque sin carga.

La potencia perdida Φ en el cojinete se determina a partir del torque giratorio T_r y la velocidad de giro n'.

$$\Phi = T_r \omega = 2\pi T_r (n_2' - n_1') \qquad \text{N-m/s o in-lb/s} \tag{7.10}$$

Esto se convierte a watts o caballos de potencia, de acuerdo con el sistema de unidades empleado.

Coeficiente de fricción El coeficiente de fricción en el cojinete se determina como una razón entre la fuerza cortante tangencial y la fuerza normal aplicada *P*.

$$\mu = \frac{f}{P} = \frac{T_r / r}{P} = \frac{2T_r}{Pd} \tag{7.11}$$

7.6 DISEÑO DE COJINETES HIDRODINÁMICOS

Por lo general, se conocen la fuerza aplicada *P*, que se espera que soporte el cojinete, y la velocidad de giro n'. El diámetro del cojinete quizá se conozca o no, pero usualmente se puede definir por el esfuerzo, la deflexión u otras consideraciones. El diseño del cojinete requiere la obtención de una combinación adecuada del diámetro del cojinete y/o la longitud a la que operará con una viscosidad adecuada del fluido, una tolerancia razonable y que se pueda fabricar, y una razón de excentricidad que no permita el contacto metal-metal bajo carga o cualquier condición esperada de sobrecarga.

Diseño del factor de carga: El número de Ocvirk

Una manera conveniente de resolver el problema es definir un factor de carga adimensional, con el cual varios parámetros de cojinetes se calculen, grafiquen y comparen. La ecuación 7.8*e* se puede reagrupar para dar este factor. Despejando la ecuación 7.8*e* para K_e:

$$K_\varepsilon = \frac{P c_d^2}{4\eta\pi d n' l^3} \tag{7.12a}$$

Sustituyendo la ecuación 7.6*d* de la carga *P* para introducir la presión media p_{prom} de la película.

$$K_\varepsilon = \frac{p_{prom} l d c_d^2}{4\eta\pi d n' l^3}\frac{d}{d} = \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{p_{prom}}{\eta n'}\right)\left(\frac{d}{l}\right)^2\left(\frac{c_d}{d}\right)^2\right] = \frac{1}{4\pi}O_N \tag{7.12b}$$

El término entre corchetes es el **factor de carga** adimensional deseado o el **número de Ocvirk** O_N.

$$O_N = \left(\frac{p_{prom}}{\eta n'}\right)\left(\frac{d}{l}\right)^2\left(\frac{c_d}{d}\right)^2 = 4\pi K_\varepsilon \tag{7.12c}$$

Esta ecuación contiene los parámetros sobre los cuales tiene control el diseñador e indica que cualquier combinación de esos parámetros, que genera el mismo número de Ocvirk, tiene la misma razón de excentricidad ε. La razón de excentricidad da una indicación de qué tan cerca se encuentra de la falla la película de aceite, puesto que $h_{mín} = c_r(1 - \varepsilon)$. Compare el número de Ocvirk con el número de Sommerfeld de la ecuación 7.6*e*. El concepto es el mismo.

La figura 7-10 muestra una gráfica de la razón de excentricidad ε como una función del número de Ocvirk O_N y también muestra datos experimentales de la referencia 13 para los mismos parámetros. La curva teórica se definió combinando las ecuaciones 7.12*c* y 7.8*c*.

$$O_N = \frac{\pi\varepsilon\left[\pi^2\left(1-\varepsilon^2\right)+16\varepsilon^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2} \tag{7.13a}$$

Una curva empírica se ajusta a través de los datos, la cual muestra que la teoría subestima la magnitud de la razón de excentricidad. La curva empírica se aproxima mediante

$$\varepsilon_x \cong 0.21394 + 0.38517 \log O_N - 0.0008\left(O_N - 60\right) \tag{7.13b}$$

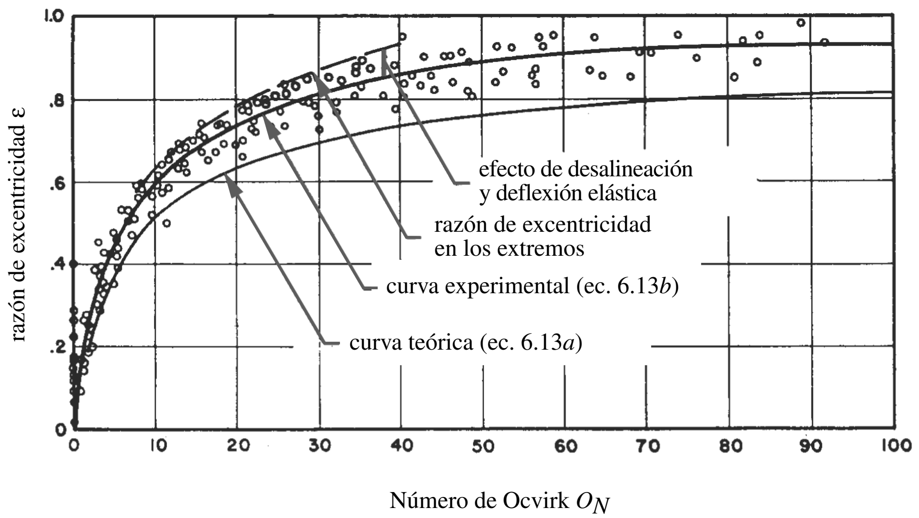


FIGURA 7-10

Relación analítica y experimental entre la razón de excentricidad ε y el número de Ocvirk O_N.
Fuente: G.B. Dubois y F.W. Ocvirk, "The Short Bearing Approximation for Plain Journal Bearings", *Trans. ASME*, vol. 77, pp. 1173-1178, 1955

7

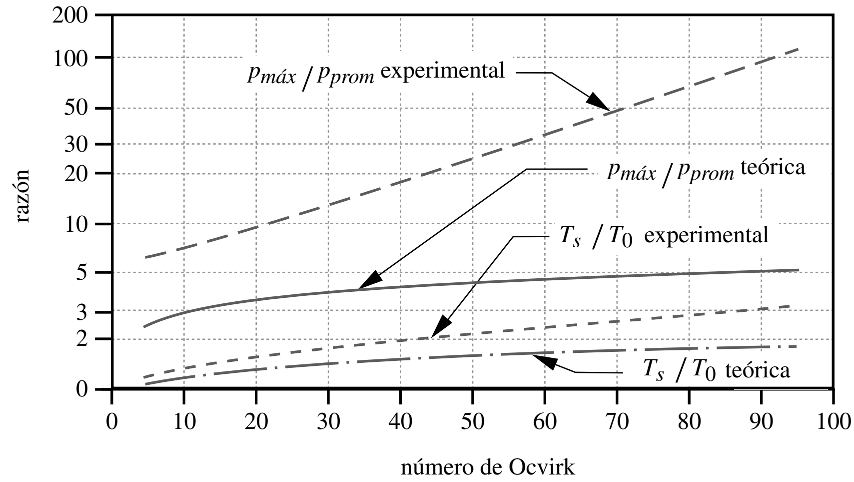


FIGURA 7-11

Razones de presión y razones de torque para cojinetes cortos, en función del número de Ocvirk

Los cálculos de carga, torque, presiones promedio y máxima en la película de aceite, y otros parámetros del cojinete se realizan con este valor empírico de ε en las ecuaciones 7.7 a 7.11, en tanto que el espesor mínimo de la película se determina con la ecuación 7.4*b*.

Se pueden crear otras razones adimensionales a partir de las ecuaciones 7.7 a 7.11 para utilizarlas como ayudas de diseño. La figura 7.11 muestra razones de $p_{máx}/p_{prom}$, y T_s/T_0 como una función del número de Ocvirk, tanto de valores teóricos como experimentales de ε. La figura 7-12 presenta la variación teórica y experimental en los ángulos $\theta_{máx}$ y ϕ con el número de Ocvirk.

Procedimientos de diseño

La carga y la rapidez normalmente se conocen. Si el eje se diseñó para esfuerzo o deflexión, se conocerá su diámetro. Se debería elegir la longitud del cojinete o la razón l/d con base en consideraciones de alojamiento. Razones de l/d más grandes darán presiones

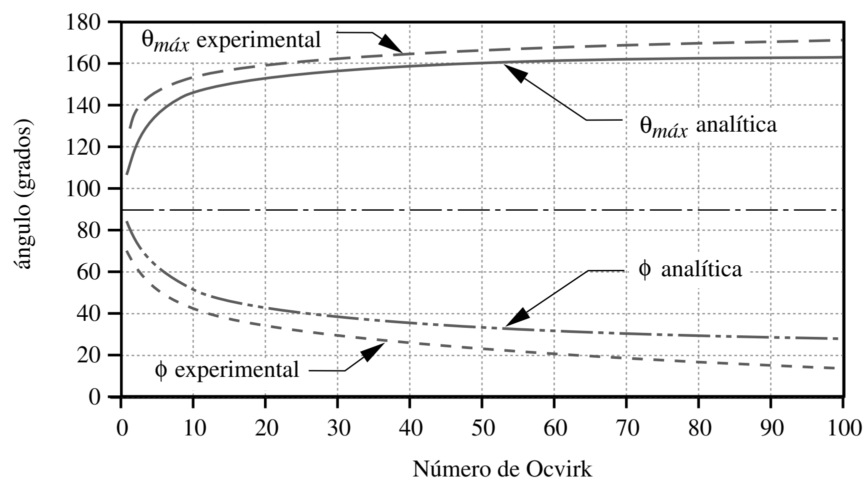


FIGURA 7-12

Ángulos $\theta_{máx}$ y ϕ en función del número de Ocvirk

más bajas en la película, pero todo lo demás queda igual. La razón de tolerancia se define como c_d/d. Las razones de tolerancia usualmente se encuentran en el rango de 0.001 a 0.002 y algunas veces tan altas como 0.003. Razones de tolerancia más grandes incrementarán rápidamente el número de Ocvirk O_N, ya que c_d/d se eleva al cuadrado en la ecuación 7.12*c*. Números de Ocvirk mayores darán presiones, excentricidad y torque más grandes, como se observa en las figuras 7-10 y 7-11; no obstante, esos factores crecen más lentamente con un O_N más grande. Una ventaja de las razones de tolerancia más grandes es un flujo mayor de lubricante, lo cual favorece el enfriamiento. Razones de l/d grandes quizá requieran razones de tolerancia más grandes para el alojamiento de la deflexión del eje.* Se puede elegir un número de Ocvirk y la viscosidad requerida del lubricante obtenerse a partir de las ecuaciones 7.7 a 7.11. Generalmente se requerirá iteración para obtener un diseño equilibrado.

Si las dimensiones del eje aún no se han determinado, el diámetro y la longitud del cojinete se determinan iterando las ecuaciones del cojinete con un número de Ocvirk supuesto. Se debe elegir un lubricante candidato y obtener su viscosidad para las temperaturas de operación supuestas, a partir de gráficas como la de la figura 7-1. Después de que se diseña el cojinete, se realiza un análisis del flujo del fluido y de transferencia de calor, con la finalidad de determinar las rapideces del flujo de aceite y requeridas pronosticar las temperaturas de operación. Estos aspectos no se tratan aquí por falta de espacio, pero se recomienda consultar las referencias 3 y 10.

7

La elección del número de Ocvirk ejerce una influencia significativa sobre el diseño. G. B. Dubois propuso algunos lineamientos sugiriendo que el número de carga $O_N = 30$ ($\varepsilon = 0.82$) se considere el límite superior para carga "moderada", $O_N = 60$ ($\varepsilon = 0.90$), un límite más alto para carga "pesada", y $O_N = 90$ ($\varepsilon = 0.93$), el límite para carga "severa". Para números de carga arriba de 30, se debería tener cuidado para controlar cuidadosamente las tolerancias de manufactura, los acabados superficiales y las deflexiones. Para aplicaciones de cojinetes en general, es probablemente mejor permanecer debajo de un $O_N = 30$, aproximadamente. El procedimiento de diseño se ilustra mejor con un ejemplo.

EJEMPLO 7-1

Diseño de un cojinete de manguito para un diámetro de eje definido

Problema **Diseñe cojinetes de manguito para sustituir los cojinetes de rodamiento sobre el eje mostrado en la figura 6-5 (repetida al reverso). El eje se diseñó en el ejemplo 6-1 (p. 422).**

Se proporciona **Las cargas transversales máximas sobre el eje en los cojinetes son de 16 lb en R_1 y de 54 lb en R_2. Como la carga en R_2 es 4x la de R_1, se podría hacer un diseño para R_2 y utilizarlo también para R_1. Los diámetros del eje en R_1 y R_2 son de 0.591 in. La rapidez del eje es de 1 725 rpm. Los cojinetes son estacionarios.**

Suposiciones **Emplee una razón de tolerancia de 0.0017 y una razón l/d igual a 0.75. Mantenga el número de Ocvirk en 30 o más abajo, de preferencia en alrededor de 20.**

Obtenga **La razón de excentricidad del cojinete, la presión máxima y su ubicación, el espesor mínimo de la película, el coeficiente de fricción, el torque y la pérdida de potencia en el cojinete. Seleccione el lubricante adecuado para operar a 190 °F.**

Solución **Véase la figura 6-5 en la página siguiente.**

1. Convierta la velocidad proporcionada en rpm a rps y determine la velocidad tangencial U.

* Observe que si el cojinete es lo suficientemente corto para prevenir el contacto del metal en sus extremos, provocado por la pendiente o deflexión del eje, entonces se puede considerar que el cojinete da apoyo simple al eje.

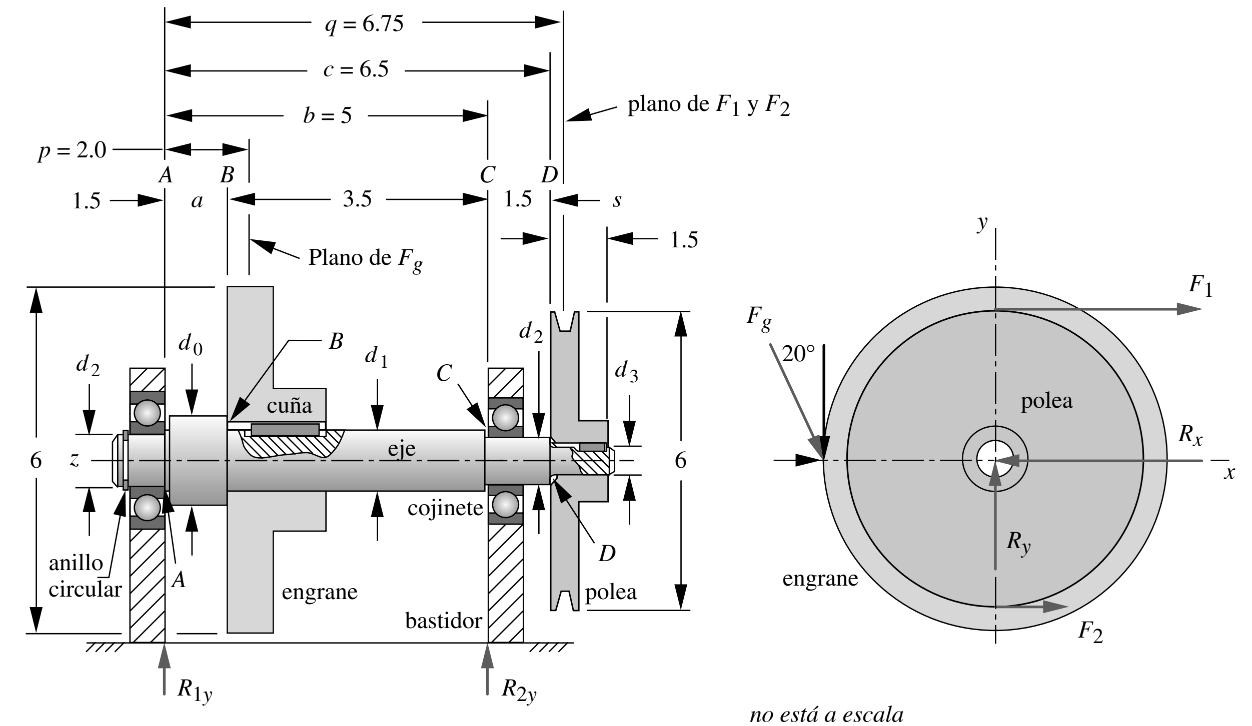


FIGURA 6-5 Repetida

Geometría de un diseño preliminar para los ejemplos 6-1 a 6-3

$$n' = 1\,725\ \frac{\text{rev}}{\text{min}}\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ seg}}\right) = 28.75\text{ rps}$$

$$U = \pi d n' = \pi(0.591)(28.75) = 53.38\text{ in/seg} \qquad (a)$$

2. Las tolerancias diametral y radial se calculan a partir del diámetro dado y de las razones de tolerancias supuestas:

$$c_d = 0.0017(0.591) = 0.0010\text{ in}$$
$$c_r = c_d/2 = 0.0005\text{ in} \qquad (b)$$

3. La longitud del cojinete se obtiene a partir de la razón l/d supuesta de 0.75.

$$l = 0.75(0.591) = 0.443\text{ in} \qquad (c)$$

4. Obtenga la razón de excentricidad experimental a partir de la ecuación 7.13*b* (p. 503) o de la figura 7-10 (p. 503) usando el valor sugerido de $O_N = 20$.

$$\varepsilon_x \cong 0.21394 + 0.38517\log O_N - 0.0008(O_N - 60)$$
$$\cong 0.21394 + 0.38517\log 20 - 0.0008(20 - 60) = 0.747 \qquad (d)$$

5. Obtenga el parámetro adimensional K_ε, con la ecuación 7.12c (p. 503).

$$K_\varepsilon = \frac{O_N}{4\pi} = \frac{20}{4\pi} = 1.592 \qquad (e)$$

6. La viscosidad η del lubricante requerida para soportar la carga P de diseño se determina ahora reagrupando la ecuación 7.8*b*:

$$\eta = \frac{Pc_r^2}{K_\varepsilon U l^3} = \frac{54(0.0005)^2}{1.592(53.38)(0.443)^3} = 1.825E-6 \text{ reyn} = 1.825 \ \mu\text{reyn} \qquad (f)$$

Entre a la figura 7-1 (p. 490) para que vea que aproximadamente un aceite ISO VG 100 dará este valor a 190 °F. Este aceite es equivalente a un aceite SAE 30W para motor de gasolina.

7. La presión promedio en la película de aceite se obtiene con la ecuación 7.6*d* (p. 499).

$$p_{prom} = \frac{P}{ld} = \frac{54}{0.443(0.591)} = 206 \text{ psi} \qquad (g)$$

8. El ángulo $\theta_{máx}$ al cual la presión es máxima se calcula con la ecuación 7.7*c* usando el valor experimental de $\varepsilon = 0.747$,

$$\theta_{máx} = \cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1+24\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1+24(0.747)^2}}{4(0.747)}\right) = 159.2° \qquad (h)$$

o bien, se puede leer en la curva experimental de la figura 7-12 (p. 504) para $O_N = 20$ como 159°.

7

9. La presión máxima se obtiene sustituyendo $\theta_{máx}$ en la ecuación 7.7*b* con $z = 0$, ya que es máxima en el centro de la longitud l del cojinete.

$$p = \frac{\eta U}{rc_r^2}\left(\frac{l^2}{4} - z^2\right)\frac{3\varepsilon \operatorname{sen}\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}$$

$$= \frac{(1.825E-6)(53.38)}{0.296(0.0005)^2}\left(\frac{(0.443)^2}{4} - 0^2\right)\frac{3(0.747)\operatorname{sen}(159.2°)}{(1+0.747\cos(159.2°))^3} = 1878 \text{ psi} \qquad (i)$$

o bien, se puede leer la razón $p_{máx}/p_{prom}$ en la curva experimental de la figura 7-11 (p. 504) para $O_N = 20$ como 9.1 y multiplicarla por la p_{prom} del inciso (*g*) anterior, para llegar al mismo resultado.

10. Obtenga el ángulo ϕ, el cual se ubica en el eje de $\theta = 0$ a π, con respecto a la carga aplicada P, a partir de la ecuación 7.8*a* (p. 500).

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\pi\sqrt{1-(0.747)^2}}{4(0.747)}\right) = 34.95° \qquad (j)$$

11. Ahora se determinan los torques estacionario y giratorio a partir de las ecuaciones 7.9*a* y 7.9*b* (p. 501) con el ángulo ϕ.

$$T_s = \eta \frac{d^3 l(n_2' - n_1')}{c_d}\frac{\pi^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2}}$$

$$= (1.825E-6)\frac{(0.591)^3(0.443)(28.75-0)}{0.001}\frac{\pi^2}{\left(1-(0.747)^2\right)^{1/2}} = 0.071\,3 \text{ lb - in} \qquad (k)$$

$$T_r = T_s + Pe\operatorname{sen}\phi = 0.0713 + 54(0.000\,37)\operatorname{sen} 34.95° = 0.082\,8 \text{ lb - in} \qquad (l)$$

12. La pérdida de potencia del cojinete se obtiene con la ecuación 7.10 (p. 502).

$$\Phi = 2\pi T_r\left(n_2' - n_1'\right) = 2\pi(0.082\,8)(28.75 - 0) = 14.96\ \frac{\text{in - lb}}{\text{seg}} = 0.002\ \text{hp} \tag{m}$$

13. El coeficiente de fricción en el cojinete se obtiene a partir de la razón entre la fuerza cortante y la fuerza normal, usando la ecuación 7.11 (p. 502).

$$\mu = \frac{2T_r}{Pd} = \frac{2(0.082\,8)}{54(0.591)} = 0.005 \tag{n}$$

14. El espesor mínimo de la película se calcula con la ecuación 7.4*b* (p. 497).

$$h_{mín} = c_r(1-\varepsilon) = 0.0005(1-0.747) = 0.000\,126\ \text{in}\ \ (126\ \mu\text{in}) \tag{o}$$

Éste es un valor razonable, ya que la rms compuesta de la aspereza superficial (ecuación 7.4*a* de la p. 497) necesita ser no mayor de un tercio a un cuarto del espesor mínimo de la película para eliminar el contacto entre las asperezas (véase la figura 7-13 de la p. 509) y un acabado R_q de 30 a 40 μin o mejor se obtiene fácilmente con laminación, esmerilado o afilado de precisión.

7

15. Se calcula un factor contra el contacto entre las asperezas resolviendo hacia atrás el modelo, con un espesor mínimo de la película igual al acabado superficial promedio supuesto de, por decir, 40 μin, y determinando qué número de Ocvirk y una carga P serían requeridos para reducir el espesor mínimo de la película de aceite en ese valor. Esto se hizo fácilmente en el modelo cambiando $h_{mín}$ y η al estatus de entradas P y O_N al estatus de salida, lo cual da un valor estimado para O_N, e iterando para obtener una solución. El resultado es:

$$\text{cuando}\ \ h_{mín} = 40\ \mu\text{in},\qquad O_N = 72.2,\qquad \varepsilon = 0.92,\qquad P = 195\ \text{lb}$$

$$\text{y}\qquad N = \frac{195\ \text{lb}}{54\ \text{lb}} = 3.6 \tag{p}$$

lo cual es una reserva aceptable para las sobrecargas.

16. Si este cálculo del factor de seguridad hubiera indicado que una pequeña sobrecarga pondría en problemas el cojinete, el rediseño de éste con un número de Ocvirk menor daría más margen contra la falla por sobrecargas. La ecuación 7.12*c*, repetida abajo como (*q*), muestra lo que se podría cambiar para reducir O_N:

$$O_N = \left(\frac{p_{prom}}{\eta n'}\right)\left(\frac{d}{l}\right)^2\left(\frac{c_d}{d}\right)^2 \tag{q}$$

Se requeriría alguna combinación de disminución de la razón de tolerancia, disminución de la razón d/l o el uso de un aceite con viscosidad más alta. Suponiendo que la velocidad giratoria, la carga y el diámetro del eje se mantienen sin cambio, se podría incrementar la longitud del cojinete, o bien, reducir la tolerancia diametral e incrementar η para mejorar el diseño.

17. Los modelos EX11-01A (con la solución del ejemplo) y EX11-01B (con el cálculo del factor de seguridad con sobrecarga) se encuentran en el CD-ROM.

7.7 CONTACTOS NO CONCORDANTES

Los contactos no concordantes, como los dientes de engrane, las juntas leva-seguidor y los cojinetes de rodamiento (bolas, rodillos), pueden operar en modos de lubricación límite, mixta o elastohidrodinámica (EHD). El factor principal que determina cuál de

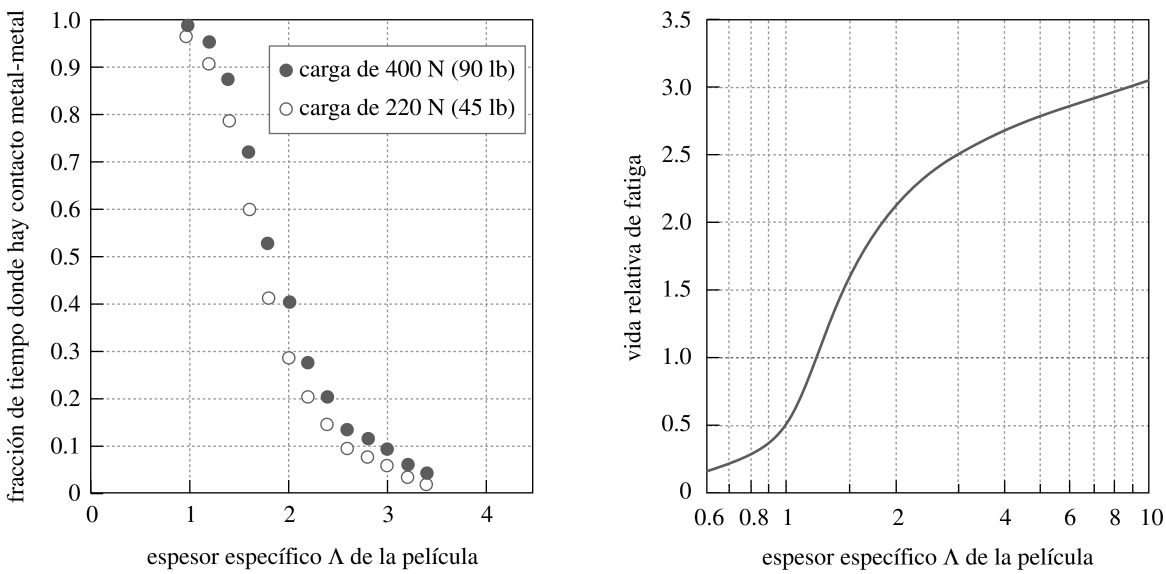
estas situaciones se presentará es el espesor específico Λ de la película, que se define como el espesor mínimo de la película en el centro de la huella, dividido entre la rms compuesta de la aspereza superficial de ambas superficies.

$$\Lambda = h_c \Big/ \sqrt{R_{q_1}^2 + R_{q_2}^2} \tag{7.14a}$$

donde h_c es el espesor de la película de lubricante en el centro de la huella de contacto, mientras R_{q1} y R_{q2} son la rms promedio de la aspereza de las dos superficies en contacto. El denominador de la ecuación 7.14*a* se conoce como aspereza superficial compuesta. (Véase la sección 5.1 en la p. 351 para el análisis de la aspereza superficial.) El espesor de la película en el centro de la huella de contacto se puede relacionar con el espesor mínimo de la película $h_{mín}$ en el borde de salida del contacto por

$$h_c \cong \frac{4}{3} h_{mín} \tag{7.14b}$$

La figura 7-13*a* muestra la frecuencia de la aspereza, medida experimentalmente dentro de un espacio EHD, en función del espesor específico de la película.[28] Cuando $\Lambda < 1$, las superficies están en contacto continuo metal-metal, es decir, en lubricación límite. Cuando $\Lambda >$ de 3 a 4, prácticamente no hay contacto entre las asperezas. Entre estos valores hay alguna combinación de condiciones de lubricación EHD y límite. La mayoría de contactos hertzianos en engranes, levas y cojinetes de rodamiento funcionan en esta región parcial EHD (lubricación mixta) de la figura 7-2 (p. 491).[17] De la figura 7-13*a* se concluye que Λ necesita ser > 1 para que inicie la EHD parcial[17] y > 3 a 4 para una EHD de película completa.[16],[17] Las condiciones efectivas para EHD parcial inician en aproximadamente $\Lambda = 2$ y si $\Lambda < 1.5$, ello indica una condición efectiva de lubricación límite, donde se presenta un contacto significativo entre las asperezas.



(*a*) Penetración en la película EHD de las asperezas superficiales (ref 28)

(*b*) Efecto del espesor de la película sobre la vida de fatiga (ref. 29)

FIGURA 7-13

Efecto del espesor específico Λ de la película sobre los contactos entre asperezas y vida de fatiga

La figura 7-13*b* muestra el efecto del espesor específico de la película sobre la vida de fatiga de un cojinete de bolas.[29] La ordenada define la razón de vida esperada sobre la vida pronosticada del cojinete por el fabricante. Esta gráfica también presenta la conveniencia de mantener $\Lambda > 1.5$ para obtener la vida pronosticada en el catálogo. Un pequeño incremento en Λ de 1.5 a 2 duplicaría la vida de fatiga. Un aumento mayor en Λ produce un efecto menos significativo sobre la vida de fatiga, y puede causar una fricción mayor, debido a las pérdidas por expulsión, que reducen la viscosidad si se utiliza un aceite más pesado para obtener un mayor Λ.

La aspereza superficial es muy fácil de medir y controlar. El grosor de la película del lubricante es más difícil de pronosticar. En el capítulo 5 se analiza el cálculo de la presión hertziana en la superficie de contacto y se demuestra que las presiones en la zona de contacto en materiales rígidos que no se amoldan perfectamente (teóricamente, un punto o una línea) son muy altas, por lo general tan altas como de 80 a 500 kpsi (0.5 a 3 GPa), cuando ambos materiales son de acero. Alguna vez se creyó que los lubricantes no podrían soportar estas presiones y, por lo tanto, no separarían las superficies de los metales. Ahora se sabe que la viscosidad es una función exponencial de la presión, y que con presiones de contacto típicas el aceite se vuelve básicamente tan rígido como los metales que separa. La figura 7-14 muestra la relación viscosidad-presión de varios lubricantes comunes en una gráfica semilogarítmica. La curva de aceites minerales puede aproximarse con

$$\eta = \eta_0 e^{\alpha p} \tag{7.15a}$$

donde η_0 es la viscosidad absoluta (reyn [Pa-s]) a presión atmosférica y p es la presión (psi [Pa]). Una expresión aproximada para el exponente presión-viscosidad α para

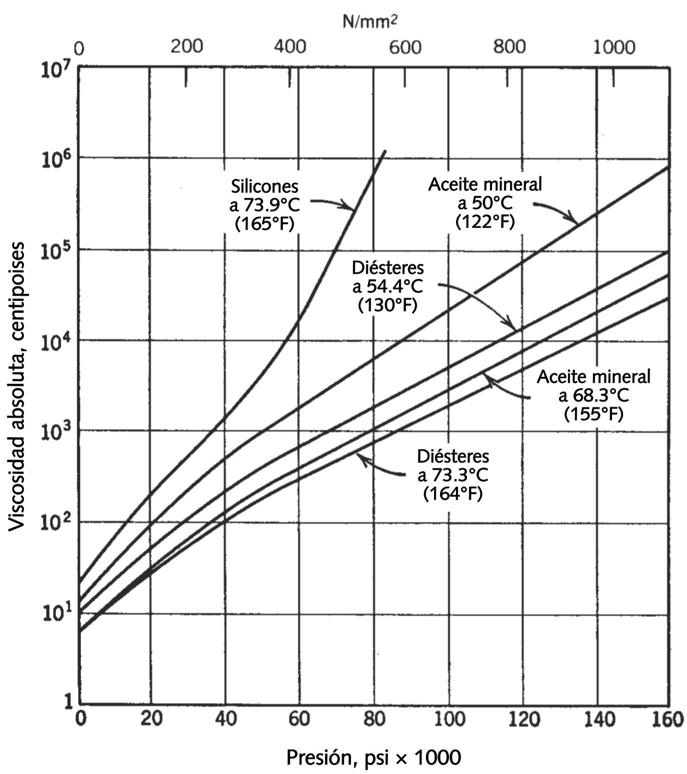


FIGURA 7-14

Viscosidad absoluta contra presión de varios aceites lubricantes Fuente: Comité de la ASME para la Investigación de la Lubricación. "Pressure Viscosity Report, vol. 11", 1953.

aceites minerales es (con unidades de υ_0 = in^2/s[m^2/s], η_0 = reyn [Pa-s], y ρ = lb-s^2/in^4 [N-s^2/m^4]:[27]

$$\alpha \cong 7.74E-4\left(\frac{\upsilon_0}{10^4}\right)^{0.163} \cong 7.74E-4\left(\frac{\eta_0}{\rho\left(10^4\right)}\right)^{0.163} \tag{7.15b}$$

Contacto cilíndrico Dowson y Higginson[18],[19] determinaron una fórmula para el espesor mínimo de la película en un contacto EHD entre rodillos cilíndricos como

$$h_{mín} = 2.65R'(\alpha E')^{0.54}\left(\frac{\eta_0 U}{E'R'}\right)^{0.7}\left(\frac{P}{lE'R'}\right)^{-0.13} \tag{7.16}$$

donde P es la carga transversal (lb[N]), l es la longitud del contacto axial (in[m]), U = velocidad media $(U_1 + U_2)/2$ (in/s [m/s]), η_0 es la viscosidad absoluta del lubricante (reyn [Pa-s]) a presión atmosférica y temperatura de operación, y α es el exponente de presión-viscosidad para el lubricante específico de la ecuación 7.15*b*. Las expresiones entre paréntesis en la ecuación 7.16 son razones adimensionales proporcionadas, de acuerdo con las unidades de sus componentes, para que sean consistentes con las unidades ips o SI indicadas, de modo que el espesor resultante de la película se obtiene en pulgadas o metros.

7

El radio R' efectivo se define como

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{1_x}} + \frac{1}{R_{2_x}} \tag{7.17a}$$

donde R_{1x} y R_{2x} son los radios de las superficies en contacto en dirección del rodamiento. El módulo efectivo se define como

$$E' = \frac{2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{\dfrac{1-\nu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\nu_2^2}{E_2}} \tag{7.17b}$$

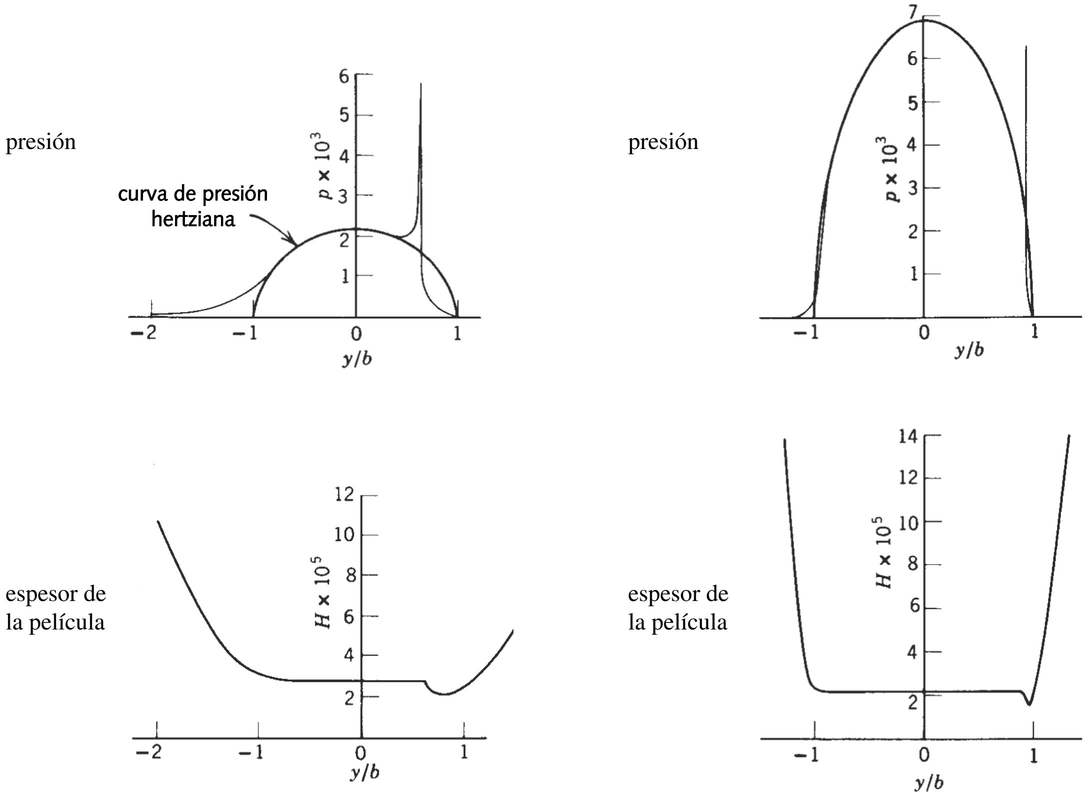
donde E_1 y E_2 son los módulos de Young y ν_1 y ν_2 son las razones de Poisson de los materiales.

Contacto general En los puntos de contacto, en general, la huella de contacto es una elipse como se vio en el capítulo 5. La elipse de contacto se define por las dimensiones a, y b, de sus semiejes mayor y menor, respectivamente. El contacto entre dos esferas, o entre una esfera y una placa plana, tiene una huella de contacto circular, la cual es un caso especial de contacto elíptico donde $a = b$. Hamrock y Dowson[21] desarrollaron una ecuación para el espesor mínimo de la película en puntos de contacto generales:

$$h_{mín} = 3.63R'(\alpha E')^{0.49}\left(\frac{\eta_0 U}{E'R'}\right)^{0.68}\left(1-e^{-0.68\psi}\right)\left[\frac{P}{E'(R')^2}\right]^{-0.073} \tag{7.18}$$

donde ψ es la razón elipsoidal de la huella de contacto a/b (véase la sección 5.10 en la p. 378).

En todas estas ecuaciones, el espesor de la película depende más de la rapidez y la viscosidad del lubricante, y además de que es relativamente insensible a la carga. La figura 7-15 muestra gráficas de distribuciones de presión y espesor de la película, para condiciones de carga ligeras y pesadas, en un contacto EHD entre los rodillos de acero lubricados con aceite mineral.[22] Observe que la presión del fluido es la misma que la



(*a*) Condiciones de carga ligera (*b*) Condiciones de carga pesada

FIGURA 7-15

Distribución de presión y espesor de la película en una junta EHD. Fuente: D. Dowson y G. Higginson, "The Effect of Material Properties on the Lubrication of Elastic Rollers", *J. Mech. Eng. Sci.*, vol. 2, núm. 3, 1960, con autorización

presión de contacto seco de Hertz, excepto para la presión pico que se presenta conforme el espesor de la película se contrae cerca de la salida. Salvo para esa contracción local, el espesor de la película es básicamente constante a través de la huella de contacto.

Las ecuaciones 7.16, 7.17 y 7.18 permiten calcular un espesor mínimo de película para juntas de contacto sin ajuste perfecto, como en un par de engranes, leva-seguidor o cojinetes de rodamiento. El espesor específico de película de la ecuación 7.14 indicará si en el contacto se podría esperar una lubricación EHD o una lubricación límite. Se necesitan aditivos EP si no hay una presión EHD.

EJEMPLO 7-2

Lubricación en el punto de contacto de una leva-seguidor con corona

Problema **En el ejemplo 5-3 (p. 381), se analizaron la geometría de la huella de contacto y los esfuerzos de contacto para un sistema leva-seguidor. Determine el parámetro de espesor de la película y la condición de lubricación para un rodillo esmerilado que opera contra una leva esmerilada y una leva maquinada.**

Se proporciona **El radio del seguidor de rodillo es de 1 in con una corona de 20 in de radio a 90° del radio del rodillo, con una rms de aspereza superficial $R_q = 7$ μin. El radio de curvatura mínimo de la leva es de 1.72 pulgadas, en la dirección del rodamiento. Es plana axialmente. Forma una huella de contacto elíptica con la leva. Las mitades de las dimensiones de esta elipse son $a = 0.0889$ in y $b = 0.0110$ in. La velocidad angular de la leva es de 18.85 rad/seg y el radio de su superficie en el punto de radio de curvatura mínimo es de 3.92 in. La temperatura de la masa de aceite es de 180 °F. La leva rectificada tiene una rms de aspereza superficial de $R_q = 7$ μin y la leva maquinada tiene un $R_q = 30$ μin.**

Suposiciones **Intente con un aceite ISO VG 460 con una gravedad específica supuesta de 0.9. El rodillo tiene un deslizamiento del 1% contra la leva.**

Obtenga **El espesor específico de la película y la condición de lubricación para el lubricante supuesto y la viscosidad requerida del lubricante, para obtener condiciones parciales o completas EHD para cada leva, si es posible.**

Solución **Véase la figura 7-16.**

1. La figura 7-1 (p. 490) proporciona la viscosidad de un aceite ISO VG 460 de aproximadamente 6.5 μreyn a 180 °F.

2. Calcule la densidad de masa ρ del aceite a partir de la gravedad específica SG del aceite y la densidad de peso del agua.

$$\rho = SG\frac{\gamma}{g} = 0.9\left(0.036\,11\frac{\text{lb}}{\text{in}^3}\bigg/386\frac{\text{in}}{\text{seg}^2}\right) = 84.2E-6\frac{\text{lb}-\text{seg}^2}{\text{in}^4} \quad \text{o} \quad \frac{\text{blob}}{\text{in}^3} \tag{a}$$

3. Determine el exponente presión-viscosidad aproximado α a partir de la ecuación 7.15*b* (p. 511).

$$\alpha \cong 7.74E-4\left(\frac{\eta_0}{\rho(10^4)}\right)^{0.163} \cong 7.74E-4\left(\frac{6.5E-6}{84.2E-6(10^4)}\right)^{0.163} = 1.136E-4 \tag{b}$$

4. Obtenga el radio efectivo a partir de la ecuación 7.17*a* (p. 511).

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{1_x}} + \frac{1}{R_{2_x}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1.720} \qquad R' = 0.632 \text{ in} \tag{c}$$

5. Calcule el módulo efectivo de elasticidad a partir de la ecuación 7.17*b* (p. 511).

$$E' = \frac{2}{\dfrac{1-\nu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\nu_2^2}{E_2}} = \frac{2}{\dfrac{1-0.28^2}{3E7} + \dfrac{1-0.28^2}{3E7}} = 3.255E7 \tag{d}$$

6. Determine la velocidad promedio U. El rodillo tiene 99% de la velocidad de esta leva.

$$U_2 = r\omega = 3.92 \text{ in } (18.85 \text{ rad/seg}) = 73.892 \text{ in/seg}$$
$$U_1 = 0.99U_2 = 0.99(73.892) = 73.153 \text{ in/seg}$$
$$U = (U_1 + U_2)/2 = (73.892 + 73.153)/2 = 73.523 \text{ in/seg} \tag{e}$$

7. Obtenga la razón elipsoidal = eje mayor/eje menor. El eje menor se encuentra en la dirección del rodamiento en este caso.

$$\psi = a/b = 0.0889/0.0110 = 8.082 \tag{f}$$

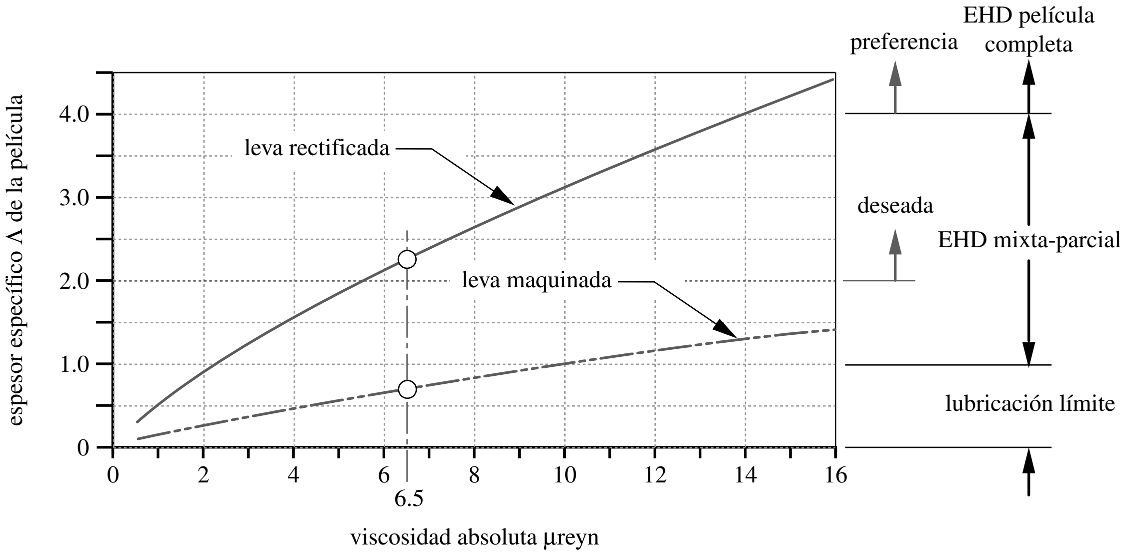


FIGURA 7-16

Variación del espesor específico Λ de la película con la viscosidad η_0 del lubricante del ejemplo 6-2

8. Determine el espesor mínimo de la película a partir de la ecuación 7.18 (p. 511).

$$h_{mín} = 3.63R'(\alpha E')^{0.49}\left(\frac{\eta_0 U}{E'R'}\right)^{0.68}\left(1-e^{-0.68\psi}\right)\left[\frac{P}{E'(R')^2}\right]^{-0.073}$$

$$= 3.63(0.632)[1.136E-4(3.255E7)]^{0.49}\left[\frac{(6.5E-6)(73.523)}{(3.255E7)(0.632)}\right]^{0.68}$$

$$\cdot\left[1-e^{-0.68(8.082)}\right]\left[\frac{250}{3.255E7(0.632)^2}\right]^{-0.073} = 16.6\ \mu\text{in} \qquad (g)$$

9. Convierta este valor mínimo en la salida para un espesor aproximado en el centro de la huella de contacto con la ecuación 7.14*b* (p. 509).

$$h_c \cong \frac{4}{3}h_{mín} = \frac{4}{3}(16.6) = 22.2\ \ \mu\text{in} \qquad (h)$$

10. Los valores del espesor específico de la película para cada leva se obtienen ahora a partir de la ecuación 7.14*a* (p. 509).

$$\text{leva rectificada:}\quad \Lambda = h_c\Big/\sqrt{R_{q_1}^2 + R_{q_2}^2} = 22.2\Big/\sqrt{7^2+7^2} = 2.24$$

$$\text{leva maquinada:}\quad \Lambda = h_c\Big/\sqrt{R_{q_1}^2 + R_{q_2}^2} = 22.2\Big/\sqrt{7^2+30^2} = 0.72 \qquad (i)$$

lo cual indica que la leva laminada se encuentra en lubricación límite y la leva maquinada en lubricación EHD parcial con el aceite especificado. Éstas son condiciones comunes para levas rectificadas o maquinadas, respectivamente, que operan sobre un rodillo seguidor rectificado.

11. Para determinar la viscosidad del aceite que sería necesaria para poner cada sistema en condición EHD parcial o completa, se resolvió el modelo para un intervalo de posibles valores para η_0 de 0.5 a 16 μreyn, como se muestra en la figura 7-1 (p. 490) a 180 °F. La gráfica de los resultados en la figura 7-16 (p. 514) muestra que se

necesita un aceite con $\eta_0 \geq 14$ μreyn para poner esta leva rectificada en lubricación EHD completa, y que un aceite con $\eta_0 > 10$ μreyn llevará a la leva maquinada a un $\Lambda > 1$ y hacia el valor inferior del régimen de lubricación EHD mixto-parcial. No obstante, ninguno de los aceites mostrados en la figura 7-1 (p. 490) ofrece $\Lambda > 4$ para una EHD de película completa en la leva maquinada.

12. Los archivos EX11-02 se encuentran en el CD-ROM.

7.8 COJINETES DE ELEMENTOS RODANTES

Los rodillos se conocen como un medio para mover objetos pesados desde tiempos remotos, y hay evidencia del uso de cojinetes de bolas de empuje en el primer siglo a.C.; no obstante, fue hasta el siglo XX que la mejora en los materiales y la tecnología de manufactura permitió que se obtuvieran cojinetes de rodamiento de precisión. La necesidad de mayores rapideces, con resistencia a temperaturas más altas en cojinetes de baja fricción, fue provocada por el desarrollo de turbinas de gas para la aviación. Muchos trabajos de investigación desde la Segunda Guerra Mundial han dado como resultado que cojinetes de rodamiento (REB) de alta calidad y alta precisión estén disponibles a un costo bastante razonable.

Es interesante notar que, a partir de los primeros diseños de principios del siglo XX, los cojinetes de bolas y rodillos se estandarizaron mundialmente en medidas métricas. Por ejemplo, es posible eliminar un REB del montaje de la rueda de un viejo automóvil fabricado en casi cualquier país en la década de 1920, y encontrar el repuesto adecuado en un catálogo de cojinetes actual. El nuevo cojinete estará bastante más mejorado que el original, en términos de diseño, calidad y confiabilidad, pero con las mismas dimensiones externas.

MATERIALES La mayoría de los cojinetes de bolas modernos se hacen con acero AISI 5210 y endurecido en alto grado, ya sea total o superficialmente. Esta aleación cromo-acero se puede endurecer completamente hasta HRC 61-65. Los cojinetes de rodillos se fabrican a menudo con aleaciones de acero AISI 3310, 4620 y 8620, con recubrimiento endurecido. Las mejoras recientes en los procesos de fabricación del acero dieron como resultado cojinetes de acero con niveles de impurezas reducidos. Los cojinetes elaborados con estos aceros "limpios" tienen vida y confiabilidad significativamente mejoradas. Aun cuando siempre se ha considerado que los cojinetes de rodamiento tienen vidas de fatiga finitas y los "estándares" todavía son así, los REB fabricados con aceros "limpios" han mostrado evidencia reciente de un límite de resistencia de vida infinita en fatiga superficial.[23]

MANUFACTURA Los cojinetes de elementos rodantes son elaborados por los principales fabricantes alrededor del mundo, en dimensiones estándares, definidas por la Asociación de Fabricantes de Cojinetes Anti-Fricción (AFBMA) y/o la Organización Internacional de Estándares (ISO); por lo tanto, son intercambiables. Uno puede asegurar que con la selección de un cojinete con estos estándares se garantiza razonablemente la reparación del montaje en el futuro, incluso si el fabricante sale del negocio. Los estándares AFBMA para el diseño de cojinetes han sido adoptados por el Instituto Nacional Estadounidense de Estándares (ANSI). Una parte de la información de esta sección se tomó del estándar 9-1990 para cojinetes de bolas[24] y del estándar 11-1990 sobre cojinetes de rodamiento[25] de la ANSI/AFBMA. Los estándares también definen clases de tolerancias para cojinetes. Los cojinetes radiales están clasificados por la ANSI como clases de tolerancias ABEC-1 a 9, incrementando la precisión con el número de clase. ISO define las clases 6 a 2, donde la precisión varía inversamente con el número de clase. El costo se incrementa con el aumento de la precisión.

Tabla 7-4

Coeficientes típicos de fricción para cojinetes de elementos rodantes*

Tipo	μ
Autoalineación, de bolas	0.0010
Cilíndrico, de rodillos	0.0011
Empuje, de bolas	0.0013
Ranura profunda, de bolas	0.0015
Esférico, de rodillos	0.0018
Cónico, de rodillos	0.0018
Aguja, de rodillos	0.0045

* Fuente: Palmgren, A., *Ball and Roller Bearing Engineering*, 2a. ed., S.H. Burbank Co., Phila., 1946

7

Comparación de cojinetes rodantes y deslizantes

Los cojinetes de rodamiento tienen varias ventajas sobre los cojinetes de contacto deslizantes y viceversa. Hamrock[26] lista las siguientes ventajas de los cojinetes rodantes sobre los cojinetes deslizantes:

1. baja fricción en el arranque y la operación, $\mu_{estático} \cong \mu_{dinámico}$ en el intervalo de 0.001 a 0.005
2. pueden soportar cargas radiales y de empuje combinadas
3. menos sensibilidad a las interrupciones de lubricación
4. no hay inestabilidades de autoexcitación
5. buen arranque a bajas temperaturas
6. se puede sellar el lubricante dentro del cojinete y "lubricar de por vida"
7. usualmente se requiere menos espacio en dirección axial

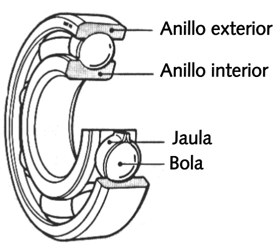
Las siguientes son las desventajas de los cojinetes de rodamiento, comparadas con los cojinetes deslizantes hidrodinámicos con ajuste perfecto:[26]

1. los cojinetes rodantes pueden fallar, con el tiempo, por fatiga
2. requieren más espacio en la dirección radial
3. capacidad de amortiguamiento deficiente
4. mayor nivel de ruido
5. algunos tienen requerimientos de alineación más severos
6. costo alto

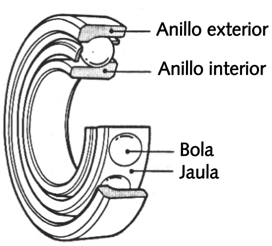
Tipos de cojinetes de elementos rodantes

Los cojinetes de elementos rodantes se agrupan en dos grandes categorías, cojinetes de bolas y cojinetes de rodillos; ambos con muchas variantes dentro de esas divisiones. Los cojinetes de bolas son más adecuados para aplicaciones pequeñas de alta rapidez. Para sistemas grandes, con cargas pesadas, son preferibles los cojinetes de rodillos. Si es posible que se presenten desalineaciones entre el eje y la carcasa, entonces se necesitan cojinetes de autoalineación. Los cojinetes de rodillos cónicos son capaces de manejar cargas pesadas, tanto en la dirección radial como en la dirección de empuje, a rapideces moderadas. En situaciones de cargas pesadas radiales y de empuje a grandes velocidades, lo mejor son los cojinetes de bolas con pista profunda. En la tabla 7-4 se presentan los coeficientes de fricción de varios tipos de cojinetes.

COJINETES DE BOLAS Aprisionan varias esferas de acero endurecido y esmerilado entre dos canaletas: una interior y una exterior, para cojinetes radiales; o superior e inferior, para cojinetes de empuje. Se utiliza un retén (también llamado jaula o separador) para mantener las bolas adecuadamente espaciadas alrededor de las pistas, como se indica en la figura 7-17. Los cojinetes de bolas pueden soportar cargas radiales y de empuje combinadas, con niveles de variación, lo que depende de su diseño y su construcción. La figura 7-17*a* muestra un cojinete de bolas de pista profunda, o tipo Conrad, que soporta cargas radiales y cargas de empuje moderadas. La figura 7-17*b* presenta un cojinete de bolas de contacto angular, diseñado para manejar cargas de empuje más grandes en una dirección, así como cargas radiales. Hay algunos cojinetes de bolas que vienen de la fábrica con escudos, para mantener afuera la materia extraña, y sellos, para retener el lubricante. Los cojinetes de bolas son más adecuados para tamaños pequeños, rapideces altas y cargas más ligeras.



(*a*) Cojinete de bolas, pista-profunda (Conrad)



(*b*) Cojinete de bolas, contacto-angular

FIGURA 7-17

Cojinetes de bolas. *Cortesía de NTN Corporation*

COJINETES DE RODILLOS Utilizan entre las pistas de rodillos rectos, cónicos o contorneados, como se ilustra en la figura 7-18. En general, los cojinetes de rodillos pueden

soportar cargas estáticas y dinámicas (de choque) más grandes que los cojinetes de bolas, debido a su línea de contacto, a la vez que son menos costosos en tamaños mayores y cargas más pesadas. A menos que los rodillos sean cónicos o contorneados, pueden soportar una carga en una sola dirección, sea radial o de empuje, de acuerdo con el diseño del cojinete.

La figura 7-18*a* muestra un cojinete de rodillos cilíndricos rectos, diseñado para soportar sólo cargas radiales. Tiene fricción muy baja y flota axialmente, lo cual puede ser una ventaja en ejes grandes, donde la expansión térmica carga con un par de bolas del cojinete en la dirección axial, si no se monta adecuadamente. La figura 7-18*b* muestra un cojinete de aguja que usa rodillos de diámetro pequeño, a la vez que puede o no tener una pista o jaula interior. Sus ventajas son mayor capacidad de carga debido al complemento total de los rodillos y su dimensión radial compacta, sobre todo si se utiliza sin una pista interior. En estos casos, los ejes contra las que giran los rodillos se deben endurecer y esmerilar. Aun cuando el cojinete de aguja, con complemento total, tiene capacidad de carga más alta, también posee una mayor tasa de desgaste que uno con menos rodillos separados por una jaula para prevenir el frotamiento entre uno y otro.

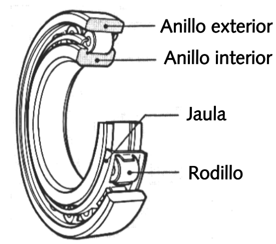
La figura 7-18*c* ilustra un cojinete de rodillos cónicos diseñado para soportar cargas de empuje y radiales grandes, los cuales se utilizan con frecuencia como cojinetes en las ruedas de automóviles y camiones. Los cojinetes de rodillos cónicos (y otros) se separan axialmente, lo que hace más fácil el montaje que en los cojinetes de bolas que normalmente se ensamblan de forma permanente. La figura 7.18*d* muestra un cojinete de rodillos esféricos de autoalineación, lo cual evita que se generen momentos en el cojinete.

COJINETES DE EMPUJE Los cojinetes de bolas y de rodillos también están fabricados para cargas de empuje puro, como se indica en la figura 7-19. Los cojinetes de empuje de rodillos cilíndricos tienen mayor fricción que los cojinetes de empuje de bolas debido al deslizamiento que ocurre entre el rodillo y las pistas (porque sólo un punto sobre el rodillo puede cumplir con la velocidad lineal variable sobre los radios de las pistas), por lo que no se deberían utilizar en aplicaciones de alta velocidad.

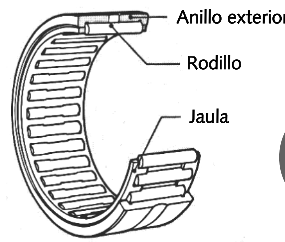
CLASIFICACIÓN DE COJINETES La figura 7-20 muestra una clasificación de los tipos de REB. Cada una de las categorías principales de bolas o rodillos se divide en las subcategorías radial y de empuje. Dentro de estas divisiones son posibles muchas variedades. Se proponen configuraciones de una o dos hileras, donde esta última ofrece mayor capacidad de carga. Se pueden elegir de contacto unidireccional o angular, donde el primero acepta una carga radial o una carga de empuje "puras", en tanto que el segundo acepta una combinación de ambas. Los cojinetes de bolas de pistas profundas son capaces de manejar tanto cargas radiales grandes como cargas de empuje limitado en ambas direcciones, además de que son los que se usan más comúnmente.

Los cojinetes de bolas de contacto angular soportan cargas de empuje más grandes que los cojinetes de bolas de pista profunda, aunque tan sólo en una dirección. Se utilizan frecuentemente en pareja para absorber cargas axiales en ambas direcciones. Los cojinetes de bolas de capacidad máxima tienen una ranura de relleno para permitir que se inserten más bolas, las que se pueden alojar por desplazamiento excéntrico de las pistas en el ensamble, tal como se hace en el cojinete de bolas de canaleta profunda (tipo Conrad); sin embargo, la ranura de relleno limita su capacidad de carga axial.

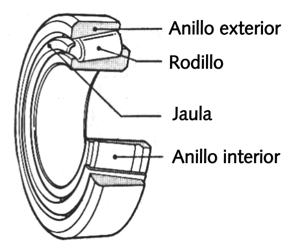
Los diseños de autoalineación tienen la ventaja de adaptarse a cierto desalineación y también crean soporte simple para el eje. También tienen fricción muy baja. Si se utilizan cojinetes sin autoalineación sobre un eje, los soportes del cojinete deben alinearse con mucho cuidado, tanto colineal como angularmente, para evitar la creación de cargas residuales sobre los cojinetes en el montaje, lo cual acorta significativamente su vida.



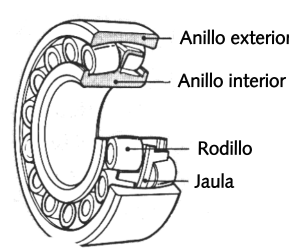
(*a*) Cojinete de rodillos cilíndricos



(*b*) Cojinete de rodillos de aguja



(*c*) Cojinete de rodillos cónicos

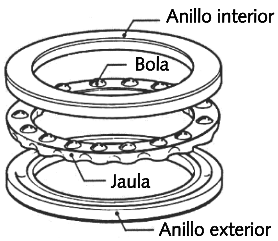


(*d*) Cojinete de rodillos esféricos

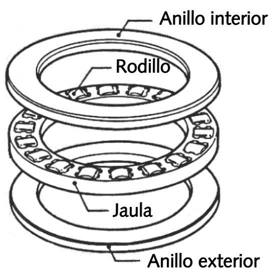
FIGURA 7-18

Tipos de cojinetes con rodillos.
Cortesía de NTN Corporation

La figura 7-21 muestra los intervalos de tamaños y clasificaciones de un fabricante de cojinetes, además de recomendaciones, en lo referente al uso de varios tipos de cojinete, como un ejemplo. Observe que hay unos cuantos tipos con dimensiones en pulgadas; no obstante, la mayoría sólo están disponibles en dimensiones métricas. Las columnas identificadas como *Capacidad* señalan la capacidad relativa para permitir cargas



(*a*) Cojinete de empuje de bolas



(*b*) Cojinete de empuje de rodillos

FIGURA 7-19

Cojinetes de empuje. *Cortesía de NTN Corporation*

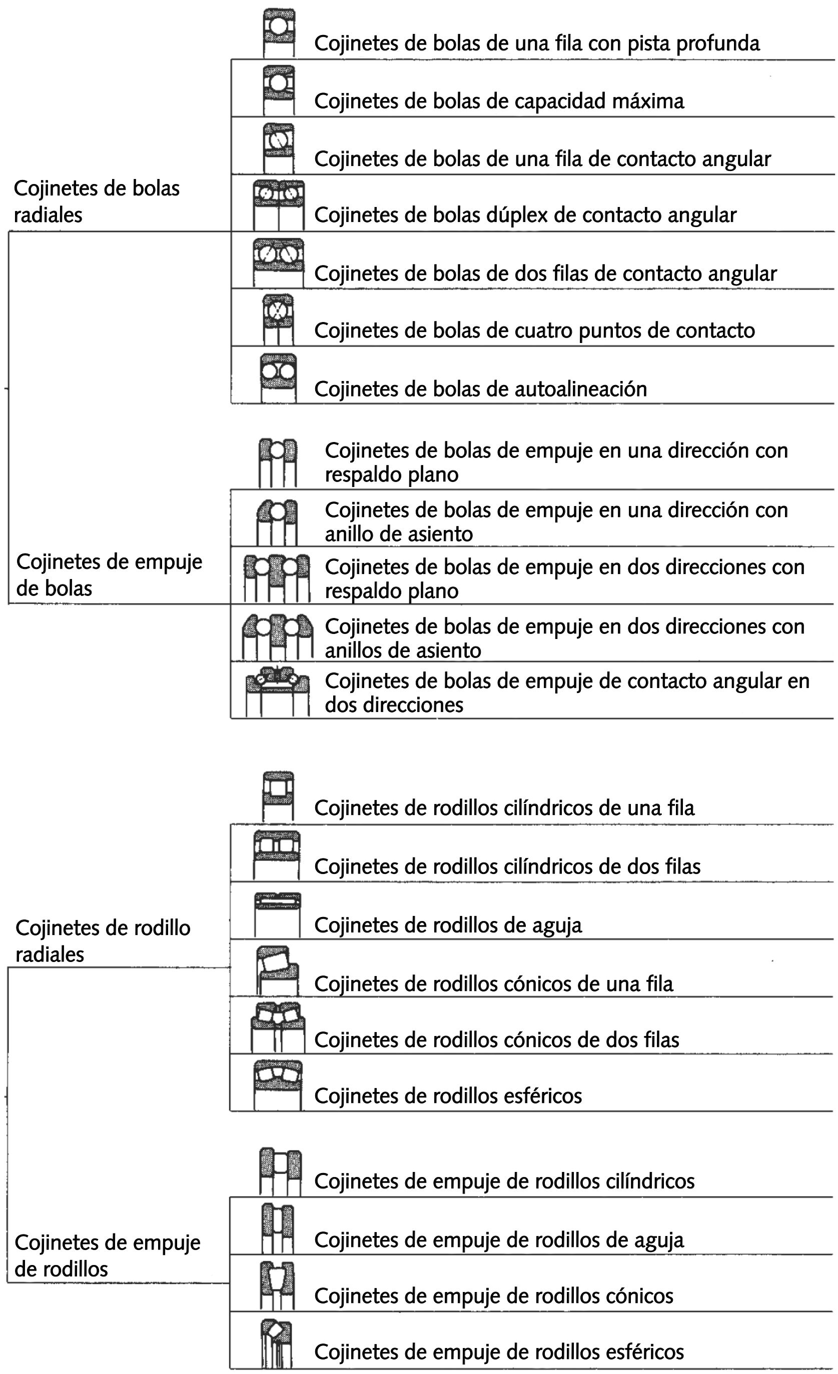


FIGURA 7-20

Clasificación de los cojinetes de elementos rodantes. *Cortesía de NTN Corporation*

radiales y de empuje para cada tipo. La columna de *Velocidad límite* utiliza el cojinete tipo Conrad como el estándar de comparación, ya que tiene una de las mejores capacidades de alta velocidad. Consulte los catálogos de los fabricantes para información adicional sobre otros tipos y series de cojinetes. Hay muchos más de los que se muestran en estas figuras.

		TIPO	INTERVALO DEL TAMAÑO EN PULGADAS		CLASIFICACIONES RELATIVAS PROMEDIO				DISPONIBLE CON			DIMENSIONES	
			Diámetro interior	Diámetro exterior	Capacidad Radial	Capacidad Empuje	Velocidad límite	Desalineación permisible	Escudos	Sellos	Chavetas circulares	Métrico	Pulgadas
Bolas	COJINETES DE BOLAS	TIPO CONRAD	.1181 a 41.7323	.3750 a 55.1181	Buena	Aceptable ↔	El tipo Conrad se toma como base de comparación 1.00	Tolerancia radial estándar ±0°8′. Tolerancia C3 ±0°12′	X	X	X	X	X
		TIPO MÁXIMO	.6693 a 4.3307	1.5748 a 8.4646	Excelente	Deficiente ↔	1.00	± 0° 3′	X		X	X	
		Contacto angular 15°/40° (15° / 40°)	.3937 a 7.4803	1.0236 a 15.7480	Buena	Buena (15°) Excelente (40°) ←	1.00 / 0.70	± 0° 2′				X	
		Contacto angular 35°	.3937 a 4.3307	1.1811 a 9.4488	Excelente	Buena ←	0.70	0°				X	
		AUTO-ALINEACIÓN	.1969 a 4.7244	.7480 a 9.4488	Aceptable	Aceptable ↔	1.00	± 4°				X	
Rodillos	COJINETES DE RODILLOS CILÍNDRICOS	ANILLO INTERIOR SEPARABLE NO UBICADO	.4724 a 19.6850	1.2598 a 28.3465	Excelente	0	1.00	± 0° 4′				X	
		ANILLO INTERIOR SEPARABLE UBICADO EN UNA DIRECCIÓN	.4724 a 12.5984	1.2598 a 22.8346	Excelente	Deficiente ←	1.00	± 0° 4′				X	
		AUTO-CONTENIDO UBICADO EN DOS DIRECCIONES	.4724 a 3.9370	1.4567 a 8.4646	Excelente	Deficiente ↔	1.00	± 0° 4′				X	
	COJINETES DE RODILLOS CÓNICOS	SEPARABLE	.6205 a 6.0000	1.5700 a 10.0000	Buena	Buena →	0.60	± 0° 2′				X	X
	COJINETES DE RODILLOS ESFÉRICOS	AUTO-ALINEACIÓN	.9843 a 12.5984	2.0472 a 22.8346	Buena	Aceptable ↔	0.50	± 4°				X	
		AUTO-ALINEACIÓN	.9843 a 35.4331	2.0472 a 46.4567	Excelente	Buena ↔	0.75	± 1°				X	
	COJINETES DE AGUJA	COJINETES COMPLETOS con o sin ubicación de anillos y ranuras lubricantes	.2362 a 14.1732	.6299 a 17.3228	Buena	0	0.60	± 0° 2′		X		X	X
		COPA ABIERTA	.1575 a 2.3622	.3150 a 2.6772	Buena	0	0.30	± 0° 2′				X	X
	COJINETES DE EMPUJE	BOLA DE UNA DIRECCIÓN Carrera con ranura	.2540 a 46.4567	.8130 a 57.0866	Deficiente	Excelente →	0.30	0°				X	X
		RODILLO CILÍNDRICO UNA DIRECCIÓN	1.1811 a 23.6220	1.8504 a 31.4960	0	Excelente →	0.20	0°				X	
		RODILLO ESFÉRICO DE AUTOALINEACIÓN	3.3622 a 14.1732	4.3307 a 22.0472	Deficiente	Excelente →	0.50	± 3°				X	

FIGURA 7-21

Información de desempeño, tamaño y disponibilidad relativos de cojinetes de rodamiento. *Cortesía de FAG Bearings Corp., Stannford, Conn.*

7

7.9 FALLA DE COJINETES DE ELEMENTOS RODANTES

Si se proporciona suficiente lubricante limpio, la falla en los cojinetes de elementos rodantes se presentará por fatiga superficial, como se vio en el capítulo 5. Se considera que ocurre la falla cuando la pista o las bolas (rodillos) presentan el primer picado. Usualmente la pista fallará primero. El cojinete enviará una indicación audible de que el picado se ha iniciado emitiendo ruido y vibración. Se puede correr más allá de este punto, pero como la superficie continúa deteriorándose el ruido y la vibración se incrementan, lo que da como resultado la formación de escamación o fractura de los elementos rodantes, así como los posibles bloqueo y daño de otros elementos conectados. Si alguna vez le ha fallado el cojinete de una rueda de su automóvil, sabrá que de ahí surge el ruido intenso de un cojinete de rodamiento picado o escamado *al extremo*.

Una muestra grande de cojinetes presentará amplias variaciones de vida entre sus miembros. Las fallas no se distribuyen estadísticamente de una forma simétrica gaussiana, sino de acuerdo con la distribución de Weibull, que es oblicua. Los cojinetes se comparan normalmente con base en la vida, definida en revoluciones (o en horas de operación a la rapidez de diseño), además de que se espera que el 90% de cojinetes de una muestra aleatoria alcancen o excedan su vida de operación con su carga de diseño. En otras palabras, se espera que el 10% del lote falle con esa carga antes de que se alcance la vida de diseño. Lo anterior se conoce como la vida L_{10}.* Para aplicaciones críticas, se diseña para un porcentaje de falla menor, aunque la mayoría de los fabricantes han adoptado el estándar de vida L_{10} como un medio para definir la característica de carga/vida en un cojinete. El proceso de selección de un cojinete de rodamiento implica considerablemente el uso de este parámetro para obtener cualquier vida deseada bajo condiciones anticipadas de carga o sobrecarga esperadas durante el servicio.

La figura 7-22 muestra la curva de falla de un cojinete y porcentajes de supervivencia, como una función de la vida relativa a la fatiga. Se toma la vida L_{10} como referencia. La curva es relativamente lineal hasta el 50% de falla, lo cual ocurre en una vida igual a 5 veces la de referencia. En otras palabras, debería pasar 5 veces el tiempo en que falla el 10% para que el 50% de los cojinetes fallen. Después de ese punto, la curva se vuelve bastante no lineal, lo cual demuestra que tomará aproximadamente 10 veces del tiempo en que falla el 10% para que falle el 80% de los cojinetes, en tanto que en 20 veces la vida L_{10} hay aún un pequeño porcentaje de los cojinetes originales que funcionan.

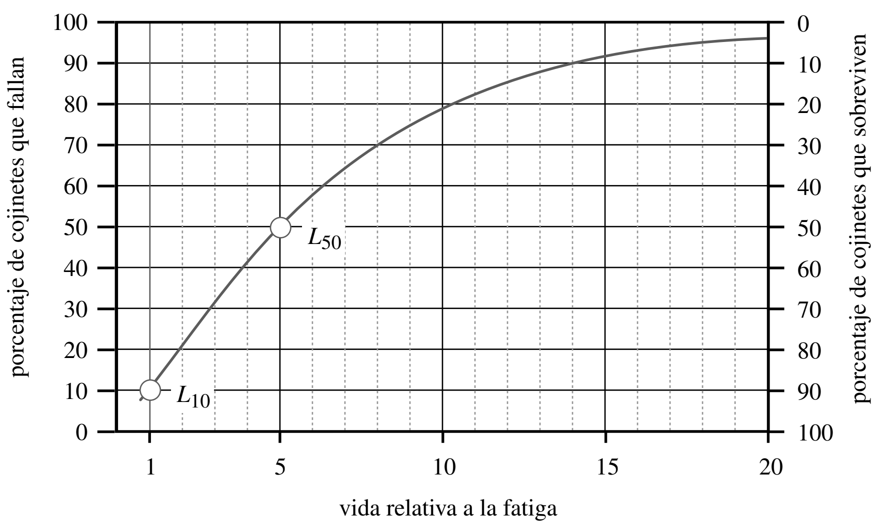


FIGURA 7-22

Distribución típica de vida en cojinetes de rodamiento. *Adaptado de SKF USA Inc.*

* Algunos fabricantes de cojinetes se refieren a esto como la vida B_{90} o C_{90}, aludiendo a la supervivencia del 90% de los cojinetes en vez del 10% que falla.

La vida L para otros porcentajes de fallas, diferentes del 10%, se calcula multiplicando la vida L_{10} por un factor de confiabilidad K_R tomado de la curva de distribución de Weibull que la rige.

$$L_P = K_R L_{10} \tag{7.19}$$

donde L es la vida de fatiga expresada en millones de revoluciones. En la tabla 7-5 se muestran los factores K_R de Weibull para varios porcentajes de falla.

Tabla 7-5
Factores de confiabilidad R para una distribución de Weibull, correspondientes a la probabilidad de falla P

P%	R%	K_R
50	50	5.0
10	90	1.0
5	95	0.62
4	96	0.53
3	97	0.44
2	98	0.33
1	99	0.21

7.10 SELECCIÓN DE COJINETES DE ELEMENTOS RODANTES

Una vez que se haya elegido un tipo de cojinete con base en las consideraciones discutidas y descritas en la figura 7-21, la selección del tamaño adecuado del cojinete depende de las magnitudes de las cargas estática y dinámica aplicadas, así como de la vida de fatiga deseada.

Valor C de la carga dinámica básica

Pruebas exhaustivas realizadas por los fabricantes de cojinetes, con base en teorías consolidadas, demuestran que la vida a la fatiga L_{10} de cojinetes de elementos rodantes es inversamente proporcional a la tercera potencia de la carga para cojinetes de bolas, así como a la potencia 10/3 para cojinetes de rodillos. Estas relaciones se expresan como

cojinetes de bolas:
$$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^3 \tag{7.20a}$$

cojinetes de rodillos:
$$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^{10/3} \tag{7.20b}$$

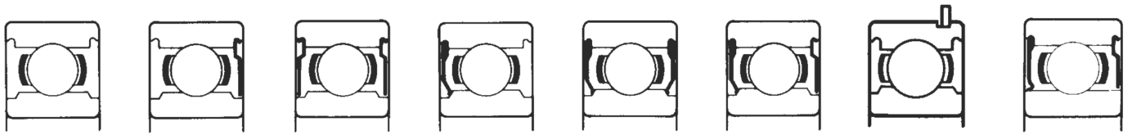
donde L_{10} es la vida a la fatiga expresada en millones de revoluciones, P es la carga constante aplicada* y C es el *valor de carga dinámica básica* para el cojinete específico, definido por el fabricante y publicado para cada cojinete en los catálogos. El ***valor C de la carga dinámica básica*** se define como *la carga que proporcionará una vida de un millón de revoluciones en la pista interior*. Esta carga C normalmente es más grande que cualquier carga práctica a la que uno sujetaría a cierto cojinete, debido a que la vida deseada suele ser mucho mayor que un millón de revoluciones. De hecho, algunos cojinetes fallarían estáticamente, si en realidad se someten a una carga igual a C. Simplemente es un valor de referencia que permite que la vida del cojinete se pronostique en cualquier nivel de la carga aplicada real. La figura 7-23 muestra una página del catálogo de un fabricante de cojinetes que especifica el valor de C de cada cojinete. También se define la velocidad límite máxima para cada cojinete.

Se combinan las ecuaciones 7.20*a* y 7.20*b*, con la ecuación 7.19, con la finalidad de obtener las expresiones para la vida de un cojinete en cualquier rango de falla seleccionado.

cojinetes de bolas:
$$L_P = K_R\left(\frac{C}{P}\right)^3 \tag{7.20c}$$

cojinetes de rodillos:
$$L_P = K_R\left(\frac{C}{P}\right)^{10/3} \tag{7.20d}$$

* Observe que una carga constante externa aplicada a un cojinete giratorio crea cargas dinámicas en los elementos del cojinete, de la misma manera que un momento constante sobre un eje giratorio causa esfuerzos dinámicos, ya que cualquier punto sobre la bola, el rodillo o la pista está sujeto a la carga que viene y se va conforme el cojinete gira.



	ABIERTO	UN ESCUDO	DOS ESCUDOS	UN SELLO	DOS SELLOS	SELLO Y ESCUDO	ABIERTO, CON CHAVETA CIRCULAR†	SELLO RADIAL Y ESCUDO
Sufijo		.Z	.2Z	.RS	.2RS	.RSZ	.NR	.RSRZR

Esta configuración se muestra sólo para ilustrar nuevos estándares de carcasa. Algunos cojinetes se modifican.

NÚMERO DE COJINETE*	DIMENSIONES LÍMITE DIÁM. INT. mm	DIÁM. INT. pulgadas	DIÁM. EXT. mm	DIÁM. EXT. pulgadas	ANCHO mm	ANCHO pulgadas	CHAVETA CIRCULAR DIMENSIONES pulgadas H	S	t	RADIO MÁXIMO DEL FILETE Eje y carcasa pulgadas	PESO APROX. lb.	S_L RAPIDEZ LÍMITE ‡ rpm	C MEDICIÓN DE CARGA DINÁMICA lb.	C_O MEDICIÓN DE CARGA ESTÁTICA lb.
6300	10	.3937	35	1.3780	11	.4331	.125	1.562	.044	.025	.13	22000	1400	850
6301	12	.4724	37	1.4567	12	.4724	.125	1.625	.044	.040	.15	20000	1700	1040
6302	15	.5906	42	1.6535	13	.5118	.125	1.821	.044	.040	.20	18000	1930	1200
6303	17	.6693	47	1.8504	14	.5512	.141	2.074	.044	.040	.25	16000	2320	1460
6304	20	.7874	52	2.0472	15	.5906	.141	2.276	.044	.040	.34	14000	3000	1930
6305	25	.9843	62	2.4409	17	.6693	.195	2.665	.067	.040	.58	11000	3800	2550
6306	30	1.1811	72	2.8346	19	.7480	.195	3.091	.067	.040	.83	9500	5000	3400
6307	35	1.3780	80	3.1496	21	.8268	.195	3.406	.067	.060	1.07	8500	5700	4000
6308	40	1.5748	90	3.5433	23	.9055	.226	3.799	.097	.060	1.41	7500	7350	5300
6309	45	1.7717	100	3.9370	25	.9843	.226	4.193	.097	.060	1.95	6700	9150	6700
6310	50	1.9685	110	4.3307	27	1.0630	.226	4.587	.097	.080	2.50	6000	10600	8150
6311	55	2.1654	120	4.7244	29	1.1417	.271	5.104	.111	.080	3.30	5300	12900	10000
6312	60	2.3622	130	5.1181	31	1.2205	.271	5.498	.111	.080	3.81	5000	14000	10800
6313	65	2.5591	140	5.5118	33	1.2992	.304	5.892	.111	.080	4.64	4500	16000	12500
6314	70	2.7559	150	5.9055	35	1.3780	.304	6.286	.111	.080	5.68	4300	18000	14000
6315	75	2.9528	160	6.2992	37	1.4567	.304	6.679	.111	.080	6.60	4000	19300	16300
6316	80	3.1496	170	6.6929	39	1.5354	.346	7.198	.122	.080	9.53	3800	21200	18000
6317	85	3.3465	180	7.0866	41	1.6142	.346	7.593	.122	.100	11.00	3400	21600	18600
6318	90	3.5433	190	7.4803	43	1.6929	.346	7.986	.122	.100	11.60	3400	23200	20000
6319	95	3.7402	200	7.8740	45	1.7717	.346	8.380	.122	.100	13.38	3200	24500	22400
6320	100	3.9370	215	8.4646	47	1.8504	—	—	—	.100	16.34	3000	28500	27000
6321	105	4.1338	225	8.8582	49	1.9291	—	—	—	.100	17.8	2800	30500	30000
6322	110	4.3307	240	9.4488	50	1.9685	—	—	—	.100	21.0	2600	32500	32500
6324	120	4.7244	260	10.2362	55	2.1654	—	—	—	.100	32.3	2400	36000	38000
6326	130	5.1181	280	11.0236	58	2.2835	—	—	—	.12	40.1	2200	39000	43000
6328	140	5.5118	300	11.8110	62	2.4409	—	—	—	.12	48.1	2000	44000	50000
6330	150	5.9055	320	12.5984	65	2.5590	—	—	—	.12	57.8	1900	49000	60000

· Los números de cojinetes listados son únicamente para cojinetes abiertos. Para escudos, sellos y chavetas circulares, agregue el prefijo o el sufijo indicado abajo del diagrama del cojinete. P. ej. 6300.Z, 6300.RS, 6300.NR, etc. Verifique la existencia de carcasas para tamaños más grandes.
· Cojinetes con chaveta circular disponibles con escudos o sellos. Agregue ambos sufijos. P. ej. 6300.ZNR, etc.
· Para cojinetes sin sellos lubricados con grasa. Para otras condiciones, véase la p. 114.
· Para datos de montaje, ejes y carcasas ajustados y diámetros de hombros, véase las páginas 124-132.

FIGURA 7-23

Dimensiones métricas e intervalos de carga para cojinetes de bolas de la serie 6300 (tipo Conrad) de ranura profunda y media
Cortesía de FAG Bearings Corporation, Stamford, Conn.

Valor modificado de la vida del cojinete

La ASME y la ISO adoptaron recientemente un nuevo estándar (ISO 281/2) para el cálculo de la vida de un cojinete de rodamiento. La ecuación 7.20 se basa tan sólo en los esfuerzos de contacto hertzianos. El estándar nuevo incluye también los efectos de varios factores, como fricción, esfuerzo en el anillo de ajuste a presión, condición de

lubricación y limpieza, carga centrífuga y otros. Este procedimiento emplea el criterio del esfuerzo de von Mises para incluir los esfuerzos causados por dichos factores, así como los datos empíricos más recientes acerca de la resistencia a la fatiga sobre la superficie en cojinetes de acero. Todos estos efectos se combinan para crear un factor de vida al esfuerzo A_{sl}, que se aplica luego al valor tradicional L_{10} de la ecuación 7.20.

$$L_{ASME} = A_{sl} L_{10} \tag{7.21}$$

Los datos de prueba demuestran que la ecuación 7.21 brinda un cálculo más preciso de la vida del cojinete que las ecuaciones 7.20. El cálculo del factor A_{sl} se explica en la referencia[30] y es bastante complicado. La referencia viene con un programa de cómputo llamado *ASMELife*, que calcula la vida L_{ASME} estimada de un cojinete de cualquier diseño, para cualquier conjunto de cargas y parámetros ambientales. Aun cuando el algoritmo para su cálculo se explica completamente en la referencia, el espacio impide su inclusión aquí. Por otro lado, el software amistoso y accesible, disponible para su cálculo, hace innecesaria una mayor exposición. Se remite al lector a la publicación de la ASME para mayor información. Para los ejemplos de este capítulo, se supondrá $A_{sl} = 1.0$.

Valor C_0 para carga estática básica

Es posible que haya deformaciones permanentes en rodillos y bolas, incluso con cargas ligeras, debido a los esfuerzos muy altos en la pequeña área de contacto. El límite de carga estática en un cojinete se define como la carga que producirá una deformación permanente total en la pista y el rodillo, en cualquier punto de contacto de 0.0001 veces el diámetro d del elemento rodante. Deformaciones mayores causarán el incremento del ruido y la vibración, además de que llevarían a una falla por fatiga prematura. Los esfuerzos requeridos para causar esta deformación estática de $0.0001d$ en el cojinete de acero son bastante altos; van desde aproximadamente 4 GPa (580 kpsi) para cojinetes de rodillos hasta 4.6 GPa (667 kpsi) en cojinetes de bolas. Los fabricantes de cojinetes publican un valor C_0 de carga estática básica para cada cojinete, calculado de acuerdo con los estándares de la AFBMA. Algunas veces se puede exceder esta carga sin que se presente la falla, sobre todo cuando las velocidades de giro son bajas, lo cual elimina los problemas de vibración. Usualmente se necesita una carga de $8C_0$ o mayor para fracturar un cojinete. La figura 7-23 (en la página anterior) muestra una página del catálogo de un fabricante de cojinetes que especifica el valor de C_0 para cada cojinete.

7

EJEMPLO 7-3

Selección de un cojinete de bolas para un eje diseñado

Problema **Seleccione un cojinete radial de bolas para el eje mostrado en la figura 7-5 (p. 495). El eje se diseñó en el ejemplo 6-1 (p. 422).**

Se proporciona **Las cargas transversales máximas sobre el eje en los cojinetes son 16 lb en R_1 y 54 lb en R_2. Como la carga en R_2 es 4X que se encuentra en R_1, se puede crear un diseño para R_2 y usarlo también en R_1. El diámetro del eje tanto en R_1 como en R_2 es de 0.591 in, con base en la elección tentativa de un diámetro interior de 15 mm del cojinete en el ejemplo 6-1. La velocidad del eje es de 1 725 rpm.**

Suposiciones **Se desprecian las cargas de empuje. Se desea un porcentaje de falla del 5%.**

Obtenga **Las vidas de fatiga del cojinete en ambas ubicaciones del eje.**

Solución

1. De la figura 7-23 (p. 522), seleccionamos un cojinete #6302 de 15 mm de diámetro interior. Su factor de valor de carga dinámica es $C = 1\ 930$ lb. El valor de carga estática es $C_0 = 1\ 200$ lb. La carga estática aplicada de 54 lb está evidentemente muy abajo del valor estático del cojinete.

2. De la tabla 7-5 (p. 521), elegimos el factor para una tasa de falla del 5%: $K_R = 0.62$.

3. Calcule la vida proyectada con las ecuaciones 7.20*a* y 7.19 o su combinación, la ecuación 7.20*c* (todas en la p. 521). Observe que la carga equivalente, en este caso, es simplemente la carga radial aplicada debido a la ausencia de cualquier carga de empuje. Para la carga de reacción más grande de 54 lb en R_2:

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^3 = \left(\frac{1\,930}{54}\right)^3 = 45E3 \text{ millones de revs} = 45E9 \text{ revs}$$
$$L_P = K_R L_{10} = 0.62(45E9) = 27.9E9 \text{ revs} \qquad (a)$$

4. Para la carga de reacción menor de 16 lb en R_1:

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^3 = \left(\frac{1\,930}{16}\right)^3 = 1.75E6 \text{ millones de revs} = 1.75E12 \text{ revs}$$
$$L_P = K_R L_{10} = 0.62(1.75E12) = 1.09E12 \text{ revs} \qquad (b)$$

   Esto demuestra la relación no lineal entre la carga y la vida. Una reducción de 3.5X en la carga da como resultado un incremento de 38X en la vida a la fatiga. Es evidente que tales cojinetes están cargados muy ligeramente; sin embargo, su tamaño fue impuesto por consideraciones de esfuerzos en el eje que definen los diámetros de ésta.

5. De la figura 7-23, esta velocidad límite del cojinete es de 18 000 rpm, muy arriba de la velocidad de operación de 1 725 rpm.

7

Cargas radiales y de empuje combinadas

Si se aplican cargas radiales y de empuje a un cojinete, se debe calcular una carga equivalente para utilizarla en la ecuación 7.20. La AFBMA recomienda la siguiente ecuación:

$$P = XVF_r + YF_a \qquad (7.22a)$$

donde P = carga equivalente
F_r = carga radial constante aplicada
F_a = carga de empuje constante aplicada
V = factor de giro (véase la figura 7-24)
X = factor radial (véase la figura 7-24)
Y = factor de empuje (véase la figura 7-24)

El factor de rotación V es 1 para un cojinete con un anillo interior giratorio. Si el anillo exterior gira, V se incrementa a 1.2 para ciertos tipos de cojinetes. Los factores X y Y varían con el tipo de cojinete, a la vez que relacionan la capacidad de ese tipo para soportar las cargas de empuje y radial. Los valores de V, X y Y están definidos por los fabricantes de cojinetes en tablas como la reproducida en la figura 7-24. Los tipos de cojinetes, como los de rodillos cilíndricos, que no pueden soportar cargas de empuje no se incluyen en esta tabla. También se especifica un factor e para los tipos de cojinete

de la figura 7-24 y define la razón mínima entre las fuerzas radial y axial debajo de la cual la fuerza axial se puede ignorar (se iguala con cero) en la ecuación 7.22*b*.

$$\text{si} \quad \frac{F_a}{VF_r} \le e \qquad \text{entonces } X = 1 \text{ y } Y = 0 \tag{7.22b}$$

Procedimientos de cálculo

Las ecuaciones 7.20 y 7.22 se resuelven juntas para cualquier situación donde se conoce la fuerza aplicada o la vida deseada a la fatiga. Usualmente, las cargas radial y de empuje

Factores V, X y Y para cojinetes radiales

Tipo de cojinete			En relación con la carga, el anillo interior es: Girato-rio	Estacio-nario	Cojinetes de una hilera 1) $\frac{F_a}{VF_r} > e$		Cojinetes de dos hileras 2) $\frac{F_a}{VF_r} \leqq e$		$\frac{F_a}{VF_r} > e$		e
3)	4) $\frac{F_a}{C_0}$	5) $\frac{F_a}{i Z D_w^2}$	V	V	X	Y	X	Y	X	Y	
Cojinetes de bolas con ranura contacto radial	0.014	25	↑	↑	↑	2.30	↑	↑	↑	2.30	0.19
	0.028	50				1.99				1.99	0.22
	0.056	100				1.71				1.71	0.26
	0.084	150				1.55				1.55	0.28
	0.11	200	1	1.2	0.56	1.45	1	0	0.56	1.45	0.30
	0.17	300				1.31				1.31	0.34
	0.28	500				1.15				1.15	0.38
	0.42	750				1.04				1.04	0.42
	0.56	1000	↓	↓	↓	1.00	↓	↓	↓	1.00	0.44
20°			↑	↑	0.43	1.00	↑	1.09	0.70	1.63	0.57
25°					0.41	0.87		0.92	0.67	1.44	0.68
30°			1	1.2	0.39	0.76	1	0.78	0.63	1.24	0.80
35°					0.37	0.66		0.66	0.60	1.07	0.95
40°			↓	↓	0.35	0.57	↓	0.55	0.57	0.93	1.14
Cojinetes de bolas de autoalineación			1	1	0.40	0.4 cot α	1	0.42 cot α	0.65	0.65 cot α	1.5 tan α
Cojinetes de rodillos cónicos y de autoalineación			1	1.2	0.40	0.4 cot α	1	0.45 cot α	0.67	0.67 cot α	1.5 tan α

1) Para cojinetes de una hilera, cuando $\frac{F_a}{VF_r} \leqq e$ use $X = 1$ y $Y = 0$.

Para cojinetes de bolas o rodillos de contacto angular de dos hileras individuales, montados “cara-a-cara” o “espalda con espalda”, los valores de X y Y son los que se aplican a cojinetes de doble hilera. Para cojinetes de dos o más hileras, montados “en tándem”, se utilizan los valores de X y Y que se aplican a los cojinetes de una hilera.

2) Se supone que los cojinetes de dos hileras son simétricos.

3) El valor máximo permisible de $\frac{F_a}{C_0}$ depende del diseño del cojinete.

4) C_0 es el valor de carga estática básica.

5) Las unidades están en libras y pulgadas

Los valores de X, Y y e para una carga o contacto angular diferentes de los mostrados en la tabla se obtienen por interpolación lineal.

FIGURA 7-24

Factores V, X y Y para cojinetes radiales. *Cortesía de SKF USA Inc.*

que actúan en la ubicación de cada cojinete se obtendrán a partir de un análisis de carga del diseño. A menudo, el tamaño aproximado del eje se obtendrá de los cálculos de la deflexión o del esfuerzo. Se debería consultar un catálogo de cojinetes, seleccionar un cojinete (o cojinetes) candidato(s), así como extraer los valores de C, C_0, V, X y Y. La carga efectiva P se obtiene con la ecuación 7.22 y se emplea en la ecuación 7.20 con C, para obtener la vida a la fatiga L pronosticada.

De forma alternativa, como V, X y Y dependen sólo del tipo, pero no del tamaño del cojinete, se pueden determinar primero y resolver simultáneamente las ecuaciones 7.20 y 7.22 para el factor de carga dinámica C requerido para alcanzar la vida L deseada. Luego se deben consultar los catálogos de cojinetes para obtener el tamaño adecuado del cojinete con el valor de C necesario. En cualquier caso, la carga estática también se debería comparar con el factor de carga estática C_0 del cojinete seleccionado para prevenir deformaciones excesivas.

EJEMPLO 7-4

Selección de cojinetes de bolas para cargas radiales y de empuje combinadas

Problema **Seleccione un cojinete de bolas con ranura profunda para la carga y la vida deseada especificadas.**

Se proporciona **La carga radial F_r = 1 686 lb (7 500 N) y la carga axial F_a = 1 012 lb (4 500 N). La velocidad del eje es de 2 000 rpm.**

Suposiciones **Utilice un cojinete de bolas tipo Conrad de ranura profunda. El anillo interior gira.**

Obtenga **Un cojinete de tamaño adecuado para alcanzar una vida L_{10} de 5*E*8 revoluciones.**

Solución

1. Intente con el cojinete #6316 de la figura 7-23 (p. 522) y extraiga sus datos: C = 21 200 lb (94 300 N), C_0 = 18 000 lb (80 000 N) y rpm máximas de 3 800.
2. Calcule la razón F_a/C_0:

$$\frac{F_a}{C_0}=\frac{1\,012}{18\,000}=0.056 \tag{a}$$

   y use este valor en la figura 7-24 para obtener el valor correspondiente de $e = 0.26$ para cojinetes de bolas con ranura de contacto radial.

3. Calcule la razón $F_a/(VF_r)$ y compárela con el valor de e.

$$\frac{F_a}{VF_r}=\frac{1\,012}{1(1\,686)}=0.6>e=0.26 \tag{b}$$

   Observe que $V = 1$ porque el anillo interior es giratorio.

4. Como la razón del paso 3 es $> e$, obtenga los factores X y Y de la figura 7-24, X = 0.56 y Y = 1.71, y úselos para calcular la carga equivalente con las ecuaciones 7.22 (pp. 524-525).

$$P = XVF_r + YF_a = 0.56(1)(1\,686)+1.71(1\,012)=2\,675 \text{ lb} \tag{c}$$

5. Use la carga equivalente de la ecuación 7.21 (p. 523) para obtener la vida L_{10} de este cojinete.

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^3 = \left(\frac{21\,200}{2\,675}\right)^3 = 5.0E2 \text{ millones de revs} = 5.0E8 \text{ revs} \qquad (d)$$

De hecho, este resultado requiere algo de iteración; intente varios números de cojinete antes de encontrar el que dé la vida deseada.

6. Los modelos EX11-04 se encuentran en el CD-ROM. El modelo Mathcad proporciona un enfoque alternativo para la solución del ejemplo.

7.11 DETALLES DEL MONTAJE DEL COJINETE

Los cojinetes de rodamiento se fabrican con tolerancias pequeñas en sus diámetros, interior y exterior, con la finalidad de permitir un ajuste por presión sobre el eje o su carcasa. Las pistas del cojinete (anillos) se deben acoplar ajustadamente al eje para garantizar que el movimiento ocurra tan sólo dentro del cojinete con baja fricción. En algunos casos, se dificulta el ajuste por presión o el desarmado en ambos anillos. Cuando no se ajustan a presión, generalmente se usan varias abrazaderas para fijar el anillo interior o exterior, en tanto los otros se aseguran por presión. El anillo interior por lo general se coloca contra un hombro del eje. En las tablas de un catálogo de cojinetes se incluyen los diámetros recomendados para los hombros del eje, los cuales se deben respetar para eliminar la interferencia con sellos o escudos. Los radios máximos permisibles de los filetes para despejar las esquinas de los anillos también están definidos por los fabricantes.

La figura 7-25*a* muestra una configuración de tuerca y arandela empleada para sujetar el anillo interior al eje, en lugar de ajustarlo a presión. Los fabricantes de cojinetes suministran tuercas especiales y arandelas de presión estandarizadas para ajustar sus cojinetes. La figura 7-25*b* muestra una chaveta circular utilizada para fijar axialmente el anillo interior, el cual se presiona contra el eje. La figura 7-25*c* muestra el anillo exterior abrazado axialmente a la carcasa y el anillo interior fijo con una polea separadora entre el anillo interior y la pestaña del accesorio externo sobre el mismo eje.

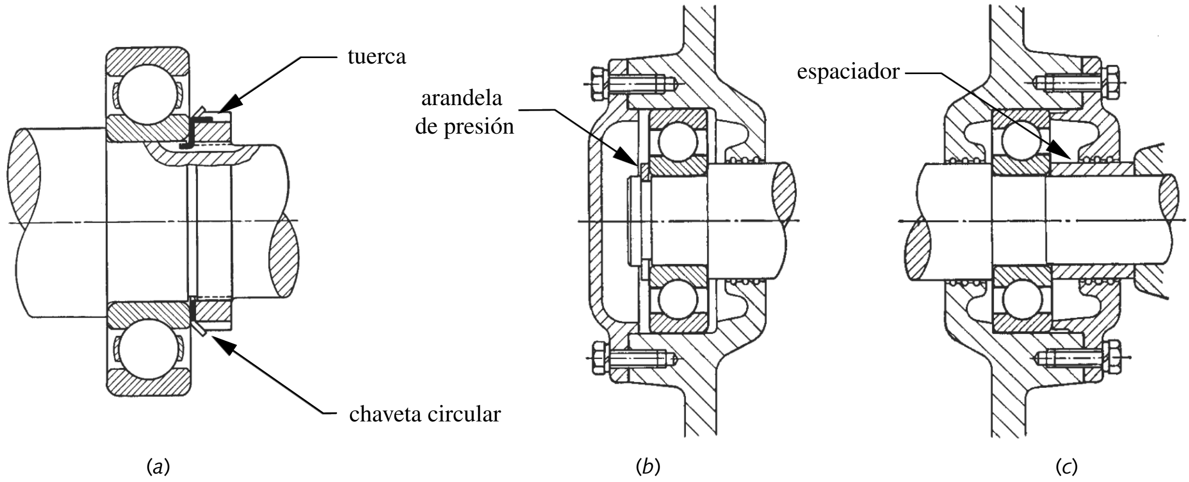


FIGURA 7-25

Métodos de montaje del cojinete. *Fuente: SKF Engineering Data USA Inc, 1968*

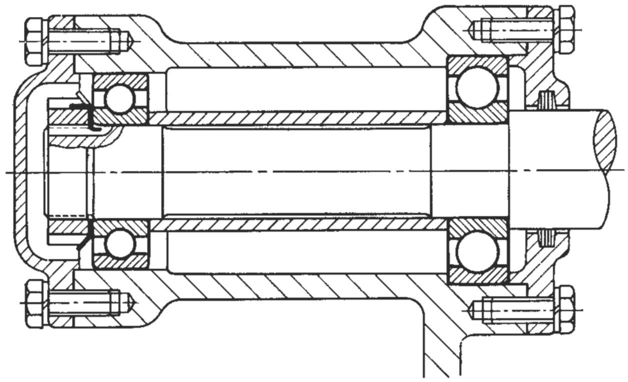


FIGURA 7-26

Cojinetes sobre un eje, uno fijo axialmente y otro flotante axialmente. *Fuente: SKF Engineering Data USA Inc, 1968*

Comúnmente se necesitan pares de cojinetes sobre el mismo eje para dar soporte al momento. La figura 7-26 muestra una configuración para aprisionar axialmente el montaje, sin riesgo de introducir fuerzas axiales a los cojinetes, por efecto de la expansión térmica en las piezas. Las pistas interiores de ambos cojinetes están abrazadas axialmente con una tuerca sobre la izquierda y un espaciador entre ellos. La pista externa del cojinete de la derecha está aprisionada (sujeta) axialmente a la carcasa; no obstante, la pista exterior del de la izquierda "flota" axialmente en la carcasa para permitir la expansión térmica. Sería tentador aprisionar ambos cojinetes axialmente, derecho e izquierdo, pero sería un descuido. Se considera una buena práctica aprisionar axialmente un ensamble grande en sólo una ubicación para eliminar las fuerzas axiales inducidas de expansión sobre los cojinetes, las cuales acortan seriamente su vida. Otro modo de realizar esto consiste en utilizar un solo cojinete que soporte una carga axial (p. ej., un cojinete de bolas) y un rodillo cilíndrico u otro tipo de cojinete que no soporte carga axial a través de sus elementos de rodamiento en el otro extremo del eje.

7.12 COJINETES ESPECIALES

Existen otros muchos tipos y configuraciones de cojinetes de rodamiento. Chumaceras y paquetes de bolas estándar de unidades con pestañas o cojinetes de rodamiento, en alojamientos de hierro colado, facilitan la sujeción de cojinetes a superficies horizontales o verticales. La figura 7-27 muestra una chumacera y un cojinete con pestaña.

Los seguidores de levas, como el de la figura 7-28, están hechos con cojinetes de bolas o rodillos y una pista exterior especial que corre directamente contra la superficie de la leva. Los hay con cuerdas integradas al ensamble (como el ilustrado) o con un orificio para montarlo sobre una varilla o un perno. Los extremos de una varilla usualmente son una bola esférica en un hueco diseñado para sujetar las varillas y proporcionar autoalineamiento, así como conexión de baja fricción entre eslabones en un mecanismo, como se indica en la figura 7-29.

El movimiento lineal se guía fácilmente sobre bujes planos; no obstante, tienen niveles de fricción moderados. En el movimiento lineal de baja fricción, hay bujes con bolas como el mostrado en la figura 7-30. Lo anterior requiere un endurecimiento especial y ejes fabricados con tolerancias pequeñas. La alineación de ejes paralelos se debe

hacer con mucha precisión para obtener las ventajas de la baja fricción en los cojinetes de bolas. Sin embargo, no pueden absorber cargas de choque como un buje plano.

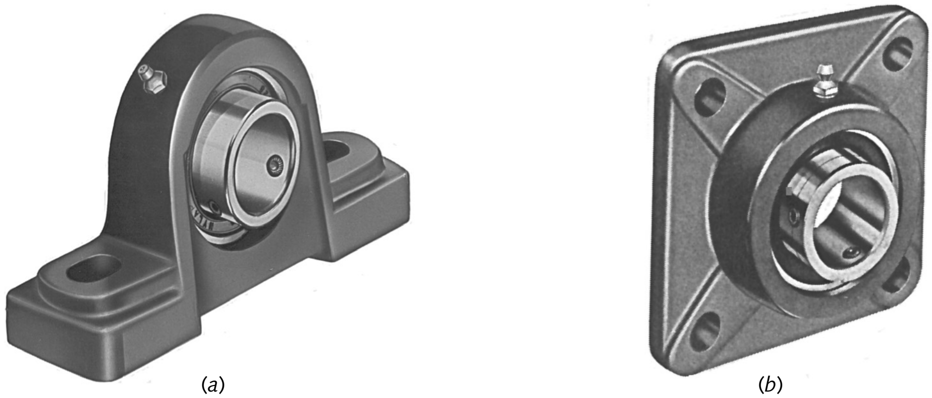


FIGURA 7-27

Chumacera (*a*) y unidades de cojinete con pestaña (*b*). *Cortesía de McGuill Manufacturing Co. Inc., Bearing Division, Valparaíso, Ind.*

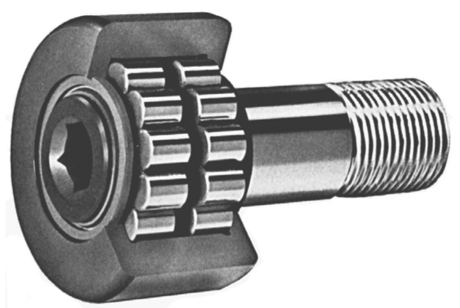


FIGURA 7-28

Cojinete de rodillos seguidor de leva. *Cortesía de Soller Bearing Company of America, New Town Pa.*

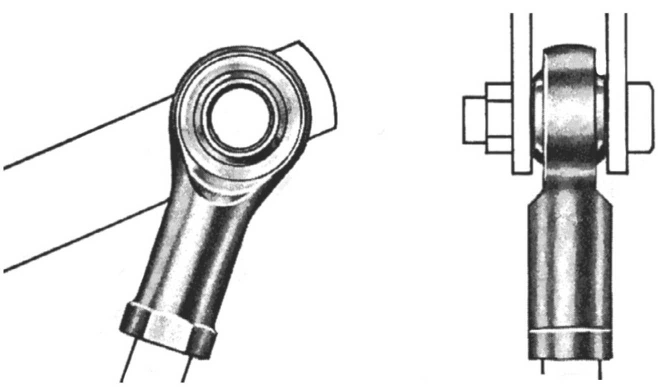


FIGURA 7-29

Extremo esférico de varilla. *Cortesía de Morse Chain, Division of Borg-Warner Corp., Aurora, Ill*



FIGURA 7-30

Cojinete de bolas lineal. *Cortesía de Thompson Industries, Inc., Manaste, N. Y.*

7.13 ESTUDIO DE CASO

El estudio de caso 10A, que se encuentra en el apéndice D, describe el diseño de un dispositivo de prueba para la medición dinámica de las aceleraciones y fuerzas de un sistema leva-seguidor. La naturaleza sensible de estas mediciones requiere que se usen tan sólo cojinetes de deslizamiento, ya que las vibraciones y el ruido de los cojinetes de rodamiento contaminarían las mediciones. Se continuará ahora el estudio de caso para el diseño de los cojinetes de su árbol de levas principal.

ESTUDIO DE CASO 10B

Diseño de cojinetes hidrodinámicos para un dispositivo de prueba de levas

Problema **Determine las condiciones hidrodinámicas en los cojinetes propuestos para el árbol de levas en el dispositivo dinámico de prueba de levas (CDTF).**

Se proporciona **La leva genera una fuerza dinámica pico de 110 lb en la velocidad máxima de 180 rpm (3 rps), como se definió en el estudio de caso 10A (apéndice D). El volante pesa 220 lb y se localiza en medio de los dos cojinetes. La temperatura de la masa de aceite se controla para 200 °F. El árbol de levas tiene 2 in de diámetro y el diseño preliminar de los cojinetes permite hasta 2 in de longitud para cada uno.**

Suposiciones **Se deben usar cojinetes planos, ya que los cojinetes de elementos rodantes producen demasiado ruido. Se proponen cojinetes de bronce poroso. Use una razón de tolerancia de 0.001. Intente con un aceite mineral SAE 30W (ISO VG 100). Se proporcionan aceiteras por gravedad para cada cojinete.**

Solución **Véase las figuras D-8 (apéndice D) y 7-31.**

1. Obtenga las fuerzas de reacción que actúan sobre cada cojinete a partir de las fuerzas aplicadas y las dimensiones definidas en la figura 7-31. Sume los momentos alrededor de R_1 y suponga positivas las fuerzas hacia arriba.

$$\sum M = 0 = -110(-4.5) + \left[-220(3.125)\right] + 6.25R_2$$
$$R_2 = 30.8 \text{ lb} \tag{a}$$

$$\sum F = 0 = -110 - 220 + 30.8 + R_1$$
$$R_1 = 299.2 \text{ lb} \tag{b}$$

El cojinete en R_1 tiene la mayoría de la carga, de modo que se realizará el diseño para esa fuerza.

2. Se sugirió un aceite ISO VG100. La figura 7-1 (p. 490) proporciona una viscosidad para este aceite a 200 °F de 1.5 μreyn aproximadamente.

3. Obtenga la presión media en el cojinete para la longitud supuesta de 2 in.

$$p_{prom} = \frac{P}{ld} = \frac{299.2}{2(2)} = 74.8 \text{ psi} \tag{c}$$

4. Obtenga la holgura diametral en el cojinete para la razón de tolerancia supuesta.

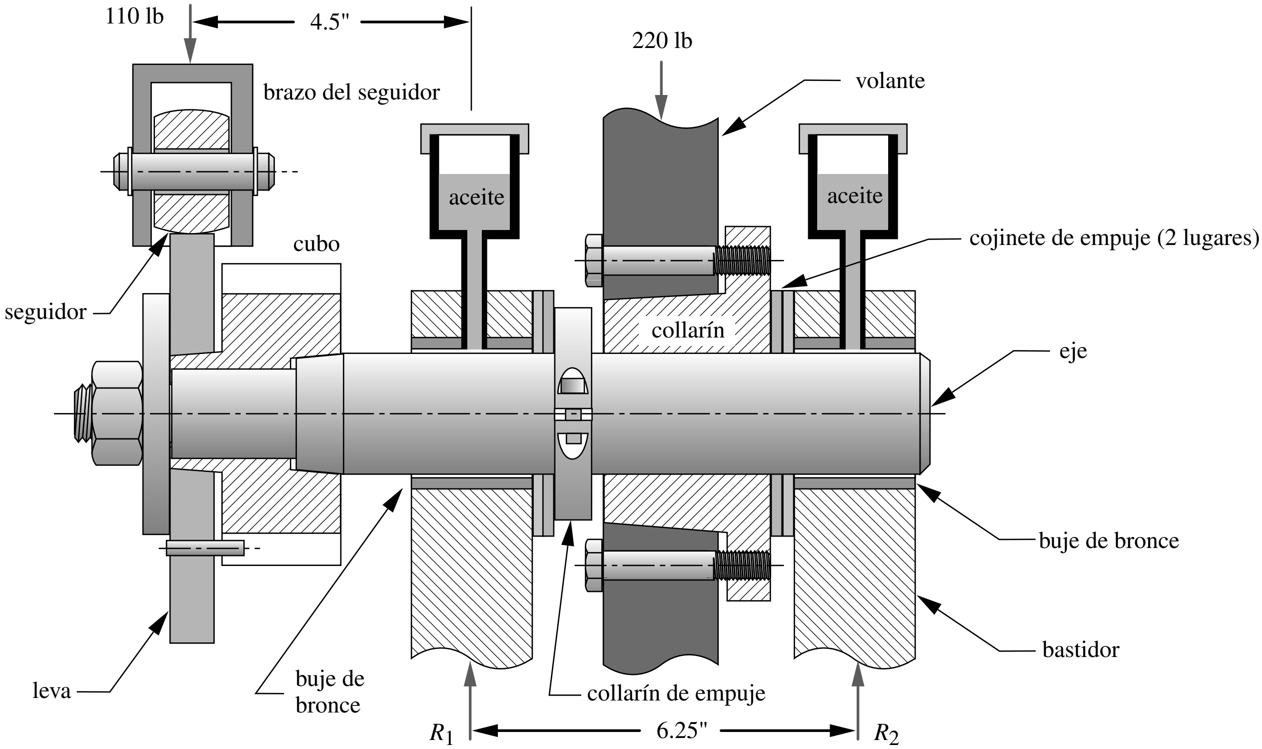


FIGURA 7-31

Sección transversal del árbol de levas del dispositivo de prueba dinámico de levas del estudio de caso 10

$$c_d = 0.001(2) = 0.002 \text{ in}$$
$$c_r = c_d/2 = 0.001 \text{ in} \qquad (d)$$

5. Obtenga la velocidad en la superficie del eje en el cojinete.

$$U = \pi dn' = \pi(2)(3) = 18.85 \text{ in/seg} \qquad (e)$$

6. Como se conocen la carga y la velocidad, además de que se suponen las dimensiones del cojinete, al igual que la viscosidad, la ecuación 7.8*b* (p. 500) se despeja para el parámetro adimensional K_e.

$$K_\varepsilon = \frac{Pc_r^2}{\eta U l^3} = \frac{299.2(0.001)^2}{(1.5E-6)(18.85)(2)^3} = 1.323 \qquad (f)$$

7. El número de Ocvirk se determina ahora a partir de la ecuación 7.12*c*.

$$O_N = 4\pi K_\varepsilon = 4\pi(1.323) = 16.6 \qquad (g)$$

De acuerdo con este número de Ocvirk aceptable, el diseño del cojinete es viable.

8. La razón de excentricidad se obtiene con la ecuación 7.13*b* (p. 503), la cual se ajusta con los datos experimentales reales mejor que la ecuación teórica.

$$\varepsilon \cong 0.21394 + 0.38517 \log O_N - 0.0008(O_N - 60)$$
$$\cong 0.21394 + 0.38517 \log(16.6) - 0.0008(16.6 - 60) = 0.719 \qquad (h)$$

9. El espesor mínimo de la película se determina a partir de la ecuación 7.4*b* (p. 497).

$$h_{mín} = c_r(1-\varepsilon) = 0.001(1-0.719) = 0.000\ 281 \text{ in} \quad (281\ \mu\text{in}) \tag{i}$$

   Ésta es una película generosa para proteger incluso un cojinete con acabado deficiente, lo cual no es el caso.

10. Los archivos Case10B se encuentran en el CD-ROM.

7.14 RESUMEN

En juntas deslizantes o giratorias, se obtiene baja fricción lubricando hidrostática o hidrodinámicamente los cojinetes planos o los cojinetes de elementos rodantes. Cada uno tiene ventajas y desventajas.

COJINETES HIDROSTÁTICOS Usan una fuente de alta presión en el fluido para separar las superficies, incluso cuando no hay movimiento relativo. Se puede utilizar aire, agua o aceite como fluido. Los cojinetes de aire tienen básicamente cero fricción y cero desgaste. Por ejemplo, un aerodeslizador está soportado por un "cojinete de aire".

7

COJINETES HIDRODINÁMICOS Emplean el movimiento relativo de las superficies para bombear el lubricante arrastrado (en general, un aceite) alrededor del espacio entre el eje y el cojinete. Un cojinete hidrodinámico, diseñado adecuadamente, separa las dos partes con una película de aceite cuando están en movimiento y no tienen contacto metal-metal, excepto en el arranque y en el apagado. Si el aceite se mantiene limpio y abundante, entonces es posible que haya prácticamente cero desgaste y fricción muy baja. Dos superficies que se "ajustan" geométricamente, tal como un eje en un orificio, atrapan el lubricante y forman fácilmente el soporte de la película de aceite.

Las juntas que no se ajustan geométricamente, como los contactos entre una leva y un seguidor, los dientes de engranes y los cojinetes de rodamiento, tienden a expulsar el fluido en lugar de atraparlo, haciendo más difícil lograr una separación de película completa de las superficies. La **lubricación elastohidrodinámica** (EHD) se refiere a la combinación de la deflexión elástica de la huella de contacto entre dos superficies que no se ajustan (algo similar a la huella de contacto entre un neumático y la carretera) y el bombeo de fluido entre las superficies "aplanadas" que crea, por lo menos, una película hidrodinámica parcial. Estas juntas con frecuencia poseen una combinación de película de fluido y contacto metal-metal en las asperezas superficiales. Por lo tanto, el desgaste suele ser mayor que en una junta hidrodinámica ajustada. El espesor mínimo de la película de fluido entre las superficies, comparado con la aspereza superficial compuesta, determina cuánto contacto ocurre entre las asperezas. En ausencia de lubricante suficiente, velocidad o geometría para formar la separación de la película de fluido, el cojinete regresa a una **lubricación límite**, donde ocurren un contacto metálico y un desgaste significativos.

COJINETES DE RODAMIENTO Se encuentran en el mercado en varias configuraciones, que utilizan bolas o cilindros de acero endurecido, aprisionados entre pistas o anillos de acero endurecido. Como el contacto es de rodamiento, con poco deslizamiento o sin él, la fricción es baja tanto estática como dinámicamente. El torque de arranque es significativamente menor en los cojinetes de rodamiento que en los hidrodinámicos* (que requieren una velocidad relativa para establecer la película de fluido de baja fricción). Hay cojinetes de rodamiento que pueden soportar cargas radiales, de empuje o una combinación de ambos tipos. El estado de lubricación en los cojinetes de rodamiento es elastohidrodinámico, límite o alguna combinación de los dos, conocido como

* Cuando los vagones de ferrocarril cambiaron sus cojinetes planos hidrodinámicos por cojinetes de rodamiento hace un siglo, los grandes trenes de carga que requerían dos máquinas para empezar a moverse (pero sólo una para mantenerlos en movimiento) se empezaron a mover con tan sólo una máquina.

EHD parcial. El diseño de cojinetes de rodamiento implica, en gran parte, la selección adecuada del cojinete entre los que hay disponibles comercialmente. Los fabricantes definen un parámetro de carga-vida, con base en la carga a la que se espera que el 90% de un lote de cojinetes sobrevivan a 1 millón de revoluciones de la pista interior. Este y otros datos suministrados por los fabricantes sirven para calcular la vida proyectada de un cojinete específico, bajo las condiciones dadas de carga y velocidad de la aplicación. Las compañías de cojinetes ofrecen asistencia para la selección del cojinete adecuado en cualquier aplicación.

Ecuaciones importantes usadas en este capítulo

Viscosidad absoluta contra viscosidad cinética (sección 7.2):

$$\eta = \upsilon\rho \tag{7.1}$$

Ecuación de Petroff para torque sin carga (sección 7.5):

$$T_0 = \eta \frac{\pi^2 d^3 l\, n'}{c_d} \tag{7.2c}$$

Razón de excentricidad (sección 7.5):

$$\varepsilon = \frac{e}{c_r} \tag{7.3}$$

Espesor de la película lubricante en un cojinete hidrodinámico (sección 7.5):

$$h = c_r(1 + \varepsilon \cos\theta) \tag{7.4a}$$

$$h_{mín} = c_r(1 - \varepsilon) \qquad h_{máx} = c_r(1 + \varepsilon) \tag{7.4b}$$

Presión media en un cojinete hidrodinámico (sección 7.5):

$$p_{prom} = \frac{P}{A} = \frac{P}{l d} \tag{7.6d}$$

Ecuación de Sommerfeld para presión y carga en un cojinete infinito (sección 7.5):

$$p = \frac{\eta U r}{c_r^2}\left[\frac{6\varepsilon(\operatorname{sen}\theta)(2 + \varepsilon\cos\theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon\cos\theta)^2}\right] + p_0 \tag{7.6a}$$

$$P = \frac{\eta U l r^2}{c_r^2} \frac{12\pi\varepsilon}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon^2)^{1/2}} \tag{7.6b}$$

Ecuaciones de Ocvirk para presión y carga en un cojinete corto (sección 7.5):

$$p = \frac{\eta U}{r c_r^2}\left(\frac{l^2}{4} - z^2\right)\frac{3\varepsilon \operatorname{sen}\theta}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^3} \tag{7.7b}$$

$$P = K_\varepsilon \frac{\eta U l^3}{c_r^2} \tag{7.8b}$$

7

$$K_\varepsilon = \frac{\varepsilon\left[\pi^2\left(1-\varepsilon^2\right)+16\varepsilon^2\right]^{\frac{1}{2}}}{4\left(1-\varepsilon^2\right)^2} \tag{7.8c}$$

Ubicación de la presión máxima en un cojinete corto (sección 7.5):

$$\theta_{máx} = \cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{1+24\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right) \tag{7.7c}$$

Ubicación de la carga resultante en un cojinete corto (sección 7.5):

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right) \tag{7.8a}$$

Torque en un cojinete hidrodinámico (sección 7.5):

$$T_s = \eta\frac{d^3 l\left(n_2'-n_1'\right)}{c_d}\frac{\pi^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2}} \tag{7.9c}$$

$$T_r = T_s + P\,e\,\text{sen}\,\phi \tag{7.9a}$$

Pérdida de potencia en un cojinete hidrodinámico (sección 7.5):

$$\Phi = T_r\omega = 2\pi T_r\left(n_2'-n_1'\right) \qquad \text{N - m/s} \quad \text{o} \quad \text{in - lb/s} \tag{7.10}$$

Coeficiente de fricción en un cojinete hidrodinámico (sección 7.5):

$$\mu = \frac{f}{P} = \frac{T_r/r}{P} = \frac{2T_r}{Pd} \tag{7.11}$$

Número de Ocvirk para un cojinete hidrodinámico corto (sección 7.6):

$$O_N = \left(\frac{p_{prom}}{\eta n'}\right)\left(\frac{d}{l}\right)^2\left(\frac{c_d}{d}\right)^2 = 4\pi K_\varepsilon \tag{7.12c}$$

Relación teórica entre el número de Ocvirk y la razón de excentricidad (sección 7.6):

$$O_N = \frac{\pi\varepsilon\left[\pi^2\left(1-\varepsilon^2\right)+16\varepsilon^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2} \tag{7.13a}$$

Relación empírica entre el número de Ocvirk y la razón de excentricidad (sección 7.6):

$$\varepsilon_x \cong 0.21394 + 0.38517\log O_N - 0.0008\left(O_N - 60\right) \tag{7.13b}$$

Espesor específico de la película (sección 7.7):

$$\Lambda = h_c\Big/\sqrt{R_{q_1}^2 + R_{q_2}^2} \tag{7.14a}$$

$$h_c \cong \frac{4}{3}h_{mín} \tag{7.14b}$$

Espesor mínimo de la película para contacto cilíndrico EHD (sección 7.7):

$$h_{mín} = 2.65R'(\alpha E')^{0.54}\left(\frac{\eta_0 U}{E'R'}\right)^{0.7}\left(\frac{P}{lE'R'}\right)^{-0.13} \tag{7.16}$$

$$E' = \frac{2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{\dfrac{1-\nu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\nu_2^2}{E_2}} \tag{7.17b}$$

Espesor mínimo de la película para contacto (elíptico) general EHD (sección 7.7):

$$h_{mín} = 3.63R'(\alpha E')^{0.49}\left(\frac{\eta_0 U}{E'R'}\right)^{0.68}\left(1 - e^{-0.68\psi}\right)\left[\frac{P}{E'(R')^2}\right]^{-0.073} \tag{7.18}$$

Relación carga-vida para cojinetes de rodamiento (sección 7.10):

cojinetes de bolas: $L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^3$

cojinetes de rodillos: $L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^{10/3}$ (7.20*b*)

Carga equivalente para cojinetes de rodamiento (sección 7.10):

$$P = XVF_r + YF_a \tag{7.22a}$$

7

7.15 REFERENCIAS

1. **A.G.M. Michell**, "Progress of Fluid-Film Lubrication", *Trans. ASME,* 51: pp. 153-163, 1929.
2. **A. Cameron**, *Basic Lubrication Theory*. John Wiley & Sons: Nueva York, 1976.
3. **B.J. Hamrock**, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, McGraw-Hill: Nueva York, 1994.
4. **T.A. Harris**, *Rolling Bearing Analysis*. John Wiley & Sons: Nueva York, 1991.
5. **R.C. Elwell**, "Hydrostatic Lubrication", en *Handbook of Lubrication*, E.R. Booser, ed., CRC Press: Boca Raton, Fla., p. 105, 1983.
6. **J.L. Radovich**, "Gears", en *Handbook of Lubrication*, E.R. Booser, ed., CRC Press: Boca Raton, Fla., p. 544, 1983.
7. **E. Rabinowicz**, *Friction and Wear of Materials*. John Wiley & Sons: Nueva York, p. 182, 1965.
8. **W. Glaeser**, "Bushings", en *Wear Control Handbook*, M.B. Peterson y W.O. Winer, Editor. ASME: Wear Control Handbook, p. 598, 1980.
9. **D.F. Wilcock y E.R. Booser**, *Bearing Design and Application*. McGraw-Hill: Nueva York, 1957.
10. **A.H. Burr y J.B. Cheatham**, *Mechanical Analysis and Design*, 2a. ed., Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., pp. 31-51, 1995.

11. **A.A. Raimondi y J. Boyd**, “A solution for the Finite Journal Bearing and its Application to Analysis and Design-Parts I, II y III”, *Trans. Am. Soc. Lubrication Engineers*, 1(1): pp. 159-209, 1958.

12. **O. Reynolds**, “On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamp Tower’s Experiments”. *Phil. Trans. Roy. Soc.* (Londres), 177: pp. 157-234, 1886.

13. **G.B. DuBois y F.W. Ocvirk**, “The Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings”, *Trans. ASME*, 77: pp. 1173-1178, 1955.

14. **G.B. DuBois, F.W. Ocvirk y R.L. Wehe**, *Experimental Investigation of Eccentricity Ratio, Friction, and Oil Flow of Long and Short Journal Bearings-With Load Number Charts*, TN3491, NACA, 1955.

15. **F.W. Ocvirk**, *Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings*, TN2808, NACA, 1952.

16. **G.B. DuBois y F.W. Ocvirk**, *Analytical Derivation and Experimental Evaluation of Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings*, TN1157, NACA, 1953.

17. **H.S. Cheng**, “Elastohidrodynamic Lubrication” en *Handbook of Lubrication*, E.R. Booser, ed., CRC Press: Boca Raton, Fla., pp. 155-160, 1983.

18. **D. Dowson y G. Higginson**, “A Numerical Solution to the Elastohydrodinamic Problem”, *J. Mech. Eng. Sci*., 1(1): p. 6, 1959.

19. **D. Dowson y G. Higginson**, “New Rolling Bearing Lubrication Formula”, *Engineering*, 192: pp. 158-159, 1961.

20. **G. Archard y M. Kirk**, “Lubrication at Point Contacts”, *Proc. Roy. Soc.* (Londres) Ser. A261, pp. 532-550, 1961.

21. **B.J. Hamrock y D. Dowson**, “Isothermal Elastohidrodynamic Lubrication of Point Contacts-Part III-Fully Flooded Results”, *ASME J. Lubr. Technol.*, 99: pp. 264-276, 1977.

22. **D. Dowson y G. Higginson**, *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, 182 (Parte 3A): pp. 151-167, 1968.

23. **T.A. Harris**, *Rolling Bearing Analysis*. John Wiley & Sons: Nueva York, pp. 872-888, 1991.

24. *Load Ratings and Fatigue Life for Ball Bearings*, ANSI/AFBMA Estándar 9-1990. Instituto Nacional Estadounidense de Estándares, Nueva York, 1990.

25. *Load Ratings and Fatigue Life for Roller Bearings*, ANSI/AFBMA Estándar 11-1990. Instituto Nacional Estadounidense de Estándares, Nueva York, 1990.

26. **B.J. Hamrock**, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*. McGraw-Hill: Nueva York, p. 16, 1994.

27. Comité ASME de Investigación sobre Lubricación, “Pressure-Viscosity Report, Vol. II”, ASME, 1953.

28. **T.E. Tallian**, “Lubricant Films in Rolling Contact of Rough Surfaces”, *ASLE* Trans., 7(2): pp. 109-126, 1964.

29. **E.N. Bamberger** y otros, “Life Adjustment Factors for Ball and Roller Bearings”, *ASME Engineering Design Guide*, 1971.

30. **R. Barnsby** y otros, “Life Ratings for Modern Rolling Bearings”, *ASME International*, 2003.

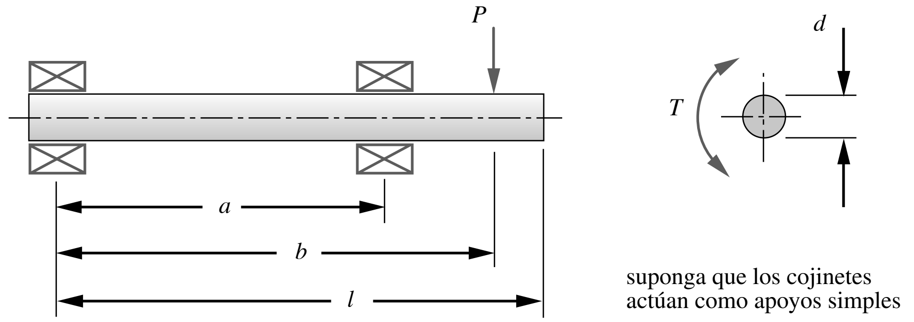


FIGURA P7-1

Diseño del eje del problema 7-1

Tabla P7-0 †

Matriz tema/problema

7.2 Viscosidad

7-3, 7-4, 7-23, 7-24

7.5 Teoría de lubricación

7-5, 7-6, 7-7, 7-9, 7-10, 7-11, **7-12**, 7-13, 7-14, 7-15, 7-25, *7-39 a 7-42*

7.6 Cojinetes hidrodinámicos

7-1a, ***7-2a***, ***7-8***, ***7-17a***, ***7-19a***

7.7 Contacto EHD

7-16, **7-18**, **7-20**, **7-21**, 7-43

7.10 Contacto de rodamiento

7-1b, ***7-2b***, ***7-17b***, ***7-19b***, ***7-22***, *7-26*, *7-27*, *7-28*, *7-29*, *7-30*, *7-31*, *7-32*, *7-33*, *7-34*, *7-35*, *7-36*, *7-37*, *7-38*, 7-44, 7-45

7

7.16 PROBLEMAS

*† ***7-1***. El eje que se ilustra en la figura P7-1 se diseñó en el problema 6-1. Para los datos en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P7-1 y el diámetro correspondiente del eje obtenido en el problema 6-1, diseñe los cojinetes adecuados para soportar una carga de, por lo menos, 7*E*7 ciclos a 1 500 rpm. Defina todas las suposiciones.

a) Usando cojinetes de bronce con manguitos lubricados hidrodinámicamente con $O_N = 20$, $l/d = 1.25$ y una razón de tolerancia de 0.0015.
b) Usando cojinetes de bolas con ranura profunda para un porcentaje de falla del 10%.

7-2. El eje que se ilustra en la figura P7-2 se diseñó en el problema 6-2. Para los datos en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P7-1 y el diámetro correspondiente del eje obtenido en el problema 6-2, diseñe los cojinetes adecuados para soportar una carga de, por lo menos, 3*E*8 ciclos a 2 500 rpm. Defina todas las suposiciones.

a) Usando cojinetes de bronce con manguito lubricados hidrodinámicamente, con $O_N = 30$, $l/d = 1.0$, y una razón de tolerancia de 0.002.
b) Usando cojinetes de bolas con ranura profunda para un porcentaje de falla del 10%.

*7-3. Un aceite tiene una viscosidad cinemática de 300 centistokes. Obtenga su viscosidad absoluta en centipoises (cP). Suponga una gravedad específica de 0.89.

7-4. Un aceite tiene una viscosidad absoluta de 2 μreyn. Obtenga su viscosidad cinemática en in^2/seg. Suponga una gravedad específica de 0.87.

*7-5. Obtenga el torque sin carga de Petroff para el cojinete plano diseñado en el estudio de caso 6B.

*7-6. Obtenga el espesor mínimo de película para un cojinete largo con 45 mm de diámetro, 200 mm de longitud, $\varepsilon = 0.55$, razón de tolerancia = 0.001, 2500 rpm y aceite ISO VG 46 a 150 °F.

Tabla P7-1 Datos para problemas

Fila	l	a	b	P o p	$T_{mín}$	$T_{máx}$
a	20	16	18	1000	0	2000
b	12	2	7	500	–100	600
c	14	4	12	750	–200	400
d	8	4	8	1000	0	2000
e	17	6	12	1500	–200	500
f	24	16	22	750	1000	2000

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son problemas extendidos de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador.

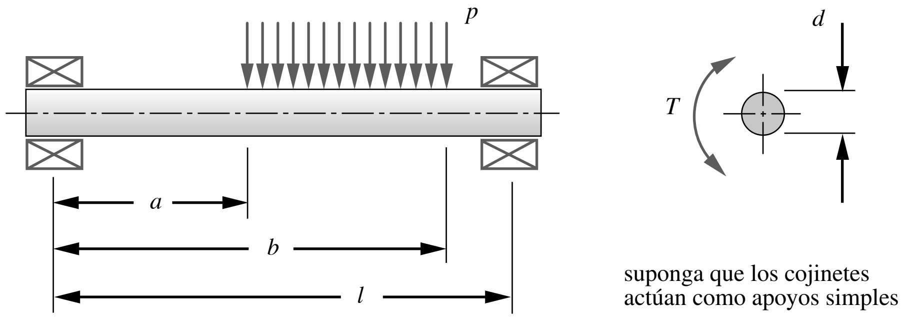


FIGURA P7-2

Diseño del eje del problema 7-2

*7-7. Obtenga los torques y la pérdida de potencia en el cojinete del problema 7-6.

****7-8***. Una máquina papelera procesa rollos de papel cuya densidad es de 984 kg/cm^3. El rollo de papel tiene 1.50 m de diámetro exterior × 22 cm de diámetro interior × 3.23 m de largo, y está simplemente apoyada en un eje de acero de 22 cm de diámetro exterior. El rollo gira a 50 rpm. Diseñe cojinetes cortos de bronce con lubricación hidrodinámica de película completa de $l/d = 0.75$, para soportar al eje en cada extremo. Especifique la viscosidad necesaria del lubricante a 180 °F. Defina todas las suposiciones.

7-9. Obtenga el espesor mínimo de película para un cojinete largo con los siguientes datos: 30 mm de diámetro, 130 mm de largo, 0.0015 de razón de tolerancia, 1 500 rpm y aceite ISO VG 100 a 200 °F, que soporta una carga de 7 kN.

*7-10. Obtenga el espesor mínimo de película para un cojinete con los siguientes datos: 45 mm de diámetro, 30 mm de largo, 0.001 de razón de tolerancia, 1 500 rpm, O_N = 25 y aceite ISO VG 46 a 150 °F.

7-11. Obtenga el espesor mínimo de película para un cojinete con los siguientes datos: 30 mm de diámetro, 25 mm de largo, 0.0015 de razón de tolerancia, 1 500 rpm, O_N = 30 y aceite ISO VG 220 a 200 °F.

7-12. En el problema 5-12 se estimó el volumen de desgaste adhesivo esperado en un eje de acero de 40 mm de diámetro, que gira a 250 rpm durante 10 años sobre un cojinete plano de bronce, con una carga transversal de 1 000 N, en condiciones de lubricación, tanto buena como deficiente. Si el cojinete tiene una $l/d = 0.5$ y una razón de tolerancia de 0.001, defina la viscosidad necesaria del lubricante en microreyn (μreyn) para obtener buena lubricación.

7-13. Calcule los torques y la pérdida de potencia del cojinete del problema 7-9.

*7-14. Obtenga los torques y la pérdida de potencia del cojinete del problema 7-10.

7-15. Calcule los torques y la pérdida de potencia del cojinete del problema 7-11.

7-16. En el problema 5-16 se determinó que la mitad del ancho de la huella de contacto de una bola de acero de 0.787 in de diámetro, que gira contra una placa plana de aluminio con 224.81 lb de fuerza, es de 0.020 in. Suponiendo que la bola gira a 1 200 rpm, determine sus condiciones de lubricación con aceite ISO VG 68 a 150 °F. Suponga que R_q = 16 μin (bola), R_q = 64 μin (placa).

****7-17***. El eje mostrado en la figura P7-3 se diseñó en el problema 6-17. Para los datos en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P7-1 y el diámetro correspondiente del eje obtenido en el problema 6-17, diseñe los cojinetes adecuados para soportar la carga de, por lo menos, 1*E*8 ciclos a 1800 rpm. Defina todas las suposiciones.

a) Usando cojinetes de bronce con manguito lubricados hidrodinámicamente con O_N = 15, $l/d = 0.75$ y una razón de tolerancia de 0.001.

b) Usando cojinetes de bolas con ranura profunda para un porcentaje de falla del 10%.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice D. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son problemas extendidos de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador.

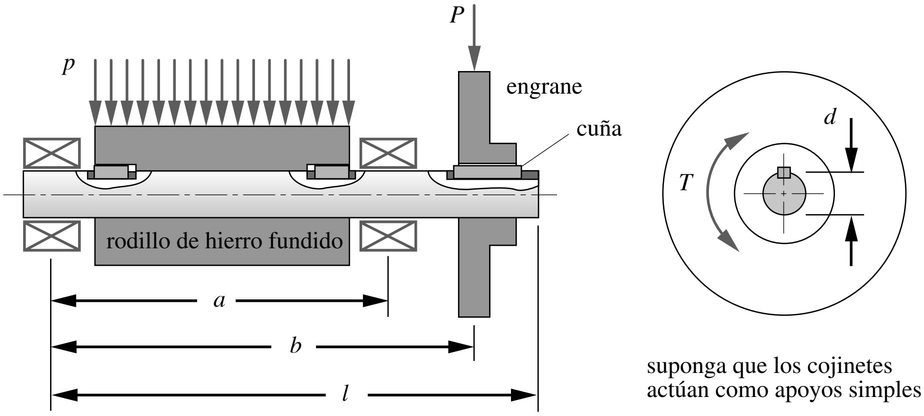


FIGURA P7-3

Diseño del eje de los problemas 7-17

7-18. En el problema 5-18 se determinó que la mitad del ancho de la huella de contacto para un cilindro de acero de 1.575 in de diámetro y 9.843 in de largo, que gira contra una placa plana de aluminio con 900 lb de fuerza es de 0.0064 in. Si el cilindro gira a 800 rpm, determine sus condiciones de lubricación con aceite ISO VG 1000 a 200 °F. R_q = 64 µin (cilindro); R_q = 32 µin (placa).

7-19. El eje mostrado en la figura P7-4 se diseñó en el problema 6-19. Para los datos en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P7-1 y el diámetro correspondiente del eje obtenido en el problema 6-19, diseñe los cojinetes adecuados para soportar una carga de, por lo menos, 5*E*8 ciclos a 1200 rpm. Defina todas las suposiciones.

a) Usando cojinetes de bronce con manguitos lubricados hidrodinámicamente con $O_N = 40$, $l/d = 0.80$ y una razón de tolerancia de 0.0025.
b) Usando cojinetes de bolas con ranura profunda para un porcentaje de falla del 10%.

***7-20**. En el problema 5-20 se determinó que las dimensiones medias de la huella de contacto para una bola de acero de 0.787 in de diámetro que gira contra un cilindro de acero de 1.575 in de diámetro con una fuerza de 2 248 lb eran $a = 0.037$ in y $b = 0.028$ in. La bola gira a 1 800 rpm. Determine sus condiciones de lubricación con aceite ISO VG 460 a 120 °F. Suponga que R_q = 32 µin para ambos.

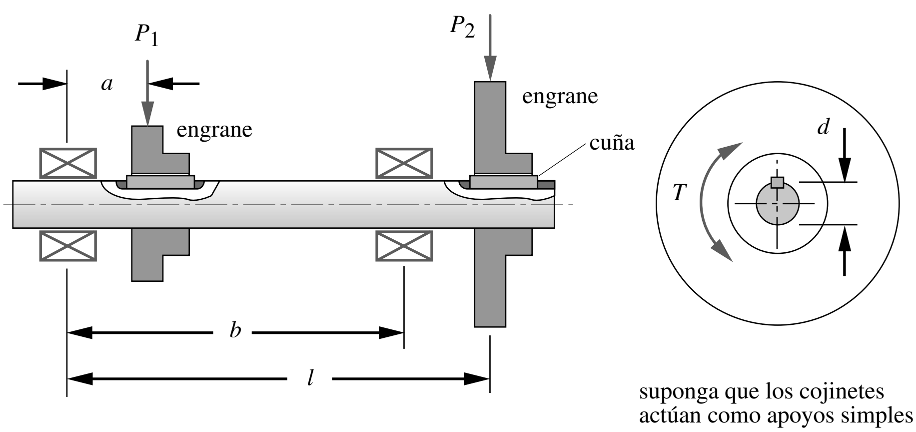


FIGURA P7-4

Diseño del eje de los problemas 7-19 y 7-22

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son problemas extendidos de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador.

7-21. En el problema 5-21 se determinó que las dimensiones medias de la huella de contacto para sistema leva-seguidor con una carga dinámica de 0 a 450 lb eran $a = 0.080$ in y $b = 0.013$ in. La leva es cilíndrica con un radio mínimo de curvatura de 0.787 in. El rodillo seguidor de 1 in de diámetro tiene una corona con un radio de 6 in en la otra dirección. Obtenga el espesor específico de la película, así como la condición de lubricación entre la leva y el seguidor, si se lubrica con un aceite ISO VG 1500 a 200 °F. Suponga $R_q = 8$ μin (seguidor), $R_q = 32$ μin (leva). rpm del seguidor = 300.

7-22. El eje mostrado en la figura P7-4 se diseñó en el problema 6-19. Para los datos en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P7-1 y el diámetro correspondiente del eje obtenido en el problema 6-19, diseñe los cojinetes adecuados para soportar la carga de, por lo menos, 5*E*8 ciclos a 1 200 rpm con cojinetes de bolas de ranura profunda. Además de las cargas radiales obtenidas en el problema 6-19, el cojinete de la derecha soporta una carga axial que es el 120% de la carga transversal concentrada *P*. El diámetro del eje es de 1.153 in, la vida de diseño L_{10} es de 500*E*6 revoluciones y la carga transversal concentrada es de 1 000 lb. Suponga un factor de fuerza axial = 1.2 y un factor de rotación del eje = 1.0. También suponga que el diámetro del eje se puede reducir en el cojinete de la izquierda, donde el momento es cero.

7-23. Un aceite ISO VG 100 tiene una temperatura global de 80 °C. Determine su viscosidad absoluta en centipoises (cP) y su viscosidad cinemática en centistokes (cS). Suponga una gravedad específica de 0.91.

7

7-24. Un aceite ISO VG 68 tiene una temperatura global de 175 °F. Determine su viscosidad absoluta en microreyn (μreyn) y su viscosidad cinemática en in^2/seg. Suponga una gravedad específica de 0.90.

7-25. Un buje y un cojinete se diseñaron para que un eje gire a 200 rpm. Se utiliza un aceite con una viscosidad de 2 μreyn y la longitud del cojinete es igual al diámetro. Si la pérdida de potencia sin carga no excede 2*E*-04 caballos de potencia y la tolerancia diametral es 0.004 veces el diámetro, estime el diámetro máximo que se puede usar para el buje.

7-26. La figura P7-5 muestra un eje escalonado soportado por dos cojinetes de la serie 6300. Sobre el eje se acuñaron dos engranes con un torque igual, pero de sentido opuesto, como se indica. La carga sobre cada engrane consiste en una componente radial y una componente tangencial, las cuales actúan en el diámetro *D*. La componente radial sobre cada engrane es de 0.466 veces la componente tangencial sobre ese engrane. Observe que las cargas de los engranes están desfasadas 90° del engrane 1 al engrane 2. Para los datos en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P7-2, seleccione el cojinete adecuado (de la figura 7-23 con un porcentaje de falla del 10%) para el cojinete 1. Seleccione el cojinete que tiene el diámetro interior más pequeño y cumple con los requerimientos de carga-porcentaje. Especifique número de cojinete, diámetro interior, diámetro exterior, ancho (todo en mm) y rango de la carga dinámica básica del cojinete. Ignore la carga axial proporcionada en la tabla.

7-27. La figura P7-5 muestra un eje escalonado soportado por dos cojinetes de la serie 6300. Sobre el eje se acuñaron dos engranes con un torque igual, pero de sentido opuesto, como se indica. La carga sobre cada engrane consiste en una componente radial y una componente tangencial, las cuales actúan en el diámetro *D*. La componente radial sobre cada engrane es 0.466 veces la componente tangencial sobre ese engrane. Observe que las cargas de los engranes están desfasadas 90° del engrane 1 al engrane 2. Para los datos en la(s) fila(s) asignada(s) de la tabla P7-2, elija el cojinete adecuado (de la figura 7-23 con un porcentaje de falla del 10%) para el cojinete 2. Seleccione el cojinete que tiene el diámetro interior más pequeño y cumple con los requerimientos de carga-rango. Especifique número de cojinete, diámetro interior, diámetro exterior, ancho (todo en mm) y rango de la carga dinámica básica del cojinete. Ignore la carga axial proporcionada en la tabla.

7-28. Repita el problema 7-26 con la fuerza axial F_a dada en la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P6-2, que actúan sobre el engrane 1.

7-29. Repita el problema 7-27 con la fuerza axial F_a dada en la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P6-2, que actúa sobre el engrane 2.

Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son problemas extendidos de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador.

Tabla P7-2 Datos de los problemas 7-26 a 7-29

Fila	a in	b in	c in	P_{1t} lb	D_1 in	D_2 in	Diseño L_{10} *	F_a lb
a	4.0	8.0	12.0	2000	2.00	4.00	80	800
b	2.0	6.0	10.0	1800	1.80	2.50	60	900
c	3.0	5.0	8.0	2500	2.25	3.50	75	1200
d	2.0	5.0	10.0	2100	2.00	3.80	70	1000
e	1.5	4.5	7.5	2800	1.50	3.00	65	1200
f	2.5	5.0	8.0	1500	1.75	2.75	50	850

* millones de revoluciones

7-30. Repita el problema 7-1(*b*) con un porcentaje de falla del 5%.

7-31. Repita el problema 7-2(*b*) con un porcentaje de falla del 4%.

7-32. Repita el problema 7-17(*b*) con un porcentaje de falla del 3%.

**7-33.* Repita el problema 7-19(*b*) con un porcentaje de falla del 2%.

7-34. Repita el problema 7-26 con un porcentaje de falla del 5%.

7-35. Repita el problema 7-27 con un porcentaje de falla del 4%.

**7-36.* Repita el problema 7-22 con un porcentaje de falla del 5%.

7-37. Repita el problema 7-28 con un porcentaje de falla del 4%.

7-38. Repita el problema 7-29 con un porcentaje de falla del 3%.

7-39. Un cojinete plano corto tiene las siguientes características: $d = 48.6$ mm, $l = 50$ mm, razón de tolerancia diametral = 0.002. Mientras corre con una carga a una velocidad de $U = 6.36$ m/s y una viscosidad del lubricante de $\eta = 2.30$ *cP*, la razón de excentricidad es $\varepsilon = 0.807$. Grafique la distribución de presión en el cojinete, en función de θ para $z = 0$ y como una función de z para $\theta = \theta_{máx}$.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son problemas extendidos de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador.

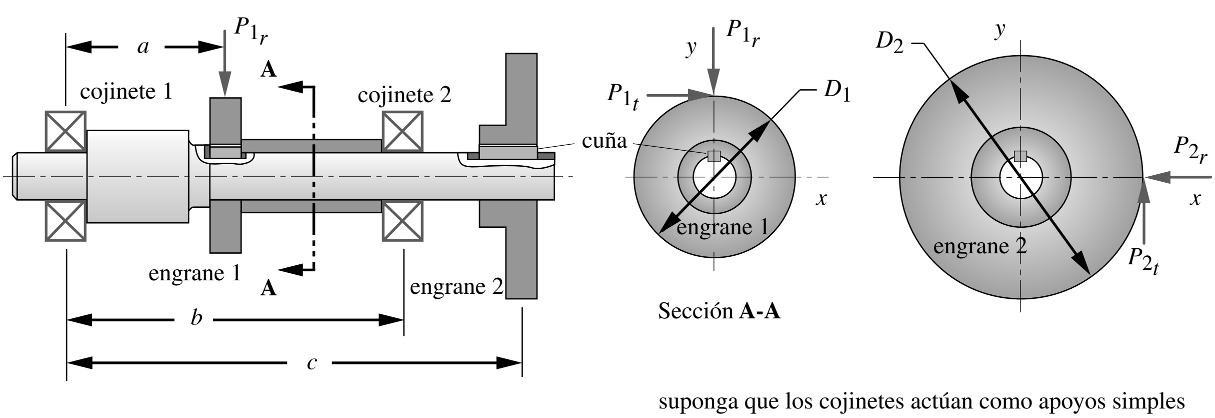


FIGURA P7-5

Configuración de engrane y cojinete para los problemas 7-26 a 7-29

7-40. Un cojinete plano corto tiene las siguientes características: $d = 40.0$ mm, $l = 30$ mm, razón de tolerancia diametral = 0.001. Mientras corre con una carga a una velocidad de $U = 3.77$ m/s y una viscosidad del lubricante de $\eta = 20.66$ *cP*, la razón de excentricidad es $\varepsilon = 0.703$. Grafique la distribución de presión en el cojinete, en función de θ para $z = 0$ y en función de z para $\theta = \theta_{máx}$.

7-41. Para el cojinete y las condiciones del problema 7-39, determine

(*a*) El ángulo ϕ de la línea de centros con respecto a la dirección de la carga aplicada.
(*b*) El parámetro adimensional, K_ε.
(*c*) La magnitud de la carga aplicada, *P*.
(*d*) El torque giratorio, T_r.

7-42. Para el cojinete y las condiciones del problema 7-40, determine

(*a*) El ángulo ϕ de la línea de centros con respecto a la dirección de la carga aplicada.
(*b*) El parámetro adimensional, K_ε.
(*c*) La magnitud de la carga aplicada, *P*.
(*d*) El torque giratorio T_r.

7-43. En el problema 5-32 se determinó que las dimensiones medias de la huella de contacto de dos engranes de acero, engranados con una fuerza de contacto de 1500 lb, son $a = 0.0177$ in y $b = 0.3125$ in (la mitad del ancho de la cara de un diente). Los engranes se modelan como dos cilindros en contacto con radios de 2.500 in (el impulsor) y 5.000 in (el impulsado). Calcule el espesor específico de la película y la condición de lubricación, entre los dos dientes en contacto, si se lubrican con aceite ISO VG 1000 a 120 °F. Suponga que ambos dientes tienen una $R_q = 4$ µin. Las velocidades tangenciales de los dientes de los engranes son 55.6 in/seg (el impulsor) y 57.8 in/seg (el impulsado).

7-44. Seleccione un cojinete de bolas de ranura profunda de la figura 7-23 para una carga radial de 1500 lb, una carga axial de 450 lb y un giro de la pista exterior. Se desea una vida L_5 de 500 millones de revoluciones.

7-45. Seleccione un cojinete de bolas de ranura profunda de la figura 7-23 para una carga radial de 600 lb, una carga axial de 150 lb y un giro de la pista interior. Se desea una vida L_{10} de 180 millones de revoluciones.

8



ENGRANES RECTOS

El principio de la sabiduría comienza
llamando a las cosas por su nombre

PROVERBIO CHINO

Tim era tan erudito que podía nombrar un
caballo en nueve idiomas, y tan ignorante
que compró una vaca para cabalgar.

BENJAMÍN FRANKLIN

8.0 INTRODUCCIÓN

Los engranes sirven para transmitir torque y velocidad angular en variedad de aplicaciones. También existen muchos tipos de engranes. Este capítulo trata sobre el tipo más simple, el engrane recto, diseñado para operar con ejes paralelos y con dientes paralelos a las líneas de centro de los ejes. Otro tipo de engranes, como los helicoidales, los cónicos y los sinfín, funcionan con ejes no paralelos. Éstos se tratarán en el siguiente capítulo.

En la actualidad, los engranes están muy estandarizados por la forma y el tamaño del diente. La *Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes* (AGMA) financia investigaciones para el diseño, los materiales y la manufactura de engranes, en tanto que publica los estándares para su diseño, manufactura y ensamble.[1,2,3] Se seguirán los métodos y las recomendaciones de la AGMA, tal como se definen en dichos estándares.

Los engranes tienen una historia larga. En la China ancestral, el antiguo *Carruaje que apunta hacia el sur*, que supuestamente utilizaron para cruzar el desierto de Gobi en tiempos prebíblicos, contenía engranes. Leonardo da Vinci describió muchas configuraciones de engranes en sus dibujos. Lo más probable es que los primeros engranes se elaboraron burdamente con madera y otros materiales fáciles de trabajar, cuyos dientes eran simples estacas insertadas en un disco o una rueda. No fue sino hasta la Revolución Industrial que las máquinas y las técnicas de manufactura permitieron la creación de engranes como se conocen ahora, con formas de dientes especialmente configurados o cortados en un disco de metal.

Hay mucha terminología especializada para engranes, por lo que es necesario que el lector se familiarice con dichos términos. Como se indicó en los epígrafes anteriores, es importante llamar a las cosas por sus nombres correctos, aunque ello no es suficiente para garantizar una comprensión integral del tema. En la tabla 8-0 se listan las variables utilizadas en este capítulo.

Tabla 8-0 Variables utilizadas en este capítulo
Parte 1 de 2

Símbolo	Variable	Unidades ips	Unidades SI	Véase
a	adéndum	in	m	Fig. 8-8
b	dedéndum	in	m	Fig. 8-8
C	distancia entre centros	in	m	Ec. 8.22*b*
C_f	factor de acabado superficial	ninguna	ninguna	Secc. 8.8
C_H	factor de dureza	ninguna	ninguna	Ec. 8.26, 8-27
C_p	coeficiente elástico	ninguna	ninguna	Ec. 8.23
d	diámetro de paso	in	m	varias
F	ancho de cara	in	m	Ec. 8.14
HB	dureza Brinell	ninguna	ninguna	Secc. 8.8
I	factor geométrico superficial AGMA	ninguna	ninguna	Ec. 8.22*a*
J	factor geométrico de flexión AGMA	ninguna	ninguna	Secc. 8.8
K_a, C_a	factor de aplicación	ninguna	ninguna	Secc. 8.8
K_B	factor de flexión del aro	ninguna	ninguna	Secc. 8.8
K_I	factor del engrane loco	ninguna	ninguna	Ec. 8.15
K_L, C_L	factor de vida	ninguna	ninguna	Fig. 8-24, 8-26
K_m, C_m	factor de distribución de carga	ninguna	ninguna	Secc. 8.8
K_R, C_R	factor de confiabilidad	ninguna	ninguna	Tabla 8-19
K_s, C_s	factor de tamaño	ninguna	ninguna	Secc. 8.8
K_T, C_T	factor de temperatura	ninguna	ninguna	Ec. 8.24*a*
K_v, C_v	factor dinámico	ninguna	ninguna	Secc. 8.8
m	módulo	–	mm	Ec. 8.4*c*
M	momento, función de momento	lb-in	N-m	Fig. 8-21
m_A	ventaja mecánica	ninguna	ninguna	Ec. 8.1*b*
m_G	razón de engrane	ninguna	ninguna	Ec. 8.1*c*
m_p	razón de contacto	ninguna	ninguna	Ec. 8.7*a*
m_V	razón de velocidad angular	ninguna	ninguna	Ec. 8.1*a*
N	número de ciclos o número de dientes	ninguna	ninguna	Fig. 8-24
N_b, N_c	factores de seguridad: flexión y contacto	ninguna	ninguna	varias
p_b	paso base	in	m	Ec. 8.3*b*
p_c	paso circular	in	m	Ec. 8.3*a*
p_d	paso diametral	1/in	–	Ec. 8.4*a*
Q_v	índice de calidad del engrane	ninguna	ninguna	Fig. 8-22
r	radio de paso	in	m	varias
S_{fb}	resistencia a la fatiga por flexión corregido	psi	Pa	Ec. 8.24
$S_{fb'}$	resistencia a la fatiga por flexión sin corregir	psi	Pa	Ec. 8.24
S_{fc}	resistencia a la fatiga superficial corregida	psi	Pa	Ec. 8.25
$S_{fc'}$	resistencia a la fatiga superficial sin corregir	psi	Pa	Ec. 8.25
T	torque	lb-in	N-m	Ec. 8.13*a*
V_t	velocidad en la línea de paso	in/seg	m/seg	Ec. 8.16

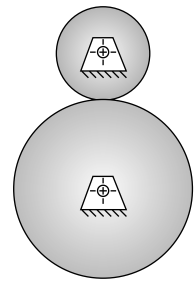
8

La fotografía inicial del capítulo es cortesía de Boston Gear, una división de IMO Industries, Quincy, Mass.

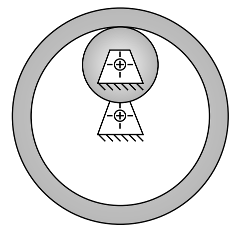
Algunas partes de este capítulo, incluyendo las figuras 8-1 a 8-8, 8-11, 8-13 a 8-16 y su análisis son adaptaciones de *Design of Machinery* de R.L. Norton, 4a. ed., McGraw-Hill, 2008, capítulo 10, con autorización del editor.

Tabla 8-0 Variables utilizadas en este capítulo
Parte 2 de 2

Símbolo	Variable	Unidades ips	Unidades SI	Véase
W	fuerza total sobre el diente del engrane	lb	N	Ec. 8.13*c*
W_r	fuerza radial sobre el diente del engrane	lb	N	Ec. 8.13*b*
W_t	fuerza tangencial sobre el diente del engrane	lb	N	Ec. 8.13*a*
x_1, x_2	coeficientes de modificación del adéndum	ninguna	ninguna	Secc. 8.3
Y	factor de forma de Lewis	ninguna	ninguna	Ec. 8.14
Z	longitud de acción	in	m	Ec. 8.2
ϕ	ángulo de presión	grad	grad	varios
ρ	radio de curvatura	in	m	Ec. 8.22*b*
σ_b	esfuerzo de flexión	psi	Pa	Ec. 8.15
σ_c	esfuerzo superficial	psi	Pa	Ec. 8.21
ω	velocidad angular	rad/seg	rad/seg	Ec. 8.1*a*



(*a*) Contacto externo



(*b*) Contacto interno

FIGURA 8-1
Cilindros de rodamiento

8.1 TEORÍA DEL DIENTE DE ENGRANE

La forma más sencilla de transferir movimiento giratorio de un eje a otro es utilizando un par de cilindros en rodamiento. Se trata de cilindros giratorios externos, como los de la figura 8-1*a*, o bien, cilindros giratorios internos, como los de la figura 8-1*b*. Si existe fricción suficiente en el punto de contacto de rodamiento, este mecanismo funcionará bastante bien. No habrá deslizamiento entre los cilindros, hasta que la fuerza de fricción máxima en la junta sea rebasada por las demandas de transferencia de torque.

Las principales desventajas del mecanismo de impulso por rodamiento-cilindro son su relativamente baja capacidad de torque y la posibilidad de deslizamiento. Algunos dispositivos de transmisión requieren trabajar con fases estrictamente iguales en los ejes de entrada y de salida para efectos de coordinación. Lo anterior requiere la adición de dientes de engranaje en los cilindros de rodamiento, que se convierten en engranes, como se ilustra en la figura 8-2, y juntos se conocen como *engranaje*. Cuando dos engranes se ajustan para formar un engranaje como éste, convencionalmente al *más pequeño de los dos engranes* se le conoce *como* **piñón**, mientras al otro se le llama **engrane**.

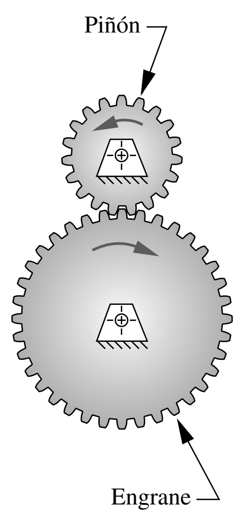


FIGURA 8-2
Engranaje externo

Ley fundamental del engranaje

Conceptualmente, dientes con cualquier perfil evitan el deslizamiento considerablemente alto. Los viejos molinos impulsados por agua y los molinos de viento utilizaban engranes de madera cuyos dientes eran simplemente estacas redondas de madera clavadas en los aros de los cilindros. Aun ignorando lo rudimentario de la construcción de los primeros ejemplos de engranajes, no había posibilidad de transmitir suavemente la velocidad porque la geometría del diente de "estaca" transgredía la **ley fundamental de engranaje**, la cual establece que *la razón de la velocidad angular entre los engranes de un engranaje debe ser constante a lo largo del acoplamiento*. La razón de velocidad angular m_V es igual a la razón entre el radio de paso del engrane de entrada y el del engrane de salida.

$$m_V = \frac{\omega_{sal}}{\omega_{ent}} = \pm \frac{r_{ent}}{r_{sal}} \tag{8.1a}$$

Los radios de paso de la ecuación 8.1*a* son los de los cilindros de rodamiento, a los cuales se agregan los dientes. El signo positivo o el negativo son para considerar grupos de cilindros externos o internos, como se indica en la figura 8-1. Un conjunto externo invierte la dirección de giro entre los cilindros y se identifica con el signo negativo. Un engranaje interno (y un mecanismo impulsor de banda o cadena) tiene la misma dirección de giro en los ejes de entrada y salida; se identifican con el signo positivo, en la ecuación 8.1*a*. Las superficies de los cilindros de rodamiento son los **círculos de paso** y sus diámetros, los **diámetros de paso** de los engranes. El punto de contacto entre los cilindros permanece sobre la línea de centros, como se muestra en la figura 8-4, y este punto se conoce como **punto de paso**.

La **razón de torque** o **ventaja mecánica** m_A es el recíproco de la razón de velocidad m_V:

$$m_A = \frac{1}{m_V} = \frac{\omega_{ent}}{\omega_{sal}} = \pm\frac{r_{sal}}{r_{ent}} \tag{8.1b}$$

De modo que un tren de engranes es básicamente un dispositivo para intercambiar torque por velocidad o viceversa. Una aplicación común de engranaje reduce la velocidad e incrementa el torque para impulsar cargas pesadas, como en la transmisión de un automóvil. Otras aplicaciones requieren un incremento en la velocidad, para lo cual se debe aplicar una reducción en el torque. En cualquier caso, en general es deseable mantener una razón constante entre los engranes conforme giran. Cualquier variación en la razón se manifestará como una variación en la velocidad de salida y en el torque, incluso si la entrada es constante en el tiempo.

8

Para efectos de cálculo, la **razón de engrane** m_G se toma como la magnitud de una razón de velocidad o una razón de torque, que en cualquier caso es > 1.

$$m_G = |m_V| \text{ o bien, } m_G = |m_A|, \text{ para } m_G \geq 1 \tag{8.1c}$$

En otras palabras, la razón del engrane siempre es un número positivo > 1, sin importar en qué dirección fluya la potencia en el engranaje.

Para que se cumpla la ley fundamental de engranaje, los contornos de los dientes acoplados deben ajustarse entre sí. Existe un número infinito de posibles pares ajustados por utilizar; sin embargo, sólo unas cuantas curvas tienen aplicación práctica en los dientes de engranes. La **cicloide** todavía se emplea como forma para engranes en algunos relojes y cronómetros; no obstante, en la mayoría de los engranes se utiliza la **involuta** de un círculo para dar forma a sus dientes.

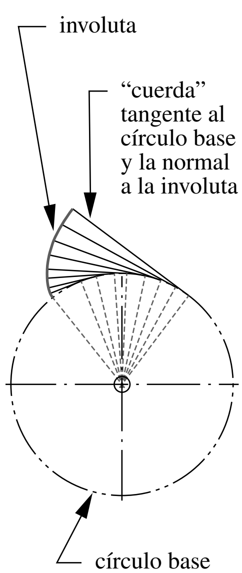


FIGURA 8-3

Desarrollo de la involuta de un círculo

Dientes con forma de involuta

La involuta de un círculo es una curva que se genera desenrollando una cuerda tensa a partir de un cilindro, como se ilustra en la figura 8-3. Tome nota de lo siguiente acerca de esta curva involuta:

1. La cuerda siempre es tangente al círculo base.
2. El centro de curvatura de la involuta siempre se encuentra en el punto de tangencia de la cuerda con el círculo base.
3. Una tangente a la involuta siempre es normal a la cuerda, la cual es el radio de curvatura instantáneo de la involuta.

La figura 8-4 muestra dos involutas sobre cilindros en contacto o "engranados" que representan los dientes de los engranes. Los cilindros a partir de los cuales se desenrollan las cuerdas se llaman **círculos base** de los respectivos engranes. Observe que los

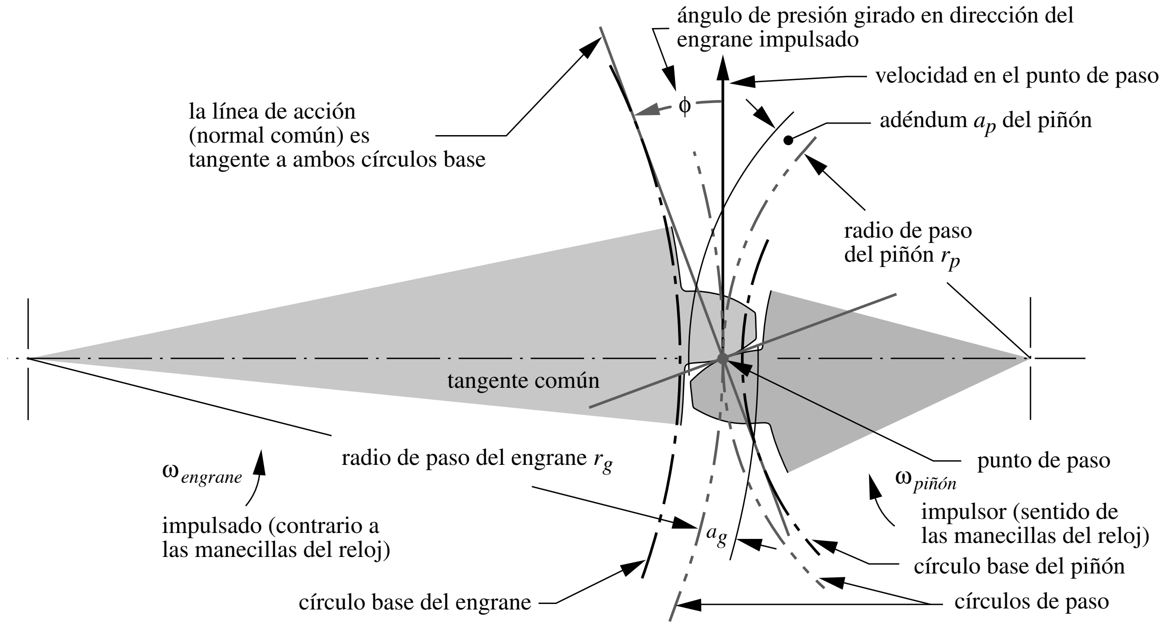


FIGURA 8-4

Geometría de contacto y ángulo de presión en dientes de engranes de involuta

círculos base son necesariamente más pequeños que los círculos de paso, los cuales se encuentran en los radios de los cilindros de rodamiento originales, r_p y r_g. Los dientes del engrane deben proyectarse hacia abajo y hacia arriba de la superficie del cilindro de rodamiento (círculo de paso), mientras que la *involuta existe sólo fuera del círculo base*. La porción del diente que queda por encima del círculo de paso es el **adéndum**, que se identifica como a_p para el piñón, y a_g para el engrane. Son iguales para los dientes de engranes estándar, de profundidad total.

Existe una **tangente común** a ambas involutas en el punto de contacto y una normal común, perpendicular a la tangente común. Observe que la normal común forma de hecho, las "cuerdas" de ambas involutas, las cuales son colineales. Así, la **normal común**, que también es **la línea de acción**, siempre pasa por el **punto de paso**, independientemente del lugar donde estén en contacto los dos dientes engranados. El punto de paso tiene la misma velocidad lineal, tanto en el piñón como en el engrane, y se conoce como **velocidad en la línea de paso**. El ángulo entre la línea de acción y el vector de la velocidad es el **ángulo de presión** ϕ.

Ángulo de presión

El **ángulo de presión** ϕ de un engranaje se define como el ángulo entre la línea de acción (normal común) y la dirección de la velocidad en el punto de paso, de modo que la línea de acción gira ϕ grados en la dirección de giro del engrane impulsado, como se indica en las figuras 8-4 y 8-5. Los fabricantes de engranes han estandarizado los ángulos de presión con unos cuantos valores. Tales ángulos fueron definidos por la distancia nominal entre centros del engranaje hasta el corte. Los valores estándar son 14.5°, 20° y 25°, de los cuales el de 20° es el más común y el de 14.5° se considera obsoleto. Se puede tomar cualquier valor del ángulo de presión, pero su mayor costo, en relación con el de un engrane con ángulos de presión estándar, sería difícil de justificar. Tendrían que fabricarse cortadores especiales. Los engranes que corren juntos se deben cortar con el mismo ángulo de presión nominal.

Geometría del engranaje

En la figura 8-5 se ilustra un par de dientes en forma de involuta en dos posiciones: justo al iniciar el contacto y cuando éste termina. Las normales comunes (colineales) de ambos puntos de contacto tienen el mismo punto de paso. Tal propiedad de la involuta hace que se cumpla la ley fundamental del engranaje. La razón entre el radio del engrane impulsor y el radio del engrane impulsado permanece constante, a medida que los dientes entran y salen del engranado.

A partir de dicha observación del comportamiento de la involuta, se puede enunciar la **ley fundamental del engranaje** de una manera cinemática más formal como: *la normal común a los perfiles de los dientes, en todos los puntos de contacto dentro del engranado, debe pasar siempre por un punto fijo en la línea de los centros llamado punto de paso*. La razón de velocidad del engranaje es una constante definida por la razón de los radios respectivos de los engranes en el punto de paso.

Los puntos de inicio y final del contacto definen el **engranado** del piñón con el engrane. La distancia a lo largo de la línea de acción entre estos puntos dentro del engranado se conoce como **longitud de acción**, Z, definida por las intersecciones de los círculos de adendo respectivos con la línea de acción, como se indica en la figura 8-5. La distancia a lo largo del círculo de paso dentro del engranado es el **arco de acción**; los ángulos subtendidos por estos puntos y la línea de centros son el **ángulo de aproximación** y el **ángulo de receso**, que sólo se muestran sobre el engrane de la figura 8-5 para efectos de claridad, aunque existen ángulos similares para el piñón. El arco de acción en los círculos de paso del piñón y del engrane debe tener una longitud de deslizamiento igual a cero, entre los cilindros de rodamiento teóricos. La longitud de acción Z se calcula a partir de la geometría del engrane y el piñón:

$$Z=\sqrt{\left(r_p+a_p\right)^2-\left(r_p\cos\phi\right)^2}+\sqrt{\left(r_g+a_g\right)^2-\left(r_g\cos\phi\right)^2}-C\operatorname{sen}\phi \tag{8.2}$$

donde r_p y r_g son los radios de los círculos de paso, mientras a_p y a_g son los adendos del piñón y del engrane, respectivamente. C es la distancia entre centros y ϕ es el ángulo de presión.

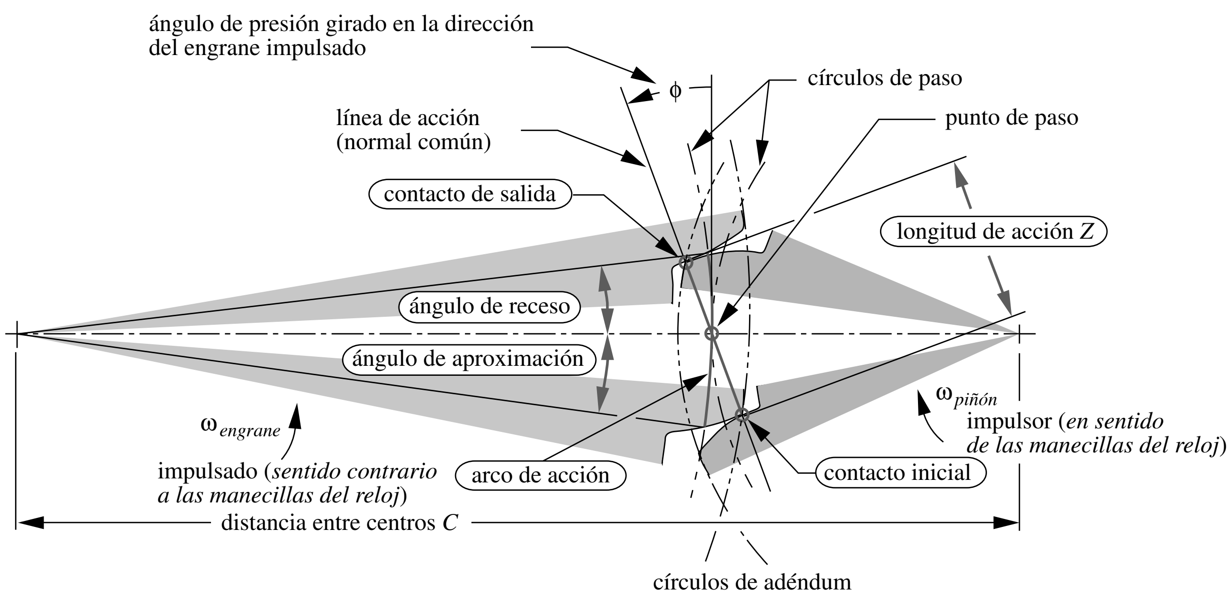


FIGURA 8-5

Longitud de acción, arco de acción, ángulos de aproximación y receso durante el engranado de un engrane y un piñón

Piñón y cremallera

Si el diámetro del círculo base de un engrane se incrementa sin límite, el círculo base se vuelve una línea recta. Si la "cuerda" enrollada alrededor del círculo base que genera la involuta, donde permanece en su sitio después del alargamiento infinito del radio del círculo base, la cuerda se pivotaría en el infinito y generaría una involuta que es una línea recta. Este engrane lineal se llama **cremallera**. La figura 8-6 presenta una cremallera y un piñón, y la geometría de una cremallera estándar de profundidad total. Sus dientes son trapezoidales aun cuando siguen siendo verdaderas involutas. Este hecho facilita la fabricación de una herramienta de corte para producir dientes de involuta sobre engranes circulares, mediante el maquinando preciso de una cremallera y endureciéndola para cortar los dientes de otros engranes. Ésta es otra ventaja de los dientes en forma de involuta. Al girar el engrane modelo con respecto a la cremallera cortadora, mientras ésta se mueve axialmente hacia adelante y hacia atrás a través del modelo del engrane, se formará o desarrollará un verdadero diente de involuta sobre el engrane circular.

La aplicación más común del mecanismo cremallera-piñón es la conversión del movimiento giratorio a lineal, o viceversa. En este dispositivo puede ocurrir un retroceso, de modo que se requiere un freno para mantener la carga. Un ejemplo de su uso es el mecanismo de dirección piñón-cremallera de los automóviles. El piñón está sujeto al extremo inferior de la columna del volante y gira cuando éste lo hace. La cremallera está engranada con el piñón y tiene libertad para moverse, a la izquierda o la derecha, en respuesta al movimiento angular en el volante de la dirección. La cremallera es, asimismo, un eslabón en un acoplamiento de barras múltiples, que convierte la traslación lineal de la cremallera en desplazamiento angular en el balancín sujeto al montaje de las ruedas delanteras para guiar el auto.

Cambio de la distancia entre centros

Cuando en un cilindro se cortan dientes de involuta (o cualquier clase de diente), con respecto a un círculo base específico para crear un solo engrane, todavía no se tiene el círculo de paso, el cual resulta cuando se conecta ese engrane con otro para formar un *par de engranes* o un **engranaje**. Existe un intervalo de distancias entre centro y centro, dentro del cual se puede lograr un engranado entre los engranes. También hay una distancia ideal entre centros, que nos proporciona los diámetros de paso nominales para los cuales se diseñaron los engranes. Sin embargo, las limitaciones en los procesos de manufactura dan, en todos los casos, una probabilidad baja de alcanzar exactamente dicha distancia ideal entre centros. Muy probablemente habrá un error en la distancia entre centros, aun cuando sea pequeño.

Si la forma del diente del engrane **no** es una involuta, entonces el error de la distancia entre centros provocará una variación u "onda" en la velocidad de salida, de manera

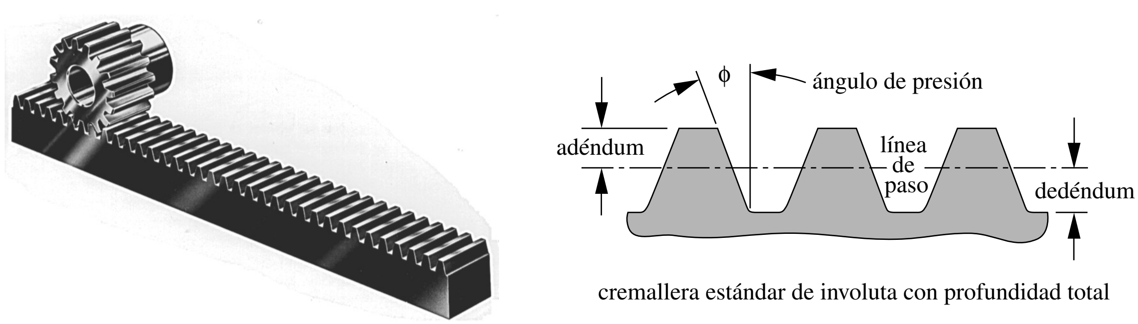
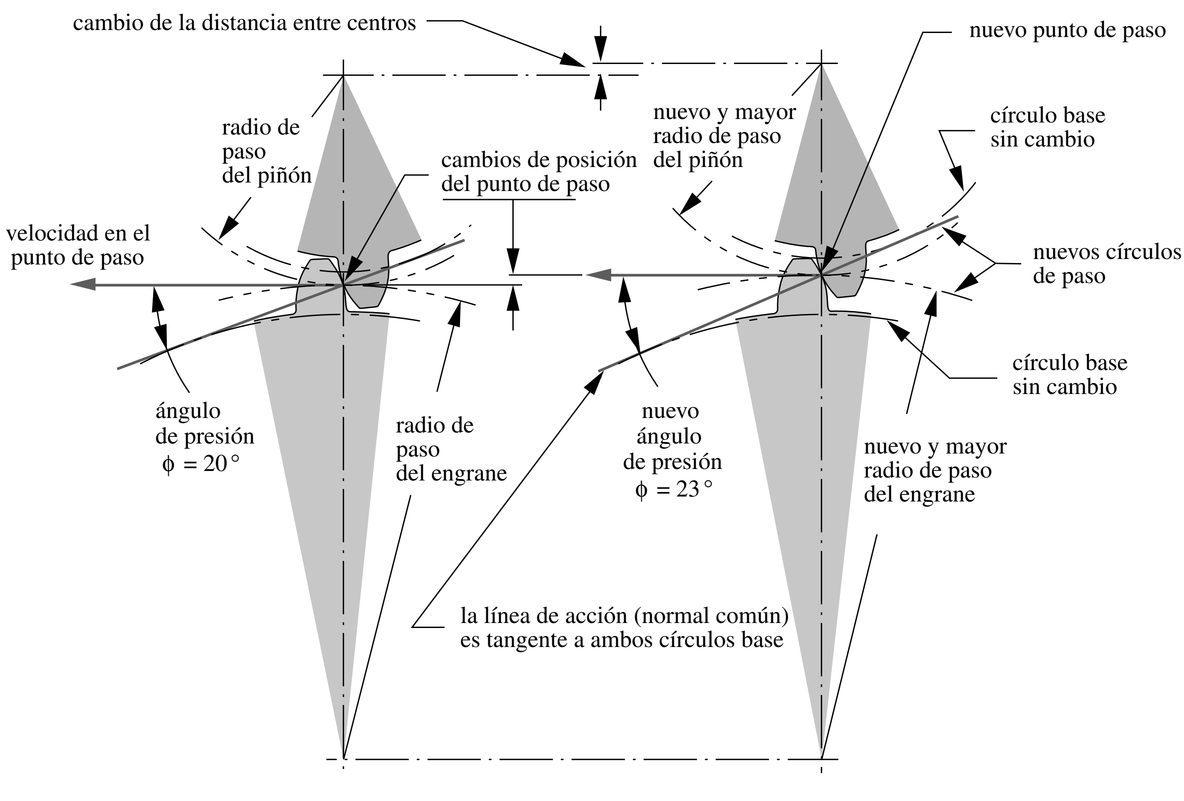


FIGURA 8-6

Cremallera y piñón *La fotografía es cortesía de Martin Sprocket and Gear Co., Austin, Tex.*

que la velocidad angular de salida no será constante aun con una velocidad de entrada constante, violando así la ley fundamental del engranaje. Sin embargo, **con un diente en forma de involuta** *los errores de la distancia entre centros no afectan la razón de velocidad*. Tal es la ventaja principal de los dientes en forma de involuta, por encima de cualquier otra forma posible, y es la causa por la que se utiliza casi universalmente en los dientes de engranes. La figura 8-7 muestra lo que pasa cuando se varía la distancia entre centros en un engranaje de involuta. Observe que la normal común pasa por el punto de paso, así como por todos los puntos de contacto dentro del engranado. Sólo el ángulo de presión se ve afectado por el cambio de la distancia entre centros.

La figura 8-7 muestra también los ángulos de presión de dos diferentes distancias entre centros. Conforme se incrementa la distancia entre centros, también lo hace el ángulo de presión y viceversa. Lo anterior es una consecuencia del cambio, o error, en la distancia entre centros cuando se utilizan dientes de involuta. Observe que la ley fundamental del engranaje se cumple incluso en el caso de modificación de la distancia entre centros. La normal común se mantiene tangente a los dos círculos base y todavía pasa por el punto de paso. Este último se ha movido proporcionalmente con el cambio de la distancia entre los centros y los radios de paso. La razón de velocidad no se modifica, a pesar del cambio en la distancia entre centros. De hecho, la razón de velocidad en los engranes de involuta es fija debido a que la razón de los diámetros de sus círculos base no cambia una vez que se corta el engrane.



(a) Distancia entre centros correcta *(b)* Distancia entre centros incrementada

FIGURA 8-7

El cambio en la distancia entre los centros en engranes de involuta sólo modifica el ángulo de presión y los diámetros de paso

Holgura (juego)

Otro factor que se ve afectado por el cambio en la distancia entre centros C es la holgura entre los engranes. El aumento de la distancia C entre centros incrementa la holgura y viceversa. La **holgura** se define como *la medida del juego entre los dientes engranados a lo largo de la circunferencia del círculo de paso*. Las tolerancias de fábrica evitan una holgura cero, ya que todos los dientes no tienen exactamente las mismas dimensiones y todos deben engranarse sin bloquearse, de modo que habrá una pequeña diferencia entre el espesor del diente y la anchura del espacio entre los dientes (véase la figura 8-8 en la página siguiente). Mientras el engranaje opere con un torque no reversible, la holgura no debería ser un problema. Sin embargo, cuando el torque cambia de signo, los dientes se mueven de modo que el contacto cambia de un lado a otro del diente. El espacio de holgura cambiará de lado y los dientes impactarán con ruido y vibración notables. Como también se incrementan los esfuerzos y el desgaste, la holgura podría causar errores de posición indeseables en algunas aplicaciones.

En servomecanismos, donde los motores impulsan por ejemplo los controles de superficie de un avión, la holgura causaría un "galope" potencialmente destructivo, en el cual el sistema de control trata de corregir en vano los errores de posición debidos a la holgura "en movimiento" en el sistema impulsor mecánico. Tales aplicaciones requieren **engranes antiholgura**, que son dos engranes que se montan espalda con espalda sobre el mismo eje y giran ligeramente uno con respecto al otro con el ensamble (o con resortes), de modo que contrarrestan la holgura. En aplicaciones menos críticas, como el impulsor de hélice en una lancha o un bote, es imperceptible la holgura al invertir el torque.

Movimiento relativo del diente

El movimiento relativo entre dientes de involuta es de rodamiento puro en el punto de paso. En los puntos del diente alejados del punto de paso ocurre un poco de deslizamiento combinado con rodamiento. La cantidad promedio de deslizamiento en un engranaje con dientes de involuta es aproximadamente del 9%, como se vio en la sección 5.13 (p. 394). Los esfuerzos superficiales se incrementan por la componente de deslizamiento, como se estudió en la sección 5.11 (p. 383). La tabla 5-7 (pp. 396-397) muestra datos de resistencia a la fatiga superficial desarrollados a partir de pruebas extensivas de rodamiento, más el 9% de deslizamiento en varias combinaciones de materiales.

8.2 NOMENCLATURA DEL DIENTE DEL ENGRANE

La figura 8-8 muestra dos dientes de un engrane con su terminología estándar. El **círculo de paso** y el **círculo base** ya se definieron. La altura total de un diente se define como el **adéndum** (*que se agrega*) y el **dedéndum** (*que se extrae*), los cuales tienen como referencia el círculo de paso nominal. El dedéndum es ligeramente más grande que el adéndum para brindar un poco de **holgura** entre el tope (**círculo de adéndum**) de un diente acoplado y la parte inferior (**círculo de dedéndum**) del espacio entre dientes del otro engrane. La **profundidad de trabajo** del diente es el doble del adéndum, en tanto que la **profundidad total** es la suma del adéndum y el dedéndum. El **espesor del diente** se mide en el círculo de paso, en tanto que el **ancho del espacio** del diente es ligeramente mayor que el espesor del siguiente. La diferencia entre estas dos dimensiones es la **holgura**. El **ancho de cara** de un diente se mide a lo largo del eje del engrane. El **paso circular** es la longitud de arco en el círculo de paso, medido desde un punto dado en un diente hasta el punto análogo en el diente contiguo. El paso circular define el tamaño del diente. La definición de **paso circular** p_c es

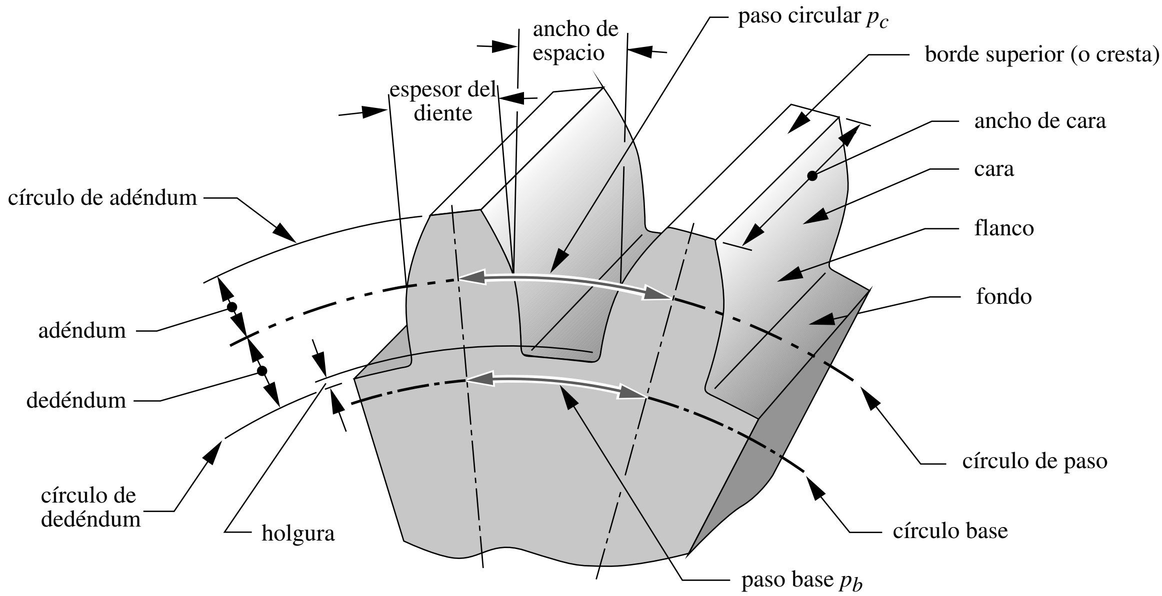


FIGURA 8-8

Nomenclatura de un diente de engrane

$$p_c = \frac{\pi d}{N} \tag{8.3a}$$

donde d = diámetro de paso y N = número de dientes. El paso del diente también se mide a lo largo de la circunferencia del círculo base y se conoce como el **paso de base** p_b.

$$p_b = p_c \cos\phi \tag{8.3b}$$

Las unidades de p_c son pulgadas o milímetros. Una forma más conveniente para definir el tamaño del diente es relacionarlo directamente con el diámetro d del círculo de paso, en vez de su circunferencia. El **diámetro de paso** p_d es

$$p_d = \frac{N}{d} \tag{8.4a}$$

Las unidades de p_d son pulgadas recíprocas, o número de dientes por pulgada. Dicha medida tan sólo se utiliza en Estados Unidos para la especificación de engranes. Combinando las ecuaciones 8.3a y 8.4a, se obtiene la razón entre el paso circular y el paso diametral.

$$p_d = \frac{\pi}{p_c} \tag{8.4b}$$

El sistema SI, usado para engranes métricos, define un parámetro llamado **módulo**, el cual es el *recíproco del paso diametral* con el diámetro de paso d medido en milímetros.

$$m = \frac{d}{N} \tag{8.4c}$$

Las unidades del módulo son milímetros. Por desgracia, los engranes métricos no son intercambiables con los engranes estadounidenses, a pesar de que ambos tienen perfil de dientes de involuta, en vista de que sus estándares para el tamaño de los dientes son

Tabla 8-1 Especificaciones de la AGMA para dientes de engrane de profundidad total

Parámetro	Paso grueso ($p_d < 20$)	Paso fino ($p_d \geq 20$)
Ángulo de presión ϕ	20° o 25°	20°
Adéndum *a*	$1.000 / p_d$	$1.000 / p_d$
Dedéndum *b*	$1.250 / p_d$	$1.250 / p_d$
Profundidad de trabajo	$2.000 / p_d$	$2.000 / p_d$
Profundidad total	$2.250 / p_d$	$2.200 / p_d + 0.002$ in
Espesor circular del diente	$1.571 / p_d$	$1.571 / p_d$
Radio de filete: cremallera básica	$0.300 / p_d$	no estandarizado
Holgura básica mínima	$0.250 / p_d$	$0.200 / p_d + 0.002$ in
Ancho mínimo del borde superior	$0.250 / p_d$	no estandarizado
Holgura (dientes esmerilados o pulidos)	$0.350 / p_d$	$0.350 / p_d + 0.002$ in

Tabla 8-2
Pasos diametrales estándares

Grueso ($p_d < 20$)	Fino ($p_d \geq 20$)
1	20
1.25	24
1.5	32
1.75	48
2	64
2.5	72
3	80
4	96
5	120
6	
8	
10	
12	
14	
16	
18	

8

diferentes (véase la tabla 8-3). En Estados Unidos, el tamaño de los dientes de engranes se especifica por el paso diametral. La conversión de un estándar al otro es

$$m = \frac{25.4}{p_d} \tag{8.4d}$$

La razón de velocidad m_V del engranaje se expresa de forma más conveniente sustituyendo la ecuación 8.4*a* en la ecuación 8.1 (p. 545), tomando en cuenta que el paso diametral de los engranes acoplados es el mismo.

$$m_V = \pm\frac{r_{ent}}{r_{sal}} = \pm\frac{d_{ent}}{d_{sal}} = \pm\frac{N_{ent}}{N_{sal}} \tag{8.5a}$$

De modo que la **razón de velocidad** se calcula a partir del número de dientes de los engranes acoplados, los cuales son números enteros. Observe que un signo negativo indica un engranaje de contacto exterior y uno positivo, un engranaje de contacto interior, como se indica en la figura 8-1. La razón de engrane, m_G, se expresa como el número de dientes del engrane N_g entre el número de dientes del piñón N_p.

$$m_G = \frac{N_g}{N_p} \tag{8.5b}$$

Estandarización de dientes de engrane Los dientes estándar de profundidad total de los engranes tienen adenda iguales en el piñón y el engrane, mientras que el dedéndum es ligeramente más grande debido a las holguras. Las dimensiones del diente estándar se definen en términos del paso diametral. La tabla 8-1 muestra las dimensiones de los dientes estándar de engranes, de profundidad total, definidos por la AGMA, y la figura 8-9 ilustra las formas de los tres ángulos de presión estándar. La figura 8-10 muestra los tamaños reales de un ángulo de presión estándar de 20°, en dientes de profundidad completa con p_d de 4 a 80. Observe la relación inversa entre el p_d y el tamaño del diente.

Mientras no haya ninguna restricción teórica en los posibles valores del paso diametral, se define un conjunto de valores estándar con base en las herramientas disponibles para cortar engranes. Los tamaños estándar de diente se indican en la tabla 8-2 en términos del paso diametral y en la tabla 8-3, en términos del módulo métrico.

Tabla 8-3
Módulos métricos estándares

Módulo métrico (mm)	Equivalente p_d (in^{-1})
0.3	84.67
0.4	63.50
0.5	50.80
0.8	31.75
1	25.40
1.25	20.32
1.5	16.93
2	12.70
3	8.47
4	6.35
5	5.08
6	4.23
8	3.18
10	2.54
12	2.12
16	1.59
20	1.27
25	1.02

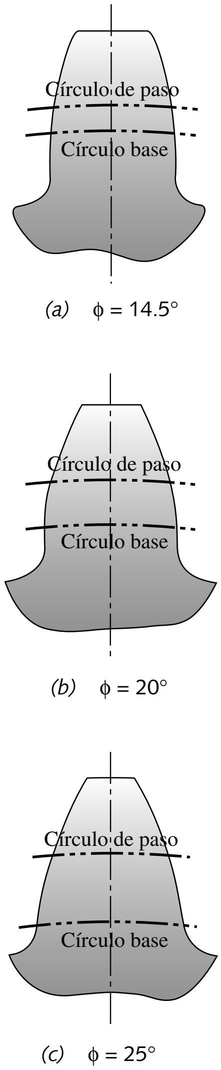


FIGURA 8-9

Perfiles de la AGMA de dientes con profundidad total para tres ángulos de presión

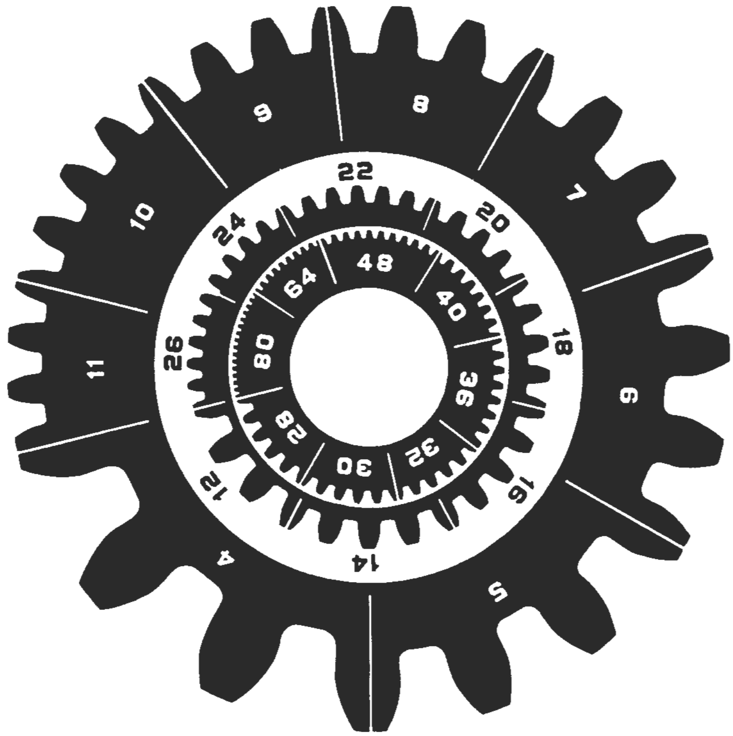


FIGURA 8-10

Tamaños reales de dientes de engrane para varios pasos diametrales *Cortesía de Barber-Colman Co., Loves Park, Ill.*

8.3 INTERFERENCIA Y REBAJE ENTRE DIENTES

El perfil del diente de involuta sólo está definido por fuera del círculo base. En algunos casos, el dedéndum es tan grande que se extiende por debajo del círculo base. Si es así, entonces la porción del diente por debajo del círculo base no será de involuta e interferirá con la punta del diente del engrane acoplado, la cual sí es de involuta. Si el engrane se corta con un cortador estándar de engranes, es decir, con una "fresa", la herramienta de corte también interferirá con la porción del diente situada por debajo del círculo base y desprenderá el material de interferencia. Como resultado, se tiene un rebaje en la superficie lateral del diente, como se ilustra en la figura 8-11. Este rebaje debilita el diente por la remoción de material en su raíz. El momento máximo y la fuerza cortante máxima en el diente, cargado como una viga en voladizo, se presentan en esa región. Un rebaje severo causará la falla prematura del diente.

La interferencia y el rebaje consecuente se impedirían evitando simplemente la utilización de engranes con muy pocos dientes. Si un piñón tiene muchos dientes, éstos serán pequeños comparados con su diámetro. Si el número de dientes se reduce, manteniendo un diámetro fijo del piñón, el tamaño de los dientes aumentará. En algún punto, el dedéndum excederá la distancia radial entre el círculo base y el círculo de paso, luego de lo cual se presentará la interferencia. El número de dientes mínimo de profundidad total, requerido para eliminar la interferencia en un piñón que corre contra una cremallera estándar, se calcula a partir de:

$$N_{mín} = \frac{2}{\operatorname{sen}^2 \phi} \tag{8.6}$$

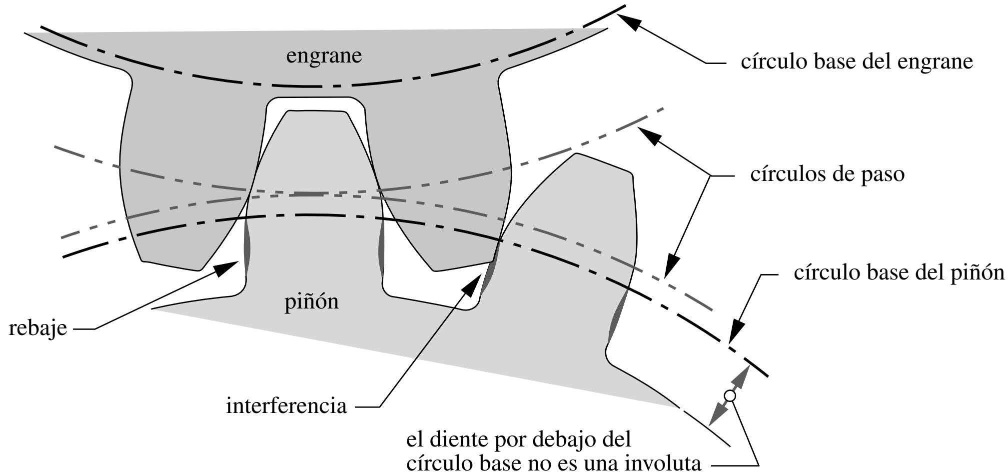


FIGURA 8-11

Interferencia y rebaje de los dientes en la parte inferior del círculo base

La tabla 8-4 indica el número mínimo de dientes requerido para eliminar el rebaje contra una cremallera estándar, en función del ángulo de presión. La tabla 8-5 muestra el número mínimo de dientes de profundidad total en el piñón, que se pueden usar contra una selección de engranes de diferentes tamaños de profundidad completa (para $\phi = 20°$). Conforme el engrane acoplado se vuelve más pequeño, el piñón puede tener menos dientes y aun así evitar la interferencia.

Tabla 8-4

Número mínimo de dientes del piñón para evitar la interferencia entre un piñón con dientes a profundidad total y una cremallera de profundidad total

Ángulo de presión (grados)	Número mínimo de dientes
14.5	32
20	18
25	12

Formas de dientes de adendo desigual

Para eliminar la interferencia en piñones pequeños, se modifican las formas estándar del diente de profundidad completa de la figura 8-9, que tienen adendas iguales, tanto en el piñón como en el engrane, a la forma de involuta con un adéndum más largo en el piñón y más corto en el engrane. Lo anterior se conoce como **engranes con perfiles cambiados**. La AGMA define los coeficientes de modificación, x_1 y x_2, para el adéndum, la suma de los cuales siempre es igual a cero, por ser iguales en magnitud, aunque de signo contrario. El coeficiente positivo x_1 se utiliza para incrementar el adéndum del piñón, en tanto que el negativo x_2 disminuye el adéndum del engrane en la misma cantidad. La profundidad total del diente permanece constante. El efecto neto es alejar los círculos de paso del círculo base del piñón, así como eliminar la porción del diente del piñón que no tiene forma de involuta y se encuentra debajo del círculo base. Los coeficientes estándar son ± 0.25 y ± 0.50, los cuales suman o restan el 25% o el 50% del adéndum estándar, respectivamente. El límite de este enfoque ocurre cuando el diente del piñón se vuelve un punto.

Hay algunos beneficios secundarios con dicha técnica. El diente del piñón se vuelve más grueso en su base y, por lo mismo, más fuerte. Por consiguiente, el diente del engrane se debilita; sin embargo, como el diente de profundidad total de un engrane es más fuerte que el diente de profundidad total de un piñón, el cambio provoca que sus resistencias sean aproximadamente iguales. Una desventaja de los perfiles de dientes con adendo desigual es el incremento en la velocidad de deslizamiento en la punta del diente. El porcentaje de deslizamiento entre los dientes es entonces mayor que en los dientes con adendos iguales. Lo anterior incrementa los esfuerzos superficiales en el diente, como se vio en la sección 5.11 (p. 383). Las pérdidas por fricción en el engranaje también aumentan por las mayores velocidades de deslizamiento. Dudley[10] recomienda no eliminar más del 25% de la longitud del adéndum en los dientes del piñón para engranes rectos o helicoidales, debido a las desventajas asociadas con las velocidades altas de deslizamiento.

Tabla 8-5

Número mínimo de dientes del piñón para eliminar la interferencia entre un piñón con diente, a profundidad total a 20°, y los engranes de varios tamaños, a profundidad total

Número mínimo de dientes en el piñón	Número máximo de dientes en el engrane
17	1 309
16	101
15	45
14	26
13	16

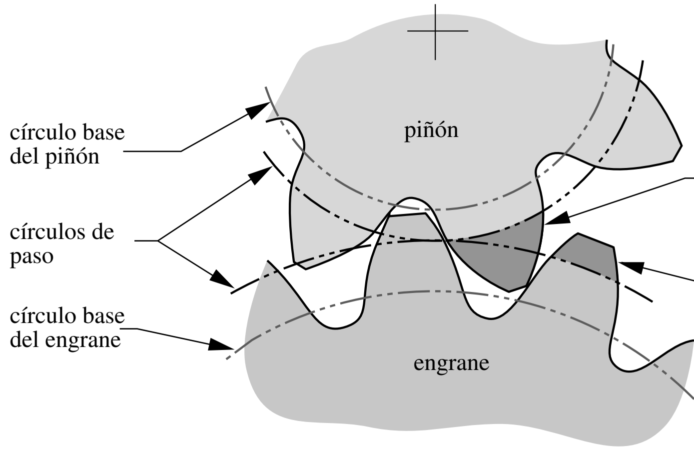


FIGURA 8-12

Dientes de engranes con perfiles modificados, con adenda largos y cortos para evitar la interferencia y el rebaje

La figura 8-12 muestra los contornos de los perfiles modificados de dientes de involuta. Compárelos con los perfiles de dientes estándares de la figura 8-9.

8.4 RAZÓN DE CONTACTO

La razón de contacto m_p define el número promedio de dientes en contacto en cualquier momento. Se calcula a partir de

$$m_p = \frac{Z}{p_b} \tag{8.7a}$$

donde Z es la longitud de acción de la ecuación 8.2 (p. 548) y p_b es el paso base de la ecuación 8.3*b* (p. 552). Sustituyendo las ecuaciones 8.3*b* y 8.4*b,* en la ecuación 8.7*a*, se define la m_p en términos del paso diametral:

$$m_p = \frac{p_d Z}{\pi \cos\phi} \tag{8.7b}$$

Si la razón de contacto es 1, entonces un diente sale del contacto justo cuando el siguiente lo inicia. Esto es indeseable, porque los errores ligeros en el espaciamiento de los dientes causarán oscilaciones en la velocidad, vibración y ruido. Además, la carga se aplicará en la punta del diente, creando los momentos de flexión más grandes posibles. En las razones de contacto mayores a 1 existe la posibilidad de compartir la carga entre más dientes. Para razones de contacto entre 1 y 2, las cuales son comunes en engranes rectos, habrá ocasiones durante el engranado en las que todavía un par de dientes tomen la carga completa. Sin embargo, esto ocurrirá en el centro de la región del engranado donde la carga se aplica en una posición más baja en el diente, no en la punta. El punto se conoce como **punto más alto de contacto en un solo diente** o HSTPC. La razón mínima aceptable de contacto para una operación suave es de 1.2. Se prefiere una razón mínima de contacto de 1.4, pues cuanto más grande, mejor. La mayoría de los engranajes rectos tienen razones de contacto entre 1.4 y 2. La ecuación 8.7*b* muestra que para dientes más pequeños (p_d mayor) y un ángulo de presión más grande, la razón de contacto será mayor.

EJEMPLO 8-1

Determinación del diente de engrane y de los parámetros de engranaje

Problema **Obtenga razón de engrane, paso circular, base de paso, diámetros de paso, radios de paso, distancia entre centros, adéndum, dedéndum, profundidad total, holgura, diámetros exteriores y razón de contacto de un engranaje con los parámetros dados. Si se incrementa la distancia entre centros un 2%, ¿cuál será el nuevo ángulo de presión?**

Se proporciona **Un $6p_d$ con un ángulo de presión de 20°, 19 dientes en el piñón y un engrane de 37 dientes.**

Suposiciones **Las formas de los dientes son AGMA estándares con perfiles de involuta a profundidad total.**

Solución

1. La razón de engrane se calcula fácilmente a partir del número de dientes del piñón y del engrane con la ecuación 8.5*b* (p. 553).

$$m_G = \frac{N_g}{N_p} = \frac{37}{19} = 1.947 \qquad (a)$$

2. El paso circular se determina a partir de la ecuación 8.3*a* o de la ecuación 8.4*b* (p. 552).

$$p_c = \frac{\pi}{p_d} = \frac{\pi}{6} = 0.524 \text{ in} \qquad (b)$$

3. El paso base medido sobre el círculo base es (de la ecuación 8.3*b* en la p. 552):

$$p_b = p_c \cos\phi = 0.524\cos(20°) = 0.492 \text{ in} \qquad (c)$$

4. Los diámetros de paso, así como los radios de paso del piñón y del engrane se obtienen con la ecuación 8.4*a*.

$$d_p = \frac{N_p}{p_d} = \frac{19}{6} = 3.167 \text{ in}, \qquad r_p = \frac{d_p}{2} = 1.583 \text{ in} \qquad (d)$$

$$d_g = \frac{N_g}{p_d} = \frac{37}{6} = 6.167 \text{ in}, \qquad r_g = \frac{d_g}{2} = 3.083 \text{ in} \qquad (e)$$

5. La distancia nominal entre centros C es la suma de los radios de paso:

$$C = r_p + r_g = 4.667 \text{ in} \qquad (f)$$

6. El adéndum y el dedéndum se obtienen con las ecuaciones de la tabla 8-1 (p. 553):

$$a = \frac{1.0}{p_d} = \frac{1}{6} = 0.167 \text{ in}, \qquad b = \frac{1.25}{p_d} = \frac{1.25}{6} = 0.208 \text{ in} \qquad (g)$$

7. La profundidad total h_t es la suma del adéndum y el dedéndum.

$$h_t = a + b = 0.167 + 0.208 = 0.375 \text{ in} \qquad (h)$$

8. La holgura es la diferencia entre el dedéndum y el adéndum.

$$c = b - a = 0.208 - 0.167 = 0.042 \text{ in} \qquad (i)$$

9. El diámetro exterior de cada engrane es el diámetro de paso más los dos adenda:

$$D_{o_p} = d_p + 2a = 3.500 \text{ in}, \qquad D_{o_g} = d_g + 2a = 6.500 \text{ in} \tag{j}$$

10. La razón de contacto se determina con las ecuaciones 8.2 y 8.7 (pp. 548 y 556).

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\left(r_p + a_p\right)^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} + \sqrt{\left(r_g + a_g\right)^2 - \left(r_g \cos\phi\right)^2} - C \operatorname{sen} \phi \\ &= \sqrt{(1.583 + 0.167)^2 - (1.583 \cos 20)^2} \\ &\quad + \sqrt{(3.083 + 0.167)^2 - (3.083 \cos 20)^2} - 4.667 \operatorname{sen} 20 = 0.798 \text{ in} \end{aligned}$$

$$m_p = \frac{Z}{p_b} = \frac{0.798}{0.492} = 1.62 \tag{k}$$

11. Si la distancia entre centros aumenta su valor nominal debido a los errores de ensamble, o a otros factores, los radios de paso efectivos cambiarán en el mismo porcentaje. Los radios de base de los engranes se mantienen iguales. El nuevo ángulo de presión se obtiene a partir de la geometría modificada. Para el 2% de aumento en la distancia entre centros (1.02X):

$$\phi_{nuevo} = \cos^{-1}\left(\frac{r_{\text{círculo base}_p}}{1.02 r_p}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{r_p \cos\phi}{1.02 r_p}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\cos 20^\circ}{1.02}\right) = 22.89^\circ \tag{l}$$

12. Los archivos EX12-01 se encuentran en el CD-ROM del libro.

8.5 TRENES DE ENGRANES

Un **tren de engranes** es un conjunto de dos o más engranes acoplados, de modo que un par de engranes, o engranaje, son la forma más sencilla de un tren de engranes, que *generalmente está limitado por una razón de 10:1 aproximadamente*. El engranaje se vuelve grande y difícil de alojar más allá de esta razón si el piñón se mantiene por arriba del número mínimo de dientes mostrado en las tablas 8-4 y 8-5 (p. 555). Los trenes de engranes son **simples**, **compuestos** o **epicíclicos**. A continuación se repasará brevemente el diseño cinemático de los trenes de engranes. Para una información más detallada, consulte la referencia 4.

Trenes de engranes simples

Un tren de engranes simple es aquel donde cada eje tiene sólo un engrane: es el ejemplo más sencillo de un engranaje con dos engranes, que se ilustra en la figura 8-2 (p. 545). La *razón de velocidad* (llamada también *razón de trenes*) de un engranaje se obtiene con la ecuación 8.5*a* (p. 553). La figura 8-13 muestra un tren de engranes simple con cinco engranes en serie. La ecuación 8.8 es la expresión para esta razón de velocidad del tren:

$$m_V = \left(-\frac{N_2}{N_3}\right)\left(-\frac{N_3}{N_4}\right)\left(-\frac{N_4}{N_5}\right)\left(-\frac{N_5}{N_6}\right) = +\frac{N_2}{N_6} \tag{8.8}$$

Cada engranaje contribuye potencialmente a la razón de velocidad total; pero, en el caso de un tren simple (en serie), los efectos numéricos de todos los engranes se cancelan, excepto el primero y el último. La razón de un tren simple siempre es la que

hay entre el primero y el último engranes. Tan sólo se ve afectado el signo de la razón global del tren por los engranes intermedios, los cuales se denominan *locos*, ya que usualmente no se toma potencia de sus ejes. Si todos los engranes de un tren son de contacto externo y hay un número par, el sentido de giro de salida será opuesto al del engrane de entrada. Si el número de engranes externos del tren es impar, la salida estará en la misma dirección que la entrada, de modo que sólo es necesario un engrane externo loco, de *cualquier diámetro*, para modificar la dirección del engrane de salida sin afectar su velocidad.

Es práctica común insertar un solo engrane loco para cambiar la dirección; más de uno resulta superfluo. No se justifica diseñar un tren de engranes como el que se ilustra en la figura 8-13. Si se necesitan conectar dos ejes separados, se podría usar un tren de engranes simple con muchos engranes, aunque sería mucho más costoso que una transmisión de cadena o banda para la misma aplicación. Si el requerimiento es obtener una razón de engrane mayor de la que se obtendría con un engranaje simple, la ecuación 8.8 indica claramente que un tren de engranes simples no ayuda.

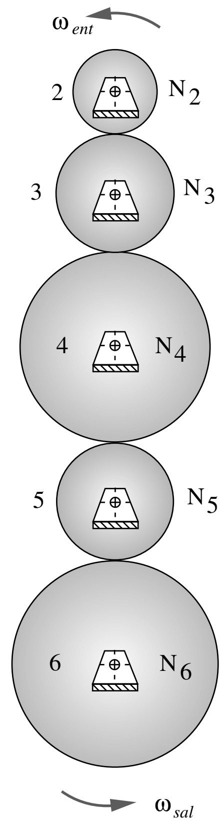


FIGURA 8-13

Tren de engranes simple

Trenes de engranes compuestos

Para obtener una razón de tren mayor de 10:1, se necesita un **tren de engranes compuesto** (a menos que se utilice un tren epicíclico; véase la siguiente sección). Un **tren de engranes compuesto** *es aquel donde al menos un eje tiene más de un engrane*. Éste tendrá una configuración en paralelo o paralelo en serie, en lugar de las conexiones en serie puras del tren de engranes simple. La figura 8-14*a* muestra un tren compuesto de cuatro engranes, dos de los cuales, los engranes 3 y 4, están sujetos al mismo eje; por lo tanto, tienen la misma velocidad angular. La razón del tren de engranes es ahora

$$m_V = \left(-\frac{N_2}{N_3}\right)\left(-\frac{N_4}{N_5}\right) \tag{8.9a}$$

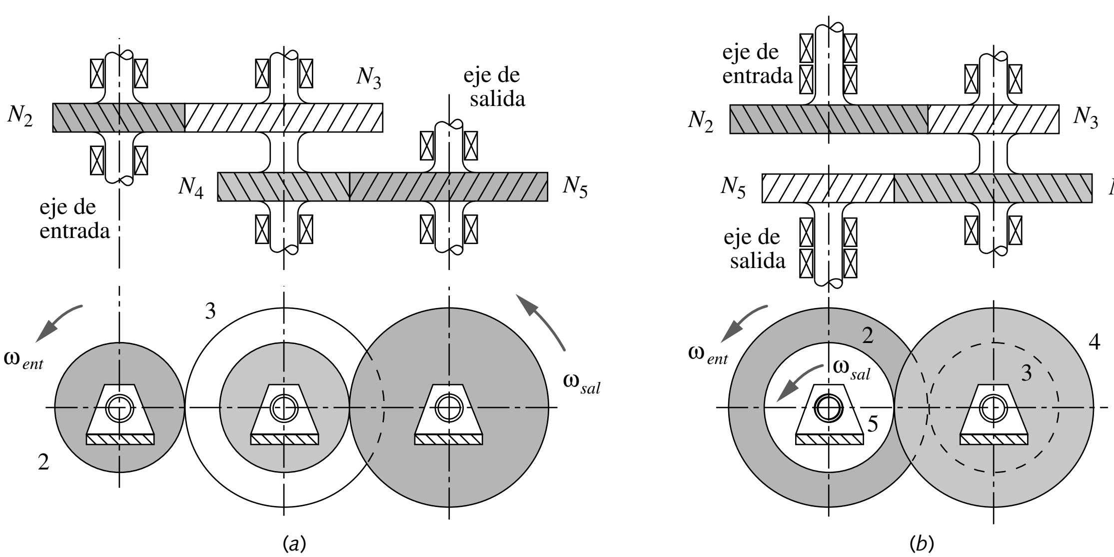


FIGURA 8-14

Trenes de engranes compuestos de dos etapas: (*a*) No invertido, (*b*) invertido

8

Lo anterior se podría generalizar para cualquier número de engranes en el tren como

$$m_V = \pm \frac{\text{producto del número de dientes de engranes impulsores}}{\text{producto del número de dientes de engranes impulsados}} \tag{8.9b}$$

Observe que estas razones intermedias no se cancelan y que la razón de tren total es el producto de las razones de los engranajes en paralelo, de modo que se obtiene una razón mayor en un tren de engranes compuesto a pesar de la limitación de aproximadamente 10:1, que se tiene para las razones de engranajes individuales. El signo de más o menos de la ecuación 8.9*b* depende del número y el tipo de los acoplamientos que hay en el tren, ya sean externos o internos. Escribir la expresión en la forma de la ecuación 8.9*a* y observar cuidadosamente el signo de cada razón de engranado, en la expresión misma, nos permite obtener el signo algebraico correcto para la razón total del tren de engranes.

Trenes compuestos invertidos

En la figura 8-14*a*, los ejes de entrada y de salida se encuentran en lugares diferentes. Esto sería muy aceptable o incluso deseable en algunos casos, lo cual depende de otras restricciones de alojamiento en el diseño general de una máquina. Esta caja de engranes, cuyos *ejes de entrada y de salida no coinciden*, se denomina **tren de tipo compuesto no invertido**. En algunos casos, como en las transmisiones de automóviles, es deseable, o incluso necesario, tener el *eje de salida concéntrico con el eje de entrada*, como se indica en la figura 8-14*b*. Esto se denomina comúnmente “reversión del tren” o “retroaplicación del tren”. El diseño de un **tren compuesto con reversión** es más complicado por la restricción adicional de que las distancias entre centros de las etapas deben ser iguales. Para mayor información, consulte la referencia 4.

8

EJEMPLO 8-2

Diseño de un tren de engranes compuesto

Problema **Diseñe un tren de engranes rectos compuesto, para una razón general del tren de 29:1.**

Se proporciona **Utilice engranes con un ángulo de presión de 25° con un módulo de 3 mm en todas las etapas.**

Suposiciones **La razón más grande en cualquier engranaje es de 10:1, aproximadamente. El número mínimo de dientes en cualquier piñón es de 12 (tabla 8-4, p. 555).**

Solución

1. La razón requerida es demasiado grande para una etapa (un engranaje), pero no para dos, apegándose cada una a la limitación de 10:1. Podemos tener una idea de las razones de engranaje necesarias tomando la raíz cuadrada de la razón de tren deseada: $(29)^{0.5} = 5.385$, de modo que dos engranajes con esta razón lo harán.

2. Como el número de dientes en cada engrane debe ser un entero, veamos qué tan cerca se puede estar de la razón de engrane 5.385:1, con combinaciones de dientes en números enteros, comenzando con el piñón más pequeño posible:

$$\begin{aligned} 12(5.385) &= 64.622 \\ 13(5.385) &= 70.007 \\ 14(5.385) &= 75.392 \end{aligned} \tag{a}$$

La segunda de éstas se ubica muy cerca de la razón correcta cuando se redondea a enteros.

3. Intente con dos engranajes de 13 dientes y 70 dientes. ¿Cuál es la razón de tren?

$$\left(\frac{70}{13}\right)\left(\frac{70}{13}\right) = 28.994 \qquad (b)$$

4. Si esto está lo suficiente cerca para la aplicación, el problema está resuelto. La única situación en que quizá no sería aceptable es cuando se requiere una razón exacta para proporcionar una funcionalidad de coordinación.
5. Observe que el uso de engranajes idénticos en un tren compuesto automáticamente lo revierte, permitiendo así que los ejes de entrada y de salida sean concéntricos.

Trenes de engranes planetarios o epicíclicos

Todos los trenes de engranes convencionales, descritos en las secciones anteriores, son dispositivos de un grado de libertad (1-DOF). Existe otra clase de trenes de engranes, los **trenes planetarios** o **epicíclicos**, que tienen gran aplicación. Se trata de mecanismos con dos grados de libertad (2-DOF). Se necesitan dos entradas para obtener una salida predecible. En algunos casos, como en el diferencial de un automóvil, hay una entrada (el eje impulsor) y se obtienen dos salidas acopladas por fricción (las dos ruedas impulsoras).

8

Los trenes planetarios o epicíclicos tienen varias ventajas sobre los trenes convencionales, entre las cuales está el hecho de que se pueden obtener razones de tren más grandes en alojamientos más pequeños, la reversión por omisión, así como salidas bidireccionales, concéntricas y simultáneas, a partir de una entrada unidireccional. Estas características hacen populares a los trenes de engranes para las transmisiones de automóviles y camiones, entre otros.

La figura 8-15*a* muestra un engranaje convencional con un grado de libertad, en el cual el eslabón 1 se inmovilizó para que actúe como el eslabón de fijación. En la figura 8-15*b* se muestra el mismo engranaje ahora con el eslabón 1 libre para girar como un **brazo** que conecta los dos engranes. Sólo el pivote del piñón está fijo y el grado de libertad del sistema es igual a 2. Lo anterior se ha convertido en un tren **epicíclico** con un **engrane solar** y uno **planetario** que gira alrededor del sol, mantenido en órbita por el **brazo**. Se requieren dos entradas. Generalmente, el brazo y el engrane solar son

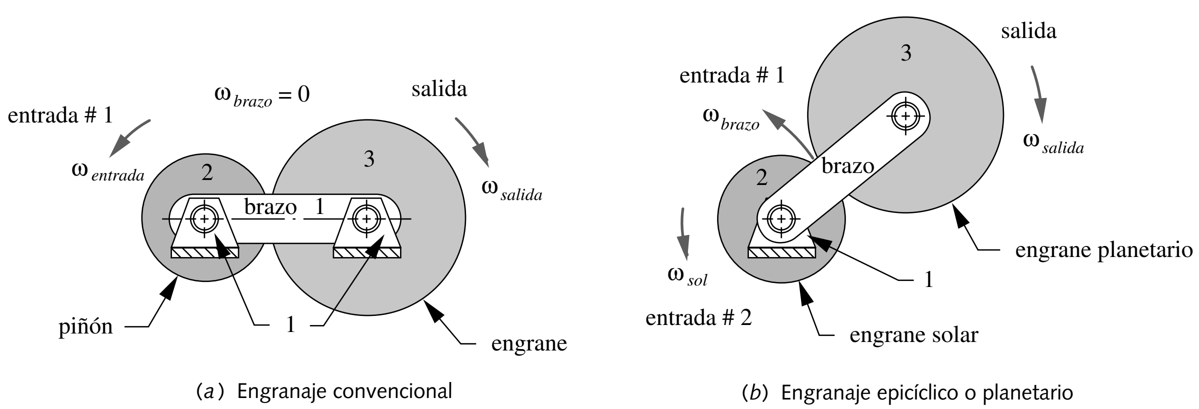


FIGURA 8-15

Los engranajes convencionales son casos especiales de los engranajes planetarios o epicíclicos

impulsados cada uno en cierta dirección, con cierta velocidad. En muchos casos, la velocidad una de estas entradas es igual a cero; por ejemplo, al aplicar un freno al brazo o al engrane solar. Observe que una velocidad de entrada cero en el brazo simplemente convierte al tren epicíclico en un tren convencional, como se muestra en la figura 8-15*a*, de modo que el tren de engranes convencional es tan sólo un caso especial del tren epicíclico más complejo, en el cual el brazo se mantiene estacionario.

En este sencillo ejemplo del tren epicíclico de la figura 8-15*b*, el único engrane al que se permite actuar como salida, después de poner como entradas al solar y al brazo, es el planetario. Resulta un poco difícil obtener una salida utilizable con este engrane planetario que orbita, ya que su pivote se mueve. En la figura 8-16 se muestra una configuración más útil, en la cual se incorporó un engrane anular. Este **engrane anular** se acopla con el planetario y se pivota concéntricamente con el piñón, de modo que sirve fácilmente como elemento de salida. La mayoría de los trenes planetarios se configuran con engranes anulares, con la finalidad llevar de nuevo el movimiento planetario a un pivote fijo. Observe como el engrane solar, el engrane anular y el brazo se perciben como ejes huecos concéntricos, de forma tal que es posible acceder a cada una para aprovechar su velocidad angular y su torque, ya sea como salida o como entrada.

8

Aun cuando es relativamente fácil visualizar el flujo de potencia a través de un tren de engranes convencional, así como observar las direcciones del movimiento de sus engranes, resulta muy difícil conocer el comportamiento de un tren planetario por mera observación. Se deben realizar los cálculos necesarios para determinar su comportamiento y los resultados frecuentes en contra de la intuición suelen ser sorprendentes. Como los engranes giran con respecto al brazo y el brazo mismo tiene movimiento, se debería usar la ecuación de diferencia de velocidad:

$$\omega_{engrane} = \omega_{brazo} + \omega_{engrane/brazo} \tag{8.10}$$

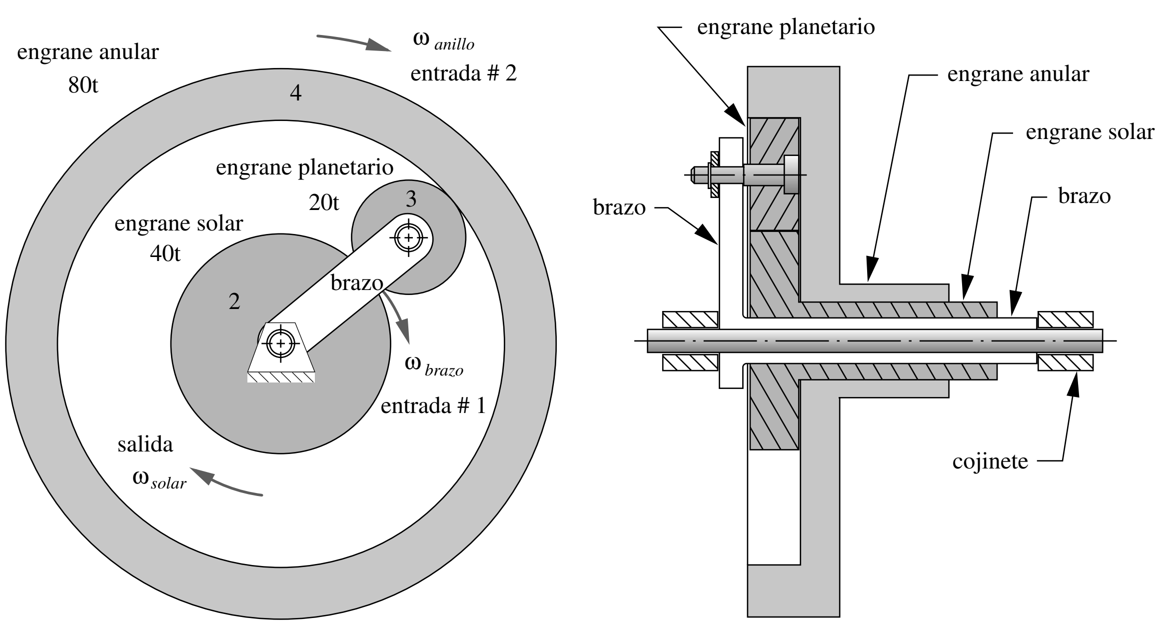


FIGURA 8-16

Tren de engranes planetario con un engrane anular usado como salida

Las ecuaciones 8.10 y 8.5*a* (p. 553) son todo lo que se necesita para determinar las velocidades en un tren epicíclico, siempre que se conozcan los números de dientes y dos condiciones de entrada. Reagrupe la ecuación 8.10 para obtener el término de diferencia de velocidad. Luego haga que ω_F represente la velocidad angular del primer engrane del tren (seleccionado en cualquier extremo) y ω_L, la velocidad angular del último engrane en el tren (el del otro extremo).

Para el primer engrane del sistema:

$$\omega_{F/brazo} = \omega_F - \omega_{brazo} \tag{8.11a}$$

Para el último engrane del sistema:

$$\omega_{L/brazo} = \omega_L - \omega_{brazo} \tag{8.11b}$$

Al dividir el último entre el primero:

$$\frac{\omega_{L/brazo}}{\omega_{F/brazo}} = \frac{\omega_L - \omega_{brazo}}{\omega_F - \omega_{brazo}} = m_V \tag{8.11c}$$

Lo anterior da una expresión para la razón m_V general del tren. El lado del extremo más a la izquierda de la ecuación 8.11*c* tan sólo implica los términos de diferencia de velocidades en relación con el brazo. Esta fracción es igual a la razón de los productos del número de dientes de los engranes, desde el primero hasta el último en el tren (como se definió en la ecuación 8.9*b*), la cual se sustituye en el lado del extremo más a la izquierda de la ecuación 8.11*c*.

$$\pm\frac{\text{producto del número de dientes de los engranes impulsores}}{\text{producto del número de dientes de los engranes impulsados}} = \frac{\omega_L - \omega_{brazo}}{\omega_F - \omega_{brazo}} \tag{8.12}$$

La ecuación 8.12 se resuelve para determinar cualquiera de las tres variables que se encuentran del lado derecho, siempre que las otras dos estén definidas como entradas para este tren de engranes con dos grados de libertad. Se deben conocer las velocidades del brazo y de un engrane o las velocidades de dos engranes designados como primero y último. Otra limitación de este método es que tanto el primero como el último engranes deben tener un pivote fijo (sin orbitar) y debe haber una ruta de engranaje que los conecte, la cual puede incluir engranes planetarios en órbita.

EJEMPLO 8-3

Análisis de un tren de engranes epicíclico

Problema **Determine la razón de tren entre un engrane solar y el brazo del tren epicíclico mostrado en la figura 8-16.**

Se proporciona **El engrane solar tiene 40 dientes, el engrane planetario 20 dientes y el engrane anular 80 dientes. El brazo es la entrada y el engrane solar es la salida. El engrane anular es estacionario.**

Suposiciones **El engrane solar es el primer engrane en el tren y el engrane anular es el último. Sea la ω del brazo igual a 1 rpm. La razón deseada del tren es sol/brazo.**

Solución

1. La ecuación 8.12 define la cinemática de un tren epicíclico:

$$\left(-\frac{N_2}{N_3}\right)\left(+\frac{N_3}{N_4}\right)=\frac{\omega_L-\omega_{brazo}}{\omega_F-\omega_{brazo}}$$

$$\left(-\frac{40}{20}\right)\left(+\frac{20}{80}\right)=\frac{0-1}{\omega_F-1} \qquad (a)$$

$$\omega_F=3$$

   lo cual define la razón del tren como +3. El engrane solar gira tres veces más rápido en la misma dirección del brazo. Observe los signos de las razones del engranaje. Uno es de un conjunto externo (−) y otro de un conjunto interno (+).

2. Los archivos EX12-03 se encuentran en el CD-ROM.

8.6 MANUFACTURA DE ENGRANES

8

Se utilizan varios métodos para fabricar engranes, los cuales se dividen en dos categorías: formado y maquinado. El maquinado se divide además en rectificado y acabado. El formado se refiere a las operaciones directas de vaciado, moldeado, rolado o extrusión de los perfiles de dientes con materiales fundidos, en polvo o ligeramente calentados. El rectificado y el acabado son técnicas de remoción de material que sirven para cortar o esmerilar el perfil del diente sobre un bloque sólido a temperatura ambiente. Los métodos de rectificado se realizan con frecuencia, sin aplicar ninguna operación de acabado posterior en engranes que no requieren mucha precisión. A pesar de su nombre, los procesos de rectificado (esmerilado) realmente crean un diente liso y preciso. Sólo cuando se requieren alta precisión y funcionamiento suave, se justifica el costo adicional de las operaciones de un acabado secundario.

Formado de dientes de engrane

En todas las operaciones de formado de dientes, todos los dientes del engrane se producen simultáneamente con un molde o dado, donde se maquinaron las formas de los dientes. La precisión de los dientes es totalmente dependiente de la calidad del dado o el molde; en general, es mucho menor de la que se obtendría aplicando los métodos de rectificado o acabado. Las herramientas que se utilizan en la mayoría de estos métodos son de alto costo, por lo cual sólo se justifican en producciones masivas. Para un estudio general de dichos procesos de manufactura, véase el apéndice B.

Fundición Los dientes se vierten al metal fundido en moldes de arena o dados, donde se maquinaron las formas deseadas. Su ventaja es el bajo costo, ya que la forma del diente se construye en el molde. Generalmente no se aplican operaciones de acabado sobre los dientes después de la fundición, aunque se podría hacer. Los dientes que se obtienen son de baja precisión y se utilizan sólo en aplicaciones que no son críticas, como juguetes, aparatos electrodomésticos pequeños o en mezcladoras de cemento, es decir, donde el ruido y la holgura excesivos de las partes no afectan la operación. La fundición en arena es un método económico para obtener pequeñas cantidades de engranes de baja calidad, pues los costos de las herramientas son razonables; no obstante, el acabado superficial y la exactitud dimensional son muy deficientes. La fundición en moldes de presión brinda mejores precisión y acabado superficial, aunque las herramientas tienen costos altos, por lo cual se requieren grandes volúmenes de producción para justificar su uso.

Fundición por investimenta También conocida como fundición en cera, da como resultado engranes razonablemente precisos para una diversidad de materiales. El molde se hace con un material refractario que permite la fundición de materiales a alta temperatura. La precisión depende del patrón original utilizado para elaborar el molde.

Sinterizado En él, se presionan los metales en polvo (PM) en las cavidades del modelo metálico en forma de engrane, luego se remueven y se les da tratamiento térmico (se sinterizan) para incrementar su resistencia. Tales engranes, hechos con metales en polvo, tienen una precisión similar a la de los engranes fundidos a presión; sin embargo, sus propiedades se controlan mezclando varios polvos metálicos. La técnica se utiliza normalmente en engranes pequeños.

Moldeo por inyección Sirve para hacer engranes no metálicos con varios termoplásticos, como el nylon y el acetal. Se trata de engranes con poca precisión en tamaños pequeños, cuya ventaja es un bajo costo y la capacidad de funcionar sin lubricante con cargas ligeras.

Extrusión Se utiliza para formar dientes sobre varillas largas, las cuales se cortan en longitudes adecuadas y se maquinan para aplicarse en barrenos centrales y cuñeros, entre otros. Los materiales no ferrosos como las aleaciones de cobre y aluminio se usan generalmente para la extrusión en lugar de los aceros.

Estirado en frío Forma dientes sobre varillas de acero moldeándolos a través de dados endurecidos. El trabajo en frío incrementa la resistencia y reduce la ductilidad. Las varillas se cortan después en longitudes adecuadas; además, se maquinan para alojarse en barrenos centrales y cuñeros, etcétera.

Estampado Las hojas metálicas se estampan con formas de dientes para crear engranes de baja precisión, en grandes cantidades, a bajo costo. El acabado superficial y la precisión son deficientes.

Maquinado

La mayoría de los engranes metálicos que se emplean para transmitir potencia en las máquinas se obtienen a través de un proceso de maquinado, a partir de bloques vírgenes vaciados, forjados o rolados en caliente. Los procesos de rectificado incluyen la elaboración de la forma del diente con cortadores formados o generadores con un cortador de cremallera, un cortador formador o una fresadora de engranes. Los procesos de acabado incluyen el cepillado, bruñido, rectificado, rectificado, o esmerilado. Cada uno de estos métodos se describirá brevemente.

Procesos de rectificado

Fresado de forma Requiere un cortador con cierta forma, como el mostrado en la figura 8-17 (el número 1). El cortador debe tener la forma del espacio del diente del engrane, con la geometría y el número de dientes para cada engrane específico. El cortador giratorio se clava en el bloque para cortar un diente a la vez. Luego, el bloque gira a través de un círculo de paso y se corta el siguiente diente. Como se necesita un cortador de forma diferente para cada tamaño de engrane, el costo de las herramientas es alto. Para reducir costos, a menudo se utiliza el mismo cortador para engranes de diferentes tamaños, lo que da como resultado errores de perfil en todos los dientes, menos en uno. Este método es el menos preciso de todos los métodos de rectificado.

Generación por cremallera Un cortador de cremallera con paso de involuta se puede hacer fácilmente, ya que la forma de sus dientes es trapezoidal (véase la figura 8-6 en la página 549). La cremallera afilada y endurecida (véase el número 2 en la figura 8-17) oscila a lo largo del eje del bloque del engrane y se alimenta hacia él, mientras gira alrededor del bloque del engrane, de modo que genera el diente de involuta sobre el engrane. La cremallera y el bloque se deben reposicionar periódicamente para completar la circunferencia. Este reposicionamiento puede generar errores en la geometría del diente, haciendo a este método menos preciso que otros que se estudiarán.

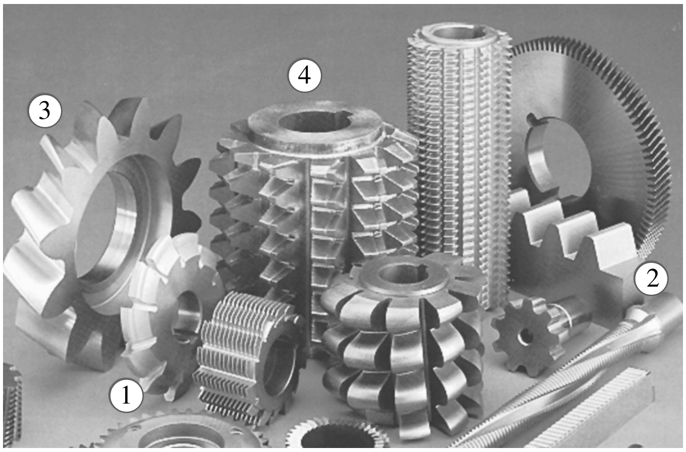


FIGURA 8-17

Una colección de herramientas de corte. 1. Cortador afilado. 2. Cortador de cremallera. 3. Cortador moldeador. 4. Fresadora *Cortesía de Pfauter-Maag Cutting Tools Limited Partnership, Loves Park, Ill.*

Formado de engranes Utiliza una herramienta de corte en forma de engrane (véase el número 3 en la figura 8-17), la cual se hace oscilar axialmente a través del bloque del engrane para cortar los dientes, en tanto que el bloque gira alrededor del cortador, como se ilustra en la figura 8-18. Se trata de un proceso de generación de forma real, donde la herramienta en forma de engrane corta a su imagen al engranarse con el bloque del engrane. La precisión es buena, aunque cualquier error en alguno de los dientes del cortador se transfiere directamente al engrane. También los engranes internos se suelen cortar con este método.

Fresado Una fresa, identificada con el número 4 en la figura 8-17, es similar a una rosca de machuelo. Sus dientes están formados para ajustarse al espacio del diente y se interrumpen con ranuras para proporcionar superficies de corte. Gira alrededor de un eje perpendicular al del bloque del engrane, cortando así el interior del bloque giratorio para producir el diente. Es el más preciso de los procesos de corte, ya que no se requiere el reposicionamiento de la herramienta o del bloque, por lo que cada diente se corta con múltiples fresas, promediando los errores de la herramienta. Se puede obtener un excelente acabado superficial con esta técnica, que es una de los más utilizadas en la producción de engranes.



FIGURA 8-18

Un cortador formador que corta un engrane helicoidal *Cortesía de Pfauter-Maag Cutting Tools Ltd Prtship, Loves Park, Ill.*

Procesos de acabado

Cuando se requiere precisión, se realizan más operaciones con los engranes obtenidos por los métodos anteriores. Las operaciones de acabado generalmente remueven poco o ningún material; pero mejoran la precisión dimensional, el acabado superficial y/o la dureza.

CEPILLADO Es similar al formado de engranes, aunque maneja herramientas de cepillado de precisión para remover pequeñas cantidades de material de un engrane rectificado, con la finalidad de corregir los errores del perfil y mejorar el acabado.

ESMERILADO Emplea un esmeril contorneado que se pasa sobre la superficie maquinada de los dientes del engrane, generalmente controlado por computadora, para eliminar pequeñas cantidades de material y mejorar el acabado superficial. Se puede usar en engranes que han sido endurecidos después del rectificado, para corregir las distorsiones del tratamiento térmico, así como para obtener las ventajas señaladas.

BRUÑIDO Corre el engrane maquinado burdamente contra un engrane especialmente endurecido. Las grandes fuerzas en el punto de contacto del diente provocan la fluencia plástica de la superficie del diente del engrane, lo cual mejora tanto el acabado como el trabajo de endurecimiento de la superficie, creando así esfuerzos residuales compresivos benéficos.

PULIDO Y AFILADO Utilizan un engrane impregnado de abrasivo o una herramienta en forma de engrane que se corre contra el engrane para desbastar la superficie. En ambos casos, la herramienta abrasiva impulsa el engrane en cantidades suficientes para acelerar y controlar la corrida para mejorar tanto el acabado superficial como la precisión.

Tabla 8-6
Números de calidad del engrane recomendados por la AGMA para diversas aplicaciones

Aplicación	Q_v
Tambor impulsor en una mezcladora de cemento	3–5
Horno de cemento	5–6
Impulsor de acero de un molino	5–6
Cosechadoras de maíz	5–7
Grúas	5–7
Perforadora a presión	5–7
Correa transportadora en minería	5–7
Máquina para fabricar cajas de papel	6–8
Mecanismo de un medidor de gas	7–9
Taladro de baja potencia	7–9
Lavadora de ropa	8–10
Prensa impresora	9–11
Mecanismo de computadoras	10–11
Transmisión automotriz	10–11
Impulsor de antena de radar	10–12
Impulsor de propulsión marina	10–12
Impulsor de motor de avión	10–13
Giroscopio	12–14

Calidad del engrane

El estándar AGMA 2000-A88 define las tolerancias dimensionales para los dientes de engrane y un índice de calidad Q_v que va desde la peor calidad (3) hasta la mayor precisión (16). Es el método de manufactura lo que determina fundamentalmente el índice de calidad Q_v del engrane.

Los engranes formados normalmente tienen índices de calidad de 3 a 4. Los engranes fabricados por los métodos de rectificado listados, por lo general, tienen un intervalo de calidad Q_v entre 5 y 7. Si los engranes tienen acabado de cepillado o esmerilado, Q_v estaría dentro del intervalo 8 a 11. El pulido y el afilado pueden alcanzar índices de calidad más altos. Evidentemente, el costo del engrane está en función de Q_v.

La tabla 8-6 presenta los índices de calidad recomendados por la AGMA para varias aplicaciones comunes de engranes. Otra forma de seleccionar un índice de calidad adecuado se basa en la velocidad lineal de los dientes del engrane en el punto de paso, llamada velocidad en la línea de paso. Las imprecisiones en el espaciado del diente originarán impactos entre los dientes, en tanto que las fuerzas de impacto se incrementan a mayores velocidades. La tabla 8-7 muestra los índices recomendados de calidad Q_v del engrane, en función de la velocidad en la línea de paso del engrane acoplado. Los engranes rectos raras veces se utilizan con velocidades en la línea de paso mayores a 10 000 ft/min (50 m/s), debido al exceso de ruido y a las vibraciones. En dichas aplicaciones se prefieren los engranes helicoidales (que son analizados en el capítulo siguiente).

Tabla 8-7
Números recomendados de calidad del engrane contra la velocidad en la línea de paso

Velocidad de paso	Q_v
0–800 fpm	6–8
800–2000 fpm	8–10
2000–4000 fpm	10–12
Más de 4000 fpm	12–14

La calidad del engrane ejerce un efecto significativo en la participación de los dientes para compartir la carga. Si los espaciamientos de los dientes no son precisos ni uniformes, no todos los dientes engranados estarán en contacto simultáneamente. Lo anterior hace innecesaria la ventaja de una razón de contacto grande. La figura 8-19 presenta dos engranes con una razón de contacto grande, aunque con precisión escasa. Sólo un par de dientes están en contacto y comparten la carga en la misma dirección. Los otros dientes

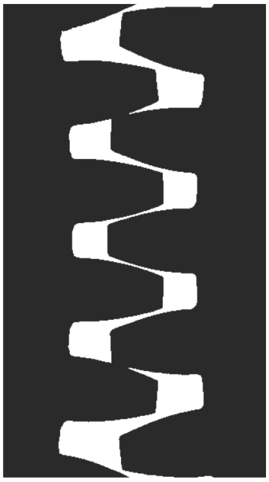


FIGURA 8-19

Diente de engrane recto real acoplado que muestra una deficiente participación de los dientes para compartir la carga debido a la imprecisión del diente Fuente: R.L. Thoen, "Minimizing Backlash in Spur Gears", *Gear Technology*, mayo/junio 1994, p. 27, con autorización.

del engranaje no tienen carga. A pesar de la razón de contacto aparente de aproximadamente 5, la razón de contacto real en este punto del engranaje es sólo de 1.

8.7 CARGA SOBRE ENGRANES RECTOS

El análisis de carga sobre los dientes de engranes en un engranaje se puede realizar aplicando los métodos estándar de análisis de carga, que se estudiaron en el capítulo 1, con las ecuaciones 1.2 o 1.3 (p. 8) como corresponda. Se analizará brevemente su aplicación en los dientes de engranes. La figura 8-20 muestra los dientes de dos engranes. Los dientes están acoplados (en contacto) realmente en el punto de paso, aunque para efectos de claridad se muestran separados. El piñón entrega un torque T_p al engrane. Se muestran los diagramas de cuerpo libre, tanto del engrane como del piñón. En el punto de paso, la única fuerza que se transmite de un diente a otro, ignorando la fricción, es la fuerza W que actúa a lo largo de la línea de acción en el ángulo de presión. Esta fuerza se descompone en dos componentes: W_r que actúa en la dirección radial y W_t en la dirección tangencial. La magnitud de la componente tangencial W_t se determina a partir de

$$W_t = \frac{T_p}{r_p} = \frac{2T_p}{d_p} = \frac{2p_d T_p}{N_p} \tag{8.13a}$$

donde T_p es el torque sobre el eje del piñón, r_p el radio de paso, d_p el diámetro de paso, N_p el número de dientes y p_d el paso diametral del piñón.

La componente radial W_r es

$$W_r = W_t \tan\phi \tag{8.13b}$$

y la fuerza resultante W es

$$W = \frac{W_t}{\cos\phi} \tag{8.13c}$$

Observe que la ecuación 8.13*a* se puede expresar para el engrane en lugar de para el piñón, ya que la fuerza W es igual, aunque de sentido opuesto en el engrane y el piñón.

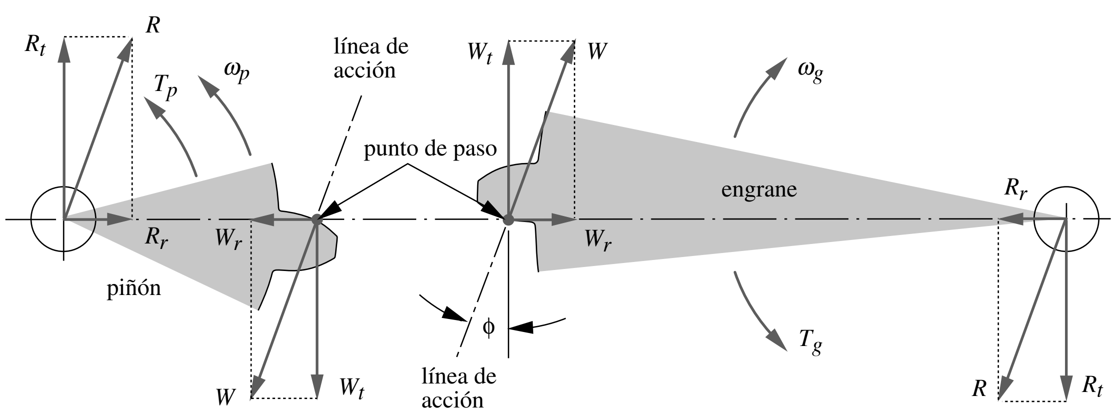


FIGURA 8-20

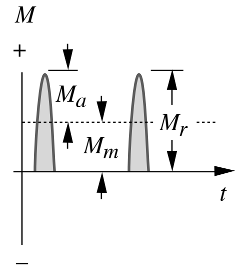
Fuerzas sobre el piñón y el engrane de un engranaje (los engranes se muestran separados para efectos de claridad; los puntos de paso se encuentran realmente en contacto)

La fuerza de reacción R y sus componentes R_t y R_r, en los pivotes, son iguales y con dirección opuesta a las fuerzas correspondientes, que actúan en el punto de paso del engrane o piñón respectivo. Las fuerzas en el piñón son iguales y con dirección opuesta a las que actúan sobre el engrane.

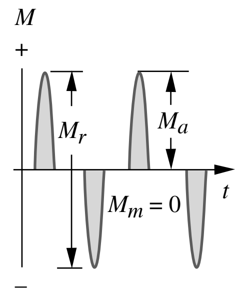
Dependiendo de la razón de contacto, los dientes pueden estar sujetos a toda o a parte de la carga W, en cualquier ubicación entre la punta del diente y un punto cercano al círculo del dedéndum, conforme gira a través del engranaje. Evidentemente, la peor condición de carga es cuando W actúa en las puntas de los dientes. Entonces, su componente tangencial W_t tiene el brazo del momento, con la longitud más grande posible, actuando sobre el diente como una viga en voladizo. Tanto el momento de flexión como la fuerza cortante transversal, debida a la flexión, serán máximos en la raíz del diente. Para razones de contacto > 1, habrá un punto de contacto más alto posible en un diente (HPSTC) en algún lado debajo de la punta, lo cual dará el momento de flexión máximo sobre el diente, siempre y cuando las exactitudes del engrane sean lo suficientemente buenas como para permitir que se comparta la carga. Si los dientes son de baja calidad, como los de la figura 8-19, entonces la punta soportará la carga completa sin importar la razón de contacto.

Incluso si el torque T_p es constante en el tiempo, cada diente experimentará carga repetida conforme pasa por el engranaje, creando así un escenario de carga de fatiga. En la figura 8-21*a* se indica la función momento de flexión-tiempo en un engranaje. Las componentes de flexión media (M_m) y alternante (M_a) del momento de flexión son iguales. La eliminación de los valores enteros de la razón de engrane m_G en los engranajes tiene la ventaja de evitar que los mismos dientes entren en contacto entre sí cada m_G revoluciones. Las razones fraccionarias distribuyen el contacto más equitativamente entre todos los dientes.

Si se inserta un engrane loco entre el piñón y el engrane para cambiar la dirección de la salida, cada uno de los dientes del engrane loco experimentará un ciclo de momento invertido, como se ilustra en la figura 8-21*b*, ya que la fuerza W actúa en los lados opuestos de cada diente loco debido a los engranajes alternos. Observe que el intervalo M_r de la magnitud del momento sobre el engrane loco es del doble de la de los engranes normales (que no son locos), volviéndolo un engrane cargado más fuertemente, incluso cuando su momento medio es igual a cero. Lo mismo aplica para los engranes planetarios, como se indica en la figura 8-16 (p. 562).



(*a*) Momento repetido sobre el diente del engrane (normal) que no es loco



(*b*) Momento invertido sobre el diente del engrane loco

FIGURA 8-21

Momentos de flexión que varían con el tiempo sobre los dientes del engrane

EJEMPLO 8-4

Análisis de carga en un tren de engranes rectos

Problema **Determine los torques y las cargas que se transmiten sobre los dientes del engrane en un tren de tres engranes, que contiene un piñón, un engrane loco y un engrane. Calcule los diámetros del engrane, así como las componentes media y alternante de la carga transmitida sobre cada engrane.**

Se proporciona **El eje del piñón transmite 20 hp a 2 500 rpm. La razón del tren es de 3.5:1. El piñón tiene 14 dientes, un ángulo de presión de 25° y p_d = 6. El engrane loco tiene 17 dientes.**

Suposiciones **El piñón se acopla con el engrane loco y el engrane loco se acopla con el engrane.**

Solución

1. Obtenga el número de dientes del engrane a partir de la información proporcionada:

$$N_g = m_G N_p = 3.5(14) = 49 \text{ dientes} \tag{a}$$

2. El torque sobre el eje del piñón se determina con la ecuación 6.1 (p. 415):

$$T_p = \frac{P}{\omega_p} = \frac{20 \text{ hp}\left(6\,600 \ \frac{\text{in - lb}}{\text{seg}} \Big/ \text{hp}\right)}{2\,500 \text{ rpm}\ (2\pi/60)\ \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \Big/ \text{rpm}} = 504 \text{ lb - in} \qquad (b)$$

3. El torque de salida es

$$T_g = m_G T_p = 3.5(504) = 1\,765 \text{ lb - in} \qquad (c)$$

4. Los diámetros de paso son:

$$d_p = \frac{N_p}{p_d} = \frac{14}{6} = 2.33 \text{ in}, \qquad d_i = \frac{17}{6} = 2.83 \text{ in} \qquad d_g = \frac{49}{6} = 8.17 \text{ in} \qquad (d)$$

5. La carga transmitida, que es la misma en los tres engranes, se calcula a partir del torque y del radio de cualquiera de los engranes:

$$W_t = \frac{T_p}{d_p/2} = \frac{504}{2.33/2} = 432 \text{ lb} \qquad (e)$$

6. La componente radial de carga es

$$W_r = W_t \tan\phi = 432 \tan 25° = 202 \text{ lb} \qquad (f)$$

7. La carga total es

$$W = \frac{W_t}{\cos\phi} = \frac{432}{\cos 25°} = 477 \text{ lb} \qquad (g)$$

8. Las cargas repetidas sobre cualquier diente del piñón o del engrane son

$$W_{t_{alternante}} = \frac{W_t}{2} = 216 \text{ lb} \qquad W_{t_{media}} = \frac{W_t}{2} = 216 \text{ lb} \qquad (h)$$

9. Las cargas de ciclo invertido sobre el engrane loco son

$$W_{t_{alternante}} = W_t = 432 \text{ lb} \qquad W_{t_{media}} = 0 \text{ lb} \qquad (i)$$

10. Los archivos EX12-04 se encuentran en el CD-ROM.

8.8 ESFUERZOS EN ENGRANES RECTOS

Hay dos modos de falla que afectan los dientes de los engranes: **fractura por fatiga,** debida a la variación de los esfuerzos de flexión en la raíz del diente, y **fatiga superficial** (picado) en la superficie del diente. Cuando se diseñan los engranes, se deben verificar ambos modos de falla. La fractura por fatiga, debida a la flexión, se previene con un diseño adecuado, manteniendo el estado de esfuerzos dentro de la línea del diagrama modificado de Goodman para el material, como se vio en el capítulo 4. Como la mayoría de los engranes con cargas pesadas se hacen con materiales ferrosos que tienen una resistencia límite de fatiga a la flexión, es posible lograr la vida infinita para las cargas de flexión. Sin embargo, como se vio en el capítulo 5, los materiales no presentan una resistencia límite de fatiga para esfuerzos repetidos en la superficie de contacto. Por lo tanto, no es posible diseñar engranes con vida infinita contra las fallas superficiales. Los

dientes de los engranajes diseñados adecuadamente nunca se deberían fracturar en servicio normal (excepto cuando hay sobrecargas mayores para las que fueron diseñados); no obstante, es de esperarse que a final de cuentas fallen por alguno de los mecanismos de desgaste analizados en el capítulo 5. El modo más común de falla es el picado, aun cuando se presente desgaste adhesivo o abrasivo (raspado o estriación), sobre todo cuando los engranes no se lubrican de forma apropiada durante el servicio. Se abordarán los dos modos principales de falla, mediante los procedimientos recomendados por la AGMA.

Esfuerzos de flexión

La ecuación de Lewis La primera ecuación útil para el esfuerzo de flexión en un diente de engrane la desarrolló W. Lewis, en 1892. Reconoció que un diente es una viga en voladizo con sección crítica en la raíz. Iniciando con la ecuación del esfuerzo de flexión en una viga en voladizo, dedujo lo que ahora se conoce como la ecuación de Lewis:

$$\sigma_b = \frac{W_t\, p_d}{FY} \tag{8.14}$$

donde W_t es la fuerza tangencial sobre el diente, p_d el diámetro de paso, F el ancho de la cara y Y es un factor geométrico adimensional, definido por él y conocido ahora como el factor de forma de Lewis. Este factor toma en cuenta la geometría del diente para determinar su resistencia efectiva en el filete de la raíz. Lewis publicó una tabla de valores de Y para engranes con diferentes ángulos de presión y distinto número de dientes.[5] Observe que la componente radial W_r no se toma en cuenta, ya que pone al diente en compresión y actúa para reducir los riesgosos esfuerzos de flexión por tensión. Por lo tanto, la omisión del esfuerzo radial es conservadora y también simplifica el análisis.

La ecuación de Lewis ya no se utiliza en su forma original, pero sirve de base para una versión más moderna, como la definida por la AGMA con base en el trabajo de Lewis y muchos otros. Los principios de la ecuación de Lewis aún son válidos, pero se ha enriquecido con factores adicionales para considerar los mecanismos de falla que se comprendieron posteriormente. Su factor de forma Y se sustituyó por el nuevo factor de geometría J, el cual incluye los efectos de la concentración de esfuerzos en el filete de la raíz.[3] En los tiempos de Lewis, aún no se habían descubierto las concentraciones de esfuerzos.

Ecuación de esfuerzo de flexión de la AGMA Tal como está definida en el estándar 2001-B88, es válida tan sólo para ciertos supuestos acerca de la geometría del diente y el engranaje:

1. La razón de contacto se encuentra entre 1 y 2.
2. No hay interferencia entre las puntas y los filetes de la raíz de los dientes acoplados ni rebaja del diente arriba del inicio teórico del perfil activo.
3. Ningún diente es puntiagudo.
4. Existe holgura distinta de cero.
5. Los filetes de la raíz son estándares, se suponen lisos y están fabricados mediante un proceso de generación.
6. Las fuerzas de fricción son despreciables.

El primer supuesto se aplica a pesar de la conveniencia teórica de altas razones de contacto, debido a que la carga real compartida entre los dientes en dichas situaciones está sometida a factores de precisión y rigidez del diente, los cuales son difíciles de predecir, lo que vuelve indeterminado el problema. Entonces, la suposición 1 es conservadora por las mayores razones de contacto. La suposición 2 limita el análisis a las combinaciones piñón-engrane que cumplen con las limitaciones mínimas del diente

descritas en las tablas 8-4 y 8-5 (p. 555). Si se necesitan números menores de dientes para efectos de embalaje, se tienen que utilizar adendos desiguales en los dientes y aplicar el método de la AGMA con el factor geométrico *J* adecuado en la ecuación. La suposición 3 implica los límites de adenda desiguales en los piñones. La suposición 4 reconoce los engranes con holgura igual a cero, que no funcionarán libremente debido a la fricción excesiva. La suposición 5 toma en cuenta el uso de factores de concentración de esfuerzos para los filetes de la raíz, con base en el trabajo de Dolan y Broghammer.[6] La suposición 6 se explica por sí misma. Además, este método es válido únicamente para engranes con dientes externos. La geometría de los dientes internos es muy diferente para requerir otro enfoque en el cálculo de los esfuerzos de flexión. Para mayor información, consulte el estándar de la AGMA.

La ecuación de la AGMA del esfuerzo de flexión es ligeramente diferente para la especificación de Estados Unidos y el sistema inglés, debido a la relación recíproca entre el paso diametral y el módulo. Se listarán ambas versiones con los sufijos *us* o *si*, sobre los números de la ecuación donde proceda.

$$\sigma_b = \frac{W_t\, p_d}{FJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{8.15us}$$

$$\sigma_b = \frac{W_t}{FmJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{8.15si}$$

El núcleo de la ecuación es la fórmula de Lewis con el factor geométrico *J* actualizado y sustituido, en lugar del factor de forma *Y*. W_t, *F* y p_d tienen el mismo significado que en la ecuación 8.14 y *m* es el módulo métrico. Los factores *K* son modificadores para tomar en cuenta varias condiciones. Se analizarán ahora cada uno de los términos empíricos de la ecuación 8.15.

FACTOR GEOMÉTRICO J DE RESISTENCIA A LA FLEXIÓN El factor geométrico *J* se calcula con un algoritmo complicado, definido en el estándar AGMA 908-B89. El mismo estándar proporciona también tablas de factores *J* para dientes estándares de profundidad completa, así como para dientes con adendos desiguales entre 25% y 50%, todos con ángulos de presión de 14.5, 20 y 25°. Estos factores *J* varían con el número de dientes del piñón y del engrane; además, se aplican sólo a un intervalo de combinaciones que cumplen con el supuesto 2 anterior. La AGMA recomienda que se eliminen las combinaciones diente-número que causen interferencia.

Las tablas 8-8 a 8-15* reproducen los factores geométricos *J* de la AGMA para un subconjunto de combinaciones engrane-diente cubiertas por el estándar. En estas ocho tablas se cubren los diseños de dos dientes de engrane (el diente de profundidad total y el diente con adéndum de 25% de largo), cada uno para dos ángulos de presión (20° y 25°); ambos para cargas en la punta y en el punto más alto de contacto en un diente individual (HPSTC). Para combinaciones diferentes, consulte el estándar.

Observe en estas tablas que los factores *J* son diferentes para el piñón y para el engrane (identificados como P y G) en cada combinación de engranaje. En consecuencia, hay diferentes niveles de esfuerzo de flexión en los dientes del piñón y los dientes del engrane. La letra U, en las tablas, indica que se presenta rebaje en esa combinación debido a la interferencia entre la punta del diente del engrane y el flanco de la raíz del piñón. La elección entre factores de carga en la punta o HPSTC *J* se tendría que hacer con base en la precisión de la manufactura del engranaje. Si las tolerancias de manufactura son pequeñas (engranes de alta precisión), entonces se puede suponer cómo comparten la carga los dientes y usar las tablas de HPSTC. Si no, entonces es probable que sólo un par de dientes soporten toda la carga en la punta en el peor de los casos, como se observa en la figura 8-19 (p. 568). Consulte el estándar AGMA 908-B89 para más información sobre variaciones aceptables de manufactura en la base de paso para conseguir el HPSTC.

* Tomado del estándar AGMA 908-B89, HOJA DE INFORMACIÓN, *Factores geométricos para determinar la resistencia al picado y la resistencia a la flexión de los dientes de engranes rectos, helicoidales, y Herringbone*, con autorización del editor, la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St. Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

8

FACTOR DINÁMICO K_V El factor dinámico K_v trata de tomar en cuenta las cargas vibratorias internas que se generan por el impacto entre dientes y están inducidas por un engranaje desajustado de los dientes del engrane. Tales cargas vibratorias se conocen como **error de transmisión** y son más grandes en engranes de baja precisión. Los engranes de precisión se aproximan más al ideal de transmisión del torque con suavidad y razón de velocidad constante. En ausencia de datos de prueba que definan el nivel del error de transmisión esperado en el diseño de un engrane específico, el diseñador habrá de estimar el factor dinámico. La AGMA proporciona curvas empíricas de K_v como una función de la velocidad en la línea de paso V_t. La figura 8-22* muestra una familia de dichas curvas, las cuales varían con el índice de calidad Q_v del engranaje. Las ecuaciones de las curvas numeradas de 6 a 11 en la figura 8-22 son

$$K_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{V_t}} \right)^B \tag{8.16us}$$

$$K_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{200 V_t}} \right)^B \tag{8.16si}$$

donde V_t es la velocidad en la línea de paso del engrane acoplado, en unidades de ft/min (Estados Unidos) o m/s (sistema métrico). Los factores A y B se definen como

$$A = 50 + 56(1 - B) \tag{8.17a}$$

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{2/3}}{4} \quad \text{para} \quad 6 \le Q_v \le 11 \tag{8.17b}$$

* Tomado del estándar AGMA 2001-B88, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, con autorización del editor, Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

8

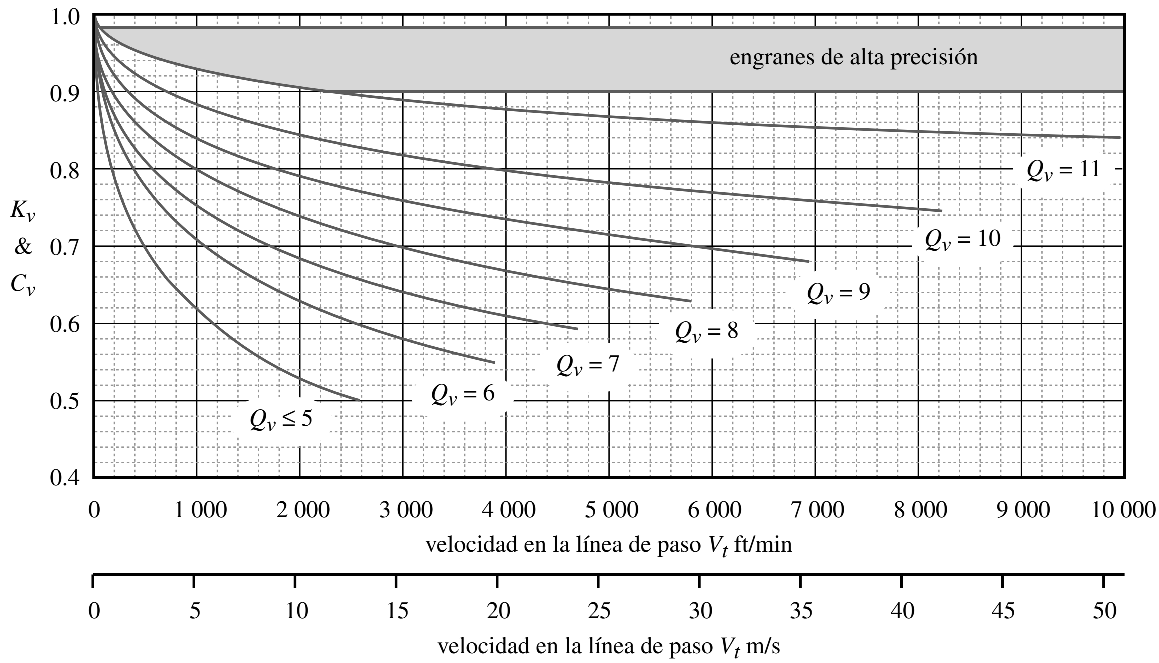


FIGURA 8-22

Factores dinámicos K_v y C_v de la AGMA

Tabla 8-8 Factor geométrico J para flexión de la AGMA, para 20°, y dientes de profundidad total con carga en la punta

Dientes en el engrane	Dientes en el piñón 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	U	U										
21	U	U	U	U	U	U	0.24	0.24								
26	U	U	U	U	U	U	0.24	0.25	0.25	0.25						
35	U	U	U	U	U	U	0.24	0.26	0.25	0.26	0.26	0.26				
55	U	U	U	U	U	U	0.24	0.28	0.25	0.28	0.26	0.28	0.28	0.28		
135	U	U	U	U	U	U	0.24	0.29	0.25	0.29	0.26	0.29	0.28	0.29	0.29	0.29

Tabla 8-9 Factor geométrico J para flexión de la AGMA, para 20°, y dientes de profundidad total con carga del HPSTC

Dientes en el engrane	Dientes en el piñón 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	U	U										
21	U	U	U	U	U	U	0.33	0.33								
26	U	U	U	U	U	U	0.33	0.35	0.35	0.35						
35	U	U	U	U	U	U	0.34	0.37	0.36	0.38	0.39	0.39				
55	U	U	U	U	U	U	0.34	0.40	0.37	0.41	0.40	0.42	0.43	0.43		
135	U	U	U	U	U	U	0.35	0.43	0.38	0.44	0.41	0.45	0.45	0.47	0.49	0.49

Tabla 8-10 Factor geométrico J para flexión de la AGMA, para 20° y 25%; dientes con adéndum largo con carga en la punta

Dientes en el engrane	Dientes en el piñón 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	0.27	0.19										
21	U	U	U	U	0.27	0.21	0.27	0.21								
26	U	U	U	U	0.27	0.22	0.27	0.22	0.28	0.22						
35	U	U	U	U	0.27	0.24	0.27	0.24	0.28	0.24	0.28	0.24				
55	U	U	U	U	0.27	0.26	0.27	0.26	0.28	0.26	0.28	0.26	0.29	0.26		
135	U	U	U	U	0.27	0.28	0.27	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28	0.29	0.28	0.30	0.28

Tabla 8-11 Factor geométrico J para flexión de la AGMA, para 20° y 25%; dientes con adéndum largo con carga del HPSTC

Dientes en el engrane	Dientes en el piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	0.36	0.24										
21	U	U	U	U	0.37	0.26	0.39	0.27								
26	U	U	U	U	0.37	0.29	0.39	0.29	0.41	0.30						
35	U	U	U	U	0.37	0.32	0.40	0.32	0.41	0.33	0.43	0.34				
55	U	U	U	U	0.38	0.35	0.40	0.36	0.42	0.36	0.44	0.37	0.47	0.39		
135	U	U	U	U	0.39	0.39	0.41	0.40	0.43	0.41	0.45	0.42	0.48	0.44	0.51	0.46

Tabla 8-12 Factor geométrico J para flexión de la AGMA, para 25°, y dientes de profundidad total con carga en la punta

Dientes en el engrane	Dientes en el piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	0.28	0.28												
17	U	U	0.28	0.30	0.30	0.30										
21	U	U	0.28	0.31	0.30	0.31	0.31	0.31								
26	U	U	0.28	0.33	0.30	0.33	0.31	0.33	0.33	0.33						
35	U	U	0.28	0.34	0.30	0.34	0.31	0.34	0.33	0.34	0.34	0.34				
55	U	U	0.28	0.36	0.30	0.36	0.31	0.36	0.33	0.36	0.34	0.36	0.36	0.36		
135	U	U	0.28	0.38	0.30	0.38	0.31	0.38	0.33	0.38	0.34	0.38	0.36	0.38	0.38	0.38

Tabla 8-13 Factor geométrico J para flexión de la AGMA, para 25°, y dientes de profundidad total con carga del HPSTC

Dientes en el engrane	Dientes en el piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	0.33	0.33												
17	U	U	0.33	0.36	0.36	0.36										
21	U	U	0.33	0.39	0.36	0.39	0.39	0.39								
26	U	U	0.33	0.41	0.37	0.42	0.40	0.42	0.43	0.43						
35	U	U	0.34	0.44	0.37	0.45	0.40	0.45	0.43	0.46	0.46	0.46				
55	U	U	0.34	0.47	0.38	0.48	0.41	0.49	0.44	0.49	0.47	0.50	0.51	0.51		
135	U	U	0.35	0.51	0.38	0.52	0.42	0.53	0.45	0.53	0.48	0.54	0.53	0.56	0.57	0.57

Tabla 8-14 Factor geométrico J para flexión de la AGMA, para 25° y 25%; dientes con adéndum largo con carga en la punta

Dientes en el engrane	Dientes en el piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	0.32	0.20														
14	0.32	0.22	0.33	0.22												
17	0.32	0.25	0.33	0.25	0.34	0.25										
21	0.32	0.27	0.33	0.27	0.34	0.27	0.36	0.27								
26	0.32	0.29	0.33	0.29	0.34	0.29	0.36	0.29	0.36	0.29						
35	0.32	0.31	0.33	0.31	0.34	0.31	0.36	0.31	0.36	0.31	0.37	0.31				
55	0.32	0.34	0.33	0.34	0.34	0.34	0.36	0.34	0.36	0.34	0.37	0.34	0.38	0.34		
135	0.32	0.37	0.33	0.37	0.34	0.37	0.36	0.37	0.36	0.37	0.37	0.37	0.38	0.37	0.39	0.37

Tabla 8-15 Factor geométrico AGMA J para flexión, para 25° y 25%; dientes con adéndum largo con carga del HPSTC

Dientes en el engrane	Dientes en el piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	0.38	0.22														
14	0.38	0.25	0.40	0.25												
17	0.38	0.29	0.40	0.29	0.43	0.29										
21	0.38	0.32	0.41	0.32	0.43	0.33	0.46	0.33								
26	0.39	0.35	0.41	0.35	0.44	0.36	0.46	0.36	0.48	0.37						
35	0.39	0.38	0.41	0.39	0.44	0.39	0.47	0.40	0.49	0.41	0.51	0.41				
55	0.39	0.42	0.42	0.43	0.44	0.44	0.47	0.44	0.49	0.45	0.52	0.46	0.55	0.47		
135	0.40	0.47	0.42	0.48	0.45	0.49	0.48	0.49	0.50	0.50	0.53	0.51	0.56	0.53	0.59	0.55

donde Q_v es el índice de calidad del engrane de menor calidad en el engranaje.

Observe en la figura 8-22 que cada una de estas curvas empíricas termina bruscamente en valores específicos de V_t. Se pueden extrapolar más allá de estos puntos, pero los datos experimentales a partir de los cuales fueron generadas no se extienden más allá de tales límites. Los valores donde termina V_t en cada curva se pueden calcular a partir de

$$V_{t_{máx}} = \left[A + \left(Q_v - 3\right)\right]^2 \quad \text{ft/min} \tag{8.18us}$$

$$V_{t_{máx}} = \frac{\left[A + \left(Q_v - 3\right)\right]^2}{200} \quad \text{m/s} \tag{8.18si}$$

Para engranes con $Q_v \leq 5$, se usa una ecuación diferente:

$$K_v = \frac{50}{50 + \sqrt{V_t}} \tag{8.19us}$$

$$K_v = \frac{50}{50 + \sqrt{200 V_t}} \tag{8.19si}$$

Esta relación es válida tan sólo cuando $V_t \leq 2\ 500$ ft/min (13 m/s), como se observa en la línea $Q_v = 5$ de la figura 8-22. Arriba de esta velocidad se tienen que utilizar engranes con una Q_v más alta.

Mark[7] dedujo un método de cálculo para el error de transmisión en engranes con ejes paralelos que toman en cuenta la desalineación de los cojinetes, la desalineación dinámica de ejes, las variaciones en el espaciamiento del diente, las modificaciones en el perfil del diente y la rigidez de las estructuras que soportan los cojinetes. Si se conoce la carga dinámica real, debida a los errores de transmisión, y se toma en cuenta al incrementar la carga aplicada W_t, entonces el factor dinámico K_v se puede igualar a 1.

Factor K_m de distribución de carga Cualquier desalineación o desviación axiales en la forma del diente causan que la carga transmitida W_t se distribuya desigualmente sobre el ancho de la cara de los dientes del engrane. El problema se acentúa en las caras con anchos más grandes. Un modo aproximado y conservador, para tomar en cuenta la menor distribución uniforme de la carga, consiste en aplicar el factor K_m para incrementar los esfuerzos de los mayores anchos de cara. Algunos valores sugeridos se muestran en la tabla 8-16. Una regla práctica útil es mantener el ancho de la cara F de un engrane recto dentro de los límites $8/p_d < F < 16/p_d$, con un valor nominal de $12/p_d$. Esta razón se conoce como el **factor del ancho de cara**.

Tabla 8-16
Factores K_m de distribución de carga

Ancho de cara in (mm)	K_m
<2 (50)	1.6
6 (150)	1.7
9 (250)	1.8
≥20 (500)	2.0

Aplicación del factor K_a En el modelo de carga analizado en la sección 8.7 se suponía que la carga transmitida W_t era constante en el tiempo. Los momentos variables sobre los dientes descritos en esa sección se debían a que los dientes entraban y salían del engranaje bajo una carga uniforme o promedio. Si la máquina impulsora o la impulsada tienen torques o fuerzas que varían con el tiempo, éstos incrementarán la carga sostenida por el diente del engrane por encima de los valores medios.

En ausencia de información definitiva acerca de las cargas dinámicas, en las máquinas impulsoras e impulsadas, se aplica el factor K_a para incrementar el esfuerzo en el diente con base en "el grado de choque" de la maquinaria conectada al tren de engranes. Por ejemplo, si el tren de engranes conecta un motor eléctrico con una bomba de agua centrífuga (ambos de los cuales son dispositivos de funcionamiento suave), no es necesario aumentar las cargas promedio y $K_a = 1$. Pero si un motor de combustión interna de un cilindro impulsa un triturador de piedras mediante un tren de engranes, tanto el generador de potencia como el dispositivo impulsado generan cargas de choque sobre los dientes de los engranes y $K_a > 1$. La tabla 8-17 presenta algunos valores sugeridos por la AGMA para K_a, con base en el nivel supuesto de cargas de choque en los dispositivos impulsor e impulsado.

Factor K_s de tamaño Se emplea del mismo modo que el factor de tamaño descrito en el capítulo 4 para la carga general de fatiga. Las muestras de prueba utilizadas para desarrollar los datos de resistencia a la fatiga son relativamente pequeñas (de aproximadamente 0.3 in de diámetro). Si la parte que se diseña es mayor que eso, podría resultar más débil de lo indicado por los datos de prueba. El factor K_s permite la modificación del esfuerzo en el diente para tomar en consideración en tales situaciones.

Tabla 8-17 Aplicación de factores K_a

	Máquina impulsada		
Máquina impulsora	**Uniforme**	**Impacto moderado**	**Impacto fuerte**
Uniforme (motor eléctrico, turbina)	1.00	1.25	1.75 o mayor
Impacto suave (motor de varios cilindros)	1.25	1.50	2.00 o mayor
Impacto medio (motor de un solo cilindro)	1.50	1.75	2.25 o mayor

Muchos de los datos disponibles acerca de resistencia del engrane se desarrollaron a partir de pruebas de dientes de engranes reales; por lo tanto, concuerdan mejor con la realidad que los datos de resistencia general del capítulo 4. La AGMA no ha establecido aún estándares para los factores del tamaño, pero recomienda hacer K_s igual a 1, a menos que el diseñador quiera elevar su valor para considerar situaciones específicas, como dientes muy largos, por ejemplo. En dichos casos, un valor conservador de K_s estaría entre 1.25 y 1.5.

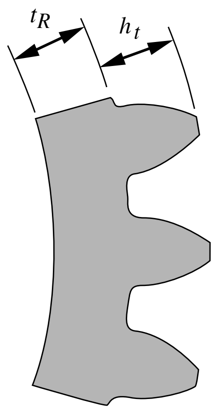


FIGURA 8-23

Parámetros de la AGMA para el factor K_B del espesor del aro

FACTOR K_B DE ESPESOR DEL ARO Este factor lo introdujo recientemente la AGMA para tomar en cuenta situaciones donde un engrane con diámetro grande, hecho con un aro y brazos radiales, en lugar de un disco sólido, tiene una profundidad pequeña del aro, en comparación con la profundidad del diente. Tales diseños pueden fallar con fractura radial en el aro, en lugar de en la raíz del diente. La AGMA define una **razón de respaldo** m_B como

$$m_B = \frac{t_R}{h_t} \tag{8.20a}$$

donde t_R es el espesor del aro del diámetro de la raíz del diente al diámetro interior del aro y h_t es la profundidad completa del diente (la suma del adéndum y el dedéndum), como se indica en la figura 8-23.* Esta razón se utiliza para definir el factor de espesor del aro a partir de

$$\begin{aligned} K_B &= -2m_B + 3.4 \qquad & 0.5 \le m_B \le 1.2 \\ K_B &= 1.0 & m_B > 1.2 \end{aligned} \tag{8.20b}$$

No se recomiendan razones de respaldo < 0.5. Los engranes de disco sólido siempre tendrán a $K_B = 1$.

FACTOR K_I DE UN ENGRANE LOCO Un engrane loco está sometido a más ciclos de esfuerzo por unidad de tiempo, con mayores cargas alternantes, que sus primos los engranes normales. Para considerar tal situación, el factor K_I se hace igual a 1.42 para un engrane loco, o bien, 1.0 para un engrane normal. La AGMA utiliza el recíproco de este factor para reducir la resistencia aparente del material de un engrane loco; sin embargo, no es consistente con el enfoque empleado en este texto, con aplicación de factores que afectan el estado de esfuerzos de una parte para la ecuación de esfuerzo, no para la resistencia del material.

EJEMPLO 8-5

Análisis del esfuerzo de flexión en un tren de engranes rectos

Problema **Determine un ancho de cara adecuado y los esfuerzos de flexión en los dientes de los tres engranes del tren del ejemplo 8-4.**

Se proporciona **La carga transmitida sobre los dientes es de 432 lb. El piñón tiene 14 dientes, un ángulo de presión de 25° y p_d = 6. El engrane loco tiene 17 dientes, y el engrane, 49 dientes. La velocidad del piñón es de 2 500 rpm. Véase el ejemplo 8-3, para más información dimensional.**

Suposiciones **Los dientes son de perfiles estándar de la AGMA de profundidad total. La carga y la fuente son de naturaleza uniforme. Se debe manejar un índice de 6 de calidad del engrane.**

* Tomado del estándar AGMA 2001-B88, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, con autorización del editor, Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandría, Va., 22314.

8

Solución

1. Aun cuando la carga transmitida es la misma, los esfuerzos de flexión en los dientes de cada tamaño de engrane son diferentes debido a la ligera diferencia en la geometría del diente. La fórmula general del esfuerzo de flexión en los dientes es la ecuación 8.15 (p. 572):

$$\sigma_b = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{a}$$

   W_t, p_d, F, K_a, K_m, K_v y K_s son comunes a todos los engranes del conjunto, mientras J, K_B y K_I son potencialmente diferentes para cada engrane.

2. Se puede hacer una primera aproximación del ancho de la cara, en función del paso diametral. Se toma el centro del intervalo de factores del ancho de la cara recomendados $8/p_d < F < 16/p_d$ para el primer cálculo:

$$F \cong \frac{12}{p_d} = \frac{12}{6} = 2 \text{ in} \tag{b}$$

3. Con base en la suposición de carga y fuente uniformes, el factor K_a se iguala a 1.

4. El factor de distribución de carga se estima de la tabla 8-16 (p. 577) con base en el ancho de cara supuesto: $K_m = 1.6$.

5. El factor de velocidad K_v se determina con las ecuaciones 8.16 y 8.17 (p. 573) con base en el índice de calidad supuesto Q_v del engrane y la velocidad en la línea de paso V_t.

$$V_t = \frac{d_p}{2}\omega_p = \frac{2.33 \text{ in}}{2(12)}(2\,500 \text{ rpm})(2\pi) = 1\,527\ \frac{\text{ft}}{\text{min}} \tag{c}$$

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{2/3}}{4} = \frac{(12-6)^{2/3}}{4} = 0.826 \tag{d}$$

$$A = 50 + 56(1 - B) = 50 + 56(1 - 0.826) = 59.745 \tag{e}$$

$$K_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{V_t}}\right)^B = \left(\frac{59.745}{59.745 + \sqrt{1\,527}}\right)^{0.826} = 0.660 \tag{f}$$

6. El factor de tamaño $K_s = 1$ para los tres engranes.

7. Todos estos engranes son muy pequeños como para tener un aro y brazos radiales, de modo que $K_B = 1$.

8. El factor de engrane loco $K_I = 1$ para el piñón y el engrane, y $K_I = 1.42$ para el engrane loco.

9. El factor geométrico de flexión J para 25° y 14 dientes del piñón engranado, con los 17 dientes del engrane loco, se obtiene de la tabla 8-13 (p. 575) con un valor de $J_{piñón} = 0.33$. El esfuerzo de flexión en los dientes del piñón es, entonces,

$$\sigma_{b_p} = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I = \frac{432(6)}{2(0.33)}\frac{1(1.6)}{0.66}(1)(1)(1) = 9\,526 \text{ psi} \tag{g}$$

10. El factor geométrico de flexión J para los 25° y 17 dientes del engrane loco acoplado, con los 14 dientes del piñón, se obtiene de la tabla 8-13 con un valor $J_{loco} = 0.36$. El esfuerzo de flexión en los dientes del engrane loco es:

$$\sigma_{b_i} = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I = \frac{432(6)}{2(0.36)}\frac{1(1.6)}{0.66}(1)(1)(1.42) = 12\ 400 \text{ psi} \tag{h}$$

Observe en la tabla 8-13 que el engrane loco tiene un factor J diferente cuando se considera que es el "engrane" acoplado con el piñón más pequeño (0.36), que cuando se considera "piñón" acoplado con un engrane más grande (0.37). Se utiliza el valor más pequeño de los dos, porque éste da como resultado el mayor esfuerzo.

11. El factor geométrico J de flexión para los 25° y 49 dientes del engrane acoplado, con los 17 dientes del engrane loco, se obtiene (por interpolación) de la tabla 8-13, con un valor de $J_{engrane} = 0.46$. El esfuerzo de flexión en el diente del engrane es, entonces,

$$\sigma_{b_g} = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \cong \frac{432(6)}{2(0.46)}\frac{1(1.6)}{0.66}(1)(1)(1) \cong 6\ 834 \text{ psi} \tag{i}$$

12. Si éste es un nivel de esfuerzo aceptable, entonces se utiliza el ancho de cara supuesto. Este tema se analizará nuevamente para el diseño en un capítulo posterior.

13. Los archivos EX12-05 se encuentran en el CD-ROM.

Esfuerzos superficiales

Los dientes de engranes acoplados tienen una combinación de rodamiento y deslizamiento, en su punto de contacto. En el punto de paso, su movimiento relativo es de rodamiento puro. El porcentaje de deslizamiento se incrementa con la distancia a partir del punto de paso. Algunas veces se toma el valor promedio, de 9% de deslizamiento, para representar el movimiento combinado de rodamiento-deslizamiento entre los dientes.[8] Los esfuerzos en la superficie del diente son esfuerzos de contacto hertzianos dinámicos en el rodamiento y deslizamiento combinados, como se define en la sección 5.11 (p. 383). Dichos esfuerzos son tridimensionales y tienen valores pico en la superficie o ligeramente debajo de ella, según la cantidad de deslizamiento presente en combinación con el rodamiento. Dependiendo de la velocidad superficial, los radios de curvatura del diente y la viscosidad del lubricante, se puede dar una condición de lubricación elastohidrodinámica (EHD), total o parcial, o una de lubricación límite en el punto de contacto, como se describió en el capítulo 7. Si se suministra suficiente lubricante limpio del tipo adecuado para crear, por lo menos, una lubricación EHD parcial (espesor específico de la película $\Lambda > 2$), para así prevenir la falla superficial adhesiva, abrasiva o los mecanismos de corrosión descritos en el capítulo 5, los únicos modos de falla serán el picado y la escamadura debido a la fatiga superficial. Véase la sección 5.7 (p. 366), para el estudio de este mecanismo, y la figura 5-12 (p. 369) para los ejemplos de falla superficial en dientes de engranes.

Las primeras investigaciones sistemáticas sobre los esfuerzos superficiales, en dientes de engranes, fueron realizadas por Buckingham,[9] quien descubrió que dos cilindros con el mismo radio de curvatura que los dientes de engranes en el punto de paso, cargados radialmente en contacto de rodamiento, se podrían utilizar para simular el contacto de los dientes de los engranes, mientras se controlan las variables necesarias. Su trabajo lo llevó al desarrollo de una ecuación para esfuerzos superficiales en los dientes de engranes, que ahora se conoce como la ecuación de Buckingham. Se emplea como base para la fórmula de resistencia contra el picado de la AGMA,[2] la cual es

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{W_t}{FId}\frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f} \tag{8.21}$$

donde W_t es la fuerza tangencial sobre el diente, d el diámetro de paso del más pequeño de los dos engranes acoplados, F el ancho de la cara e I el **factor geométrico superficial** adimensional de resistencia al picado. C_p es el **coeficiente elástico**, que toma en cuenta las diferencias de las constantes del material del engrane y del piñón. Los factores C_a, C_m, C_v y C_s son iguales, respectivamente, a K_a, K_m, K_v y K_s, como se definió en la ecuación 8.15 (p. 572) de esfuerzo a la flexión. Los factores nuevos I, C_p y C_f se definen a continuación.

Factor geométrico superficial I Este factor considera los radios de curvatura de los dientes del engrane y el ángulo de presión. La AGMA define la ecuación para I:

$$I = \frac{\cos\phi}{\left(\dfrac{1}{\rho_p} \pm \dfrac{1}{\rho_g}\right) d_p} \tag{8.22a}$$

donde ρ_p y ρ_g son los radios de curvatura de los dientes del piñón y del engrane, respectivamente, mientras ϕ es el ángulo de presión y d_p es el diámetro de paso del piñón. El signo $\pm$ toma en cuenta engranajes externos e internos. Se usa el signo de arriba para engranajes externos en todas las expresiones que se relacionan. Los radios de curvatura de los dientes se calculan a partir de la geometría del acoplamiento:

$$\begin{aligned} \rho_p &= \sqrt{\left(r_p + \frac{1+x_p}{p_d}\right)^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} - \frac{\pi}{p_d}\cos\phi \\ \rho_g &= C \operatorname{sen}\phi \mp \rho_p \end{aligned} \tag{8.22b}$$

donde p_d es el paso diametral, r_p es el radio de paso del piñón, ϕ es el ángulo de presión, C es la distancia entre los centros del piñón y del engrane, y x_p es el coeficiente de adendo del piñón, el cual es igual al porcentaje decimal de la elongación del adéndum para dientes con adéndum desigual. Para dientes estándares de profundidad completa, $x_p = 0$. Para dientes con adéndum del 25% de largo, $x_p = 0.25$, etcétera. Observe la elección del signo en la segunda ecuación 8.22*b*. Se emplea el signo de arriba para engranajes externos y el de abajo para un engranaje interno.

Coeficiente elástico C_p El coeficiente elástico, que toma en cuenta las diferencias en los materiales de los dientes, se obtiene a partir de

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi\left[\left(\dfrac{1-\nu_p^2}{E_p}\right) + \left(\dfrac{1-\nu_g^2}{E_g}\right)\right]}} \tag{8.23}$$

donde E_p y E_g son, respectivamente, los módulos de elasticidad del piñón y del engrane, y ν_p y ν_g son sus respectivas razones de Poisson. Las unidades de C_p son $(\text{psi})^{0.5}$ o $(\text{MPa})^{0.5}$. La tabla 8-18* muestra valores de C_p para varias combinaciones de materiales comunes para engranes y piñones, con base en un valor de ν supuesto de 0.3, para todos los materiales.

Factor de acabado superficial C_F Se utiliza para considerar acabados superficiales inusualmente ásperos en los dientes del engrane. La AGMA todavía no ha establecido estándares para los factores de acabado superficial, pero recomienda que C_f sea igual a 1 para engranes fabricados con métodos convencionales. Su valor se puede incrementar para tomar en cuenta acabados superficiales inusualmente ásperos, o bien, para la presencia conocida de esfuerzos residuales nocivos.

* Tomado del estándar AGMA 2001-B88, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, con autorización del editor, Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

Tabla 8-18 Coeficiente elástico C_p de la AGMA en unidades de $[\text{psi}]^{0.5}$ ($[\text{MPa}]^{0.5}$)*†

Material del piñón	E_p psi (MPa)	Material del engrane: Acero	Hierro maleable	Hierro nodular	Hierro fundido	Bronce al aluminio	Bronce al estaño
Acero	30*E*6 (2*E*5)	2 300 (191)	2 180 (181)	2 160 (179)	2 100 (174)	1 950 (162)	1 900 (158)
Hierro maleable	25*E*6 (1.7*E*5)	2 180 (181)	2 090 (174)	2 070 (172)	2 020 (168)	1 900 (158)	1 850 (154)
Hierro nodular	24*E*6 (1.7*E*5)	2 160 (179)	2 070 (172)	2 050 (170)	2 000 (166)	1 880 (156)	1 830 (152)
Hierro fundido	22*E*6 (1.5*E*5)	2 100 (174)	2 020 (168)	2 000 (166)	1 960 (163)	1 850 (154)	1 800 (149)
Bronce al aluminio	17.5*E*6 (1.2*E*5)	1 950 (162)	1 900 (158)	1 880 (156)	1 850 (154)	1 750 (145)	1 700 (141)
Bronce al estaño	16*E*6 (1.1*E*5)	1 900 (158)	1 850 (154)	1 830 (152)	1 800 (149)	1 700 (141)	1 650 (137)

†Los valores de E_p en esta tabla son aproximados; se utilizó $\nu = 0.3$ como una aproximación de la razón de Poisson para todos los materiales. Si existen números más precisos de E_p y ν, éstos se deberían emplear en la ecuación 7.23 para determinar C_p.

8

EJEMPLO 8-6

Análisis de esfuerzo superficial en un tren de engranes rectos

Problema **Determine los esfuerzos superficiales en los dientes de los tres engranes del tren de los ejemplos 8-4 y 8-5.**

Se proporciona **La carga transmitida sobre los dientes es de 432 lb. El piñón tiene 14 dientes, un ángulo de presión de 25° y p_d = 6. El engrane loco tiene 17 dientes y el engrane tiene 49 dientes. La velocidad del piñón es de 2 500 rpm. El ancho de la cara es de 2 in. Consulte el ejemplo 8-3 para más información dimensional.**

Suposiciones **Los dientes son de perfiles estándares de la AGMA de profundidad total. La carga y la fuente son ambas de naturaleza uniforme. Se debe usar un índice de calidad del engrane igual a 6. Todos los engranes son de acero con ν = 0.28.**

Solución

1. La fórmula general del esfuerzo superficial en el diente es la ecuación 8.21 (p. 580):

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{W_t}{FId}\frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f} \tag{a}$$

W_t, F, C_a, C_m, C_v y C_s son comunes para todos los engranes del conjunto. C_p, d, C_f e I son potencialmente diferentes para cada par engranado. Use la d más pequeña de un par engranado.

2. El ancho de la cara se determina como una función del paso diametral. Se toma la mitad del intervalo recomendado $8/p_d < F < 16/p_d$ para el primer cálculo:

$$F \cong \frac{12}{p_d} = \frac{12}{6} = 2 \text{ in} \tag{b}$$

* Tomado del estándar AGMA 2001-B88, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, con autorización del editor, Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

3. Dadas la carga y fuente uniformes, el factor C_a se hace igual a 1.
4. El factor de distribución de carga se estima con la tabla 8-16 (p. 577) según el ancho de cara supuesto: $C_m = K_m = 1.6$.
5. El factor de velocidad C_v se calcula con las ecuaciones 8.16 y 8.17 (p. 573), con base en el índice de calidad supuesto Q_v del engrane y la velocidad en la línea de paso V_t.

$$V_t = \frac{d_p}{2}\omega_p = \frac{2.33 \text{ in}}{2(12)}(2\,500 \text{ rpm})(2\pi) = 1\,527 \ \frac{\text{ft}}{\text{min}} \tag{c}$$

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{2/3}}{4} = \frac{(12-6)^{2/3}}{4} = 0.826 \tag{d}$$

$$A = 50 + 56(1 - B) = 50 + 56(1 - 0.826) = 59.745 \tag{e}$$

$$C_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{V_t}}\right)^B = \left(\frac{59.745}{59.745 + \sqrt{1\,527}}\right)^{0.826} = 0.660 \tag{f}$$

6. El factor de tamaño $C_s = 1$ para los tres engranes.
7. El factor de superficie $C_f = 1$ para engranes con buen acabado fabricados por métodos convencionales.
8. El coeficiente elástico C_p se obtiene con la ecuación 8.23 (p. 581).

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi\left[\left(\frac{1-\nu_p^2}{E_p}\right)+\left(\frac{1-\nu_g^2}{E_g}\right)\right]}} = \sqrt{\frac{1}{\pi\left[\left(\frac{1-0.28^2}{30E6}\right)+\left(\frac{1-0.28^2}{30E6}\right)\right]}} = 2\,276 \tag{g}$$

9. El factor geométrico de picado I se calcula para el par de engranes acoplados. Como se tienen dos engranajes (piñón/engrane loco y engrane loco/engrane), se deben calcular dos valores diferentes de I mediante las ecuaciones 8.22 (p. 581). Se necesitan el diámetro de paso y el radio de paso de cada engrane para este cálculo. A partir de los datos del ejemplo 8-4:

$$\begin{array}{lll} d_p = 2.333 & d_i = 2.833 & d_g = 8.167 \\ r_p = 1.167 & r_i = 1.417 & r_g = 4.083 \end{array} \tag{h}$$

10. Para el par piñón/engrane loco, sea $I_{pi} = I$, $d_1 = d_p$, $r_1 = r_p$ y $r_2 = r_i$; entonces,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{\left(r_1 + \frac{1}{p_d}\right)^2 - (r_1\cos\phi)^2} - \frac{\pi}{p_d}\cos\phi \\ &= \sqrt{\left(1.167 + \frac{1}{6}\right)^2 - (1.167\cos 25°)^2} - \frac{\pi}{6}\cos 25° = 0.338 \text{ in} \end{aligned} \tag{i}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= C\,\text{sen}\,\phi - \rho_1 = (r_1 + r_2)\,\text{sen}\,\phi - \rho_1 \\ &= (1.167 + 1.417)\,\text{sen}\,25° - 0.338 = 0.754 \text{ in} \end{aligned} \tag{j}$$

$$I_{pi} = \frac{\cos\phi}{\left(\frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2}\right)d_1} = \frac{\cos 25°}{\left(\frac{1}{0.338} + \frac{1}{0.754}\right)2.33} = 0.091 \tag{k}$$

11. Para el par engrane loco/engrane, sea $I_{ig} = I$, $d_1 = d_i$, $r_1 = r_i$ y $r_2 = r_g$; entonces,

$$\rho_1 = \sqrt{\left(r_1 + \frac{1}{p_d}\right)^2 - \left(r_1 \cos\phi\right)^2} - \frac{\pi}{p_d}\cos\phi$$

$$= \sqrt{\left(1.417 + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(1.417\cos 25°\right)^2} - \frac{\pi}{6}\cos 25° = 0.452 \text{ in} \qquad (l)$$

$$\rho_2 = C\operatorname{sen}\phi - \rho_1 = \left(r_1 + r_2\right)\operatorname{sen}\phi - \rho_1$$

$$= (1.417 + 4.083)\operatorname{sen} 25° - 0.452 = 1.872 \text{ in} \qquad (m)$$

$$I_{ig} = \frac{\cos\phi}{\left(\frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2}\right)d_1} = \frac{\cos 25°}{\left(\frac{1}{0.452} + \frac{1}{1.872}\right)2.83} = 0.116 \qquad (n)$$

12. El esfuerzo superficial para el engranaje piñón/engrane loco es, entonces,

$$\sigma_{c_p} = C_p\sqrt{\frac{W_t}{F I_{pi} d_p}\frac{C_a C_m}{C_v}C_s C_f}$$

$$= 2\,276\sqrt{\frac{432}{2(0.091)(2.33)}\frac{1(1.6)}{0.66}(1)(1)} = 113 \text{ kpsi} \qquad (o)$$

13. El esfuerzo superficial para el engranaje engrane loco/engrane es:

$$\sigma_{c_i} = C_p\sqrt{\frac{W_t}{F I_{ig} d_i}\frac{C_a C_m}{C_v}C_s C_f}$$

$$= 2\,276\sqrt{\frac{432}{2(0.116)(2.83)}\frac{1(1.6)}{0.66}(1)(1)} = 91 \text{ kpsi} \qquad (p)$$

14. Los archivos EX12-06 se encuentran en el CD-ROM.

8.9 MATERIALES PARA ENGRANES

Sólo un número limitado de metales y aleaciones son adecuados para los engranes que transmiten potencia significativa. La tabla 8-18 (p. 582) muestra algunos de ellos. Los aceros y los hierros fundidos, así como los hierros maleables y nodulares son las elecciones más comunes. Se recomienda el endurecimiento superficial o total (en las aleaciones que lo permiten), con la finalidad de obtener la resistencia suficiente y la resistencia al desgaste. Cuando se necesita alta resistencia a la corrosión, como en los ambientes marinos, con frecuencia se emplean los bronces. La combinación de un engrane de bronce y un piñón de acero tiene ventajas, en términos de compatibilidad y conformidad del material, como se vio en el capítulo 5, combinación que a menudo también se utiliza en aplicaciones que no sean marinas.

Hierros fundidos Se usan comúnmente para fabricar engranes. Los hierros fundidos grises (CI) tienen las ventajas de bajo costo, facilidad de maquinado, alta resistencia al desgaste y amortiguamiento interno (debido a las inclusiones de grafito), lo cual los hace más silenciosos que los engranes de acero. Sin embargo, tienen baja resistencia a la tensión, lo que exige dientes más grandes que en el caso de los engranes de acero, con la finalidad de obtener suficiente resistencia a la flexión. Los hierros nodulares tienen resistencia más alta a la tensión que el hierro fundido gris, y mantienen las ventajas

de facilidad de maquinado, resistencia al desgaste y amortiguamiento interno, aunque son más costosos. Con frecuencia se utiliza una combinación de un piñón de acero (para tener resistencia en el elemento sometido a los mayores esfuerzos) con un engrane de hierro fundido.

ACEROS También se usan comúnmente para fabricar engranes. Tienen mayor resistencia a la tensión que los hierros fundidos, así como un costo competitivo en aleaciones con pequeñas cantidades de otros materiales. Necesitan tratamiento térmico para obtener la dureza superficial que resista el desgaste; sin embargo, algunas veces se utilizan engranes de acero suave en aplicaciones de poca carga y baja velocidad o donde una vida larga no sea el interés principal. Para el tratamiento térmico se requiere un acero simple o aleado, al medio o alto carbonos (0.35 a 0.60% de carbono). Generalmente los engranes pequeños se endurecen totalmente, en tanto que los engranes más grandes se endurecen por llama o por inducción, para minimizar la distorsión. Los aceros al bajo carbono se pueden endurecer superficialmente por carburación o nitruración. Un engrane con recubrimiento endurecido tiene la ventaja de un núcleo resistente y una superficie dura; si el recubrimiento no es lo suficientemente profundo, los dientes suelen fallar por fatiga a la flexión, a pesar del material de recubrimiento sobre el núcleo suave y más débil. Si se necesita alta precisión, con frecuencia es necesario utilizar métodos adicionales de acabado, como el esmerilado, la rectificación y el pulido, para eliminar la distorsión del tratamiento térmico en los engranes endurecidos.

BRONCES Son los metales no ferrosos más comunes empleados en los engranes. El módulo de elasticidad más bajo de tales aleaciones de cobre permiten una mayor deflexión en el diente y mejora la capacidad para compartir la carga entre los dientes. Como los bronces y los aceros funcionan bien juntos, con frecuencia se utiliza la combinación de un piñón de acero y un engrane de bronce.

ENGRANES NO METÁLICOS Se fabrican con frecuencia inyectando materiales como el nylon y el acetal en moldes termoplásticos, algunas veces rellenos con materiales inorgánicos como vidrio o talco. Algunas ocasiones se agrega teflón al nylon, o al acetal, para disminuir el coeficiente de fricción. Se añaden lubricantes secos como el grafito o el bisulfuro de molibdeno (MoS_2) al plástico, con la finalidad de permitir el funcionamiento en seco. Los engranes compuestos con una cubierta reforzada de termoplásticos fenólicos se han utilizado, durante mucho tiempo, en aplicaciones como el engrane del árbol de levas (coordinación), impulsado por un piñón de acero en algunos motores de gasolina. Los engranes no metálicos hacen muy poco ruido; no obstante, están limitados en su capacidad de torque por sus bajas resistencias.

Resistencia de materiales

Como los modos de fatiga en los engranes implican la falla por fatiga, se necesitan los datos de resistencia a la fatiga del material, tanto para los esfuerzos de flexión como para los esfuerzos de contacto superficiales. Se pueden utilizar los métodos de estimación de resistencia a la fatiga descritos en el capítulo 4 para aplicaciones de engranes, ya que los principios que intervienen son los mismos. Sin embargo, los datos existentes de resistencias a la fatiga de las aleaciones para engranes son mejores, debido a los extensivos programas de pruebas realizados en el siglo pasado con estas aplicaciones. Los datos de prueba de resistencias a la fatiga de la mayoría de los materiales para engranes han sido recopilados por la AGMA. Como se mencionó en la sección 4.6 (p. 257) de este texto:

> La mejor información sobre resistencia a la fatiga de materiales en algún ciclo de vida finita, o bien, su resistencia límite para vida infinita, provienen de las pruebas de diseños de montajes reales o de prototipos… Si existen datos publicados de resistencia a la fatiga S_f' o de la resistencia límite S_e' del material, éstos se deberían utilizar…

Entonces no tendría sentido suponer una resistencia a la fatiga sin corregir como fracción de la resistencia última estática a la tensión y, luego, reducirla con los cálculos de los factores de corrección descritos en la sección 4.6 (p. 257), si se tienen datos más precisos de resistencia a la fatiga.

Resistencias de la AGMA de fatiga a la flexión en materiales para engranes

Los datos de la AGMA publicados, tanto para la resistencia a la fatiga por flexión como para la resistencia a la fatiga superficial, son, de hecho, resistencias a la fatiga parcialmente corregidas, ya que se generan con piezas de dimensiones apropiadas con los mismos acabado superficial, geometría, etcétera, igual que los engranes que se diseñarán. La AGMA se refiere a las resistencias de los materiales como *esfuerzos permitidos*, lo cual no es consistente con nuestro procedimiento de aplicación del término *esfuerzo* a los resultados de una carga aplicada, y del uso del término *resistencia* para referirse a las propiedades del material. Para lograr consistencia, dentro del texto, se designarán los datos publicados por la AGMA acerca de resistencia a la fatiga por flexión como S_{fb}' para diferenciarla de la resistencia a la fatiga sin corregir completamente S_f' del capítulo 4. Todavía hay tres factores de corrección que habrán de aplicarse a los datos de resistencia a la fatiga por flexión publicados por la AGMA, para obtener lo que se designará como la resistencia corregida de fatiga por flexión S_{fb} en los engranes.

Todos los datos de resistencia a la fatiga por flexión de la AGMA se establecieron para 1*E*7 ciclos de esfuerzos repetidos (en lugar de 1*E*6 o 5*E*8, que se utilizan algunas veces para otros materiales), y para un 99% del nivel de confiabilidad (en lugar del 50% de confiabilidad común para los datos de resistencia a la fatiga y estática, en general). Tales resistencias se comparan con el esfuerzo pico σ_b calculado con la ecuación 8.15 (p. 572) mediante la carga W_t. El análisis de la línea de Goodman se resume en esta comparación directa, pues los datos de resistencia se obtienen a partir de una prueba que brinda un estado de esfuerzo fluctuante, idéntico al de la carga real en el engrane.

8

La fórmula de corrección para la resistencia a la fatiga por flexión en los engranes es

$$S_{fb} = \frac{K_L}{K_T K_R} S_{fb}' \tag{8.24}$$

donde S_{fb}' es la resistencia a la fatiga por flexión publicada por la AGMA, como se definió anteriormente, S_{fb} es la resistencia corregida y los factores *K* son modificadores para tomar en cuenta varias condiciones. Ahora se definirán y se analizarán brevemente dichos modificadores.

Factor de vida K_L Como los datos de prueba son para una vida de 1*E*7 ciclos, un ciclo de vida menor o mayor requiere la modificación de la resistencia a la fatiga por flexión, con base en la relación *S-N* del material. El número de ciclos de carga en este caso se define como el número de contactos, bajo carga, del diente de engrane que se analiza. La figura 8-24* ilustra las curvas *S-N* para la resistencia a la fatiga por flexión en aceros que tienen varias resistencias a la tensión diferentes de las definidas por sus números de dureza Brinell. También se muestran en la figura las ecuaciones de las curvas ajustadas para cada línea *S-N*. Estas ecuaciones sirven para calcular el factor K_L adecuado para el número de ciclos de carga *N* requerido. La AGMA sugiere que:

> La parte superior de la zona sombreada se puede usar para aplicaciones comerciales. La parte inferior de la zona sombreada se usa normalmente en aplicaciones críticas de servicio, donde se permite un poco de picado y desgaste en el diente, y donde se requieren suavidad en la operación y niveles de vibración bajos.

Por desgracia, no se han desarrollado datos similares para materiales de engranes diferentes de estos aceros.

Factor de temperatura K_T La temperatura del lubricante es una medida razonable de la temperatura del engrane. Para materiales de acero con temperaturas de aceite hasta de 250 °F, K_T se puede hacer igual a 1. Para mayores temperaturas, K_T se estima a partir de

$$K_T = \frac{460 + T_F}{620} \tag{8.24a}$$

* Tomado del estándar AGMA 2001-B88, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, con autorización del editor, Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

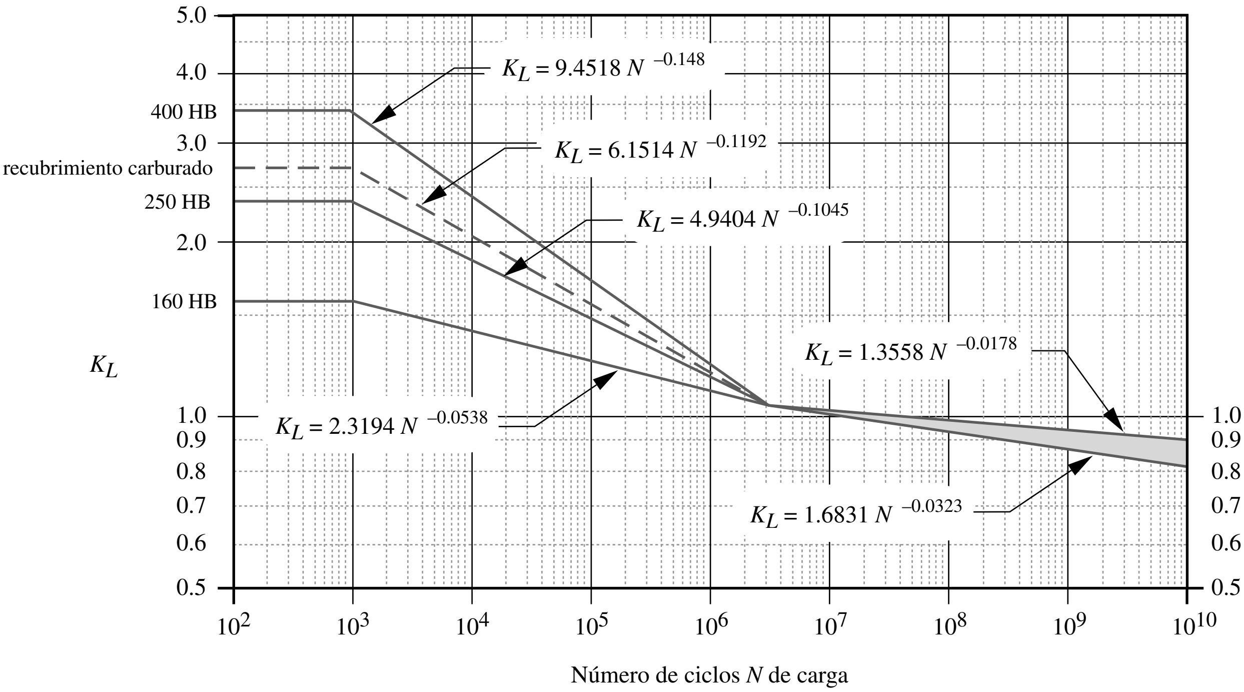


FIGURA 8-24*

Factor de vida K_L de resistencia a la flexión de la AGMA

donde T_F es la temperatura del aceite en °F. Esta relación no se debe emplear con materiales diferentes del acero.

Factor de confiabilidad K_R Los datos de resistencia de la AGMA se basan en la probabilidad estadística de 1 falla en 100 muestras, es decir, 99% de confiabilidad. Si esto es satisfactorio, sea $K_R = 1$. Si se desea un factor de seguridad mayor o menor, K_R se puede hacer igual a uno de los valores de la tabla 8-19.*

Tabla 8-19
Factor K_R de la AGMA

% de confiabilidad	K_R
90	0.85
99	1.00
99.9	1.25
99.99	1.50

Datos de resistencia a la fatiga por flexión La tabla 8-20 muestra datos de la AGMA de resistencias a la fatiga por flexión, para varios materiales de engranes que se utilizan comúnmente. El estándar de la AGMA también define especificaciones del tratamiento térmico donde son aplicables. En la figura 8-25* se presenta una gráfica con los intervalos de resistencias a la fatiga por flexión para aceros, como una función de la dureza Brinell. Consulte el estándar de la referencia para las propiedades metalúrgicas requeridas para los grados de la AGMA en aceros. Para lograr los valores de resistencia en la tabla 8-20 y en la figura 8-25, se debería especificar el material de acuerdo con el estándar.

Resistencias a la fatiga superficial de la AGMA para materiales de engranes

Se designarán los datos publicados por la AGMA sobre resistencia a la fatiga superficial como S_{fc}'. Hay cuatro factores de corrección que se tienen que aplicar a los datos publicados por la AGMA, con la finalidad de obtener lo que se designará como la resistencia corregida de fatiga superficial en los engranes S_{fc},

$$S_{fc} = \frac{C_L C_H}{C_T C_R} S_{fc}' \tag{8.25}$$

* Tomado del estándar AGMA 2001-B88, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, con autorización del editor, Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

Tabla 8-20 Resistencias de fatiga por flexión S_{fb}' de la AGMA, para un grupo de materiales para engranes*

Material	Clase AGMA	Designación del material	Tratamiento térmico	Dureza superficial mínima	Resistencia a la fatiga por tensión psi x 10^3	Resistencia a la fatiga por tensión MPa
Acero	A1–A5		Endurecido totalmente	≤ 180 HB	25–33	170–230
			Endurecido totalmente	240 HB	31–41	210–280
			Endurecido totalmente	300 HB	36–47	250–325
			Endurecido totalmente	360 HB	40–52	280–360
			Endurecido totalmente	400 HB	42–56	290–390
			Endurecido por llama o por inducción	Patrón tipo A 50–54 HRC	45–55	310–380
			Endurecido por llama o por inducción	Patrón tipo B	22	150
			Carburado y recubrimiento endurecido	55–64 HRC	55–75	380–520
		AISI 4140	Nitrurado	84.6 HR15N†	34–45	230–310
		AISI 4340	Nitrurado	83.5 HR15N	36–47	250–325
		Nitroaleación 135M	Nitrurado	90.0 HR15N	38–48	260–330
		Nitroaleación N	Nitrurado	90.0 HR15N	40–50	280–345
		Cromo al 2.5%	Nitrurado	87.5–90.0 15N	55–65	380–450
Hierro colado	20	Clase 20	Como está fundido		5	35
	30	Clase 30	Como está fundido	175 HB	8	69
	40	Clase 40	Como está fundido	200 HB	13	90
Hierro nodular (dúctil)	A-7-a	60-40-18	Recocido	140 HB	22–33	150–230
	A-7-c	80-55-06	Templado y revenido	180 HB	22–33	150–230
	A-7-d	100-70-03	Templado y revenido	230 HB	27–40	180–280
	A-7-e	120-90-02	Templado y revenido	230 HB	27–40	180–280
Hierro maleable (perlítico)	A-8-c	45007		165 HB	10	70
	A-8-e	50005		180 HB	13	90
	A-8-f	53007		195 HB	16	110
	A-8-i	80002		240 HB	21	145
Bronce	Bronce 2	AGMA 2C	Fundido en arena	40 ksi resistencia a la tensión mín.	5.7	40
	Al/Br 3	ASTM B-148 78 aleación 954	Tratado térmicamente	90 ksi resistencia a la tensión mín.	23.6	160

† Escala de Rockwell 15N usada para materiales con recubrimiento endurecido; véase la sección B.4

donde S_{fc}' es la resistencia a la fatiga superficial publicada, como se define en la tabla 8-21 (p. 590) y en la figura 8-26, S_{fc} es la resistencia corregida y los factores C son modificadores para tomar en cuenta varias condiciones. Los factores C_T y C_R son idénticos, respectivamente, a K_T y K_R y se pueden elegir como se indicó en la sección anterior. El factor de vida C_L tiene el mismo propósito de K_L en la ecuación 8.24, pero hace referencia a un diagrama *S-N* diferente. C_H es el factor de razón de dureza para resistencia al picado. Estos dos factores diferentes se definirán a continuación.

Factor de vida superficial C_L Como los datos de prueba de fatiga superficial publicados son para una vida de 1*E*7 ciclos, un ciclo de vida más grande o más pequeño requerirá una modificación de la resistencia superficial a la fatiga, con base en la relación *S-N* del material. El número de ciclos de carga en este caso se define como el número de contactos de acoplamiento, bajo carga, del diente de engrane que se analiza. La figura 8-26* muestra las curvas *S-N* para la resistencia superficial a la fatiga de aceros. También se muestran en la figura las ecuaciones de las curvas ajustadas para las líneas *S-N*. Estas

* Tomado del estándar AGMA 2001-B88, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, con autorización del editor, Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

8

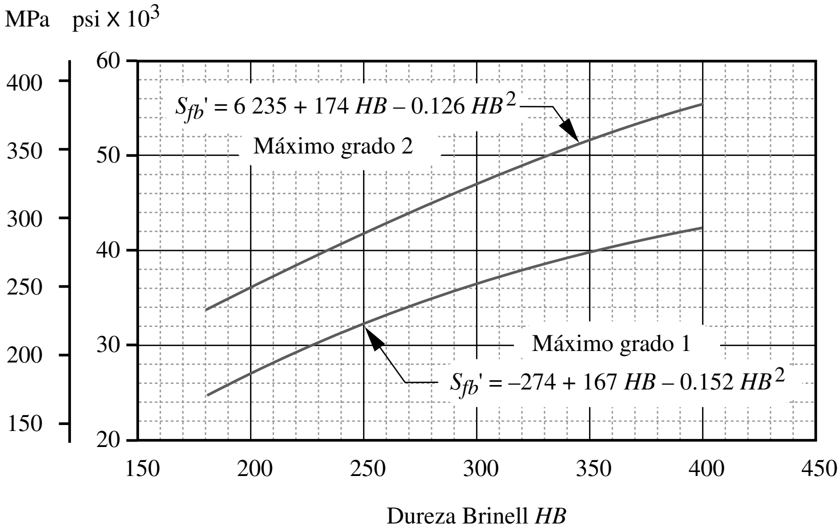


FIGURA 8-25

Resistencias de la AGMA para fatiga por flexión S_{fb}' en aceros*

ecuaciones se pueden utilizar para calcular el factor C_L adecuado para el número de ciclos de carga N requerido. La AGMA sugiere: "La porción superior de la zona sombreada se puede usar para aplicaciones comerciales. La porción inferior de la zona sombreada se usa normalmente en aplicaciones críticas de servicio, donde se permite un poco de picado y desgaste en el diente, así como donde se requieren suavidad en la operación y niveles de vibración bajos." Por desgracia, no se han desarrollado datos similares para materiales de engranes diferentes de estos aceros.

FACTOR DE RAZÓN DE DUREZA C_H Este factor es una función de la razón de engrane y de la dureza relativa entre el piñón y el engrane. C_H se encuentra en el numerador de la ecuación 8.25 y siempre es ≥ 1.0, de modo que actúa para incrementar la resistencia aparente del engrane. Este factor considera situaciones en las cuales los dientes del piñón son más duros que los dientes del engrane y, por lo tanto, actúan para trabajar las superficies de los dientes del engrane endurecido cuando corre. C_H se aplica sólo a la resistencia de los dientes del engrane, no para el piñón. En el estándar se sugieren dos fórmulas para su

* Tomado del estándar AGMA 2001-B88, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, con autorización del editor, Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

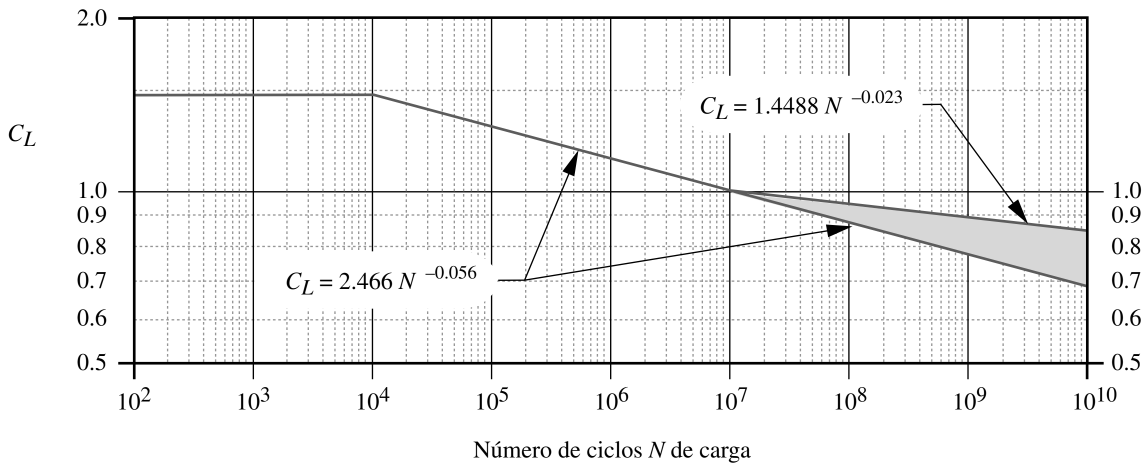


FIGURA 8-26*

Factor de vida de la AGMA para resistencia superficial a la fatiga C_L

Tabla 8-21 Resistencias de la AGMA para fatiga superficial S_{fc}' en un conjunto de materiales de engranes*

Material	Clase AGMA	Denominación del material	Tratamiento térmico	Dureza superficial mínima	Resistencia superficial a la fatiga psi x 10^3	Resistencia superficial a la fatiga MPa
Acero	A1–A5		Endurecido totalmente	≤ 180 HB	85–95	590–660
			Endurecido totalmente	240 HB	105–115	720–790
			Endurecido totalmente	300 HB	120–135	830–930
			Endurecido totalmente	360 HB	145–160	1000–1100
			Endurecido totalmente	400 HB	155–170	1100–1200
			Endurecido por llama o por inducción	50 HRC	170–190	1200–1300
			Endurecido por llama o por inducción	54 HRC	175–195	1200–1300
			Carburado y recubrimiento endurecido	55–64 HRC	180–225	1250–1300
		AISI 4140	Nitrurado	84.6 HR15N†	155–180	1100–1250
		AISI 4340	Nitrurado	83.5 HR15N	150–175	1050–1200
		Nitroaleación 135M	Nitrurado	90.0 HR15N	170–195	1170–1350
		Nitroaleación N	Nitrurado	90.0 HR15N	195–205	1340–1410
		Cromo al 2.5%	Nitrurado	87.5 HR15N	155–172	1100–1200
		Cromo al 2.5%	Nitrurado	90.0 HR15N	192–216	1300–1500
Hierro fundido	20	Clase 20	Como se fundió		50–60	340–410
	30	Clase 30	Como se fundió	175 HB	65–70	450–520
	40	Clase 40	Como se fundió	200 HB	75–85	520–590
Hierro nodular (dúctil)	A-7-a	60-40-18	Recocido	140 HB	77–92	530–630
	A-7-c	80-55-06	Templado y revenido	180 HB	77–92	530–630
	A-7-d	100-70-03	Templado y revenido	230 HB	92–112	630–770
	A-7-e	120-90-02	Templado y revenido	230 HB	103–126	710–870
Hierro maleable (perlítico)	A-8-c	45007		165 HB	72	500
	A-8-e	50005		180 HB	78	540
	A-8-f	53007		195 HB	83	570
	A-8-i	80002		240 HB	94	650
Bronce	Bronce 2	AGMA 2C	Fundido en arena	40 ksi resistencia a la tensión mín.	30	450
	Al/Br 3	ASTM B-148 78 aleación 954	Tratado térmicamente	90 ksi resistencia a la tensión mín.	65	450

† Escala Rockwell 15N utilizada para materiales con recubrimiento endurecido; véase la sección B.4

cálculo. La elección entre una y otra depende de la dureza relativa entre los dientes del piñón y los dientes del engrane.

Para piñones endurecidos totamente, que operan contra engranes endurecidos totamente:

$$C_H = 1 + A(m_G - 1) \tag{8.26a}$$

donde m_G es la razón de engrane y A se obtiene a partir de

$$\text{si} \quad \frac{HB_p}{HB_g} < 1.2 \quad \text{entonces } A = 0 \tag{8.26b}$$

* Tomado del estándar AGMA 2001-B88, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, con autorización del editor, Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

$$\text{si} \quad 1.2 \le \frac{HB_p}{HB_g} \le 1.7 \text{ entonces } A = 0.008\,98 \frac{HB_p}{HB_g} - 0.008\,29 \qquad (8.26c)$$

$$\text{si} \quad \frac{HB_p}{HB_g} > 1.7 \text{ entonces } A = 0.006\,98 \qquad (8.26d)$$

donde HB_p y HB_g son las durezas Brinell del piñón y del engrane, respectivamente.

Para piñones endurecidos superficialmente (> 48 HRC), que corren contra engranes endurecidos totamente, C_H se obtiene a partir de

$$C_H = 1 + B\left(450 - HB_g\right) \qquad (8.27)$$

$$B = 0.000\,75\,e^{-0.0112 R_q} \qquad (8.28us)$$

$$B = 0.000\,75\,e^{-0.052 R_q} \qquad (8.28si)$$

donde R_q es la aspereza superficial rms de los dientes del piñón en µin rms (véase la sección 5.1 en la p. 351).

La tabla 8-21* muestra resistencias de la AGMA para fatiga superficial en varios materiales de engranes usados comúnmente. El estándar de la AGMA define las especificaciones del tratamiento térmico para los aceros con recubrimiento endurecido. En la figura 8-27* se muestra una gráfica con los intervalos de las resistencias de la AGMA de fatiga superficial para aceros, en función de su dureza Brinell. Consulte el estándar de referencia de las propiedades metalúrgicas requeridas para los grados 1, 2 y 3 de aceros de la AGMA. Para obtener los valores de resistencia en la tabla 8-21 y en la figura 8-27 se debe especificar el material, de acuerdo con ese estándar.

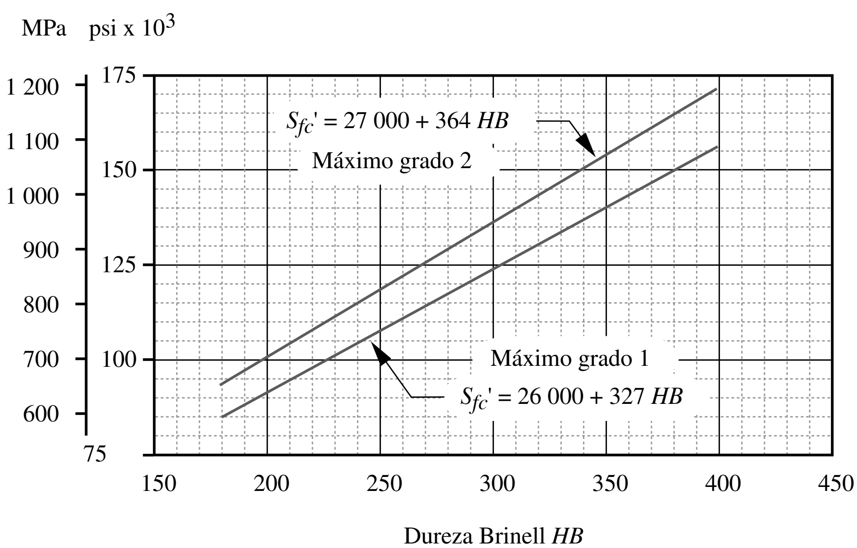


FIGURA 8-27

Resistencias de la AGMA para fatiga superficial S_{fc}' en aceros*

* Tomado del estándar AGMA 2001-B88, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, con autorización del editor, Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

EJEMPLO 8-7

Selección del material y del factor de seguridad para engranes rectos

Problema **Seleccione el material adecuado, luego calcule los factores de seguridad para los esfuerzos de flexión y superficiales en el tren de tres engranes de los ejemplos 8-4, 8-5 y 8-6.**

Se proporciona **Los esfuerzos se calcularon en los ejemplos 8-5 a 8-6.**

Suposiciones **La vida de servicio requerida es de 5 años de operación de un turno. Todos los engranes son de acero. La temperatura de operación es de 200 °F.**

Solución

1. Se puede hacer un estimado de la resistencia sin corregir a la fatiga por flexión con las curvas de la figura 8-25. Se intentará con un acero AGMA grado 2, endurecido completamente a 250 HB. La resistencia sin corregir de fatiga por flexión se obtiene con la curva superior de la figura

$$\begin{aligned} S_{fb'} &= 6\,235 + 174HB - 0.126HB^2 \\ &= 6\,235 + 174(250) - 0.126(250)^2 = 41\,860 \text{ psi} \end{aligned} \qquad (a)$$

8

2. Este valor necesita corregirse con ciertos factores con la ecuación 8.24.

3. El factor de vida K_L se determina con la ecuación adecuada de la figura 8-24, con base en el número de ciclos requeridos para la vida de los engranes. El piñón soporta en los dientes el número más grande de cargas repetidas, de modo que se calculará la vida tomando en cuenta esto. Primero se obtiene el número de ciclos N para la vida requerida de 5 años, para un turno.

$$N = 2\,500 \text{ rpm}\left(\frac{60 \text{ min}}{\text{hr}}\right)\left(\frac{2\,080 \text{ hr}}{\text{turno-año}}\right)(5 \text{ años})(1 \text{ turno}) = 1.56E9 \text{ ciclos} \qquad (b)$$

El valor de K_L se obtiene a partir de

$$K_L = 1.3558N^{-0.0178} = 1.3558(1.56E9)^{-0.0178} = 0.9302 \qquad (c)$$

4. Para la temperatura de operación especificada, $K_T = 1$.

5. Todos los datos del material del engrane se toman a un nivel de confiabilidad del 99%. En este caso es satisfactorio, por lo cual se hace $K_R = 1$.

6. La resistencia de fatiga por flexión corregida es, entonces,

$$S_{fb} = \frac{K_L}{K_T K_R} S_{fb'} = \frac{0.9302}{1(1)} 41\,860 = 38\,937 \text{ psi} \qquad (d)$$

7. Se realiza un estimado de la resistencia a la fatiga superficial sin corregir con las curvas de la figura 8-27. Para un acero AGMA de grado 2, endurecido totamente a 250 HB, la resistencia se obtiene con la curva superior de la figura

$$S_{fc'} = 27\,000 + 364HB = 27\,000 + 364(250) = 118\,000 \text{ psi} \qquad (e)$$

8. Este valor necesita corregirse con ciertos factores usando la ecuación 8.25:

$$S_{fc} = \frac{C_L C_H}{C_T C_R} S_{fc'} \qquad (f)$$

9. El factor de vida C_L se determina con la ecuación adecuada de la figura 8-26, con base en el número de ciclos N requeridos obtenidos anteriormente.

$$C_L = 1.4488 N^{-0.023} = 1.4488(1.56E9)^{-0.023} = 0.8904 \qquad (g)$$

10. $C_T = K_T = 1$ y $C_R = K_R = 1$.

11. Como en este caso las durezas de los engranes y el piñón son las del mismo material, $C_H = 1$.

12. La resistencia de fatiga superficial corregida es, entonces,

$$S_{fc} = \frac{C_L C_H}{C_T C_R} S_{fc'} = \frac{0.8904(1)}{1(1)} 118\,000 = 105\,063 \text{ psi} \qquad (h)$$

13. El factor de seguridad contra fallas por flexión se obtiene comparando la resistencia a la flexión corregida con el esfuerzo de flexión para cada engrane del acoplamiento:

$$N_{b_{piñón}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{piñón}}} = \frac{38\,937}{9\,526} = 4.1 \qquad (i)$$

$$N_{b_{loco}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{loco}}} = \frac{38\,937}{12\,400} = 3.1 \qquad (j)$$

$$N_{b_{engrane}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{engrane}}} = \frac{38\,937}{6\,834} = 5.7 \qquad (k)$$

lo cual es aceptable.

14. El factor de seguridad contra falla superficial se obtiene comparando la carga real con la carga que produciría un esfuerzo igual a la resistencia superficial, corregida del material. Como el esfuerzo superficial se relaciona con la raíz cuadrada de la carga, el factor de seguridad de la fatiga superficial se calcula como el cociente del cuadrado de la resistencia superficial corregida dividida entre el cuadrado del esfuerzo superficial de cada engrane en el acoplamiento:

$$N_{c_{piñón\text{-}loco}} = \left(\frac{S_{fc}}{\sigma_{c_{piñón}}}\right)^2 = \left(\frac{105\,063}{113\,315}\right)^2 = 0.86 \qquad (l)$$

$$N_{c_{loco\text{-}engrane}} = \left(\frac{S_{fc}}{\sigma_{c_{loco}}}\right)^2 = \left(\frac{105\,063}{90\,696}\right)^2 = 1.34 \qquad (m)$$

lo cual es muy bajo para el engranaje piñón-engrane loco.

15. Un pequeño cambio en el diseño mejorará esto. Incrementando el ancho de la cara de los engranes de 2.0 a 2.5 in $(15/p_d)$, se reducen todos los esfuerzos y se obtienen los nuevos factores de seguridad

$$N_{b_{piñón}} = 5.1 \qquad N_{b_{loco}} = 3.9 \qquad N_{b_{engrane}} = 7.1$$
$$N_{c_{piñón\text{-}loco}} = 1.1 \qquad N_{c_{loco\text{-}engrane}} = 1.7 \qquad (n)$$

8

16. Estos engranes son muy seguros contra la rotura del diente; con base en las suposiciones y cálculos, deberían tener un 99% de probabilidad de durar los 5 años requeridos antes del picado del piñón o el engrane loco.
17. Los archivos EX12-07a y EX12-07b se encuentran en el CD-ROM.

8.10 LUBRICACIÓN DE ENGRANAJES

Con excepción de los engranes de plástico ligeramente cargados, todos los engranajes se tienen que lubricar para eliminar fallas prematuras por uno de los modos de falla superficial analizados en el capítulo 5, como el desgaste adhesivo o abrasivo. El control de la temperatura en el punto de contacto del engranaje es importante en la reducción del raspado y la estriación de los dientes. Los lubricantes eliminan el calor, pero también separan las superficies metálicas para reducir la fricción y el desgaste. Se debe alimentar suficiente lubricante para transferir el calor de la fricción al ambiente, sin permitir temperaturas locales excesivas en el engranaje.

El enfoque usual y preferido es un baño de aceite alojando los engranes en una caja con aceite, llamada caja de engranes, la cual se llena parcialmente con un lubricante adecuado, de modo que por lo menos un miembro de cada engranaje esté parcialmente sumergido. (La caja nunca se llena completamente con aceite.) La rotación del engrane llevará el lubricante a los engranajes y mantendrá aceitados los engranes que no estén sumergidos. El aceite se debe mantener limpio y libre de contaminantes, y se tiene que cambiar periódicamente. Una configuración menos deseable, que se utiliza algunas veces en situaciones cuando la caja de engranes no es práctica, consiste en aplicar periódicamente grasa lubricante a los engranes cuando están detenidos para revisarse. La grasa es simplemente aceite derivado del petróleo suspendido en una emulsión de jabón. Esta lubricación de contacto con grasa hace poco para eliminar el calor, por lo que se recomienda sólo para engranes de baja velocidad, ligeramente cargados.

Los aceites para lubricar engranes son generalmente aceites derivados del petróleo, de diferente viscosidad, lo cual depende de la aplicación. Algunas veces se utilizan aceites ligeros (10-30W) en engranes con velocidades lo suficientemente altas y/o cargas lo suficientemente bajas para facilitar la lubricación elastohidrodinámica (véase el capítulo 7). En engranajes con mucha carga y/o baja velocidad, o aquéllos de componentes grandes que se deslizan, se usan con frecuencia lubricantes de presión extrema (EP), que por lo general son aceites para engranes de 80-90W, con aditivos que contienen ácidos grasos que brindan algo de protección contra el raspado en condiciones de lubricación límite. Véase la sección 5.3 (p. 354) y el capítulo 7 para mayor información sobre lubricación y lubricantes. La AGMA ofrece datos extensos en sus estándares sobre la selección adecuada de lubricantes para engranes. Se remite al lector a esa y otras fuentes, como los vendedores de lubricantes, para una información más detallada sobre lubricantes.

8.11 DISEÑO DE ENGRANES RECTOS

El diseño de engranes usualmente requiere de algo de iteración. Generalmente no existe información suficiente en el planteamiento del problema para despejar directamente las incógnitas. Se deben suponer los valores de algunos parámetros y realizar un intento de solución. Son posibles muchos enfoques.

Por lo general, se conocen la razón de engrane, así como la potencia y la velocidad, o bien, el torque y la velocidad de un eje. Los parámetros a determinar son los diámetros de paso del piñón y del engrane, el paso diametral, el ancho de la cara, el(los) material(es) y los factores de seguridad. Hay que tomar algunas decisiones en lo referente a la precisión de engranaje requerida, el número de ciclos, el ángulo de presión, el perfil del diente (de adéndum estándar o largo), el método de fabricación del engrane (en lo que concierne al acabado superficial), el intervalo de temperatura de operación y la confiabilidad deseada. Por lo menos, con esta información preliminar sobre dichos factores es posible iniciar el proceso de diseño.

Finalmente, se necesita calcular los factores de seguridad, tanto de la fatiga por flexión como de fallas por fatiga superficial. Lo anterior se puede investigar en cualquier orden; no obstante, la mejor estrategia es determinar primero los esfuerzos de flexión, ya que el incremento en la dureza superficial del material ejerce un efecto mayor sobre la vida al desgaste que sobre la resistencia a la flexión. De modo que, si el material elegido sobrevive a los esfuerzos de flexión, su dureza se ajusta para mejorar la vida al desgaste, sin otro cambio en el diseño. El incremento en el tamaño del diente también produce un efecto mayor sobre la resistencia del diente que sobre la vida al desgaste, además de que el tamaño del diente es la variable principal en los cálculos.

Antes de que se haga cualquier cálculo, se deben determinar las cargas. La carga tangencial sobre el diente del engrane se obtiene a partir del torque conocido sobre el eje y un radio de paso supuesto para su piñón o engrane (véase la ecuación 8.13*a*, p. 568). Observe que un radio de paso más grande reduce la carga en el diente, pero incrementa la velocidad en la línea de paso. Se debe llegar a un equilibrio razonable entre tales factores. Asimismo, un radio de paso pequeño da como resultado un piñón con muy pocos dientes para eliminar la interferencia, dependiendo del paso diametral o del módulo seleccionado. Una vez que se elige un paso diametral candidato, se tiene que utilizar el diámetro de piñón mínimo aceptable como primera selección, con la finalidad de mantener pequeño el tamaño del embalaje. En el primer intento de diseño se tiene que usar un perfil estándar de diente para mantener bajos los costos. Si el diseño necesita ser más pequeño de lo que el perfil estándar del diente permite, se podría investigar un perfil de adéndum largo.

Como la resistencia a la flexión del diente del engrane se relaciona directamente con el tamaño del diente que define su paso diametral o módulo, el cálculo del esfuerzo se inicia comúnmente suponiendo valores para el paso diametral o módulo, así como para el tamaño de la cara; luego, se determina el esfuerzo de flexión utilizando la ecuación 8.15 (p. 572). (Observe que el ancho de la cara también se expresa de manera burda en función del intervalo del paso diametral ($8/p_d < F < 16/p_d$).) Véase el análisis anterior sobre el factor K_m.

Después, se elige un material de prueba y se calcula su resistencia corregida a la fatiga por flexión, con la ecuación 8.24 (p. 586). Si el factor de seguridad resultante es demasiado grande o demasiado pequeño, se ajustan los valores supuestos y luego se repite el cálculo hasta que se llega a una solución aceptable.

Se calculan, entonces, el esfuerzo superficial y la resistencia a la fatiga superficial, con las ecuaciones 8.21 y 8.25 (p. 580 y 587) y se determina el factor de seguridad contra el desgaste. En este punto se ajusta la dureza del material, si es necesario, o bien, se repite el proceso completo con valores ajustados del paso o del ancho de la cara, o de ambos.

Una estrategia es hacer que los factores de seguridad contra fallas por flexión sean más grandes que los de fallas superficiales. La falla por flexión es repentina y catastrófica; por consiguiente, el diente se rompe y la máquina se inutiliza. La falla superficial envía advertencias audibles, aun cuando los engranes suelen funcionar algún tiempo después de que se inicia el ruido y antes de que se sustituyan, de modo que es mejor la falla superficial como límite de diseño para la vida de un engrane.

8.12 ESTUDIO DE CASO

Se verá ahora el diseño de engranes rectos en uno de los montajes del estudio de caso definido en el apéndice D.

ESTUDIO DE CASO 8C

Diseño de engranes rectos para el tren impulsor de un compresor

Problema **Diseñe un engranaje recto para la caja de engranes de la figura D-1 con base en las cargas definidas en el estudio de caso 8A, luego especifique los materiales y tratamientos térmicos adecuados.**

Se proporciona **La función torque-tiempo sobre el eje de salida es como se muestra en la figura D-3 (repetida en la siguiente página). La razón de engrane requerida es de 2.5:1 de reducción en la velocidad de entrada a la velocidad de salida. La velocidad del eje de salida es de 1 500 rpm.**

Suposiciones **Se desean 10 años de vida operando en un turno. Se utilizará el estándar de la AGMA para dientes de profundidad total. Con base en los datos de las tablas 8-6 y 8-7 (p. 567), Q_v = 10. Tanto el piñón como el engrane son de acero endurecido totamente.**

Solución **Véase las figuras D-1 y D-3.**

1. En la figura D-3 se define el torque variable en el tiempo sobre eje de entrada entre −175 y +585 lb-in. En el estudio de caso 8B, donde se diseñaron los ejes para la misma máquina y se supuso un diámetro de paso de 4 in, con un ángulo del piñón de 20° y un engrane de 10 in. Para el primer intento de diseño del engranaje se mantendrán dichas suposiciones. A partir de estos datos, se determinan las fuerzas en el engrane acoplado. La componente tangencial se obtiene a partir del torque de salida y el radio supuesto del engrane:

$$W_{t_{máx}} = \frac{T_{máx}}{r_g} = \frac{585 \text{ lb - in}}{5 \text{ in}} = 117 \text{ lb}$$
$$W_{t_{mín}} = \frac{T_{mín}}{r_g} = \frac{-175 \text{ lb - in}}{5 \text{ in}} = -35 \text{ lb} \qquad (a)$$

2. Se tomará el valor pico positivo como la carga transmitida, W_t = 117 lb. La fuerza pico de −35 lb actúa sobre los lados opuestos de los dientes, cargando tanto al piñón como al engrane de manera similar a un engrane loco. Se tomará en cuenta este aspecto de la carga aplicando el factor K_a.

3. Se supone un piñón con N_p = 20 dientes, de modo que el engrane tiene 2.5 N_p = 50 dientes. El paso diametral para esa combinación es

$$p_d = \frac{N}{d} = \frac{20}{4} = 5 \qquad (b)$$

que es un paso estándar (tabla 8-2, p. 553).

4. Los factores geométricos J de flexión para esta combinación se obtienen de la tabla 8-9 (p. 574), para carga en el punto más alto de contacto en el diente (HPSTC) y son aproximadamente:

$$J_p = 0.34 \qquad J_g = 0.40 \qquad (c)$$

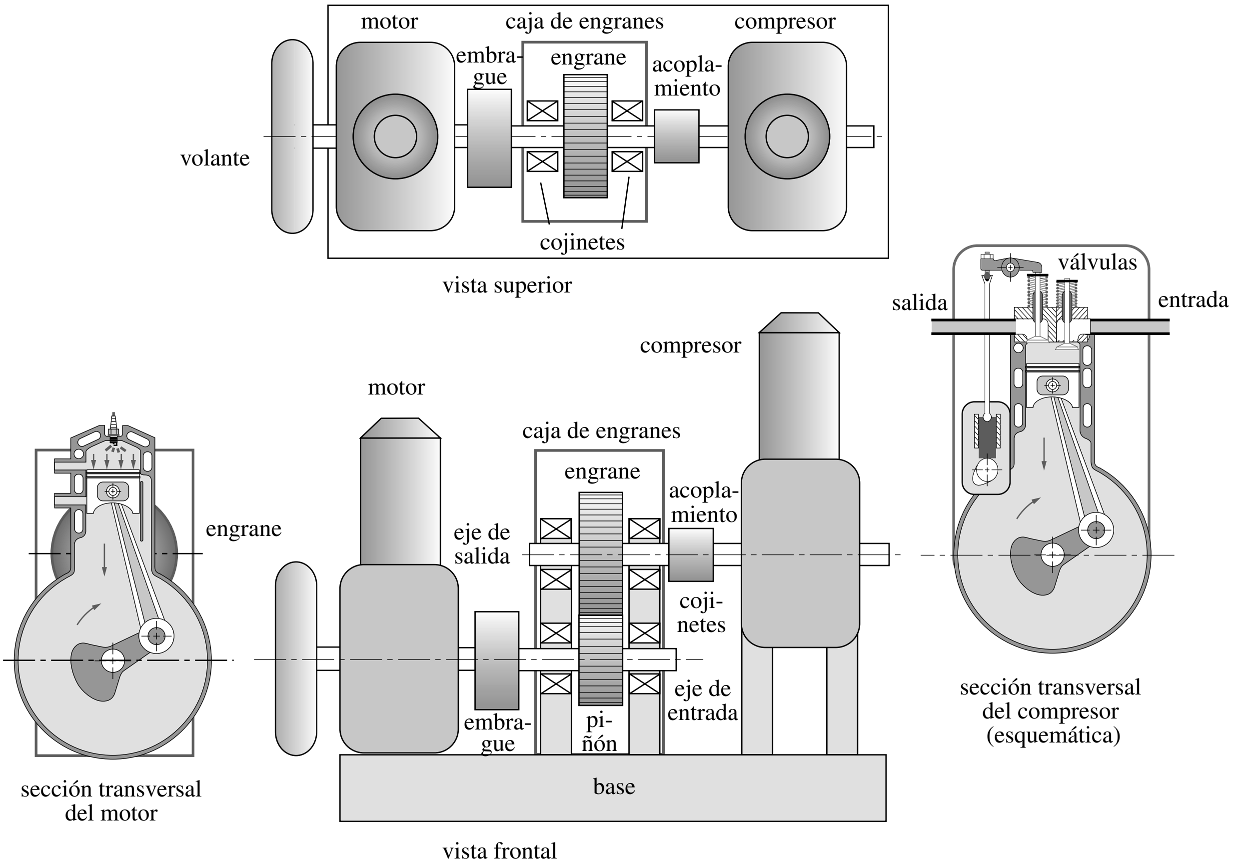


FIGURA D-1 Repetida

Diseño preliminar esquemático de un compresor portátil de aire, una caja de transmisión, acoplamientos, ejes y cojinetes impulsados por un motor de gasolina

5. El factor de velocidad K_v (C_v) se calcula a partir de las ecuaciones 8.16 y 8.17 (p. 573), con base en el índice de calidad Q_v asumido del engrane y la velocidad en la línea de paso V_t.

$$V_t = \frac{d_p}{2}\omega_p = \frac{4.0 \text{ in}}{2(12)}(3\,750 \text{ rpm})(2\pi) = 3\,927 \ \frac{\text{ft}}{\text{min}} \tag{d}$$

$$B = \frac{(12 - Q_v)^{2/3}}{4} = \frac{(12-10)^{2/3}}{4} = 0.397 \tag{e}$$

$$A = 50 + 56(1 - B) = 50 + 56(1 - 0.397) = 83.77 \tag{f}$$

$$K_v = C_v = \left(\frac{A}{A + \sqrt{V_t}}\right)^B = \left(\frac{83.77}{83.77 + \sqrt{3\,927}}\right)^{0.397} = 0.801 \tag{g}$$

6. Se debe verificar V_t contra la velocidad máxima permitida en la línea de paso, para la calidad de este engrane, mediante la ecuación 8.18 (p. 576):

$$V_{t_{máx}} = \left[A + (Q_v - 3)\right]^2 = \left[83.77 + (10-3)\right]^2 = 8\,239 \ \text{ ft/min} \tag{h}$$

la cual es más grande que V_t, de modo que es aceptable.

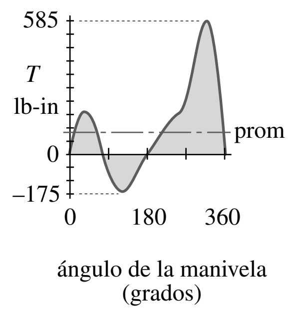


FIGURA D-3 Repetida

Función total torque-tiempo del cigüeñal con ω constante

8

7. Suponiendo un factor de ancho de cara igual a 12, el ancho de cara se estima como

$$F \cong \frac{12}{p_d} = \frac{12}{5} = 2.4 \text{ in} \tag{i}$$

8. Este valor se utiliza para interpolar K_m (C_m) en la tabla 8-16 (p. 577)

$$K_m = C_m \cong 1.61 \tag{j}$$

9. El factor K_a de la aplicación está diseñado para tomar en cuenta los choques en las máquinas impulsoras e impulsadas. Esta máquina tiene ambas, ya que es impulsada por un motor de un cilindro e impulsa un compresor de un cilindro. En muchos casos como éste, tan sólo se conoce un valor promedio del torque transmitido, tomando como base la potencia promedio transmitida. Aquí se ha calculado (en el estudio de caso 8A) una función torque-tiempo bastante precisa para el compresor, la cual define las “sobrecargas” en la parte impulsada del sistema. Se utiliza el torque pico en lugar del torque promedio para definir la carga transmitida, de modo que el valor total recomendado del factor de la aplicación en la tabla 8-17 (p. 577) no es necesario aquí. Se usará para tomar en cuenta la carga parcialmente invertida sobre los dientes del engrane (figura D-3), así como la carga de choque asociada con el impulsor (motor) y su estimación para $K_a = C_a = 2$.

8

10. El factor de tamaño K_s (C_s) y el factor de flexión K_B en el aro son iguales a 1 para estos engranes pequeños.

11. Ahora se calculan los esfuerzos de flexión en el piñón y en el engrane.

$$\sigma_{b_p} = \frac{W_t\, p_d}{FJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I = \frac{117(5)}{2.4(0.34)} \frac{1(1.61)}{0.801}(1)(1)(1) = 2\,881 \text{ psi} \tag{k}$$

$$\sigma_{b_g} = \frac{W_t\, p_d}{FJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I = \frac{117(5)}{2.4(0.40)} \frac{1(1.61)}{0.801}(1)(1)(1) = 2\,449 \text{ psi} \tag{l}$$

12. Se necesitan factores adicionales para el cálculo del esfuerzo superficial. La tabla 8-18 (p. 582) muestra un coeficiente elástico aproximado de 2 300 para acero sobre acero. En el ejemplo 8-6 se calculó un valor más preciso de $C_p = 2\,276$. El factor de acabado superficial C_f es 1.

13. El factor geométrico superficial I se calcula con la ecuación 8.22 (p. 581):

$$\rho_1 = \sqrt{\left(r_p + \frac{1}{p_d}\right)^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} - \frac{\pi}{p_d}\cos\phi$$

$$= \sqrt{\left(2.0 + \frac{1}{5}\right)^2 - \left(2.0\cos 20°\right)^2} - \frac{\pi}{5}\cos 20° = 0.553 \text{ in} \tag{m}$$

$$\rho_2 = C\operatorname{sen}\phi - \rho_1 = \left(r_p + r_g\right)\operatorname{sen}\phi - \rho_1$$

$$= (2.0 + 5.0)\operatorname{sen} 20° - 0\,553 = 1.841 \text{ in} \tag{n}$$

$$I = \frac{\cos\phi}{\left(\dfrac{1}{\rho_p} \pm \dfrac{1}{\rho_g}\right) d_p} = \frac{\cos 20°}{\left(\dfrac{1}{0.553} + \dfrac{1}{1.841}\right) 2.0} = 0.100 \tag{o}$$

14. Se determinan ahora los esfuerzos superficiales en el engranaje piñón-engrane.

$$\sigma_{c_{pg}} = C_p \sqrt{\frac{W_t}{FId_p} \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f}$$

$$= 2\,276 \sqrt{\frac{117}{2.4(0.100)(4.0)} \frac{1(1.61)}{0.801}(1)(1)} = 50\,393 \text{ psi} \qquad (p)$$

15. Se estima la resistencia no corregida de fatiga por flexión a partir de las curvas de la figura 8-25 (p. 589). Se intentará con un acero AGMA grado 1, endurecido totalmente a 250 HB. La resistencia no corregida de fatiga por flexión se obtiene a partir de la curva inferior de la figura:

$$S_{fb'} = -274 + 167HB - 0.152HB^2$$

$$= -274 + 167(250) - 0.152(250)^2 = 31\,976 \text{ psi} \qquad (q)$$

16. Este valor necesita corregirse con ciertos factores usando la ecuación 8.24 (p. 586). El factor de vida K_L se obtiene a partir de la ecuación adecuada de la figura 8-24 (p. 587), con base en el número de ciclos de vida requerido para los engranes. El piñón tiene el mayor número de cargas repetidas en los dientes, de modo que se calcula la vida con base en ello. Primero se calcula el número de ciclos N para la vida requerida de 10 años, con un turno.

$$N = 3\,750 \text{ rpm}\left(\frac{60 \text{ min}}{\text{hr}}\right)\left(\frac{2\,080 \text{ hr}}{\text{turno-año}}\right)(10 \text{ años})(1 \text{ turno}) = 4.7E9 \text{ ciclos} \qquad (r)$$

El valor de K_L se obtiene a partir de

$$K_L = 1.3558N^{-0.0178} = 1.3558(4.7E9)^{-0.0178} = 0.9121 \qquad (s)$$

17. Para la temperatura de operación especificada, $K_T = 1$.

18. Todos los datos del material del engrane se toman con un nivel de confiabilidad de 99%. En este caso, ello resulta satisfactorio, lo cual hace $K_R = 1$.

19. La resistencia corregida de fatiga por flexión es, entonces,

$$S_{fb} = \frac{K_L}{K_T K_R} S_{fb'} = \frac{0.9121}{1(1)} 31\,976 = 29\,167 \text{ psi} \qquad (t)$$

20. Se realiza un estimado de la resistencia, sin corregir a la fatiga superficial y considerando las curvas de la figura 8-27 (p. 591). Para un acero AGMA de grado 1, endurecido totalmente a 250 HB, la resistencia se obtiene a partir de la curva inferior de la figura:

$$S_{fc'} = 26\,000 + 327HB = 26\,000 + 327(250) = 107\,750 \text{ psi} \qquad (u)$$

21. Este valor necesita corregirse con ciertos factores con la ecuación 8.25 (p. 587). El factor de vida C_L se obtiene con la ecuación adecuada de la figura 8-26 (p. 589), con base en el número de ciclos N requeridos que se obtuvieron anteriormente.

$$C_L = 1.4488N^{-0.023} = 1.4488(4.7E9)^{-0.023} = 0.8681 \qquad (v)$$

22. $C_T = K_T = 1$ y $C_R = K_R = 1$.

23. Como los engranes y el piñón tienen la misma dureza de material en este caso, $C_H = 1$.

24. La resistencia corregida de fatiga superficial es, entonces,

$$S_{fc} = \frac{C_L C_H}{C_T C_R} S_{fc}' = \frac{0.8681(1)}{1(1)} 107\,750 = 93\,543 \text{ psi} \tag{w}$$

25. Los factores de seguridad contra falla por flexión se obtienen comparando la resistencia a la flexión corregida con el esfuerzo de flexión, para cada engrane del engranaje:

$$N_{b_{piñón}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{piñón}}} = \frac{29\,167}{2\,881} = 10.1$$
$$N_{b_{engrane}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{engrane}}} = \frac{29\,167}{2\,449} = 11.9 \tag{x}$$

los cuales son demasiado grandes y causan que el paquete sea más grande de lo necesario.

26. El factor de seguridad contra falla superficial se determina comparando la carga real con la carga que produciría un esfuerzo igual a la resistencia corregida superficial del material. Como el esfuerzo superficial está relacionado con la raíz cuadrada de la carga, el factor de seguridad de fatiga superficial se calcula como el cociente del cuadrado de la resistencia superficial corregida, divida entre el cuadrado del esfuerzo superficial de cada engrane del acoplamiento:

8

$$N_{c_{piñón\text{-}engrane}} = \left(\frac{S_{fc}}{\sigma_{c_{piñón}}}\right)^2 = \left(\frac{93\,543}{50\,393}\right)^2 = 3.4 \tag{y}$$

27. Esto es más elevado de lo necesario. El paso diametral se incrementó de 5 a 8 (disminuyendo el tamaño del diente), con la finalidad de reducir los diámetros de paso, incrementando el esfuerzo y usando menores factores de seguridad. El ancho de la cara se modifica a 1.5 in para el mismo factor del ancho de cara de 12. Los dientes del piñón aumentaron a 22, lo cual da como resultado 55 dientes para el engrane con el nuevo p_d. Se rehicieron los cálculos con los resultados mostrados en la tabla 8-22. Los nuevos factores de seguridad son

$$N_{b_{piñón}} = 2.8 \qquad N_{b_{engrane}} = 3.3 \qquad N_{c_{piñón\text{-}engrane}} = 1.1 \tag{z}$$

28. Estos engranes todavía son seguros contra el rompimiento del diente. Con base en los supuestos y cálculos; además, si están adecuadamente lubricados, deberían tener una probabilidad de 99% para durar los 10 años requeridos, antes de que se inicie el picado en el piñón.

29. Observe que el cambio de los diámetros de paso del engrane, sobre los supuestos en el estudio de caso 8B para el diseño del eje, también incrementan las cargas transversales de los engranes sobre el eje en un 45%, lo cual requiere otra iteración del diseño del eje.

30. Los archivos Case8C-1 (primer diseño) y Case8C-2 (diseño final) se encuentran en el CD-ROM.

8.13 RESUMEN

Existen dos tipos principales de fallas en los engranes: ruptura del diente por esfuerzos de flexión y picado por esfuerzos superficiales (hertzianos). De los dos, la falla por flexión es más catastrófica, ya que el rompimiento del diente normalmente inutiliza la máquina. La falla por picado evoluciona gradualmente, además de que envía advertencias audibles y visibles (si se inspecciona el diente). Los engranes pueden funcionar por algún tiempo después de que se inicia el picado, antes de que deban sustituirse.

Tabla 8-22 Estudio de caso 8C; diseño final del tren de engranes rectos

Entrada	Variable	Salida	Unidad	Comentarios
2.50	*razón*			razón de engrane
8	p_d		1/in	paso diametral
20	*fi*		grado	ángulo de presión
170	W_t		lb	fuerza tangencial
22	$N_{piñón}$			núm. de dientes en piñón
	$N_{engrane}$	55		núm. de dientes en engrane
	$d_{piñón}$	2.75	in	diámetro de paso del piñón
	$d_{engrane}$	6.88	in	diámetro de paso del engrane
1.50	*cara*		in	ancho de cara
0.34	$J_{piñón}$			factor geométrico; piñón
0.40	$J_{engrane}$			factor geométrico; engrane
	I	0.10		factor I de engranaje piñón/engrane
2.0	K_a			factor de la aplicación
1.6	K_m			factor de distribución de carga
2 276	C_p			coeficiente elástico
10	Q_v			índice de calidad del engrane
	V_t	2 700	ft/min	velocidad en línea de paso
	$V_{tmáx}$	8 239	ft/min	velocidad máx. permisible en la línea de paso
	K_v	0.826		factor dinámico
	$\sigma_{bpiñón}$	10 346	psi	esfuerzo de flexión; diente del piñón
	$\sigma_{bengrane}$	8 794	psi	esfuerzo de flexión; diente del engrane
	$\sigma_{cpiñón}$	90 026	psi	esfuerzo superficial en piñón y engrane
	Sf_{bprima}	31 976	psi	resistencia sin corregir a la flexión
	Sf_b	29 167	psi	resistencia corregida a la flexión
	Sf_{cprima}	107 750	psi	resistencia superficial sin corregir
	Sf_c	93 543	psi	resistencia superficial corregida
	K_R	1.00		factor de confiabilidad
	ciclos	4.7E+9		número de ciclos repetidos en piñón
	K_L	0.91		factor de vida; fatiga por flexión
	C_L	0.87		factor de vida; fatiga superficial
	N_{bp}	2.8		factor de seguridad a la flexión del piñón
	N_{bg}	3.3		factor de seguridad a la flexión del engrane
	N_{cp}	1.1		factor de seguridad superficial del engranaje

Ambos modos de falla son fallas por fatiga debido a la aplicación de esfuerzos repetidos sobre los dientes individuales, cuando entran y salen del acoplamiento. Se aplican los principios del análisis de fatiga (capítulo 4) y se hace necesario el análisis modificado de Goodman. Sin embargo, la naturaleza similar de las cargas aplicadas sobre todos los dientes del engrane permite la estandarización del análisis de Goodman, como lo define la AGMA.

La correcta geometría de involuta del diente es esencial en la operación y en la vida de los engranes. La AGMA define un perfil estándar del diente, junto con varias modificaciones a ese estándar para situaciones especiales. Los factores geométricos necesarios para el cálculo correcto del esfuerzo, se definen con tales geometrías. Pruebas extensivas de materiales de engranes bajo condiciones de carga reales, en combinación con años de experiencia de los fabricantes de engranes, dieron como resultado el establecimiento de ecuaciones probadas para el cálculo de ambos esfuerzos, así como las resistencias físicas corregidas de fatiga superficial y de flexión en los engranes.

Este capítulo resume el enfoque de la AGMA para el diseño de engranes rectos; además, presenta varias gráficas y fórmulas empíricas de cálculo. Se remite al lector a los estándares de la AGMA para una información más completa.

Ecuaciones importantes utilizadas en este capítulo

Paso circular (sección 8.2):

$$p_c = \frac{\pi d}{N} \tag{8.3a}$$

Paso diametral (sección 8.2):

$$p_d = \frac{N}{d} \tag{8.4a}$$

Módulo métrico (sección 8.2):

$$m = \frac{d}{N} \tag{8.4c}$$

Razón de engrane (sección 8.2):

$$m_G = \frac{N_g}{N_p} \tag{8.5b}$$

Razón de contacto (sección 8.4):

$$m_p = \frac{p_d Z}{\pi \cos\phi} \tag{8.7b}$$

$$Z = \sqrt{\left(r_p + a_p\right)^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} + \sqrt{\left(r_g + a_g\right)^2 - \left(r_g \cos\phi\right)^2} - C \operatorname{sen}\phi \tag{8.2}$$

Carga tangencial sobre los dientes del engrane (sección 8.5):

$$W_t = \frac{T_p}{r_p} = \frac{2T_p}{d_p} = \frac{2 p_d T_p}{N_p} \tag{8.13a}$$

Ecuaciones de la AGMA de esfuerzo de flexión (sección 8.8):

$$\sigma_b = \frac{W_t\, p_d}{FJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{8.15us}$$

$$\sigma_b = \frac{W_t}{FmJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{8.15si}$$

Ecuación de la AGMA de esfuerzo superficial (sección 8.8):

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{W_t}{FId}\frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f} \tag{8.21}$$

Ecuación de la AGMA de resistencia a la fatiga por flexión (sección 8.9):

$$S_{fb} = \frac{K_L}{K_T K_R} S_{fb'} \tag{8.24}$$

Ecuación de la AGMA de resistencia a la fatiga superficial (sección 8.9):

$$S_{fc} = \frac{C_L C_H}{C_T C_R} S_{fc'} \tag{8.25}$$

8.14 REFERENCIAS

1. **AGMA**, *Gear Nomenclature, Definitions of Terms with Simbols*. ANSI/AGMA Estándar 1012-F90, Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314, 1990.
2. **AGMA**, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, ANSI/AGMA Estándar 2001-B88. Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.
3. **AGMA**, *Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strenght of Spur, Helical, and Herringbone Gear Teeth*. ANSI/AGMA Estándar 908-B89. Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va., 22314.
4. **R.L. Norton**, *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*, 3a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, pp. 462-521, 2004.
5. **W. Lewis**, “Investigation of the Strength of Gear Teeth, an address to the Engineer's Club of Philadelphia. October 15, 1892”. Reimpreso en *Gear Technology*, vol. 9, núm. 6, p. 19, nov./dic. 1992.
6. **T.J. Dolan y E.L. Broghammer,** *A Photoelastic Study of the Stresses in Gear Tooth Fillets*, Boletín 335, U. Illinois Engineering Experiment Station, 1942.
7. **W.D. Mark**, The Generalized Transmission Error of Parallel-Axis Gears. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*. **111**: pp. 414-423, 1989.
8. **R.A. Morrison**, “Load/Life Curves for Gear and Cam Materials”. *Machine Design*, pp. 102-108, 1 de ago. de 1968.
9. **E. Buckingham**, *Analytical Mechanics of Gears*, McGraw-Hill: Nueva York, 1949.
10. **D.W. Dudley**, Gear Wear, in *Wear Control Handbook*, M.B. Peterson y W.O. Winer, ed. ASME: Nueva York, p. 764, 1980.

Tabla P8-0†
Matriz tema/problema

8.1 Teoría del diente de engrane
8-5, 8-6, 8-37, 8-38, 8-41, 8-42, **8-59**, **8-65**

8.2 Nomenclatura
8-1, 8-2, 8-44, 8-45, *8-60*, *8-66*

8.4 Razón de contacto
8-3, 8-4, 8-39, 8-40, 8-61, 8-67

8.5 Trenes compuestos
8-7, *8-9*, *8-10*, *8-29*, *8-30*, *8-31*, 8-43, *8-46*, *8-47*

8.5 Trenes epicíclicos
8-11, 8-12, 8-13, *8-48*, *8-49*, 8-62, 8-68

8.7 Carga
8-14, 8-15, 8-20, 8-21, 8-22, 8-27, 8-52, 8-55

8.8, .9 Esfuerzo de flexión
8-16, *8-17*, *8-23*, *8-24*, 8-50, 8-63

8.8, .9 Esfuerzo superficial
8-18, *8-19*, *8-25*, *8-26*, 8-51, 8-64

8.11 Diseño de engranes
8-8, *8-28*, *8-29*, *8-30*, *8-31*, ***8-32***, *8-33*, *8-34*, *8-53*, *8-54*, *8-56*, *8-57*, *8-58*

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son problemas similares ampliados de problemas en capítulos anteriores con el mismo número identificador.

8.15 PROBLEMAS

*8-1. Un engrane recto de 27 dientes con un ángulo de presión de 20° tiene un paso diametral $p_d = 5$. Calcule el paso diametral del adéndum, el dedéndum, el diámetro exterior y el paso circular.

8-2. Un engrane recto de 43 dientes con un ángulo de presión de 25° tiene un paso diametral $p_d = 8$. Determine el paso diametral del adéndum, el dedéndum, el diámetro exterior y el paso circular.

*8-3. Un engrane recto de 57 dientes está acoplado con un piñón de 23 dientes. El $p_d = 6$ y $\phi = 25°$. Obtenga la razón de contacto.

8-4. Un engrane recto de 78 dientes está acoplado con un piñón de 27 dientes. El $p_d = 6$ y $\phi = 20°$. Calcule la razón de contacto.

*8-5. ¿Cuál será el ángulo de presión si la distancia entre centros del engranaje recto del problema 8-3 se incrementa un 5%?

8-6. ¿Cuál será el ángulo de presión si la distancia entre centros del engranaje recto del problema 8-4 se incrementa un 7%?

*8-7. Los engranajes rectos de los problemas 8-3 y 8-4 están compuestos, como se indica en la figura 8-14 (p. 559). ¿Cuál es la razón total del tren?

†***8-8***. Una máquina papelera procesa rollos de papel cuya densidad es de 984 kg/m^3. El rollo de papel tiene un diámetro exterior (*OD*) de 1.50 m × 0.22 m de diámetro interior (*ID*) × 3.23 m de longitud; además, está simplemente apoyado por un eje de acero hueca con $S_{ut} = 400$ MPa. Diseñe un engranaje recto con reducción de 2.5:1, para impulsar el eje que gira, y obtener un factor de seguridad dinámico mínimo de 2 para una vida de 10 años si el diámetro exterior del eje es de 22 cm y el rollo gira a 50 rpm con 1.2 hp absorbidos.

**8-9*. Diseñe un tren de engranes rectos compuesto de dos etapas para una razón total de aproximadamente 47:1. Especifique los números de dientes de cada engrane del tren.

**8-10*. Diseñe un tren de engranes rectos compuesto de tres etapas para una razón total de aproximadamente 656:1. Especifique los números de dientes de cada engrane del tren.

*8-11. Un tren de engranes rectos epicíclico, como el mostrado en la figura 8-16 (p. 562) tiene un engrane solar de 33 dientes y un engrane planetario de 21 dientes. Determine el número de dientes requerido en el engrane anular, y calcule la razón entre el brazo y el engrane solar si el engrane anular se mantiene estacionario. Sugerencia: Considere que el brazo gira a 1 rpm.

8-12. Un tren de engranes rectos epicíclico, como el mostrado en la figura 8-16 (p. 562) tiene un engrane solar de 23 dientes y un engrane planetario de 31 dientes. Calcule el número de dientes requerido en el engrane anular y determine la razón entre el brazo y el engrane anular si el engrane solar se mantiene estacionario. Sugerencia: Considere que el brazo gira a 1 rpm.

8-13. Un tren de engranes rectos epicíclico, como el mostrado en la figura 8-16 (p. 562) tiene un engrane solar de 23 dientes y un engrane planetario de 31 dientes. Obtenga el número de dientes requerido en el engrane de anillo, y determine la razón entre el sol y el engrane de anillo si el brazo se mantiene estacionario. Sugerencia: Considere que el sol gira a 1 rpm.

*8-14. Si el engranaje del problema 8-3 transmite 125 hp a 1 000 rpm del piñón, obtenga el torque sobre cada eje.

8-15. Si el engranaje del problema 8-4 transmite 33 kW a 1 600 rpm del piñón, determine el torque sobre cada eje.

**8-16*. Dimensione los engranes rectos del problema 8-14 para un factor de seguridad contra falla por flexión de, por lo menos, 2, suponiendo un torque estacionario, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad completa, $Q_v = 9$, un piñón de acero AISI 4140 y un engrane de hierro fundido clase 40.

8-17. Dimensione los engranes del problema 8-15 para un factor de seguridad contra falla por flexión de 2.5, suponiendo un torque estacionario, un ángulo de presión de 20°, dientes de profundidad completa, $Q_v = 11$, un piñón de acero AISI 4340 y un engrane de hierro nodular A-7-d.

**8-18*. Dimensione los engranes rectos del problema 8-14 para un factor de seguridad contra falla superficial de, por lo menos, 2, suponiendo un torque estacionario, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad total, $Q_v = 9$, un piñón de acero AISI 4140 y un engrane de hierro fundido clase 40.

8-19. Dimensione los engranes del problema 8-15 para un factor de seguridad contra falla superficial de 1.2, suponiendo un torque estacionario, un ángulo de presión de 20°, dientes de profundidad completa, $Q_v = 11$, un piñón de acero AISI 4340 y un engrane de hierro nodular A-7-d.

*8-20. Si el engranaje del problema 8-11 transmite 83 kW a 1 200 rpm del brazo, determine el torque sobre cada eje.

8-21. Si el engranaje del problema 8-12 transmite 39 hp a 2 600 rpm del brazo, calcule el torque sobre cada eje.

8-22. Si el engranaje del problema 8-13 transmite 23 kW a 4 800 rpm del engrane solar, obtenga el torque sobre cada eje.

**8-23*. Dimensione los engranes rectos del problema 8-20 para un factor de seguridad contra falla por flexión de, por lo menos, 2.8, suponiendo un torque uniforme, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad total, $Q_v = 9$, un piñón de acero AISI 4140 y un engrane de hierro fundido clase 40.

8-24. Dimensione los engranes rectos del problema 8-21 para un factor de seguridad contra falla por flexión de, por lo menos, 2.4, suponiendo un torque uniforme, un ángulo de presión de 20°, dientes de profundidad total, $Q_v = 11$, un piñón de acero AISI 4340 y un engrane de hierro nodular A-7-d.

**8-25*. Dimensione los engranes rectos del problema 8-20 para un factor de seguridad contra falla superficial de, por lo menos, 1.7, suponiendo un torque uniforme, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad total, $Q_v = 9$, un piñón de acero AISI 4140 y un engrane de hierro fundido clase 40.

8-26. Dimensione los engranes rectos del problema 8-21 para un factor de seguridad contra falla superficial de, por lo menos, 1.3, suponiendo un torque uniforme, un ángulo de presión de 20°, dientes de profundidad total, $Q_v = 11$, un piñón de acero AISI 4340 y un engrane de hierro nodular A-7-d.

*8-27. Si el engranaje del problema 8-10 transmite 190 kW a 1 800 rpm de entrada en el piñón, determine el torque sobre cada una de los cuatro ejes.

**8-28*. Dimensione los engranes rectos de la primera etapa del problema 8-27 para un factor de seguridad contra falla por flexión de, por lo menos, 3.0 y un factor de seguridad superficial de, por lo menos, 1.7, suponiendo un torque uniforme, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad total, $Q_v = 8$ y acero AISI 4140 para todos los engranes.

**8-29*. Dimensione los engranes rectos de la segunda etapa del problema 8-27 para un factor de seguridad contra falla por flexión de, por lo menos, 3.0 y un factor de seguridad superficial de, por lo menos, 1.7, suponiendo un torque uniforme, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad completa, $Q_v = 8$ y acero AISI 4140 para todos los engranes.

**8-30*. Dimensione los engranes rectos de la tercera etapa del problema 8-27 para un factor de seguridad contra falla por flexión de, por lo menos, 3.0 y un factor de seguridad superficial de, por lo menos, 1.7, suponiendo un torque uniforme, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad total, $Q_v = 8$ y acero AISI 4140 para todos los engranes.

**8-31*. Diseñe un tren de engranes rectos compuesto de dos etapas, con una razón total de aproximadamente 78:1. Especifique el número de dientes de cada engrane recto en el tren.

8-32. La figura P8-1 muestra la misma máquina de papel que se analizó en el problema 4-46 y en otros problemas de capítulos anteriores. Los rollos de papel de la figura P8-1 tienen un diámetro exterior (*OD*) de 0.9 m × 0.22 m de diámetro interior (*ID*) × 3.23 m de longitud, y tienen una densidad de 984 kg/m^3. Los rollos son transferidos de la banda transportadora (que no se muestra) al montacargas, mediante un eslabón-V de la estación de descarga, el cual gira 90° por efecto de un cilindro de aire. Luego el papel rueda hacia las cuchillas del montacargas. La máquina hace 30 rollospor hora y

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son problemas similares ampliados de problemas en capítulos anteriores con el mismo número identificador.

8

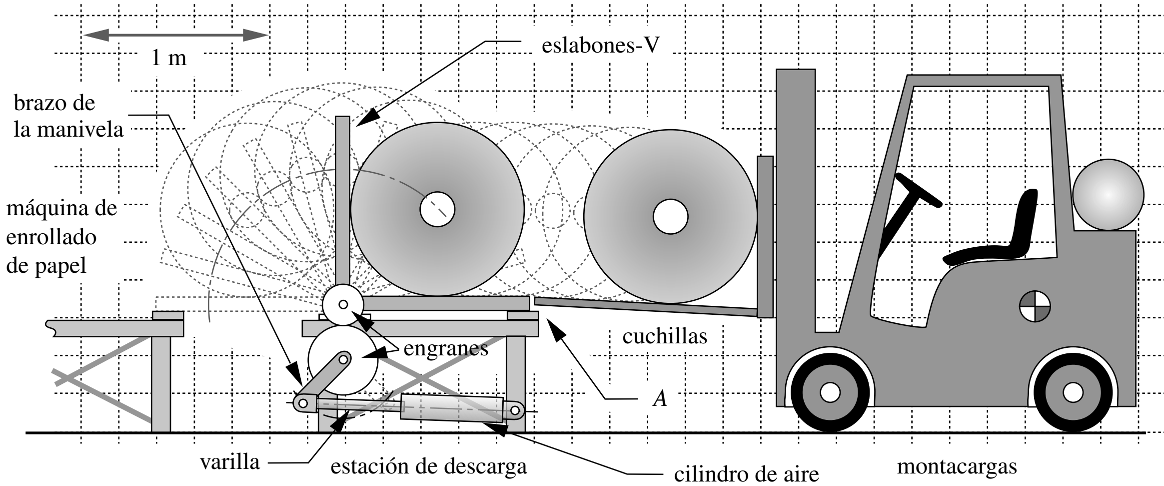


FIGURA P8-1

Problema 8-32

trabaja dos turnos. Los eslabones en V son impulsados por el brazo de la manivela, a través de un eje con 60 mm de diámetro por 3.23 m de largo. Se pretende rediseñar el mecanismo giratorio del eslabón V, con la finalidad de introducir un engranaje entre el brazo de la manivela y el eje del eslabón en V, con una razón de 2:1. Lo anterior reducirá el golpe necesario del cilindro de aire en un 50% y mejorará su geometría. Diseñe un conjunto adecuado de engranes rectos, para esta aplicación, para 10 años de vida contra falla superficial. Defina todas las suposiciones.

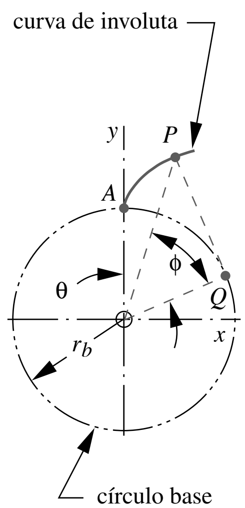


FIGURA P8-2

Problema 8-37

†*8-33*. Diseñe una transmisión compuesta no invertida, con base en la configuración mostrada en la figura 8-14*a*, para una razón de tren total de aproximadamente 90:1, que sea capaz de transmitir 50 hp a 1 000 rpm de velocidad de entrada del eje. Defina todas las suposiciones.

8-34. Diseñe una transmisión compuesta no invertida, con base en la configuración mostrada en la figura 8-14*b*, para una razón de tren total de aproximadamente 80:1, que sea capaz de transmitir 30 hp a 1 500 rpm de velocidad de entrada del eje. Defina todas las suposiciones.

8-35. Si el piñón de 23 dientes en el engranaje del problema 8-3 se encuentra sobre el eje de entrada, determine la razón de velocidad, la razón de torque y la razón de engrane del engranaje.

8-36. Si el engrane de 78 dientes en el engranaje del problema 8-4 se encuentra sobre el eje de entrada, determine la razón de velocidad, la razón de torque y la razón de engrane del engranaje.

8-37. La figura P8-2 muestra la involuta de un círculo que comienza en el punto A $(0, r_b)$ y continúa hasta el punto $P(x, y)$. El ángulo θ se conoce como el ángulo de giro y ϕ es el ángulo de presión de la involuta. Deduzca expresiones para las coordenadas x y y de P, en términos del radio del círculo base r_b y el ángulo de presión de la involuta. Grafique y contra x en el rango $0° < \phi < 40°$ para $r_b = 2$ in.

8-38. Deduzca la ecuación 8.2 usando la figura 8-5.

8-39. Un engrane recto de 39 dientes está engranado con un piñón de 18 dientes. El $p_d = 8$ y $\phi = 25°$. Determine la razón de contacto.

8-40. Un engrane recto de 79 dientes está engranado con un piñón de 20 dientes. El $p_d = 8$ y $\phi = 20°$. Determine la razón de contacto.

8-41. ¿Cuál será el ángulo de presión si la distancia entre centros del engranaje recto del problema 8-39 se incrementa en un 6%?

8-42. ¿Cuál será el ángulo de presión si la distancia entre centros del engranaje recto del problema 8-40 se incrementa en un 5%?

8-43. Si los engranajes rectos de los problemas 8-39 y 8-40 son compuestos, como se indica en la figura 8-14, ¿cuál será la razón total del tren?

8-44. Un engrane recto con un ángulo de presión de 20° y 23 dientes tiene un paso diametral de 6. Calcule diámetro de paso, adéndum, dedéndum, diámetro exterior y paso circular.

8-45. Un engrane recto con un ángulo de presión de 25° y 32 dientes tiene un paso diametral de 4. Calcule diámetro de paso, adéndum, dedéndum, diámetro exterior y paso circular.

8-46. Diseñe un tren de engranes rectos compuesto de dos etapas, para una razón total de aproximadamente 53:1. Especifique los números de dientes para cada engrane del tren.

8-47. Diseñe un tren de engranes rectos compuesto de tres etapas, para una razón total de aproximadamente 592:1. Especifique los números de dientes para cada engrane del tren.

8-48. Diseñe un tren de engranes planetario, similar al mostrado en la figura 8-16, para una razón de velocidad total de 0.2 exactamente, si el engrane solar es la entrada, el brazo es la salida y el engrane anular es estacionario. Especifique los números de dientes para cada engrane del tren.

8-49. Diseñe un tren de engranes planetario, similar al mostrado en la figura 8-16, para una razón de velocidad total de 4/3 exactamente, si el engrane solar es estacionario, el brazo es la entrada y el engrane anular es la salida. Especifique los números de dientes para cada engrane del tren.

8-50. Un piñón de 21 dientes gira a 1 800 rpm acoplado con un engrane de 33 dientes en un reductor de engranes rectos. Tanto el piñón como el engrane se fabricaron con un nivel de calidad de 9. Se especificó una confiabilidad de 0.9 y la carga tangencial transmitida es de 2800 lb. Las condiciones son para $K_m = 1.7$. Se propone utilizar dientes estándar de profundidad completa a 25°, con un piñón y un engrane fresado de acero nitrurado AISI 4140. El paso diametral es igual a 6 y el ancho de la cara es de 2.000 in. Calcule el número de ciclos de esfuerzos de flexión (mediante las ecuaciones de la AGMA) que puede soportar el engranaje.

8-51. Un piñón de 21 dientes gira a 1800 rpm acoplado con un engrane de 33 dientes en un reductor de engranes rectos. Tanto el piñón como el engrane se fabricaron con un nivel de calidad de 9. Se especificó un nivel de confiabilidad de 0.9, y la carga tangencial transmitida es de 2800 lb. Las condiciones son para $C_m = 1.7$. Se propone utilizar dientes estándares de profundidad completa a 25°, con un piñón y un engrane fresado de acero nitrurado AISI 4140. El paso diametral es igual a 6 y el ancho de la cara es de 2.0 in. Calcule el número de ciclos de esfuerzos (superficiales) de contacto (con las ecuaciones de la AGMA) que puede soportar el engranaje.

*8-52. Si el engranaje del problema 8-46 transmite 7.5 kW a 1750 rpm del piñón de entrada, determine el torque en cada una de los tres ejes.

**8-53.* Dimensione los engranes rectos de la primera etapa del problema 8-52 para un factor de seguridad contra falla por flexión de, por lo menos, 2.8 y un factor de seguridad superficial de, por lo menos, 1.8, suponiendo un torque estacionario, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad completa, $Q_v = 9$ y acero AISI 4340 para todos los engranes.

8-54. Dimensione los engranes rectos de la segunda etapa del problema 8-52 para un factor de seguridad contra falla por flexión de, por lo menos, 2.8 y un factor de seguridad superficial de, por lo menos, 1.8, suponiendo un torque estacionario, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad completa, $Q_v = 9$ y acero AISI 4340 para todos los engranes.

8-55. Si el engranaje del problema 8-47 transmite 18.8 kW a 1184 rpm del piñón de entrada, determine el torque sobre cada una de los cuatro ejes.

8-56. Dimensione los engranes rectos de la primera etapa del problema 8-55 para un factor de seguridad contra falla por flexión de, por lo menos, 2.4 y un factor de seguridad superficial de, por lo menos, 2.0, suponiendo un torque estacionario, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad completa, $Q_v = 10$ y acero AISI 4140 para todos los engranes.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

†*8-57.* Dimensione los engranes rectos de la segunda etapa del problema 8-55 para un factor de seguridad contra falla por flexión de, por lo menos, 2.4 y un factor de seguridad superficial de, por lo menos, 2.0, suponiendo un torque estacionario, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad completa, $Q_v = 10$ y acero AISI 4140 para todos los engranes.

8-58. Dimensione los engranes rectos de la tercera etapa del problema 8-55 para un factor de seguridad contra falla por flexión de, por lo menos, 2.4 y un factor de seguridad superficial de, por lo menos, 2.0, asumiendo un torque estacionario, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad completa, $Q_v = 10$ y acero AISI 4140 para todos los engranes.

8-59. El piñón de un engranaje externo tiene un radio de paso $r_p = 40$ mm y el radio de paso del engrane r_g es de 160 mm. Si el piñón es el elemento de entrada, determine la razón de velocidad, la razón de torque y la razón de engrane del conjunto.

8-60. Un piñón que tiene 20 dientes y un paso diametral de 8 (in-1) está engranado con una cremallera. Si el piñón gira una revolución, ¿qué distancia se moverá la cremallera?

8-61. Se diseñó un engranaje con dientes de profundidad completa para tener un piñón de 24 dientes, un engrane con 54 dientes y un paso diametral de 6. Compare la razón de contacto de este conjunto para los ángulos de presión de 14.5, 20 y 25°.

8.62. Diseñe un tren de engranes planetario, similar al de la figura 8-16, para una razón de velocidad total exactamente de 5, si el engrane anular es estacionario, el brazo es la entrada y el engrane es la salida. Especifique los números de dientes para cada engrane del tren.

8

8-63. Un piñón de 24 dientes gira a 1650 rpm acoplado con un engrane de 66 dientes en un reductor de engranes rectos. Tanto el piñón como el engrane se fabricaron con un nivel de calidad de 10. Se especificó un nivel de confiabilidad de 0.9 y la carga tangencial transmitida es de 5000 lb. Las condiciones son para $K_m = 1.7$. Se propone utilizar dientes estándares de profundidad completa a 25°, con un piñón y un engrane fresado de acero nitrurado AISI 4340. El paso diametral es igual a 5 y el ancho de la cara es de 2.500 in. Calcule el número de ciclos de esfuerzo por flexión (con las ecuaciones de la AGMA) que puede soportar el engranaje.

8-64. Un piñón de 22 dientes gira a 1650 rpm acoplado con un engrane de 66 dientes en un reductor de engranes rectos. Tanto el piñón como el engrane se fabricaron con un nivel de calidad de 10. Se especificó un nivel de confiabilidad de 0.9 y la carga tangencial transmitida es de 5000 lb. Los condiciones son para $K_m = 1.7$. Se propone utilizar dientes estándares de profundidad completa a 25°, con un piñón y un engrane de acero fresado nitrurado AISI 4340. El paso diametral es igual a 5 y el ancho de la cara es de 2.500 in. Calcule el número de ciclos de esfuerzos (superficiales) de contacto (con las ecuaciones de la AGMA) que puede soportar el engranaje.

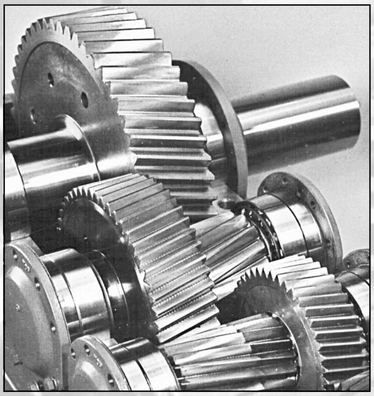
8-65. El piñón de un engranaje interno tiene un radio de paso $r_p = 30$ mm y el radio de paso del engrane r_g es de 150 mm. Si el piñón es el elemento de entrada, determine la razón de velocidad, la razón de torque y la razón de engrane del conjunto.

8-66. Un piñón que tiene 18 dientes y un paso diametral de 10 (in-1) está acoplado con una cremallera. Si la cremallera se mueve 1 in, ¿cuántos grados girará el piñón?

8-67. Se diseñó un engranaje con dientes de profundidad completa a 25° para tener un piñón de 24 dientes, un engrane con 54 dientes y un paso diametral de 6. Compare la razón de contacto de este conjunto para un intervalo de distancia entre centros de 0.90C a 1.10C.

8-68. Diseñe un tren de engranes planetario similar al de la figura 8-16 para una razón de velocidad total exactamente de 1.25, si el engrane solar es estacionario, el brazo es la entrada y el engrane anular es la salida. Especifique los números de dientes para cada engrane del tren.

† Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.



9

ENGRANES HELICOIDALES, CÓNICOS Y DE TORNILLO SIN FIN

Ciclo y epiciclo, Orb in Orb…

John Milton, Paraíso perdido

9.0 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 8 se exploró con detalle el tema de los engranes rectos. No obstante, hay engranes con otras muchas configuraciones de dientes para aplicaciones específicas. Este capítulo presenta una introducción breve al diseño de engranes helicoidales, cónicos y de tornillo sin fin. La complejidad del diseño se incrementa significativamente cuando se utilizan tales formas de dientes de engrane más complicadas. La *Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes* (AGMA) publica datos detallados y algoritmos para su cálculo. Se hará la presentación con base en las recomendaciones de la AGMA; sin embargo, no se realizará un estudio a fondo del tema tan complejo en el espacio que hay. Se invita al lector a consultar los estándares de la AGMA para mayor información cuando se enfrente a un problema de diseño real que requiera engranajes. La tabla 9-0 lista las variables que se emplean en este capítulo e indica la sección o la ecuación en la cual aparecen. Al final del capítulo se incluyen un resumen y una lista de las ecuaciones importantes.

9.1 ENGRANES HELICOIDALES

Los engranes helicoidales son muy similares a los engranes rectos. Sus dientes son de involuta. La diferencia es que sus dientes están inclinados en un ángulo de hélice ψ, en relación con el eje de rotación, como se indica en la figura 9-1. El ángulo de la hélice normalmente se encuentra entre los valores de 10 a 45°. Si el engrane fuera lo bastante grande axialmente, un diente se envolvería alrededor de los 360° de la circunferencia. Los dientes forman una hélice, la cual puede extenderse hacia la izquierda o hacia la derecha. Un par de engranes helicoidales, con orientación opuesta, se acoplan manteniendo sus ejes paralelos, como se ilustra en la figura 9-1*a*. Los engranes helicoidales con la misma orientación se acoplan con sus ejes, formando un ángulo, y reciben el nombre de engranes helicoidales con ejes cruzados o simplemente engranes helicoidales cruzados, como se muestra en la figura 9-1*b*.

Tabla 9-0 Variables utilizadas en este capítulo

Parte 1 de 2

Símbolo	Variable	unidades ips	unidades SI	Véase
a	adéndum	in	m	Ec. 9.18
b	dedéndum	in	m	Ec. 9.18
C	distancia entre centros	ninguna	ninguna	Ec. 9.16
C_f	factor de acabado superficial	ninguna	ninguna	Ec. 9.10
C_H	factor de dureza	ninguna	ninguna	Ec. 9.11
C_{md}	factor de montaje	ninguna	ninguna	Ec. 9.11
C_p	coeficiente elástico	ninguna	ninguna	Ec. 9.10
C_R	factor de confiabilidad	ninguna	ninguna	Ec. 9.11
C_s	factor de materiales	ninguna	ninguna	Ec. 9.24
C_T	factor de temperatura	ninguna	ninguna	Ec. 9.11
C_{xc}	factor de abombamiento	ninguna	ninguna	Ec. 9.10
d	diámetro de paso (con varios subíndices)	in	m	varias
e	eficiencia	ninguna	ninguna	Ec. 9.30
F	ancho de cara	in	m	Ec. 9.9, .19
I	factor geométrico superficial de AGMA	ninguna	ninguna	Ec. 9.10
J	factor geométrico de flexión de AGMA	ninguna	ninguna	Ec. 9.9
K_a, C_a	factor de aplicación	ninguna	ninguna	Ec. 9.9
K_B	factor de flexión en el borde	ninguna	ninguna	Ec. 8.15
K_I	factor de engrane loco	ninguna	ninguna	Ec. 8.15
K_m, C_m	factor de distribución de carga	ninguna	ninguna	Ec. 9.9, .10
K_s, C_s	factor de tamaño	ninguna	ninguna	Ec. 9.9, .10
K_v, C_v	factor dinámico, factor de velocidad	ninguna	ninguna	Ec. 9.9, .26
K_x	factor de curvatura	ninguna	ninguna	Ec. 9.9
L	longitud, avance	in	m	Ec. 9.6, .7
m	módulo	no se usan	mm	Ec. 9.9
m_F	razón de contacto axial	ninguna	ninguna	Ec. 9.5
m_G	razón de engrane	ninguna	ninguna	Ec. 9.15
m_N	razón de carga compartida	ninguna	ninguna	Ec. 9.6
m_p	razón de contacto transversal	ninguna	ninguna	Ec. 9.6
N	número de dientes (con varios subíndices)	ninguna	ninguna	varias
N_b, N_c	factores de seguridad; flexión y contacto	ninguna	ninguna	varias
p_c	paso circular	in	mm	Ec. 9.1*c*
p_d	paso diametral	1/in	no se usan	Ec. 9.1*c*
p_t	paso transversal	in	m	Ec. 9.1*a*
p_x	paso axial	in	mm	Ec. 9.1*b*
S_{fb}	resistencia a la fatiga por flexión corregida	psi	Pa	Ej. 9-2
S_{fc}	resistencia a la fatiga superficial corregida	psi	Pa	Ej. 9-2
S'_{fc}	resistencia a la fatiga superficial sin corregir	psi	Pa	Ec. 9.11
T	torque (con varios subíndices)	lb-in	N-m	varias
V_t	velocidad en la línea de paso	in/seg	m/seg	Ec. 9.27
W	fuerza total sobre los dientes del engrane	lb	N	Ec. 9.3
W_a	fuerza axial sobre los dientes del engrane	lb	N	Ec. 9.3

9

La fotografía de inicio del capítulo es cortesía de The Falk Corporation, Milwaukee, WI.

Tabla 9-0 Variables utilizadas en este capítulo
Parte 2 de 2

Símbolo	Variable	unidades ips	unidades SI	Véase
W_f	fuerza de fricción sobre los dientes del engrane	lb	N	Ec. 9.28
W_r	fuerza radial sobre los dientes del engrane	lb	N	Ec. 9.3
W_t	fuerza tangencial sobre los dientes del engrane	lb	N	Ec. 9.3
α	ángulo del cono de paso	grad	grad	Ec. 9.7
ϕ	ángulo de presión	grad	grad	varias
ψ	ángulo de hélice o ángulo de espiral	grad	grad	varias
λ	ángulo de avance	grad	grad	Ec. 9.12
μ	coeficiente de fricción	ninguna	ninguna	Ec. 9.28
ω	velocidad angular	rad/seg	rad/seg	Ej. 9-2
ρ	radio de curvatura	in	m	Ec. 9.6
Φ	potencia	hp	W	Ec. 9.20
σ_b	esfuerzo de flexión	psi	Pa	Ec. 9.9
σ_c	esfuerzo superficial	psi	Pa	Ec. 9.10



(*a*) Par de engranes acoplados en orientaciones opuestas, con ejes paralelos



(*b*) Par de engranes acoplados en la misma orientación, con ejes cruzados

FIGURA 9-1
Engranes helicoidales *Cortesía de Boston Gear, Division of IMO Industries, Quincy MA*

ENGRANES HELICOIDALES PARALELOS Éstos (figura 9-1*a*) se acoplan con una combinación de rodamiento y deslizamiento que inicia el contacto en un extremo del diente y "barriendo" contra el ancho de su cara. Lo anterior es muy diferente al contacto entre dientes rectos, el cual ocurre súbitamente a lo largo de una línea que va por la cara del diente en el instante del contacto. Una consecuencia de tal diferencia es que los engranes helicoidales funcionan más silenciosamente y con menos vibración que los engranes rectos, debido al contacto gradual en el diente. Las transmisiones automotrices utilizan engranes helicoidales casi exclusivamente para obtener una operación silenciosa. La excepción es el engrane de la reversa en transmisiones que no son automáticas, el cual emplea con frecuencia engranes rectos para facilitar el acoplamiento y el desacoplamiento del eje. En estas transmisiones se oye un "rechinido" notable cuando el vehículo se desplaza hacia atrás, por la resonancia de los dientes del engrane recto que surgen de los impactos súbitos diente-diente en la línea de contacto. Los engranajes helicoidales hacia delante son básicamente silenciosos. Los engranes helicoidales paralelos también son capaces de transmitir altos niveles de potencia.

ENGRANES HELICOIDALES CRUZADOS Éstos (figura 9-1*b*) se acoplan de manera diferente a los engranes helicoidales paralelos; sus dientes se deslizan sin rodamiento y teóricamente tienen un punto de contacto en lugar de la línea de contacto de los engranes paralelos, lo cual reduce drásticamente su capacidad para transportar carga. Los engranes helicoidales cruzados no se recomiendan para aplicaciones que deben transmitir grandes torques o mucha potencia. Por otro lado, se usan con frecuencia en aplicaciones con carga ligera, como el impulsor del distribuidor o el velocímetro de los automóviles.

Geometría del engrane helicoidal

La figura 9-2 muestra la geometría de una cremallera helicoidal simple. Los dientes forman el ángulo de hélice ψ con el "eje" de la cremallera. Los dientes se cortan de acuerdo con este ángulo y el perfil del diente permanece en el **plano normal**. El **paso normal** p_n y el **ángulo de presión normal** ϕ_n se miden en este plano. El **paso transversal** p_t y el **ángulo de presión transversal** ϕ_t se miden en el **plano transversal**. Tales dimensiones se relacionan entre sí mediante el ángulo de hélice. El paso transversal es la hipotenusa del triángulo rectángulo *ABC*.

$$p_t = p_n / \cos \psi \tag{9.1a}$$

El paso axial p_x se define también con la hipotenusa del triángulo rectángulo BCD.

$$p_x = p_n / \operatorname{sen} \psi \tag{9.1b}$$

p_t corresponde al paso circular p_c, medido en el plano de paso de un engrane circular. El paso diametral se utiliza más comúnmente para definir el tamaño del diente y está relacionado con el paso circular por

$$p_d = \frac{N}{d} = \frac{\pi}{p_c} = \frac{\pi}{p_t} \tag{9.1c}$$

donde N es el número de dientes y d es el diámetro de paso.

El paso diametral en el plano normal es

$$p_{nd} = p_d / \cos \psi \tag{9.1d}$$

Los ángulos de presión en los dos planos están relacionados por

$$\tan \phi_t = \tan \phi = \tan \phi_n / \cos \psi \tag{9.2}$$

Fuerzas en un engrane helicoidal

En la figura 9-2 se ilustra esquemáticamente el conjunto de fuerzas que actúan sobre un diente. La fuerza resultante W se encuentra en un ángulo compuesto, definido por la combinación del ángulo de presión y el ángulo de hélice. La componente tangencial W_t de la fuerza en el engranado se determina a partir del torque aplicado en el engrane o en el piñón, como se define en la ecuación 8.13a para el piñón.

$$W_t = \frac{T_p}{r_p} = \frac{2T_p}{d_p} = \frac{2 p_d T_p}{N_p} \tag{8.13a}$$

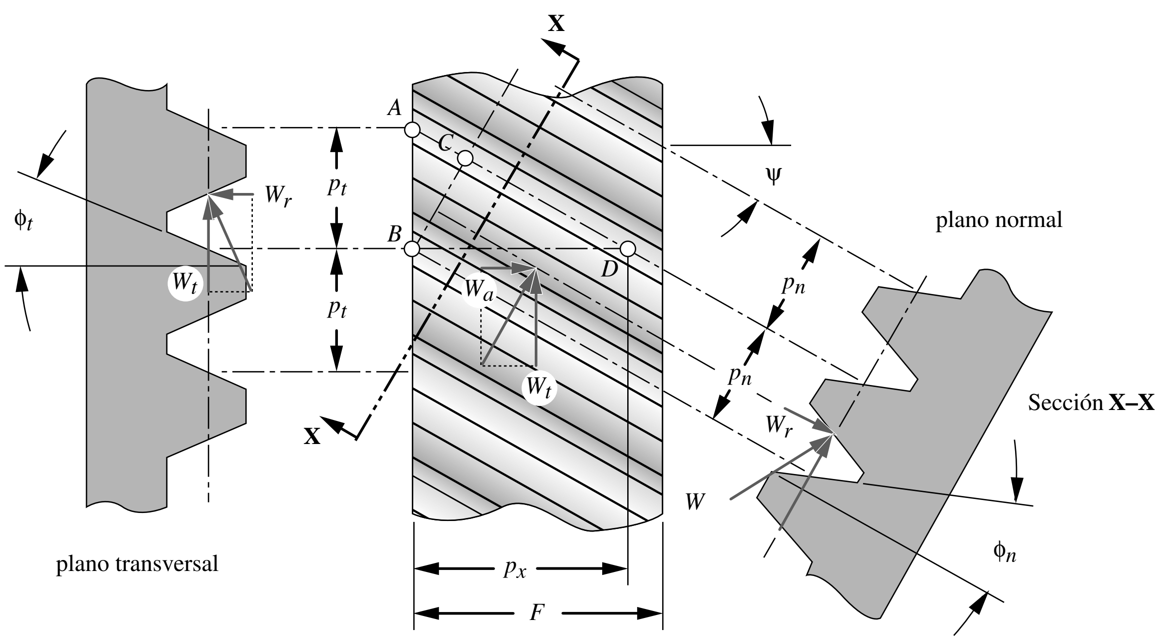


FIGURA 9-2

Cremallera helicoidal simple que muestra los planos normal y transversal, así como la resolución de las fuerzas

Además de la componente radial W_r, debida al ángulo de presión, ahora también existe una componente de fuerza W_a, la cual tiende a separar los engranes axialmente. Con los engranes helicoidales, se deben utilizar cojinetes con capacidad de empuje axial para resistir esta componente de fuerza, a menos que los engranes helicoidales se monten en pares con orientaciones opuestas sobre el mismo eje, con la finalidad de cancelar la componente de fuerza axial. Con este propósito, algunas veces los dientes con orientaciones opuestas se cortan simultáneamente sobre los bloques de los engranes, con una ranura entre ellos para desalojar el cortador. Tales engranes se conocen como **engranes helicoidales dobles**. Si se elimina la holgura de la ranura, y los dientes de orientación opuesta se cortan para que funcionen juntos, se les llama **engranes de espina de pescado.**

Las componentes de fuerza en un engranaje helicoidal acoplado son

$$W_r = W_t \tan\phi \qquad (9.3a)$$

$$W_a = W_t \tan\psi \qquad (9.3b)$$

$$W = \frac{W_t}{\cos\psi \cos\phi_n} \qquad (9.3c)$$

Número virtual de dientes

Otra ventaja de los engranes helicoidales sobre los engranes rectos, además de su operación silenciosa, son sus dientes relativamente más fuertes que los de un engrane con el mismo paso normal, el mismo paso diametral y el mismo número de dientes. La causa de esto se observa en la figura 9-2. La componente de fuerza que transmite el torque es W_t, el cual se encuentra en el plano transversal. El tamaño del diente (paso normal) está definido en el plano normal. El espesor del diente en el plano transversal es $1/\cos\psi$ veces el de un engrane recto, con el mismo paso normal. Otro modo de visualizarlo es considerar el hecho de que la intersección del plano normal con el cilindro de paso de diámetro d es una elipse, cuyo radio es $r_e = (d/2)/\cos^2\psi$. Entonces se define el número virtual de dientes N_e como el cociente entre la circunferencia de un círculo de paso virtual de radio r_e y el paso normal p_c:

$$N_e = \frac{2\pi r_e}{p_n} = \frac{\pi d}{p_n \cos^2\psi} \qquad (9.4a)$$

Al sustituir la ecuación 9.1a en lugar de p_n:

$$N_e = \frac{\pi d}{p_t \cos^3\psi} \qquad (9.4b)$$

y al sustituir $p_t = \pi_d/N$ de la ecuación 9.1c, se tiene

$$N_e = \frac{N}{\cos^3\psi} \qquad (9.4c)$$

Lo anterior define un **engrane virtual** equivalente a un engrane recto con N_e dientes, obteniendo así un diente más fuerte, contra la fatiga por flexión y la fatiga superficial, que un engrane recto con el mismo número de dientes físicos del engrane helicoidal. El número más grande de dientes virtuales reduce también el rebaje en piñones pequeños, lo cual permite un número mínimo de dientes menor en los engranes helicoidales que en los engranes rectos.

Razones de contacto

La **razón de contacto transversal** m_p se definió para los engranes rectos con la ecuación 8.7 (p. 556) y es la misma para engranes helicoidales. El ángulo de hélice introduce otra razón llamada **razón de contacto axial** m_F, la cual se define como el cociente entre el ancho F de la cara y el paso axial p_x:

$$m_F = \frac{F}{p_x} = \frac{F\,p_d \tan\psi}{\pi} \tag{9.5}$$

Esta razón debería ser igual a, por lo menos, 1.15, e indica el grado de **traslape helicoidal** del engranaje.

Así como la mayor razón de contacto transversal permite que varios dientes compartan la carga, el mayor ancho de la cara para un ángulo de hélice determinado incrementa el traslape de los dientes y también favorece la capacidad para distribuir carga, la cual, sin embargo, está limitada por la precisión con la que se fabricaron los engranes (véase la figura 8-19 de la p. 568). Observe que los ángulos de hélice más grandes aumentan la razón de contacto axial, permitiendo así que se utilicen engranes con anchos más estrechos, pero a expensas de mayores componentes de fuerza axiales.

Si, como es deseable, m_F se mantiene arriba de 1, los engranes se consideran helicoidales convencionales. Si $m_F < 1$, entonces reciben el nombre de engranes con **razón de contacto axial baja** (LACR), por lo que su cálculo requiere pasos adicionales. Para mayor información sobre engranes con LACR, consulte los estándares de la AGMA.[1, 2, 3] Se considerarán aquí sólo engranes helicoidales convencionales.

9

Esfuerzos en engranes helicoidales

Las ecuaciones de la AGMA para el esfuerzo de flexión y el esfuerzo superficial para engranes rectos, también se usan para los engranes helicoidales. Dichas ecuaciones se presentaron en el capítulo 8 con una explicación y una definición de términos amplias que no se repetirán aquí. Las ecuaciones de aquel capítulo, para el esfuerzo de flexión, son:

$$\sigma_b = \frac{W_t\,p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{8.15us}$$

$$\sigma_b = \frac{W_t}{FmJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{8.15si}$$

y para el esfuerzo superficial:

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{W_t}{FId}\frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f} \tag{8.21}$$

Las únicas diferencias significativas en su aplicación a engranes helicoidales implican los factores geométricos I y J. Los valores de J para varias combinaciones de ángulo de hélice (10, 15, 20, 25, 30°), ángulo de presión (14.5, 20, 25°) y razones de adéndum (0, 0.25, 0.5) se presentan en la referencia 3. Aquí se reproducen unos cuantos ejemplos en las tablas 9-1 a 9-6*. Consulte el estándar de la AGMA para una información más completa.

El cálculo de I, para pares de engranes helicoidales convencionales, requiere la inclusión de un término adicional en la ecuación 8.22a (p. 581), la cual se convierte en:†

* Tomado del estándar AGMA 908-B89, *Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical, and Herringbone Gear Teeth*, con autorización de la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St. Suite 201, Alexandria, Va., 22314.

† Se requiere un término adicional para engranes helicoidales LACR, pero esto no se abordará aquí, como ya se indicó.

$$I = \frac{\cos\phi}{\left(\dfrac{1}{\rho_p} \pm \dfrac{1}{\rho_g}\right) d_p m_N} \tag{9.6a}$$

donde ρ_p y ρ_g son los radios de curvatura de los dientes del piñón y el engrane, respectivamente; ϕ es el ángulo de presión y d_p es el diámetro de paso del piñón. El signo $\pm$ toma en cuenta engranajes externos e internos. Se usa el signo superior para engranajes externos y todas las expresiones relacionadas. El término m_N es la **razón para distribuir carga** definida como

$$m_N = \frac{F}{L_{mín}} \tag{9.6b}$$

donde F es el ancho de la cara. El cálculo de la **longitud mínima de las líneas de contacto** $L_{mín}$ requiere varios pasos. Primero, se deben formar dos factores a partir de los residuos de la razón de contacto transversal m_p y la razón de contacto axial m_F.

$$\begin{aligned} n_r &= \text{parte fraccionaria de } m_p \\ n_a &= \text{parte fraccionaria de } m_F \end{aligned} \tag{9.6c}$$

y

$$\text{si } n_a \le 1 - n_r \quad \text{entonces} \quad L_{mín} = \frac{m_p F - n_a n_r p_x}{\cos\psi_b} \tag{9.6d}$$

$$\text{si } n_a > 1 - n_r \quad \text{entonces} \quad L_{mín} = \frac{m_p F - (1 - n_a)(1 - n_r) p_x}{\cos\psi_b} \tag{9.6e}$$

Todos los factores de estas ecuaciones se definen en esta sección o en el capítulo 8, excepto ψ_b, el ángulo base de la hélice, que es

$$\psi_b = \cos^{-1}\left(\cos\psi \frac{\cos\phi_n}{\cos\phi}\right) \tag{9.6f}$$

El radio de curvatura del piñón helicoidal de la ecuación 9.6*a* se calcula con una fórmula diferente de la utilizada en engranes rectos. En lugar de la ecuación 8.22*b,* se usa

$$\begin{aligned} \rho_p &= \sqrt{\left\{0.5\left[\left(r_p + a_p\right) \pm \left(C - r_g - a_g\right)\right]\right\}^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} \\ \rho_g &= C \operatorname{sen}\phi \mp \rho_p \end{aligned} \tag{9.6g}$$

donde (r_p, a_p) y (r_g, a_g) son los radios de paso y el adéndum del piñón y el engrane, respectivamente, mientras C es la distancia entre centros (de operación) real.

Los esfuerzos de flexión y superficial se calculan con las ecuaciones anteriores y los datos de las tablas 9-1 a 9-6. Las resistencias del material se obtienen del capítulo 8, en tanto que los factores de seguridad se calculan de la misma manera, como se describió ahí para engranes rectos.

Tabla 9-1 **Factor geométrico J de flexión de la AGMA para $\phi = 20°$, $\psi = 10°$ y dientes de profundidad total con carga en la punta**

Dientes del engrane	Dientes del piñón: 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	U	U										
21	U	U	U	U	U	U	0.46	0.46								
26	U	U	U	U	U	U	0.47	0.49	0.49	0.49						
35	U	U	U	U	U	U	0.48	0.52	0.50	0.53	0.54	0.54				
55	U	U	U	U	U	U	0.49	0.55	0.52	0.56	0.55	0.57	0.59	0.59		
135	U	U	U	U	U	U	0.50	0.60	0.53	0.61	0.57	0.62	0.60	0.63	0.65	0.65

Tabla 9-2 **Factor geométrico J de flexión de la AGMA para $\phi = 20°$, $\psi = 20°$ y dientes de profundidad total con carga en la punta**

Dientes del engrane	Dientes del piñón: 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	0.44	0.44										
21	U	U	U	U	0.45	0.46	0.47	0.47								
26	U	U	U	U	0.45	0.49	0.48	0.49	0.50	0.50						
35	U	U	U	U	0.46	0.51	0.49	0.52	0.51	0.53	0.54	0.54				
55	U	U	U	U	0.47	0.54	0.50	0.55	0.52	0.56	0.55	0.57	0.58	0.58		
135	U	U	U	U	0.48	0.58	0.51	0.59	0.54	0.60	0.57	0.61	0.60	0.62	0.64	0.64

Tabla 9-3 **Factor geométrico J de flexión de la AGMA para $\phi = 20°$, $\psi = 30°$ y dientes de profundidad total con carga en la punta**

Dientes del engrane	Dientes del piñón: 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	0.39	0.39												
17	U	U	0.39	0.41	0.41	0.41										
21	U	U	0.40	0.43	0.42	0.43	0.44	0.44								
26	U	U	0.41	0.44	0.43	0.45	0.45	0.46	0.46	0.46						
35	U	U	0.41	0.46	0.43	0.47	0.45	0.48	0.47	0.48	0.49	0.49				
55	U	U	0.42	0.49	0.44	0.49	0.46	0.50	0.48	0.50	0.50	0.51	0.52	0.52		
135	U	U	0.43	0.51	0.45	0.52	0.47	0.53	0.49	0.53	0.51	0.54	0.53	0.55	0.56	0.56

Tabla 9-4 **Factor geométrico J de flexión de la AGMA para $\phi = 25°$, $\psi = 10°$ y dientes de profundidad total con carga en la punta**

Dientes del engrane	Dientes del piñón 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	U	U														
14	U	U	0.47	0.47												
17	U	U	0.48	0.51	0.52	0.52										
21	U	U	0.48	0.55	0.52	0.55	0.56	0.56								
26	U	U	0.49	0.58	0.53	0.58	0.57	0.59	0.60	0.60						
35	U	U	0.50	0.61	0.54	0.62	0.57	0.63	0.61	0.64	0.64	0.64				
55	U	U	0.51	0.65	0.55	0.66	0.58	0.67	0.62	0.68	0.65	0.69	0.70	0.70		
135	U	U	0.52	0.70	0.56	0.71	0.60	0.72	0.63	0.73	0.67	0.74	0.71	0.75	0.76	0.76

Tabla 9-5 **Factor geométrico J de flexión de la AGMA para $\phi = 25°$, $\psi = 20°$ y dientes de profundidad total con carga en la punta**

Dientes del engrane	Dientes del piñón 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	0.47	0.47														
14	0.47	0.50	0.50	0.50												
17	0.48	0.53	0.51	0.54	0.54	0.54										
21	0.48	0.56	0.51	0.57	0.55	0.58	0.58	0.58								
26	0.49	0.59	0.52	0.60	0.55	0.60	0.69	0.61	0.62	0.62						
35	0.49	0.62	0.53	0.63	0.56	0.64	0.60	0.64	0.62	0.65	0.66	0.66				
55	0.50	0.66	0.53	0.67	0.57	0.67	0.60	0.68	0.63	0.69	0.67	0.70	0.71	0.71		
135	0.51	0.70	0.54	0.71	0.58	0.72	0.62	0.72	0.65	0.73	0.68	0.74	0.72	0.75	0.76	0.76

Tabla 9-6 **Factor geométrico J de flexión de la AGMA para $\phi = 25°$, $\psi = 30°$ y dientes de profundidad total con carga en la punta**

Dientes del engrane	Dientes del piñón 12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G
12	0.46	0.46														
14	0.47	0.49	0.49	0.49												
17	0.47	0.51	0.50	0.52	0.52	0.52										
21	0.48	0.54	0.50	0.54	0.53	0.55	0.55	0.55								
26	0.48	0.56	0.51	0.56	0.53	0.57	0.56	0.57	0.58	0.58						
35	0.49	0.58	0.51	0.59	0.54	0.59	0.56	0.60	0.58	0.60	0.61	0.61				
55	0.49	0.61	0.52	0.61	0.54	0.62	0.57	0.62	0.59	0.63	0.62	0.64	0.64	0.64		
135	0.50	0.64	0.53	0.64	0.55	0.65	0.58	0.66	0.60	0.66	0.62	0.67	0.65	0.68	0.68	0.68

EJEMPLO 9-1

Análisis de esfuerzo en un tren de engranes helicoidales

Problema **Rediseñe el tren de engranes rectos de los ejemplos 8-4 a 8-7 (pp. 569 a 592) mediante engranes helicoidales, luego compare sus factores de seguridad.**

Se proporciona **Los ejemplos mencionados involucran, respectivamente, la cinemática, los esfuerzos de flexión, los esfuerzos superficiales y los factores de seguridad para un tren de tres engranes con los siguientes datos: $W_t = 432.17$ lb, $N_p = 14$, $N_{loco} = 17$, $N_g = 49$, $\phi = 25°$, $p_d = 6$, $F = 2.667$ in, velocidad del piñón = 2 500 rpm y 20 hp. El factor de velocidad $K_v = 0.66$ de cálculos anteriores.**

Suposiciones **Los dientes son perfiles de la AGMA estándares de profundidad total. La carga y la fuente son de naturaleza uniforme. Se usará un índice de calidad del engrane igual a 6. Todos los engranes son de acero con $\nu = 0.28$. La vida requerida de servicio es de cinco años para una operación de un turno. La temperatura de operación es de 200 °F. Con base en el supuesto de carga y fuente uniformes, el factor de la aplicación K_a se puede hacer igual a 1. El factor de distribución de carga se estima de la tabla 8-16 (p. 577) con base en el ancho de cara supuesto: $Km = 1.6$. El factor intermedio $K_I = 1$ para el piñón y el engrane, y $K_I = 1.42$ para el engrane loco. El factor de tamaño $K_s = 1$ para los tres engranes. $C_f = 1$. $K_B = 1$. Se mantienen los mismos ϕ y p_d de los engranes de los ejemplos previos y se intenta con un ángulo de hélice de 20°.**

9

Solución

1. El factor geométrico J de flexión para un ángulo de presión de 25°, un ángulo de hélice de 20° y un piñón de 14 dientes engranado con un engrane loco de 17 dientes se obtiene de la tabla 9-5 con un valor de $J_{piñón} = 0.51$. El esfuerzo de flexión en el diente del piñón es, entonces,

$$\sigma_{b_p} = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \cong \frac{432.17(6)}{2.667(0.51)}\frac{1(1.6)}{0.66}(1)(1)(1) \cong 4\,620 \text{ psi} \qquad (a)$$

2. El factor geométrico J de flexión para un ángulo de presión de 25°, un ángulo de hélice de 20° y un engrane loco de 17 dientes engranado con un piñón de 14 dientes, en la tabla 9-5, es $J_{loco} = 0.54$. El esfuerzo a la flexión en el diente del engrane loco es:

$$\sigma_{b_i} = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \cong \frac{432.17(6)}{2.667(0.54)}\frac{1(1.6)}{0.66}(1)(1)(1.42) \cong 6\,200 \text{ psi} \qquad (b)$$

Observe en la tabla 9-5 que el engrane loco tiene un factor J diferente, cuando se considera que es el “engrane” acoplado con el piñón más pequeño, que cuando se considera el “piñón” acoplado con el engrane más grande. Se utiliza el valor más pequeño de los dos porque da el mayor esfuerzo.

3. El factor geométrico J de flexión para un ángulo de presión de 25°, un ángulo de hélice de 20° y un engrane de 49 dientes acoplado con un engrane loco de 17 dientes se obtiene de la tabla 9-5, con un valor de $J_{engrane} = 0.66$. El esfuerzo de flexión en el diente del engrane es, entonces,

$$\sigma_{b_g} = \frac{W_t\, p_d}{FJ}\frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \cong \frac{432.17(6)}{2.667(0.66)}\frac{1(1.6)}{0.66}(1)(1)(1) \cong 3\,570 \text{ psi} \qquad (c)$$

4. Se necesitan el diámetro de paso y el radio de paso de cada engrane para este cálculo. De los datos del ejemplo 8-4 (p. 569):

$$d_p = 2.333 \qquad d_i = 2.833 \qquad d_g = 8.167$$
$$r_p = 1.167 \qquad r_i = 1.417 \qquad r_g = 4.083 \tag{d}$$

5. Los adenda, los dedenda y las distancias entre centros de los engranados son:

$$a_p = a_i = a_g = \frac{1.0}{p_d} = \frac{1}{6} = 0.167 \text{ in}$$
$$C_{pi} = \frac{d_p + d_i}{2} = \frac{2.333 + 2.833}{2} = 2.58 \text{ in} \tag{e}$$
$$C_{id} = \frac{d_i + d_g}{2} = \frac{2.833 + 8.167}{2} = 5.50 \text{ in}$$

6. Se obtienen las longitudes de acción Z_{pi} y Z_{ig} para los dos engranados mediante la ecuación 8.2 (p. 548).

$$\begin{aligned} Z_{pi} &= \sqrt{\left(r_p + a_p\right)^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} + \sqrt{\left(r_i + a_i\right)^2 - \left(r_i \cos\phi\right)^2} - C_{pi} \operatorname{sen}\phi \\ &= \sqrt{(1.167 + 0.167)^2 - (1.167\cos 25°)^2} \\ &\qquad + \sqrt{(1.417 + 0.167)^2 - (1.417\cos 25°)^2} - 2.58 \operatorname{sen} 25° = 0.647 \end{aligned} \tag{f}$$

$$\begin{aligned} Z_{ig} &= \sqrt{\left(r_p + a_p\right)^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} + \sqrt{\left(r_g + a_g\right)^2 - \left(r_g \cos\phi\right)^2} - C_{ig} \operatorname{sen}\phi \\ &= \sqrt{(1.167 + 0.167)^2 - (1.167\cos 25°)^2} \\ &\qquad + \sqrt{(4.083 + 0.167)^2 - (4.083\cos 25°)^2} - 5.50 \operatorname{sen} 25° = 0.692 \end{aligned}$$

7. Las razones de contacto transversal para los dos engranados se obtienen con la ecuación 8.7*b* (p. 556).

para el engranado piñón-engrane loco: $m_{p_{pi}} = \dfrac{p_d Z_{pi}}{\pi \cos\phi} = \dfrac{6(0.647)}{\pi \cos 25} = 1.36$

para el engranado engrane loco-engrane: $m_{p_{ig}} = \dfrac{p_d Z_{ig}}{\pi \cos\phi} = \dfrac{6(0.692)}{\pi \cos 25} = 1.46$ $\quad (g)$

8. La razón de contacto axial m_F se obtiene con la ecuación 9.5 (p. 614) y el paso axial p_x, con las ecuaciones 9.1*a*, *b*, y *c* (pp. 611-612).

$$m_F = \frac{F p_d \tan\psi}{\pi} = \frac{2.667(6)\tan 20°}{\pi} = 1.85$$
$$p_x = p_n / \operatorname{sen}\psi = p_t \cos\psi / \operatorname{sen}\psi = \frac{\pi\cos\psi}{p_d \operatorname{sen}\psi} = \frac{\pi \cos 20°}{6 \operatorname{sen} 20°} = 1.44 \text{ in} \tag{h}$$

9. Se obtiene el ángulo de presión normal ϕ_n y el ángulo de hélice ψ_b de la base, con las ecuaciones 9.2 y 9.6*f* (pp. 612 y 615), respectivamente.

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\cos\psi \tan\phi\right) = \tan^{-1}\left(\cos 20° \tan 25°\right) = 23.66°$$
$$\psi_b = \cos^{-1}\left(\cos\psi \frac{\cos\phi_n}{\cos\phi}\right) = \cos^{-1}\left(\cos 20° \frac{\cos 23.66°}{\cos 25°}\right) = 18.25° \tag{i}$$

9

10. Se obtiene la longitud mínima de las líneas de contacto de cada engranado mediante las ecuaciones 9.6*c* y 9.6*d* o *e* (p. 615) y se utilizan con la finalidad de obtener la razón para compartir carga m_N con la ecuación 9.6*b* (p. 615).

$$\begin{aligned} &\text{para el engranado piñón-engrane loco:} && n_{r_{pi}} = \text{parte fraccionaria de } m_{p_{pi}} = 0.36 \\ &\text{para el engranado engrane loco-engrane:} && n_{r_{ig}} = \text{parte fraccionaria de } m_{p_{ig}} = 0.46 \\ &\text{para ambos engranados:} && n_a = \text{parte fraccionaria de } m_F = 0.85 \end{aligned} \tag{j}$$

para el engranado piñón-engrane loco (ecuación 9.6*e*):

$$\text{si } n_a > 1 - n_{r_{pi}} \text{ entonces: } L_{mín_{pi}} = \frac{m_{p_{pi}} F - (1 - n_a)\left(1 - n_{r_{pi}}\right) p_x}{\cos \psi_b}$$

$$L_{mín_{pi}} = \frac{1.36(2.667) - (1 - 0.85)(1 - 0.36)(1.44)}{\cos(18.25°)} = 3.674 \tag{k}$$

$$m_{N_{pi}} = \frac{F}{L_{mín\,pi}} = \frac{2.667}{3.674} = 0.726 \tag{l}$$

para el engranado engrane loco-engrane (ecuación 9.6*e*):

$$\text{si } n_a > 1 - n_{r_{ig}} \text{ entonces: } L_{mín_{ig}} = \frac{m_{p_{ig}} F - (1 - n_a)\left(1 - n_{r_{ig}}\right) p_x}{\cos \psi_b}$$

$$L_{mín_{ig}} = \frac{1.46(2.667) - (1 - 0.85)(1 - 0.46)(1.44)}{\cos(18.25°)} = 3.977 \tag{m}$$

$$m_{N_{ig}} = \frac{F}{L_{mín_{ig}}} = \frac{2.667}{3.977} = 0.671 \tag{n}$$

11. Los radios de curvatura de los dientes del engrane son:

$$\begin{aligned} \rho_p &= \sqrt{\left\{0.5\left[\left(r_p + a_p\right) \pm \left(C_{pi} - r_i - a_i\right)\right]\right\}^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} \\ &= \sqrt{\left\{0.5\left[(1.167 + 0.0167) + (2.58 - 1.417 - 0.0167)\right]\right\}^2 - (1.167 \cos 25°)^2} \\ &= 0.4931 \text{ in} \\ \rho_i &= C_{pi} \operatorname{sen}\phi - \rho_p = 2.58 \operatorname{sen} 25° - 0.4931 = 0.5987 \text{ in} \\ \rho_g &= C_{ig} \operatorname{sen}\phi - \rho_i = 5.5 \operatorname{sen} 25° - 0.5987 = 1.726 \text{ in} \end{aligned} \tag{o}$$

12. El factor geométrico *I* de picado se calcula para un par de engranes del engranado. Como se tienen dos engranados (piñón/engrane loco y engrane loco/engrane), se deberán calcular dos valores diferentes de *I* con las ecuaciones 9.6.

$$I_{pi} = \frac{\cos\phi}{\left(\dfrac{1}{\rho_p} + \dfrac{1}{\rho_i}\right) d_p m_{N_{pi}}} = \frac{\cos 25°}{\left(\dfrac{1}{0.4931} + \dfrac{1}{0.5987}\right)(2.333)(0.726)} = 0.14$$

$$I_{ig} = \frac{\cos\phi}{\left(\dfrac{1}{\rho_i} + \dfrac{1}{\rho_g}\right) d_i m_{N_{ig}}} = \frac{\cos 25°}{\left(\dfrac{1}{0.5987} + \dfrac{1}{1.726}\right)(2.833)(0.671)} = 0.21 \qquad (p)$$

13. El coeficiente elástico C_p se obtiene con la ecuación 8.23 (p. 581) y, como antes, es 2 276.

14. El esfuerzo superficial del engranado piñón-engrane loco es

$$\sigma_{c_p} = C_p \sqrt{\frac{W_t}{F I_{pi} d_p} \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f}$$

$$\cong 2\,276 \sqrt{\frac{432.17}{2.667(0.14)(2.33)} \frac{1(1.6)}{0.66}(1)(1)} \cong 79 \text{ kpsi} \qquad (q)$$

15. El esfuerzo superficial para el engranado engrane loco-engrane es

$$\sigma_{c_i} = C_p \sqrt{\frac{W_t}{F I_{ig} d_i} \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f}$$

$$\cong 2\,276 \sqrt{\frac{432.17}{2.667(0.21)(2.83)} \frac{1(1.6)}{0.66}(1)(1)} \cong 59 \text{ kpsi} \qquad (r)$$

16. La resistencia corregida de fatiga por flexión del acero del ejemplo 8-7 (p. 592) es de 39 kpsi y su resistencia a la fatiga corregida superficial es de 105 kpsi. Los factores de seguridad contra falla por flexión se obtienen comparando la resistencia a la flexión corregida con el esfuerzo de flexión de cada engrane en el engranado.

$$N_{b_{piñón}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{piñón}}} = \frac{39}{4.6} \cong 8.5 \qquad (s)$$

$$N_{b_{loco}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{loco}}} = \frac{39}{6.2} = 6.3 \qquad (t)$$

$$N_{b_{engrane}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{engrane}}} = \frac{39}{3.6} = 10.8 \qquad (u)$$

17. Los factores de seguridad contra la falla superficial se obtienen comparando la resistencia superficial corregida con el esfuerzo superficial para cada engrane del engranado:*

$$N_{c_{piñón\text{-}loco}} = \left(\frac{S_{fc}}{\sigma_{c_{piñón\text{-}loco}}}\right)^2 = \left(\frac{105}{79}\right)^2 \cong 1.8 \qquad (v)$$

$$N_{c_{loco\text{-}engrane}} = \left(\frac{S_{fc}}{\sigma_{c_{loco\text{-}engrane}}}\right)^2 = \left(\frac{105}{59}\right)^2 \cong 3.2 \qquad (w)$$

* El factor de seguridad contra falla superficial se obtiene comparando la carga real con la carga que produciría un esfuerzo igual a la resistencia superficial corregida. Debido a que el esfuerzo superficial está relacionado con la raíz cuadrada de la carga, el factor de seguridad contra fatiga superficial se calcula como el cociente del cuadrado de la resistencia superficial corregida dividida entre el cuadrado del esfuerzo superficial para cada engrane del acoplamiento.

18. Compare estos resultados con los factores de seguridad del tren de engranes rectos del ejemplo 8-7 (p. 592). Los engranes helicoidales tienen factores de seguridad significativamente más grandes que los de los engranes rectos con el mismo paso.

$$N_{b_{piñón}} = 8.5 \qquad N_{b_{loco}} = 6.3 \qquad N_{b_{engrane}} = 10.8$$
$$N_{c_{piñón\text{-}loco}} = 1.8 \qquad N_{c_{loco\text{-}engrane}} = 3.2 \qquad (x)$$

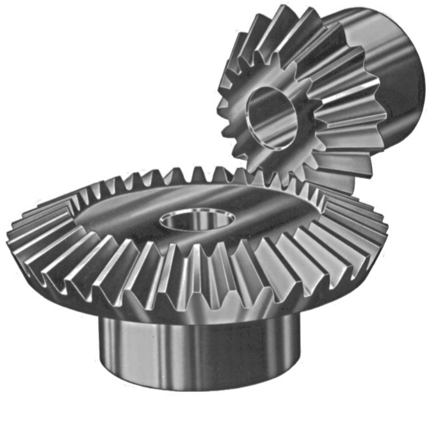
19. Los archivos EX13-01 se encuentran en el CD-ROM.

9.2 ENGRANES CÓNICOS

Los engranes cónicos se cortan sobre conos coincidentes en vez de cilindros coincidentes de engranes rectos o helicoidales. Sus ejes no son paralelos y se intersecan en los vértices de los conos coincidentes. El ángulo entre sus ejes puede ser de cualquier valor, pero con frecuencia es de 90°. Si los dientes se cortan paralelos al eje del cono, se trata de **engranes cónicos rectos**, de modo análogo a los engranes rectos. Si los dientes se cortan en un ángulo espiral ψ con el eje del cono, se trata de **engranes cónicos espirales**, de modo análogo a los engranes helicoidales. El contacto entre los dientes de los engranes cónicos rectos o espirales tiene los mismos atributos que sus contrapartes cilíndricas análogas, sólo que los cónicos espirales funcionan más silenciosa y suavemente que los cónicos rectos y los diámetros de las espirales pueden ser menores para la misma capacidad de carga.

9

La figura 9-3*a* muestra un par de engranes cónicos rectos y la figura 9-3*b* un par de engranes cónicos en espiral. Otro perfil es el engrane *Zerol*® (que no se muestra), el cual tiene dientes curvos como un engrane espiral, pero también un ángulo espiral igual a cero, como un engrane cónico recto. Los engranes Zerol tienen algo del funcionamiento silencioso y suave característico de los engranes en espiral. Los espirales son lo último en funcionamiento suave y silencioso, por lo que se recomiendan para velocidades de hasta 8 000 fpm (40 m/seg). Para mayores velocidades, se requieren engranes con acabado de precisión. Los engranes helicoidales rectos tienen velocidades límite



(*a*)



(*b*)

FIGURA 9-3

(*a*) Engranes cónicos rectos *Cortesía de Martin Sprocket and Gear Co., Arlington, Tex.,* y (*b*) engranes cónicos espirales *Cortesía de la Boston Gear Division de IMO Industries, Quincy, Mass.*

de 1 000 fpm (10 m/seg), aproximadamente. Los engranes *Zerol* pueden funcionar tan rápido como los espirales. Como en los engranes rectos y helicoidales, se recomienda una reducción máxima de 10:1 para cualquier conjunto de engranes cónicos o espirales. Se sugiere un límite de 5:1 cuando se utiliza un incrementador de velocidad. El torque sobre el piñón se usa como un parámetro de medición. El ángulo de presión más común para engranes cónicos o espirales es de $\phi = 20°$. Los engranes espirales con mucha frecuencia tienen un ángulo espiral $\psi = 35°$. En general, los engranes cónicos no son intercambiables. Se hacen y sustituyen en pares, como conjuntos aparejados de piñón y engrane.

Geometría y nomenclatura del engrane cónico

La figura 9-4 muestra la sección transversal de dos engranes cónicos acoplados. Sus ángulos de paso en el cono están denotados por α_p y α_g, para el piñón y el engrane, respectivamente. Los diámetros de paso se definen en el borde más grande, sobre los conos invertidos. El tamaño y el perfil del diente se definen sobre el cono posterior y son similares a los dientes de engranes rectos, con un piñón de adéndum largo para minimizar interferencias y rebaje. La razón de adéndum varía con la razón de engrane de adenda iguales (dientes de profundidad total), con una razón de engrane 1:1, hasta un adéndum del piñón más grande en un 50%, aproximadamente, con razones de engrane por arriba de 6:1. El ancho de cara F se limita generalmente a $L/3$, definiendo L como en la figura 9-4. De la geometría:

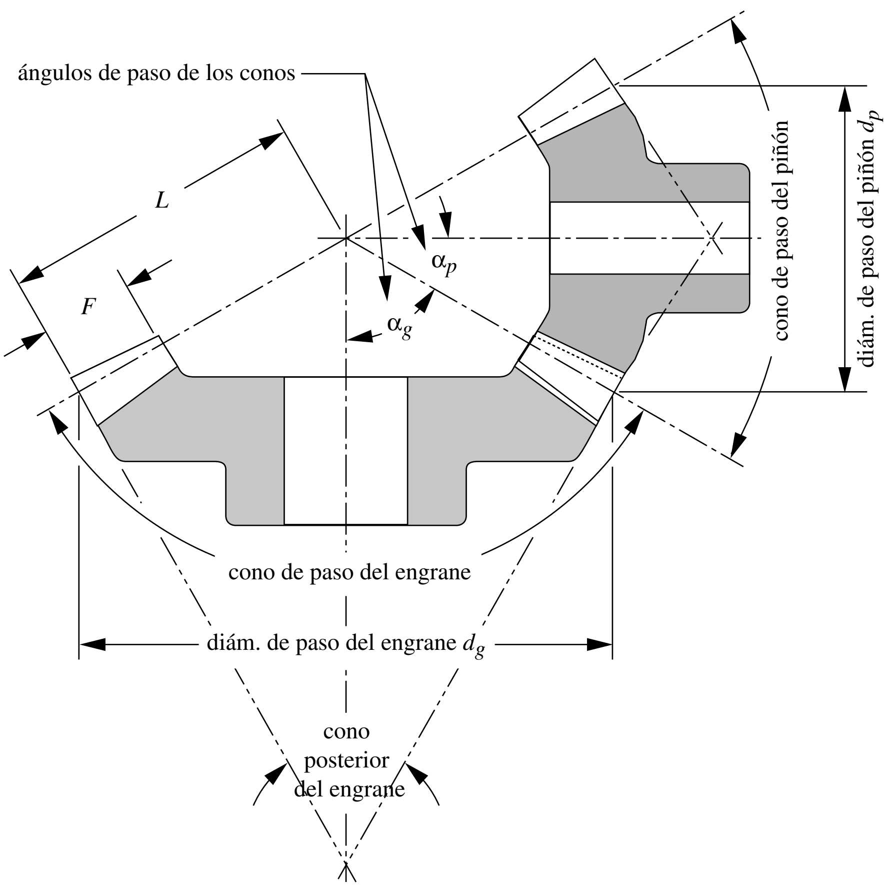


FIGURA 9-4

Geometría y nomenclatura de un engrane cónico Fuente: tomado del estándar 2005-B88 de la AGMA, *Design Manual for Bevel Gears*, con autorización del editor, la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314

$$L = \frac{r_p}{\operatorname{sen}\alpha_p} = \frac{d_p}{2\operatorname{sen}\alpha_p} = \frac{d_g}{2\operatorname{sen}\alpha_g} \tag{9.7a}$$

La razón de engrane m_G para un conjunto cónico a 90° se define en términos de los ángulos de paso de los conos, como

$$m_G = \frac{\omega_p}{\omega_g} = \frac{N_g}{N_p} = \frac{d_g}{d_p} = \tan\alpha_g = \cot\alpha_p \tag{9.7b}$$

Véase también las ecuaciones 8.1*a* a 8.1*c* (pp. 545-546).

Montaje de un engrane cónico

Se prefiere el montaje a horcajadas (con cojinetes a ambos lados del plano del diente) para mejorar el soporte; no obstante, es difícil alcanzar tanto al piñón como al engrane con ejes que se intersecan. Por lo general, el engrane se monta a horcajadas y el piñón en voladizo, a menos que haya espacio suficiente para alojar un cojinete en el interior del piñón para montarlo a horcajadas también.

Fuerzas sobre engranes cónicos

9

Como en los engranes helicoidales, existen las componentes de fuerza tangencial, radial y axial, que actúan sobre un engrane cónico o espiral. Para un engrane cónico recto:

$$\begin{aligned} W_a &= W_t \tan\phi \operatorname{sen}\alpha \\ W_r &= W_t \tan\phi \cos\alpha \\ W &= W_t / \cos\phi \end{aligned} \tag{9.8a}$$

Para un engrane cónico espiral:

$$\begin{aligned} W_a &= \frac{W_t}{\cos\psi}\left(\tan\phi_n \operatorname{sen}\alpha \mp \operatorname{sen}\psi \cos\alpha\right) \\ W_r &= \frac{W_t}{\cos\psi}\left(\tan\phi_n \cos\alpha \pm \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\alpha\right) \end{aligned} \tag{9.8b}$$

donde los signos de arriba del $\pm$ y $\mp$ se utilizan para un piñón impulsor con un *sentido horario* espiral giratorio de mano derecha, visto desde su borde grande, o un piñón impulsor con un *sentido contrario a las manecillas del reloj* espiral giratorio de mano izquierda, visto desde su borde grande, mientras el signo de abajo se utiliza para las condiciones opuestas.

En las ecuaciones 9.8*a* y 9.8*b* se tiene que emplear el ángulo adecuado, del cono de paso α_p del piñón o α_g del engrane en lugar de α, para obtener las fuerzas en cada elemento. La carga tangencial W_t se determina a partir del torque aplicado a cualquier elemento en combinación, con su diámetro de paso medio d_m.

$$W_t = \frac{2T}{d_m} \tag{9.8c}$$

donde el torque que actúa sobre el mismo elemento y el diámetro de éste (engrane o piñón) se usan para obtener la fuerza transmitida común.*

* Consulte el estándar AGMA 2005-B88 para el método de cálculo de d_m o para estimarlo a partir de un dibujo esquemático del engranaje (similar al de la figura 9-4). Los archivos del modelo del ejemplo 9-2 contienen también el cálculo del diámetro de paso medio.

Esfuerzos en engranes cónicos

El cálculo de los esfuerzos y de la vida estimada de los engranes cónicos es más complicado que el de engranes rectos o helicoidales. Los estándares de la AGMA[4],[5] brindan información más completa de la presentada aquí, por lo que se debe consultar para cualquier aplicación real de diseño. Sólo se presentará un resumen breve del procedimiento para diseñar engranes cónicos, como introducción a la materia, adecuado para una comprensión básica de los factores que intervienen y para la realización de algunos ejercicios.*

ESFUERZO DE FLEXIÓN EN ENGRANES CÓNICOS El esfuerzo de flexión en engranes cónicos rectos o espirales se obtiene básicamente con la misma ecuación que se utiliza para los engranes rectos o helicoidales. La diferencia principal se toma en cuenta en el valor del factor J.

$$\sigma_b = \frac{2T_p}{d}\frac{p_d}{FJ}\frac{K_a K_m K_s}{K_v K_x} \qquad \text{psi} \tag{9.9us}$$

$$\sigma_b = \frac{2\,000T_p}{d}\frac{1}{FmJ}\frac{K_a K_m K_s}{K_v K_x} \qquad \text{MPa} \tag{9.9si}$$

Observe que la carga aplicada se expresa en términos del torque T_p del piñón, sustituyendo la ecuación 9.8*c*, en lugar de W_t, como en la ecuación 8.15 (p. 572). El diámetro de paso d en la ecuación 9.9 es el del piñón. (La fórmula del *SI* tiene las longitudes expresadas en mm.) Para nuestro objetivo, los factores K_a, K_m, K_s y K_v se toman con el mismo valor, como se definió en el capítulo 8, para engranes rectos. Sin embargo, algunos de estos factores tienen definiciones ligeramente diferentes para los engranes cónicos en el estándar de la AGMA,[4],[5] por lo que deberían consultarse para tener fórmulas más precisas en cualquier aplicación de diseño real. El factor K_x es igual a 1 para engranes cónicos rectos y es una función del radio del cortador en engranes espirales o Zerol. Se usa $K_x = 1.15$ como una aproximación en los dos últimos casos.

9

ESFUERZO SUPERFICIAL EN ENGRANES CÓNICOS El esfuerzo superficial en engranes cónicos rectos o espirales se calcula de modo similar al de los engranes rectos o helicoidales, pero con algunos factores adicionales de ajuste incluidos. Como en los esfuerzos de flexión para los engranes cónicos, la carga aplicada se expresa como torque en el piñón, en lugar de una carga tangencial.

$$\sigma_c = C_p C_b \sqrt{\frac{2T_D}{FId^2}\left(\frac{T_p}{T_D}\right)^z \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f C_{xc}} \tag{9.10}$$

Para nuestro objetivo, los factores C_p, C_a, C_m, C_v, C_s y C_f se toman igual que los definidos en el capítulo 8. Sin embargo, algunos de estos factores tienen definiciones ligeramente diferentes para los engranes cónicos en el estándar de la AGMA,[5] por lo que deben consultarse para contar con fórmulas más precisas en cualquier aplicación de diseño real. Los factores nuevos de ajuste en esta versión de la ecuación de esfuerzo superficial comparada con la ecuación 8.21 (p. 580) son C_b, el cual es una **constante de ajuste del esfuerzo**, definida con un valor de 0.634 en el estándar actual de la AGMA[5], y C_{xc}, un **factor de abombamiento** definido con un valor de 1 para dientes que no están sujetos al momento máximo y 1.5 para dientes con abombamiento.† El exponente z es 0.667 cuando $T_p < T_D$ y 1.0 si no es así.

Los dos términos de torque T_D y T_p requieren de una explicación. T_p es el **torque de operación del piñón**, definido por las cargas aplicadas, el torque aplicado, o la potencia y la velocidad, y llega a variar con el tiempo. T_D es el **torque de diseño del piñón**, el cual tiene el valor mínimo necesario para producir la huella de contacto completa (óptima) sobre el diente del engrane. En la mayoría de los casos, T_D es el torque requerido

---

* Tomado del estándar AGMA 2005-B88, *Design Manual for Bevel Gears*, y/o AGMA 2003-A86, *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, Zerol® Bevel and Spiral Bevel Gear Teeth*, con autorización de la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314.

† Los dientes con abombamiento poseen superficies modificadas para lograr la curvatura convexa en dirección longitudinal (a lo largo del ancho de la cara), con la finalidad de producir contactos localizados y/o prevenir contactos en los bordes de los dientes. El abombamiento se puede aplicar a todos los tipos de dientes. Los dientes con abombamiento reducen la necesidad de alinear exactamente los ejes de los engranes aparejados para que sean exactamente paralelos.

para crear un esfuerzo de contacto igual al esfuerzo de contacto permisible para el material, como se define en la tabla 8-21 (p. 590). T_D se estima a partir de

$$T_D = \frac{F}{2}\frac{IC_v}{C_s C_{md} C_f C_a C_{xc}}\left(\frac{S'_{fc} d}{C_p C_b}\frac{0.774 C_H}{C_T C_R}\right)^2 \quad \text{lb} - \text{in} \qquad (9.11us)$$

$$T_D = \frac{F}{2000}\frac{IC_v}{C_s C_{md} C_f C_a C_{xc}}\left(\frac{S'_{fc} d}{C_p C_b}\frac{0.774 C_H}{C_T C_R}\right)^2 \quad \text{N} \cdot \text{m} \qquad (9.11si)$$

donde S'_{fc} es la resistencia a la fatiga superficial del material de la tabla 8-21 y los factores C son los definidos arriba o en el capítulo 8. (Véase la ecuación 8.25 (p. 587) para C_H, C_T y C_R). C_{md} es el **factor de montaje** para considerar el voladizo, o el montaje a horcajadas de uno o ambos engranes. Si los dientes del engrane tienen abombamiento, C_{md} varía de 1.2, para ambos miembros montados a horcajadas a 1.8, si los dos están en voladizo. Se usa un valor entre estos dos números si un elemento está en voladizo y el otro está montado a horcajadas. Para dientes con momento máximo, se duplican dichos valores. Para mayor detalle, consulte el estándar AGMA[5].

FACTORES GEOMÉTRICOS I Y J Los factores geométricos para engranes cónicos rectos y espirales son diferentes de los engranes rectos o helicoidales. El estándar de la AGMA proporciona gráficas de tales factores para engranes rectos, Zerol y espirales. Se reproducen unas cuantas de estas gráficas en las figuras 9-5 a 9-8.*

FACTORES DE SEGURIDAD Los factores de seguridad contra fallas por flexión o a picado se calculan de la misma manera que para los engranes rectos, descrita en el capítulo 8.

9

EJEMPLO 9-2

Análisis de esfuerzo en un tren de engranes cónico

Problema **Determine los esfuerzos de flexión y superficial, así como los factores de seguridad de un engranaje cónico recto, fabricado con el mismo materiales de acero, que opera bajo las mismas condiciones durante cinco años de vida, como en el ejemplo 8-7 (p. 592).**

Se proporciona **$N_p = 20$, $N_g = 35$, ϕ 5 25° y $p_d = 8$, luego pasa 10 hp a 2 500 rpm. Del ejemplo 8-7: la resistencia a la flexión corregida es de 38 937 psi y la resistencia superficial es de 118 000 psi, sin corregir, y de 105 063 psi, corregida.**

Suposiciones **Del ejemplo 8-7: $K_a = C_a = K_s = C_s = C_f = C_H = C_R = C_T = 1$, $K_m = C_m = 1.6$, $K_v = C_v = 0.652$, $C_L = 0.890$ y $C_p = 2\,276$. En esta sección, se suponen: $C_{xc} = K_x = 1$, $C_b = 0.634$ y $C_{md} = 1.5$.**

Solución

1. Se determina el torque del piñón a partir de la potencia y velocidad dadas.

$$T_p = \frac{P}{\omega_p} = \frac{10 \text{ hp}\left(6\,600 \dfrac{\text{in - lb}}{\text{seg}} \Big/ \text{hp}\right)}{2\,500 \text{ rpm}\,(2\pi/60)\dfrac{\text{rad}}{\text{seg}}\Big/\text{rpm}} = 252.1 \text{ lb - in} \qquad (a)$$

* Tomado del estándar AGMA 2005-B88, *Design Manual for Bevel Gears*, y/o AGMA 2003-A86, *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, Zerol® Bevel and Spiral Bevel Gear Teeth*, con autorización de la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314.

2. Se obtienen los diámetros de paso del piñón y del engrane.

$$d_p = \frac{N_p}{p_d} = \frac{20}{8} = 2.50 \text{ in}, \qquad d_g = \frac{35}{8} = 4.375 \text{ in} \qquad (b)$$

3. Determine los ángulos de paso de los conos con la ecuación 9.7*b* (p. 624):

$$\alpha_g = \tan^{-1}\left(\frac{N_g}{N_p}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{35}{20}\right) = 60.26°$$
$$\alpha_p = 90 - \alpha_g = 90 - 60.26 = 29.74° \qquad (c)$$

4. Encuentre la longitud del cono de paso L con la ecuación 9.7*a* (p. 624):

$$L = \frac{d_p}{2\operatorname{sen}\alpha_p} = \frac{2.50}{2\operatorname{sen}29.74} = 2.519 \text{ in} \qquad (d)$$

5. Se utiliza la longitud L del cono de paso para determinar un ancho de cara aceptable, luego se establece como el valor máximo recomendado.

$$F = \frac{L}{3} = \frac{2.519}{3} = 0.840 \text{ in} \qquad (e)$$

6. Consulte los factores geométricos de flexión para el piñón y el engrane en la figura 9-5 (p. 628), para obtener $J_p = 0.237$ y $J_g = 0.201$.
7. Se calcula el esfuerzo de flexión en el piñón con la ecuación 9.9 (p. 625) con J_p.

$$\sigma_{b_{piñón}} = \frac{2T_p}{d}\frac{p_d}{FJ}\frac{K_aK_mK_s}{K_vK_x} = \frac{2(252.1)}{2.5}\frac{8}{0.840(0.237)}\frac{1(1.6)(1)}{0.652(1)} \cong 19\,880 \text{ psi} \qquad (f)$$

8. Se obtiene el esfuerzo de flexión en el engrane con la ecuación 9.9 usando J_g.

$$\sigma_{b_{engrane}} = \frac{2T_p}{d}\frac{p_d}{FJ}\frac{K_aK_mK_s}{K_vK_x} = \frac{2(252.1)}{2.5}\frac{8}{0.840(0.201)}\frac{1(1.6)(1)}{0.652(1)} \cong 23\,440 \text{ psi} \qquad (g)$$

Observe que el diente del engrane está sometido a mayores esfuerzos que el diente del piñón, ya que el adéndum largo del piñón lo hace más fuerte a expensas del adéndum corto del diente del engrane.

9. Se busca el factor geométrico superficial para esta combinación de piñón y engrane en la figura 9-6 (p. 629), para obtener $I = 0.076$. Lo anterior se utiliza en la ecuación 9.11 (p. 626) para calcular T_D.

$$T_D = \frac{F}{2}\frac{IC_v}{C_sC_{md}C_fC_aC_{xc}}\left(\frac{S'_{fc}d}{C_pC_b}\frac{0.774C_H}{C_TC_R}\right)^2$$
$$= \frac{0.840}{2}\frac{0.076(0.652)}{1(1.5)(1)(1)(1)}\left(\frac{118\,000(2.5)}{2\,276(0.634)}\frac{0.774(1)}{1(1)}\right)^2 \cong 347.5 \text{ lb - in} \qquad (h)$$

10. Como $T_D > T_p$, $z = 0.667$. Se emplean estos datos para determinar el esfuerzo superficial con la ecuación 9.10.

9

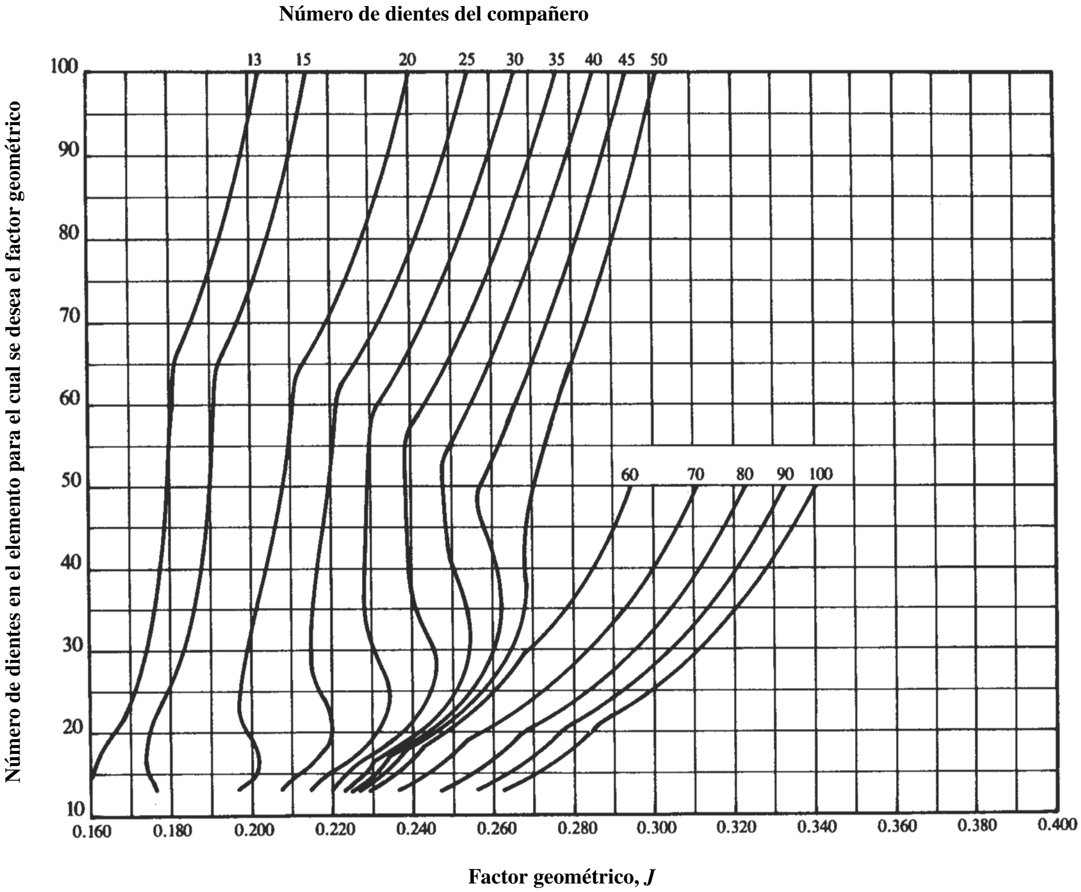


FIGURA 9-5

Factor geométrico J para engranes cónicos rectos con $\phi = 20°$ y radio herramienta-borde igual a $0.120/p_d$ Fuente: Tomado del estándar AGMA 2003-A86, *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel*, Zerol® *Bevel and Spiral Bevel Gear Teeth*, con autorización del editor, la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314

$$\sigma_c = C_p C_b \sqrt{\frac{2T_D}{FId^2}\left(\frac{T_p}{T_D}\right)^z \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f C_{xc}}$$

$$= 2\,276(0.634)\sqrt{\frac{2(347.5)}{0.840(0.076)(2.5)^2}\left(\frac{252.1}{347.5}\right)^{0.667}\frac{1(1.6)}{0.652}(1)(1)(1)}$$

$$\cong 84\,753 \text{ psi} \tag{i}$$

11. Los factores de seguridad se determinan ahora como

$$N_{b_{piñón}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{piñón}}} = \frac{38\,937}{19\,880} \cong 2.0 \tag{j}$$

$$N_{b_{engrane}} = \frac{S_{fb}}{\sigma_{b_{engrane}}} = \frac{38\,937}{23\,440} \cong 1.7 \tag{k}$$

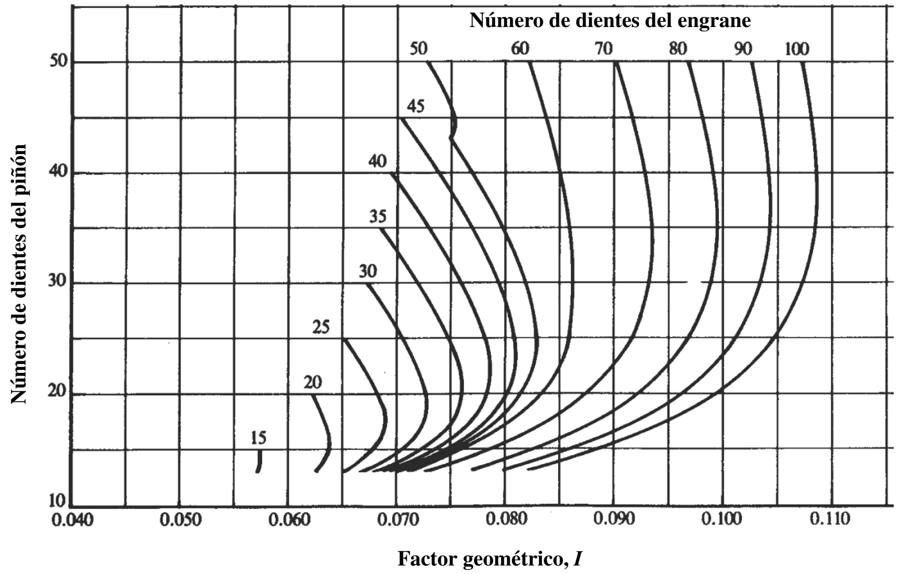


FIGURA 9-6

Factor geométrico I para engranes cónicos rectos con $\phi = 20°$ y radio herramienta-borde igual a $0.120/p_d$ Fuente: Tomado del estándar AGMA 2003-A86, *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, Zerol® Bevel and Spiral Bevel Gear Teeth*, con autorización del editor, la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314

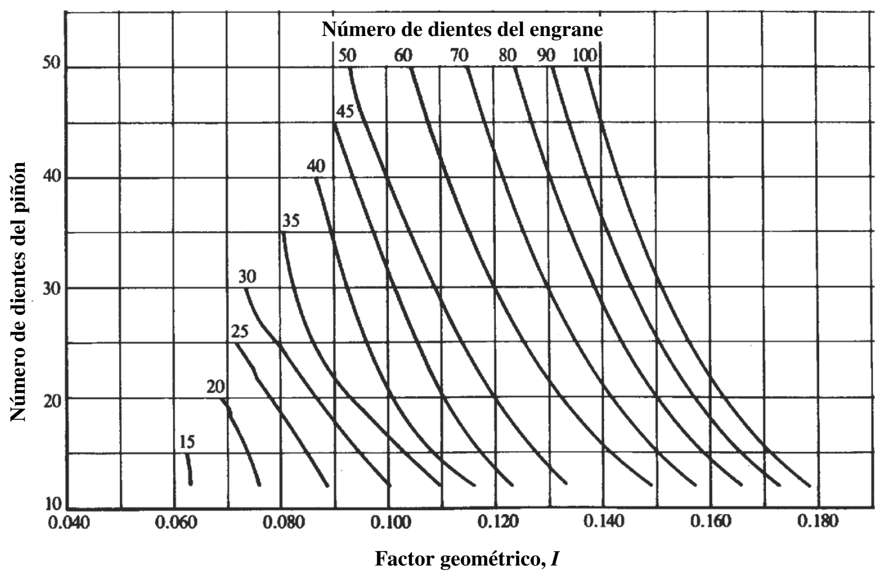


FIGURA 9-7

Factor geométrico I para engranes cónicos espirales con $\phi = 20°$, ángulo de la espiral $\psi = 35°$ y radio herramienta-borde igual a $0.240/p_d$ Fuente: Tomado del estándar AGMA 2003-A86, *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, Zerol® Bevel and Spiral Bevel Gear Teeth*, con autorización del editor, la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314

$$N_c = \left(\frac{S_{fc}}{\sigma_c}\right)^2 = \left(\frac{105\,063}{84\,753}\right)^2 \cong 1.5 \qquad (l)$$

12. Los factores de seguridad son aceptables. Los archivos EX13-02 se encuentran en el CD-ROM.

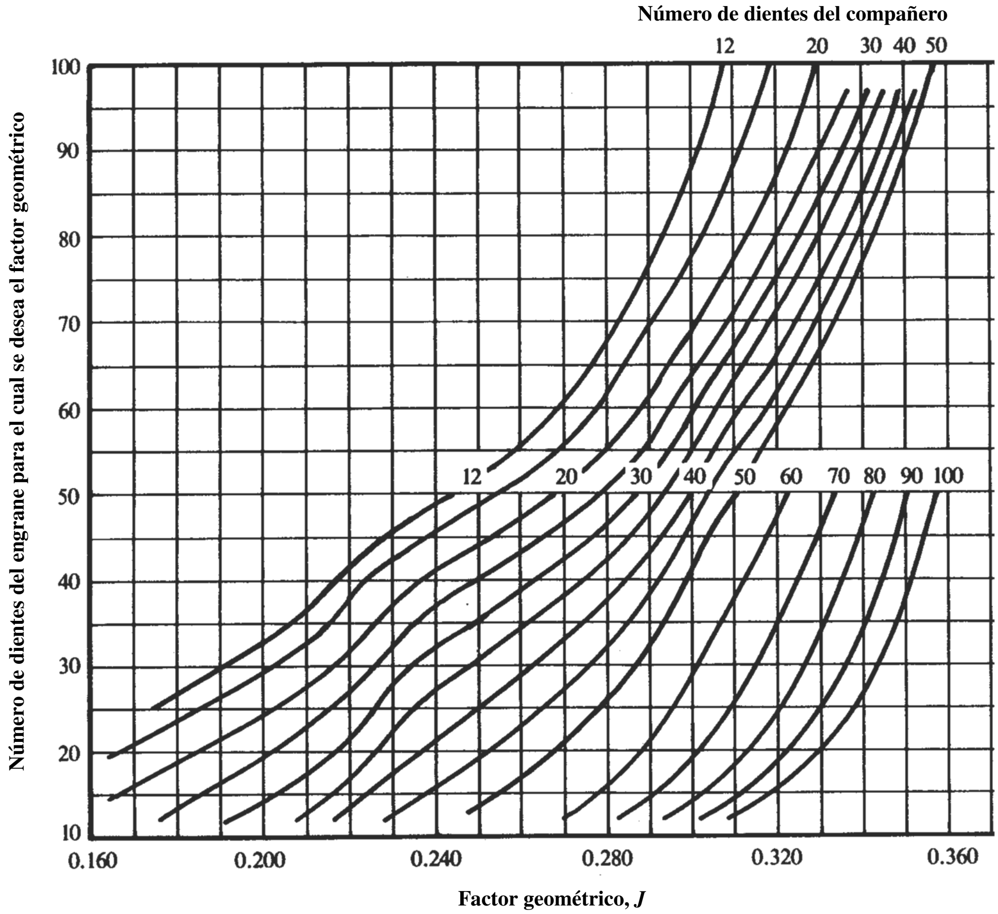


FIGURA 9-8

Factor geométrico J para engranes cónicos espirales con $\phi = 20°$, ángulo de la espiral $\psi = 35°$ y radio herramienta-borde igual a $0.240/p_d$
Fuente: Tomado del estándar AGMA 2003-A86, *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, Zerol® Bevel and Spiral Bevel Gear Teeth*, con autorización del editor, la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314

9.3 ENGRANES DE TORNILLOS SIN FIN

Los engranajes de tornillos sin fin son más difíciles de diseñar que los engranajes convencionales. Sólo se presentará una mirada breve al proceso, como una introducción al tema. Los estándares de la AGMA contienen mucha más información. Para aplicaciones reales, se invita al lector a consultar los documentos de la AGMA.[6,7] Ahí se encuentran muchas tablas con los datos necesarios para un diseño completo. Se extrajeron la mayoría de las ecuaciones importantes del estándar, pero no se incluyen los datos tabulares. En su lugar, se incluyen ecuaciones empíricas del apéndice[7] del estándar de la AGMA para calcular los datos tabulares.*

Un engranaje sin fin consiste en un tornillo sin fin y una corona sin fin (también llamada engrane de gusano), como los mostrados en la figura 9-9. Conectan ejes que no se intersecan y no son paralelas, usualmente dispuestos en ángulos rectos. El tornillo sin fin es, de hecho, un engrane helicoidal con un ángulo de hélice tan grande que un sólo diente se envuelve continuamente alrededor de su circunferencia. El tornillo sin fin es similar a la cuerda de un tornillo y el engrane es similar a su tuerca. La distancia que un punto sobre el engrane acoplado (tuerca) se mueve axialmente en una revolución del sin

* Tomado del estándar AGMA 6022-C93, *Design Manual for Cylindrical Wormgearing* y/o el estándar AGMA 6034-B92, *Practice for Enclosed Cylindrical Wormgear Speed Reducers and Gearmotors*, con autorización de la Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314.

fin se conoce como **avance** L y el avance dividido entre la circunferencia de paso πd del sin fin es la tangente de su **ángulo de avance** λ.

$$\tan \lambda = \frac{L}{\pi d} \tag{9.12}$$

Los tornillos sin fin generalmente sólo tienen un diente (o cuerda); por lo tanto, producen razones tan grandes como el número de dientes del engrane. Tal capacidad de proporcionar razones altas en un pequeño volumen del conjunto es una de las ventajas principales de un engranaje sin fin sobre otras posibles configuraciones, la mayoría de las cuales está limitada por una razón aproximada de 10:1 por par de engranes. Se producen engranajes sin fin con razones que van de 1:1 a 360:1, aunque el intervalo usual en los catálogos es de 3:1 a 100:1. Las razones arriba de 30:1 suelen tener una sola cuerda sin fin, mientras las razones inferiores a ese valor emplean con frecuencia tornillo sin fin de múltiples cuerdas. Al número de cuerdas sobre el tornillo sin fin se le conoce también como *inicios*. Un tornillo sin fin de 2 o 3 inicios podría usarse en un engranaje sin fin de razón baja, por ejemplo. El paso axial p_x del tornillo sin fin es igual al paso circular p_c del engrane y está relacionado con el avance L por el número elegido de inicios o número de dientes N_w del tornillo sin fin.

$$p_x = \frac{L}{N_w} = p_c = \frac{\pi d_g}{N_g} \tag{9.13}$$

donde d_g es el diámetro de paso y N_g es el número de dientes del engrane. El número de inicios N_w se encuentra típicamente entre 1 y 10 en los engranajes sin fin comerciales; no obstante, se pueden usar más inicios en engranajes grandes.

Otra ventaja de los engranajes sin fin, sobre otros tipos de engranajes, es su capacidad para autobloquearse. Si el engranaje es de autobloqueo, no tendrá movimiento de retroceso, es decir, el torque aplicado al engrane no hace girar al tornillo sin fin. Un engranaje de autobloqueo sólo puede moverse "hacia adelante", desde el tornillo sin fin hacia el engrane. Por lo tanto, se podría usar para sostener una carga como, por ejemplo, un gato que levanta un automóvil. Si un engranaje sin fin específico es de autobloqueo o no, depende de varios factores, incluyendo la razón de la tangente λ con el coeficiente de fricción μ, el acabado superficial, la lubricación y la vibración. Generalmente, el autobloqueo se presenta en ángulos de avance que están por debajo de los 6° y quizás ocurran en ángulos de avance tan altos como los 10°.[8] (Véase la sección 11.2 [p. 727] para un análisis completo de la aplicación del autobloqueo a tornillos de potencia, cuyos principios son aplicables también a los engranajes sin fin.)

Los ángulos de presión estándar para los engranajes sin fin son 14.5, 17.5, 20, 22.5, 25, 27.5 o 30°. Los mayores ángulos de presión dan resistencias más altas en los dientes, a expensas de una mayor fricción, cargas más altas en los cojinetes y mayores esfuerzos de flexión en el tornillo sin fin. En aplicaciones de alta potencia con alta velocidad, se debería utilizar un engrane con un paso relativamente fino. Los torques altos, a velocidades bajas, necesitan un paso grueso y diámetros más grandes en el tornillo sin fin.

Los perfiles de dientes de los tornillos y engranes no son involutas; además, hay componentes de deslizamiento-velocidad grandes en el engranado. Los tornillos y engranes no son intercambiables, aunque se fabrican y se reemplazan como conjuntos aparejados. Para incrementar el área de contacto entre los dientes, se utilizan perfiles de dientes de envolvente simple o de envolvente doble. En un conjunto de envolvente simple (como el de la figura 9-9), los dientes del engrane envuelven parcialmente el tornillo sin fin. En un conjunto de envolvente doble el tornillo sin fin también envuelve al engranaje, haciendo que el tornillo sin fin tenga forma de reloj de arena en lugar de un cilindro. Esta configuración incrementa el costo y la complejidad de la manufactura, pero también la capacidad de carga. Ambos tipos están disponibles comercialmente.

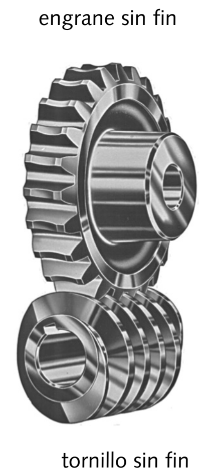


FIGURA 9-9

Engranaje sin fin de envolvente simple consistente en un tornillo sin fin y un engrane envolvente
Cortesía de Martin Sprocket and Gear Co., Arlington, Tex.

9

Materiales para engranajes sin fin

Sólo unos cuantos materiales son adecuados para los engranajes sin fin. El tornillo sin fin se somete a esfuerzos muy altos y requiere de acero endurecido. Se utilizan los aceros al bajo carbono como los AISI 1020, 1117, 8620 o 4320, con recubrimiento endurecido a HRC 58-62. También se emplean aceros al medio carbono como los AISI 4140 o 4150, endurecidos por inducción o por llama para un recubrimiento de dureza HRC 58-62. Los aceros necesitan esmerilarse o pulirse con un acabado R_a de 16 µin (0.4 µm) o mejorado. El engrane requiere fabricarse con un material blando, así como lo suficientemente manipulable para funcionar y amoldarse al tornillo sin fin duro y en condiciones de alto deslizamiento. El bronce vaciado en arena, vaciado en frío, con vaciado centrífugo o forjado se emplean comúnmente en los engranes. El bronce al fósforo o al platino sirve en aplicaciones de alta potencia; el bronce al manganeso, en tornillos sin fin pequeños de baja velocidad. El hierro fundido, el acero suave y los plásticos se utilizan algunas veces en aplicaciones ligeramente cargadas de baja velocidad.

Lubricación de engranajes sin fin

La condición de lubricación en un engranaje sin fin se encuentra en el intervalo de lubricación límite a parcial, o bien, EHD total, dependiendo de cargas, velocidades, temperaturas y viscosidad del lubricante, como se vio en el capítulo 8. En este caso, la situación de lubricación es más parecida a la de cojinetes deslizantes que a la de cojinetes de rodamiento, debido a las velocidades dominantes de deslizamiento. El alto porcentaje de deslizamiento provoca que los engranajes sin fin sean menos eficientes que los engranajes convencionales. En los engranajes sin fin algunas veces se utilizan lubricantes que contienen aditivos para presión extrema (EP).

Fuerzas en los engranajes sin fin

En el acoplamiento de un engranaje sin fin existe una condición de carga tridimensional. Sobre cada elemento actúan las componentes tangencial, radial y axial. Con el ángulo (típico) de 90° entre los ejes del tornillo sin fin y el engrane, la magnitud de la componente tangencial W_{tg} sobre el engrane es igual a la componente axial W_{aw} sobre el tornillo sin fin y viceversa. Tales componentes se definen como

$$W_{tg} = W_{aw} = \frac{2T_g}{d_g} \tag{9.14a}$$

donde T_g y d_g son el torque sobre el engrane y el diámetro de éste. La fuerza axial W_{ag} sobre el engrane y la fuerza tangencial W_{tw} sobre el tornillo sin fin son

$$W_{ag} = W_{tw} = \frac{2T_w}{d} \tag{9.14b}$$

donde T_w es el torque sobre el tornillo sin fin y d es el diámetro de paso de éste. La fuerza radial W_r que separa los dos elementos es

$$W_r = \frac{W_{tg} \tan\phi}{\cos\lambda} \tag{9.14c}$$

donde ϕ es el ángulo de presión y λ es el ángulo de avance.

Geometría de un engranaje sin fin

Los diámetros de paso y los números de dientes de engranajes diferentes a los sin fin tienen una sola relación; sin embargo, esto no pasa en los engranajes sin fin. Una vez que se toma la decisión en cuanto al número de inicios o dientes N_w deseados en el tornillo

sin fin, el número de dientes N_g del engrane se define mediante la razón de engrane m_G requerida:

$$N_g = m_G N_w \tag{9.15}$$

Sin embargo, el diámetro de paso del tornillo sin fin no está ligado con este número de dientes, como en otros engranajes. Teóricamente, el tornillo sin fin puede tener un diámetro tan grande como su sección transversal del diente (paso axial), que se acople al paso circular del engrane. (Esto es similar a los tornillos de una máquina con diámetros diferentes que tienen el mismo paso de cuerda, como los tamaños #6-32, 8-32 y 10-32.) Por consiguiente, el diámetro de paso d del tornillo sin fin se puede seleccionar con independencia del diámetro d_g del engrane; para cualquier d_g dado, un cambio en d variará justo la distancia C entre centros entre el tornillo sin fin y el engrane, aunque no afectará la razón de engrane. La AGMA recomienda valores mínimos y máximos para los diámetros de paso del tornillo sin fin como

$$\frac{C^{0.875}}{3} \le d \le \frac{C^{0.875}}{1.6} \tag{9.16a}$$

y Dudley[9] recomienda el uso de

$$d \cong \frac{C^{0.875}}{2.2} \tag{9.16b}$$

que se encuentra aproximadamente en el centro entre los límites de la AGMA.

El diámetro de paso del engrane d_g se relaciona con el del tornillo sin fin mediante la distancia entre centros C.

$$d_g = 2C - d \tag{9.17}$$

El adéndum a y el dedéndum b de los dientes se obtiene a partir de

$$a = 0.3183 p_x \qquad b = 0.3683 p_x \tag{9.18}$$

El ancho de cara del engrane está limitado por el diámetro del tornillo sin fin. La AGMA recomienda un valor máximo para el ancho de cara F como

$$F_{máx} \le 0.67d \tag{9.19}$$

La tabla 9-17 presenta los números mínimos recomendados por la AGMA de los dientes del engrane en función del ángulo de presión.

Métodos de medición

A diferencia de los engranajes helicoidales y cónicos, en los cuales los cálculos para los esfuerzos de flexión y superficial en los dientes del engrane se hacen de forma separada y se comparan luego con las propiedades del material, los engranes se evalúan por su capacidad para manejar un nivel de potencia de entrada. La **clasificación de la AGMA de potencia** se realiza con base en su resistencia al picado y al desgaste, porque la experiencia ha demostrado que son los modos de falla usual. Debido a las altas velocidades de deslizamiento en los engranajes sin fin, la temperatura de la película de aceite que separa los dientes del engrane se vuelve un factor importante, lo cual se toma en cuenta en el estándar de la AGMA.[6,7] Dichos estándares se basan en un ciclo operativo de 10 horas continuas diarias de servicio con carga uniforme; se definen como un factor de servicio igual a 1. Se supone que los materiales del tornillo sin fin y del engrane son como los ya definidos.

Tabla 9-7
Números mínimos de dientes sugeridos por la AGMA para engranes *Fuente: Referencia 6*

ϕ	$N_{mín}$
14.5	40
17.5	27
20	21
22.5	17
25	14
27.5	12
30	10

La evaluación de un engranaje sin fin se puede expresar como la potencia de entrada permisible Φ, la potencia de salida Φ_o o el torque permisible T a una velocidad determinada en el eje de entrada o de salida, lo cual se relaciona por la expresión general de potencia-torque-velocidad (ec. 6.1*a*, p. 415). La AGMA define la fórmula de evaluación de entrada de potencia como

$$\Phi = \Phi_o + \Phi_l \tag{9.20}$$

donde Φ_l es la pérdida de potencia por fricción en el engranado. La potencia de salida Φ_o se define como

$$\Phi_o = \frac{nW_{tg}d_g}{126\,000\,m_G} \text{ hp} \tag{9.21us}$$

$$\Phi_o = \frac{nW_{tg}d_g}{1.91E7\,m_G} \text{ kW} \tag{9.21si}$$

y la pérdida de potencia Φ_l se define como

$$\Phi_l = \frac{V_t W_f}{33\,000} \text{ hp} \tag{9.22us}$$

$$\Phi_l = \frac{V_t W_f}{1\,000} \text{ kW} \tag{9.22si}$$

9

Éstas son ecuaciones con unidades mixtas. La velocidad de giro n está en rpm. La velocidad tangencial de deslizamiento V_t está en fpm (m/s) y se toma en el diámetro d, del tornillo sin fin, que se da en pulgadas (mm). Las cargas W_{tg} y W_f están en lb (N). La potencia está en hp (kW).

La carga tangencial W_{tg} sobre el engrane en lb (N) se determina con

$$W_{tg} = C_s C_m C_v d_g^{0.8} F \tag{9.23us}$$

$$W_{tg} = C_s C_m C_v d_g^{0.8} F / 75.948 \tag{9.23si}$$

donde C_s es el factor de materiales para bronce fundido en frío,* definido por la AGMA como

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad C < 8 \text{ in} && C_s = 1\,000 \\ &\text{si} \quad C \ge 8 \text{ in} && C_s = 1\,411.651\,8 - 455.825\,9 \log_{10} d_g \end{aligned} \tag{9.24}$$

y C_m es el factor de corrección de razón definido por la AGMA como

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad 3 < m_G \le 20 && C_m = 0.0200\sqrt{-m_G^2 + 40m_G - 76} + 0.46 \\ &\text{si} \quad 20 < m_G \le 76 && C_m = 0.0107\sqrt{-m_G^2 + 56m_G + 5\,145} \\ &\text{si} \quad 76 < m_G && C_m = 1.1483 - 0.006\,58\,m_G \end{aligned} \tag{9.25}$$

C_v es el factor de velocidad definido por la AGMA como

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad 0 < V_t \le 700 \text{ fpm} && C_v = 0.659e^{-0.0011V_t} \\ &\text{si} \quad 700 < V_t \le 3\,000 \text{ fpm} && C_v = 13.31V_t^{-0.571} \\ &\text{si} \quad 3\,000 < V_t \text{ fpm} && C_v = 65.52V_t^{-0.774} \end{aligned} \tag{9.26}$$

* Observe que la AGMA también define factores de materiales para otros bronces. Para mayor información, consulte el estándar [6,7].

La velocidad tangencial en el diámetro de paso del tornillo sin fin es

$$V_t = \frac{\pi n d}{12 \cos \lambda} \text{ fpm} \tag{9.27}$$

La fuerza de fricción W_f sobre el engrane es

$$W_f = \frac{\mu W_{tg}}{\cos \lambda \cos \phi_n} \tag{9.28}$$

El coeficiente de fricción en un engrane acoplado no es constante. Es una función de la velocidad. La AGMA sugiere las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad V_t = 0 \text{ fpm} && \mu = 0.15 \\ &\text{si} \quad 0 < V_t \le 10 \text{ fpm} && \mu = 0.124 e^{\left(-0.074 V_t^{0.645}\right)} \\ &\text{si} \quad 10 < V_t \text{ fpm} && \mu = 0.103 e^{\left(-0.110 V_t^{0.450}\right)} + 0.012 \end{aligned} \tag{9.29}$$

La eficiencia del engranaje solo (exclusiva de los cojinetes, aceitera, etcétera) es

$$\eta = \frac{\Phi_o}{\Phi} \tag{9.30}$$

El torque de salida evaluado se calcula a partir de las ecuaciones 9.14 (p. 632) y 9.23:

9

$$T_g = W_{tg} \frac{d_g}{2} \tag{9.31}$$

Procedimiento de diseño de engranajes sin fin

Una especificación de diseño común para un engranaje sin fin define la velocidad de entrada (o salida) deseada y la razón de engrane. Generalmente, también se conoce información acerca de la carga de salida, en términos de fuerza o torque, o bien, de la potencia de salida requerida. Es posible que también se especifique el tamaño del paquete. Un procedimiento (de entre muchos posibles) consiste en suponer un número de inicios para el tornillo sin fin, así como en calcular los datos cinemáticos del tornillo y del engrane. Luego se supone una distancia C entre centros de prueba y se intenta obtener con ella un diámetro de paso d candidato para el tornillo sin fin, con la ecuación 9.16 (p. 633). Se obtiene un ancho de cara F adecuado para el engrane que cumpla con la ecuación 9.19 (p. 633). El diámetro de paso del engrane se determina, entonces, con la ecuación 9.17 (p. 633), que se utiliza en las ecuaciones 9.23 y 9.28 para calcular las fuerzas tangenciales del engranado. A partir de estos datos, se determinan los niveles de potencia y torque permisibles para el engranaje del tamaño asumido, con las ecuaciones 9-20 a 9-22 (p. 634) y 9.31. Si estos valores de potencia y torque son lo suficientemente grandes para satisfacer los requerimientos de diseño, con márgenes de seguridad apropiados, el diseño está listo. Si no (lo cual es probable), debe revisarse el supuesto original en relación con el número de inicios, el diámetro del tornillo sin fin, la distancia entre centros, etcétera, y repetir el cálculo hasta que se logre una combinación aceptable. La distancia entre centros se podría ajustar más, para obtener un paso diametral o un módulo que se ajuste a las fresas disponibles. Un resolvedor de ecuaciones facilitaría esta tarea iterando rápidamente las ecuaciones.

9.4 ESTUDIO DE CASO

En el estudio de caso 9A, se definió un problema de diseño que incluía un malacate para levantar pacas de forraje en un granero. El dispositivo propuesto es impulsado por un motor eléctrico conectado al malacate con un engranaje reductor de 75:1, que necesita autobloquearse para sostener la carga. Una solución razonable sería un tornillo sin fin en esta aplicación. Ahora se considerará el diseño del tren de engranes.

ESTUDIO DE CASO 9B

Diseño de un engranaje sin fin de reducción de velocidad para la grúa de un malacate

Problema **Dimensione el tornillo sin fin y el engrane de la grúa del malacate definido en el estudio de caso 9A (apéndice D), que se muestra en la figura D-4 (repetida aquí).**

Se proporciona **En el estudio anterior se calculó que la función fuerza-tiempo es como la que se indica en la figura D-6b (repetida aquí). Para un radio supuesto del tambor del malacate de 10 in, el torque pico será de aproximadamente 7 800 lb-in. Se calculó que la potencia de salida promedio requerida es de 0.6 hp, aproximadamente. Se requiere una reducción de 75:1. La velocidad de entrada al tornillo sin fin es de 1 725 rpm. La velocidad de salida es de 23 rpm.**

Suposiciones **Se probará un tornillo de inicio simple con un ángulo de presión de 20°. El tornillo es de acero con recubrimiento endurecido superficialmente a 58 HRC y el engrane es de bronce al fósforo fundido en frío. Se necesita un engranaje sin fin con autobloqueo.**

Solución **Véase las figuras D-4 y D-6.**

1. Un tornillo sin fin de inicio simple necesita un engrane de 75 dientes para la razón de 75:1 deseada. Este número de dientes del engrane está muy por arriba del mínimo recomendado en la tabla 9-7 (p. 633).

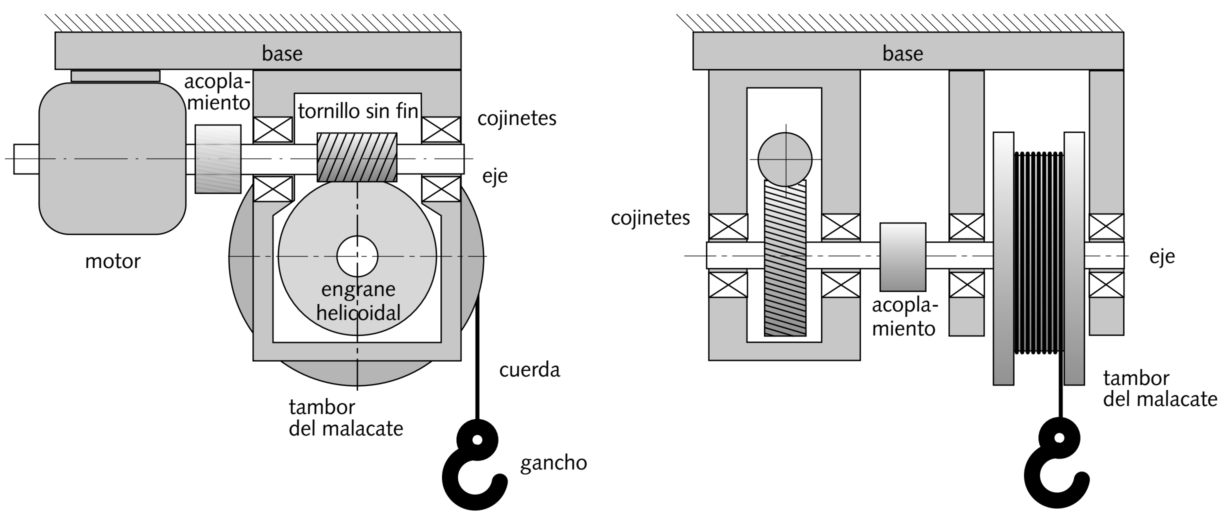
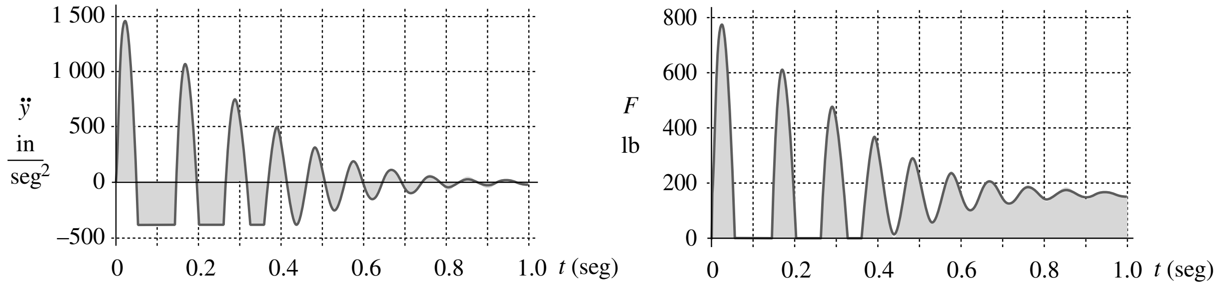


FIGURA D-4 **Repetida**

Motor impulsor del malacate con conjunto de engranes, ejes, cojinetes y acoplamientos



(*a*) Aceleración de la carga (*b*) Fuerza dinámica en el cable

FIGURA D-6 Repetida

Aceleración y fuerza del cable en el levantamiento de la carga

2. Se supone una distancia entre centros de 5.5 in para un intento de cálculo y obtener un diámetro adecuado del tornillo sin fin, con base en esa suposición, a partir de la ecuación 9.16*b* (p. 633).

$$d \cong \frac{C^{0.875}}{2.2} \cong \frac{5.5^{0.875}}{2.2} = 2.02 \text{ in} \qquad (a)$$

3. Se calcula el diámetro adecuado del engrane con la ecuación 9.17 (p. 633).

$$d_g = 2C - d = 2(5.5) - 2.02 = 8.98 \text{ in} \qquad (b)$$

4. Se determina el avance con la ecuación 9.13 (p. 631).

$$L = \pi d_g \frac{N_w}{N_g} = \pi(8.98)\frac{1}{75} = 0.376 \text{ in} \qquad (c)$$

5. Se obtiene el ángulo de avance con la ecuación 9.12 (p. 631).

$$\lambda = \tan^{-1}\frac{L}{\pi d} = \tan^{-1}\frac{0.376}{\pi(2.02)} = 3.39° \qquad (d)$$

Éste es menor de 6°, de modo que el engranaje sin fin es de autobloqueo, como se requirió.

6. Se determina el ancho de cara máximo recomendado con la ecuación 9.19 (p. 633).

$$F_{máx} \cong 0.67d = 0.67(2.02) = 1.354 \text{ in} \qquad (e)$$

7. Se calcula el factor de materiales C_s con la ecuación 9.24 (p. 634). Como $C < 8$ in, $C_s = 1\,000$.

8. Se obtiene el factor de corrección de razón C_m con las ecuaciones 9.25 (p. 634). Con base en $m_G = 75$, se usará la segunda de las expresiones de esa ecuación.

$$C_m = 0.0107\sqrt{-m_G^2 + 56m_G + 5\,145} = 0.0107\sqrt{-75^2 + 56(75) + 5\,145} = 0.653 \qquad (f)$$

9. Se determina la velocidad tangencial V_t con la ecuación 9.27 (p. 635).

$$V_t = \frac{\pi n d}{12\cos\lambda} = \frac{\pi(1\,725)(2.02)}{12\cos(3.392°)} = 913.9 \text{ fpm} \qquad (g)$$

10. Se emplea esta velocidad para obtener el factor de velocidad C_v con las ecuaciones 9.26 (p. 634). Para este valor de V_t, la segunda de estas ecuaciones resulta apropiada.

$$C_v = 13.31(913.9)^{-0.571} = 0.271 \tag{h}$$

11. Se obtiene la carga tangencial W_t con la ecuación 9.23 (p. 634).

$$W_{tg} = C_s C_m C_v d_g^{0.8} F = 1\,000(0.653)(0.271)(8.98)^{0.8}(1.354) = 1\,388 \text{ lb} \tag{i}$$

12. Se determina el coeficiente de fricción con la tercera expresión de la ecuación 9.29 (p. 635).

$$\mu = 0.103e^{\left(-0.110V_t^{0.450}\right)} + 0.012 = 0.103e^{\left(-0.110[913.9]^{0.450}\right)} + 0.012 = 0.022 \tag{j}$$

13. Se calcula la fuerza de fricción W_f con la ecuación 9.28 (p. 635).

$$W_f = \frac{\mu W_{tg}}{\cos\lambda\cos\phi} = \frac{0.022(1\,388)}{\cos 3.392° \cos 20°} = 32 \text{ lb} \tag{k}$$

14. Se obtiene la potencia de salida evaluada con la ecuación 9.21 (p. 634).

$$\Phi_o = \frac{nW_{tg}d_g}{126\,000\,m_G} = \frac{1\,725(1\,388)(8.98)}{126\,000(75)} = 2.274 \text{ hp} \tag{l}$$

15. Se determina la pérdida de potencia en el engranado con la ecuación 9.22 (p. 634).

$$\Phi_l = \frac{V_t W_f}{33\,000} = \frac{913.9(32)}{33\,000} = 0.888 \text{ hp} \tag{m}$$

16. Se calcula la potencia de entrada clasificada con la ecuación 9.20 (p. 634).

$$\Phi = \Phi_o + \Phi_l = 2.274 + 0.888 = 3.162 \text{ hp} \tag{n}$$

17. La eficiencia del engranaje es

$$\eta = \frac{\Phi_o}{\Phi} = \frac{2.274}{3.162} = 71.9\% \tag{o}$$

18. Se obtiene el torque de salida clasificado con la ecuación 9.31 (p. 635).

$$T_g = W_{tg}\frac{d_g}{2} = 1\,388\frac{8.98}{2} = 6\,230 \text{ lb - in} \tag{p}$$

19. Mientras que la potencia clasificada parecería adecuada para esta aplicación, el torque de salida clasificado queda corto en relación con el torque pico proyectado de 7 800 lb-in modelado en el estudio de caso 9A; se necesita un poco de rediseño.

20. La distancia entre centros supuesta originalmente se incrementa a 6.531 in y se recalcula el modelo. La distancia entre centros se ajustó también ligeramente para dar como resultado un paso diametral entero de 7 in^{-1}. Esto aumentó el diámetro del engrane a 10.714 in y el torque de salida clasificado a 9 131 lb-in. La nueva potencia clasificada de entrada es de 4.52 hp y la pérdida de potencia es de 1.18 hp, para una eficiencia de 73.8%. La potencia de salida clasificada es de 3.33 hp. El nuevo ángulo de avance es de 3.48°, de modo que el engranaje sin fin todavía se autobloquea.

21. Mientras que este nuevo diseño parece factible, con base en los cálculos de carga realizados en el estudio de caso anterior, uno de los supuestos originales, en relación con el tamaño del motor eléctrico, necesita revisarse. El cálculo de la potencia promedio neta requerida fue de 0.62 hp. Se esperaba que un motor de 1 a 1.25 hp fuera adecuado, lo cual permitiría operar a 110-V, lo cual ahora parece imposible debido a la pérdida de 1.18 hp en el engranaje sin fin, que dejaría muy poca potencia disponible para levantar la carga aun si se empleara un motor de 1.25 hp.

El efecto del volante del tambor giratorio puede suministrar ráfagas de energía para superar los picos de la oscilación de la carga mostrada en la figura D-6, aunque no proporciona un incremento sostenido de potencia por encima del promedio disponible. De modo que un motor de 220-V de alrededor de 2 o 2.25 hp parece ser necesario en este diseño. La potencia de entrada clasificada del engranaje se debería acomodar fácilmente a ese nivel de potencia, sin problemas de sobrecalentamiento.

22. Los archivos CASE9B-1 y CASE9B-2 contienen, respectivamente, la primera solución (que no tuvo éxito) y la segunda (con éxito) para este problema, los que se encuentran en el CD-ROM.

9.5 RESUMEN

Existen varias formas de engranes especializadas. Este capítulo presentó una introducción breve al diseño y la aplicación de tres tipos: engranajes helicoidales, cónicos y sin fin.

ENGRANES HELICOIDALES Éstos se integran con cilindros de rodamiento y realizan básicamente la misma función de los engranes rectos, conectando ejes paralelos para la reducción/el incremento de velocidad y la multiplicación/división del torque. Los dientes de los engranes helicoidales están inclinados, en relación con los ejes en un ángulo de hélice, el cual puede ser de unos cuantos grados o tantos como 45°. Su hélice estará orientada hacia la derecha o hacia la izquierda. Los engranes helicoidales de orientaciones opuestas con el mismo ángulo de hélice se acoplan manteniendo sus ejes paralelos. Los engranes helicoidales con la misma orientación se acoplan manteniendo sus ejes (sin intersecarse) oblicuos o cruzados; además, tienen un punto de contacto teórico entre los dientes. Esto limita su capacidad de transmisión de carga, comparado con los helicoidales con ejes paralelos, los cuales se ajustan con un movimiento de giro-deslizamiento similar al de los engranes rectos, pero comprometen su diente en una acción de barrido suave a través del ancho de la cara.

La ventaja principal de los engranajes helicoidales sobre los rectos es su funcionamiento silencioso y su mayor resistencia para un engrane del mismo tamaño. La desventaja es un costo mayor que el de los engranes rectos y la introducción de una componente de fuerza axial que requiere cojinetes de empuje sobre el eje. Los engranes helicoidales de ejes paralelos se utilizan extensamente en las transmisiones de vehículos, tanto de transmisión manual como automática, debido sobre todo a su funcionamiento silencioso.

El diseño de engranes helicoidales es muy similar al de los engranes rectos. Se aplican las mismas ecuaciones de esfuerzo de flexión y superficial, pero con valores diferentes en los factores geométricos I y J. También se introducen algunos factores adicionales en las ecuaciones. Tales factores se obtienen de los estándares de la AGMA, los cuales contienen tablas con datos para engranes helicoidales de varios ángulos de presión, ángulos de hélice y razones de adéndum. Aquí se reproducen unas cuantas de estas tablas. Para una información más completa, consulte los estándares de la AGMA. Los materiales que se manejan son los mismos que los de engranes rectos. Un engrane helicoidal tiene menores esfuerzos y mayores factores de seguridad que un engrane recto de los mismos paso y diámetro, debido a que su diente inclinado es más grueso en la dirección de la carga aplicada.

ENGRANES CÓNICOS Se forman con conos de rodamiento; por consiguiente, se conectan intersecando sus ejes. Se usan básicamente para llevar movimiento y torque “alrededor de una esquina”. Sus dientes se estrechan con el cambio del diámetro del cono, que están definidos por el diámetro y el tamaño de sus dientes en el borde mayor. Sus dientes pueden ser rectos y paralelos al eje (similar a los engranes rectos), en cuyo caso reciben el nombre de **engranes cónicos rectos** o los dientes pueden estar inclinados con respecto al eje en un ángulo espiral (similar al ángulo de hélice de los engranes helicoidales), en cuyo caso se conocen como engranes **cónicos espirales** o sólo como engranes espirales. Los engranes cónicos espirales tienen ventajas sobre los engranes cónicos rectos similares a las de los engranes helicoidales sobre los engranes rectos.

Debido a que sus dientes inclinados se contactan gradualmente, los espirales funcionan más suave y silenciosamente que los engranes cónicos rectos y tienen menos vibración. Como el diente en espiral es más grueso en la dirección de la carga, es más fuerte que un engrane cónico recto de los mismos diámetro y paso. Un engrane tipo espiral con dientes curvos, pero ángulo espiral igual a cero, llamado engrane *Zerol*®, también está hecho para obtener la suavidad de funcionamiento de una espiral, sin la carga adicional en el diente introducida por el ángulo espiral.

Los engranes cónicos rara vez se fabrican con adenda iguales en el piñón y en el engrane. Se usa un piñón con adéndum largo con un porcentaje de incremento, que varía desde cero a una razón de 1:1 hasta 50% en razones de engrane superiores. Lo anterior hace más fuertes los dientes del piñón y más débiles los dientes del engrane para equilibrar el diseño, como se vio en el capítulo 8 con los engranes rectos.

El diseño de engranes cónicos es muy similar al diseño de engranes rectos o helicoidales. Se aplican las mismas ecuaciones del esfuerzo de flexión y superficial; sin embargo, se utilizan diferentes valores para los factores geométricos I y J. También se introducen algunos factores adicionales a las ecuaciones. Tales factores se obtienen de los estándares de la AGMA, los cuales contienen diagramas que grafican I y J para engranes cónicos y espirales de varios ángulos de presión, ángulos espirales y razones de adéndum. Aquí se reproducen algunas de esas gráficas. Para una información completa, consulte los estándares de la AGMA. Los materiales que se emplean en los engranes cónicos son los mismos que en los engranes rectos o helicoidales.

TORNILLOS SIN FIN Y ENGRANES Éstos conectan ejes que no se intersecan y no son paralelos. El tornillo sin fin es similar a la cuerda de un tornillo que tiene uno o unos cuantos dientes alrededor de él, en lo que es, de hecho, un ángulo de hélice muy grande. El tornillo sin fin, que se ajusta con un engrane especial llamado engrane o corona sin fin, es similar a una tuerca que se atornilla a la cuerda del tornillo sin fin. Sus ejes forman entre sí generalmente un ángulo de 90°. El engranaje puede dar razones de engrane muy grandes (hasta de 360:1, aproximadamente) en un embalaje compacto, debido al pequeño número de dientes en el tornillo sin fin. Si el ángulo de avance del tornillo es lo suficientemente pequeño ($< 6°$ aprox.), el engranaje se puede autobloquear, lo cual significa que no hay retroceso en el engrane, es decir, sostendrá la carga. Su desventaja principal es su relativamente baja eficiencia, comparada con la de otros engranajes. El movimiento relativo entre los dientes es de deslizamiento, en vez de rodamiento, lo cual genera bastante calor. La transferencia de calor desde la caja de engranes, más que los esfuerzos en los dientes, limita la vida del engranaje sin fin. La temperatura del aceite en el engranado se debería mantener abajo de los 200 °F, aproximadamente, para obtener una vida larga del diente.

El diseño de un engranaje sin fin difiere del de otros engranajes. La AGMA define una ecuación para la **potencia de entrada clasificada** para engranajes sin fin. Esta ecuación, combinada con varios factores empíricos definidos por la AGMA, permite que el engranaje sin fin se dimensione para una combinación determinada de potencia-velocidad o torque-velocidad. Para una información más completa, consulte los estándares de la AGMA. Los materiales que se usan para los engranajes sin fin son bastante limitados. El tornillo sin fin suele ser de acero, con un recubrimiento endurecido a 58 HRC, mientras el engrane es una aleación de bronce. El engrane blando que opera contra el tornillo sin fin duro se amolda a sus contornos en unas cuantas horas de operación. Si opera adecuadamente, sin sobrecarga ni sobrecalentamiento, se esperaría que un engranaje sin fin (clasificado), del tamaño adecuado, alcance un ciclo de vida muy largo, antes de sucumbir por picado debido a la fatiga superficial. Las fallas por flexión de los dientes en los engranajes sin fin son muy raras. La capacidad de carga de un engranaje sin fin se incrementaría diseñándolo con una configuración envolvente simple o doble. En un conjunto de envolvente simple los dientes del engrane envuelven periféricamente el tornillo sin fin. Un conjunto de envolvente doble también hace lo del anterior, pero en este caso los dientes del tornillo envuelven periféricamente el engrane en forma de reloj de arena para obtener un área de contacto mayor.

Ecuaciones importantes utilizadas en este capítulo

Geometría de un engrane helicoidal (sección 9.1):

$$p_t = p_n / \cos \psi \tag{9.1a}$$

$$p_x = p_n / \operatorname{sen} \psi \tag{9.1b}$$

$$p_d = \frac{N}{d} = \frac{\pi}{p_c} = \frac{\pi}{p_t} \tag{9.1c}$$

Fuerzas en un engrane helicoidal (sección 9.1):

$$W_r = W_t \tan \phi \tag{9.3a}$$

$$W_a = W_t \tan \psi \tag{9.3b}$$

$$W = \frac{W_t}{\cos \psi \cos \phi_n} \tag{9.3c}$$

Esfuerzos en engranes helicoidales (sección 9.1):

$$\sigma_b = \frac{W_t\, p_d}{FJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{8.15us}$$

$$\sigma_b = \frac{W_t}{FmJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I \tag{8.15si}$$

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{W_t}{FId} \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f} \tag{8.21}$$

Factor geométrico de superficie para engranes helicoidales (sección 9.1):

$$I = \frac{\cos \phi}{\left(\dfrac{1}{\rho_p} \pm \dfrac{1}{\rho_g} \right) d_p m_N} \tag{9.6a}$$

Razón de engrane para un conjunto de engranes cónicos (sección 9.2):

$$m_G = \frac{\omega_p}{\omega_g} = \frac{N_g}{N_p} = \frac{d_g}{d_p} = \tan \alpha_g = \cot \alpha_p \tag{9.7b}$$

Fuerzas sobre engranes cónicos rectos (sección 9.2):

$$\begin{aligned} W_a &= W_t \tan \phi \operatorname{sen} \alpha \\ W_r &= W_t \tan \phi \cos \alpha \\ W &= W_t / \cos \phi \end{aligned} \tag{9.8a}$$

Esfuerzos en engranes cónicos (sección 9.2):

$$\sigma_b = \frac{2T_p}{d} \frac{p_d}{FJ} \frac{K_a K_m K_s}{K_v K_x} \qquad \text{psi} \tag{9.9us}$$

$$\sigma_b = \frac{2\,000 T_p}{d} \frac{1}{FmJ} \frac{K_a K_m K_s}{K_v K_x} \quad \text{MPa} \tag{9.9si}$$

$$\sigma_c = C_p C_b \sqrt{\frac{2T_D}{FId^2}\left(\frac{T_p}{T_D}\right)^z \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f C_{xc}} \tag{9.10}$$

Torque de diseño para engranes cónicos (sección 9.2):

$$T_D = \frac{F}{2}\frac{IC_v}{C_s C_{md} C_f C_a C_{xc}}\left(\frac{S'_{fc}d}{C_p C_b}\frac{0.774C_H}{C_T C_R}\right)^2 \quad \text{lb}-\text{in} \tag{9.11us}$$

$$T_D = \frac{F}{2000}\frac{IC_v}{C_s C_{md} C_f C_a C_{xc}}\left(\frac{S'_{fc}d}{C_p C_b}\frac{0.774C_H}{C_T C_R}\right)^2 \quad \text{N}\cdot\text{m} \tag{9.11si}$$

Avance y ángulo de avance de un tornillo sin fin (sección 9.3):

$$\tan\lambda = \frac{L}{\pi d} \tag{9.12}$$

Fuerzas en engranajes sin fin (sección 9.3):

$$W_{tg} = W_{aw} = \frac{2T_g}{d_g} \tag{9.14a}$$

$$W_{ag} = W_{tw} = \frac{2T_w}{d} \tag{9.14b}$$

$$W_r = \frac{W_{tg}\tan\phi}{\cos\lambda} \tag{9.14c}$$

9

Diámetro de paso recomendado en el tornillo sin fin (sección 9.3):

$$d \cong \frac{C^{0.875}}{2.2} \tag{9.16b}$$

Diámetro de paso del tornillo sin fin recomendado (sección 9.3):

$$d_g = 2C - d \tag{9.17}$$

Ancho de cara máximo recomendado para el engrane (sección 9.3):

$$F_{máx} \le 0.67d \tag{9.19}$$

Potencia clasificada de un engranaje sin fin (sección 9.3):

$$\Phi_o = \frac{nW_{tg}d_g}{126\,000\,m_G} \quad \text{hp} \tag{9.21us}$$

$$\Phi_o = \frac{nW_{tg}d_g}{1.91E7\,m_G} \quad \text{kW} \tag{9.21si}$$

$$\Phi_l = \frac{V_t W_f}{33\,000} \quad \text{hp} \tag{9.22us}$$

$$\Phi_l = \frac{V_t W_f}{1\,000} \quad \text{kW} \tag{9.22si}$$

$$\Phi = \Phi_o + \Phi_l \tag{9.20}$$

Fuerza tangencial sobre un engrane (sección 9.3):

$$W_{tg} = C_s C_m C_v d_g^{0.8} F \tag{9.23us}$$

$$W_{tg} = C_s C_m C_v d_g^{0.8} F / 75.948 \tag{9.23si}$$

Fuerza de fricción sobre un engrane (sección 9.3):

$$W_f = \frac{\mu W_{tg}}{\cos\lambda \cos\phi_n} \tag{9.28}$$

Torque de salida clasificado de un engrane (sección 9.3):

$$T_g = W_{tg} \frac{d_g}{2} \tag{9.31}$$

Eficiencia de un engranaje sin fin (sección 9.3):

$$\eta = \frac{\Phi_o}{\Phi} \tag{9.30}$$

9.6 REFERENCIAS

9

1. **AGMA**, *Gear Nomenclature, Definitions of Terms with Symbols*, ANSI/AGMA 1012-F90. Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1990.
2. **AGMA**, *Fundamental Rating Factors and Calculations Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, ANSI/AGMA Standard 2001-B88. Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1990.
3. **AGMA**, *Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical and Herringbone Gear Teeth*, ANSI/AGMA Standard 908-B89. Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1990.
4. **AGMA**, *Design Manual for Bevel Gears*. ANSI/AGMA Standard 2005-B88. Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1990.
5. **AGMA**, *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel. Zerol® Bevel, and Spiral Bevel Gear Teeth*. ANSI/AGMA Standard 2003-A86. Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1990.
6. **AGMA**, *Design Manual for Cylindrical Wormgearing*, ANSI/AGMA Standard 6022-C93. Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1990.
7. **AGMA**, *Practice for Enclosed Cylindrical Wormgear Speed Reducers and Gearmotors*. ANSI/AGMA Standard 6034-B92. Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranes, 1500 King St., Suite 201, Alexandria, Va. 22314, 1990.
8. **D.W. Dudley**, *Handbook of Practical Gear Design*. McGraw-Hill: Nueva York, p. 3.66, 1984.
9. **Ibid**., p. 3.67.

Tabla P9-0 †

Matriz tema/problema

9.1 Engranes helicoidales

Geometría

9-1, 9-2, 9-3, 9-4, 9-29, 9-30, 9-31, 9-32

Cargas

9-14, 9-15, 9-33, 9-34

Diseño

9-8, *9-16*, *9-17*, *9-18*, *9-19*, *9-35*, *9-36*

9.2 Engranes cónicos

Geometría y cargas

9-5, 9-6, 9-7, 9-39, 9-40, 9-41

Diseño

9-20, *9-21*, *9-22*, *9-23*, *9-24*, *9-25*, *9-49*, *9-50*, *9-51*

9.3 Engranajes sin fin

Geometría

9-9, 9-10, 9-11, 9-42, 9-43, 9-44, 9-47, 9-48

Cargas

9-12, 9-13, 9-26, 9-27, 9-28, 9-45, 9-46

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los problemas con números en *itálicas* son problemas de diseño. Los problemas con números en **negritas** son extensiones problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador.

9

9.7 PROBLEMAS

*9-1. Un engrane helicoidal de 27 dientes, con un ángulo de presión de 20° y un ángulo de hélice de 30°, tiene un paso diametral $p_d = 5$. Obtenga el diámetro de paso, adéndum, dedéndum y diámetro exterior, así como los pasos normal, transversal y axial.

9-2. Un engrane helicoidal de 43 dientes, con un ángulo de presión de 25° y un ángulo de hélice de 20°, tiene un paso diametral $p_d = 8$. Determine el diámetro de paso, adéndum, dedéndum y diámetro exterior, así como los pasos normal, transversal y axial.

*9-3. Un engrane helicoidal de 57 dientes y ángulo de hélice igual a 10° está acoplado con un piñón de 23 dientes. El $p_d = 6$ y $\phi = 25°$. Calcule las razones de contacto transversal y axial.

9-4. Un engrane helicoidal de 78 dientes y ángulo de hélice igual a 30° está acoplado con un piñón de 27 dientes. El $p_d = 6$ y $\phi = 20°$. Obtenga las razones de contacto transversal y axial.

*9-5. Se necesita un engranaje cónico recto a 90° para suministrar una reducción de 9:1. Determine los ángulos de los conos de paso, los diámetros de paso y las fuerzas en el engrane si el piñón tiene 14 dientes, un ángulo de presión de 25° y $p_d = 6$, y la potencia transmitida al piñón es de 746 W a 1 000 rpm.

9-6. Se necesita un engranaje cónico recto a 90° para suministrar una reducción de 4.5:1. Determine los ángulos de los conos de paso, los diámetros de paso y las fuerzas en el engrane si el piñón tiene 18 dientes, un ángulo de presión de 20° y $p_d = 5$, y la potencia transmitida al piñón es de 7 460 W a 800 rpm.

*9-7. Se necesita un engranaje cónico espiral a 90° para suministrar una reducción de 5:1. Determine los ángulos de paso de los conos, los diámetros de paso y las fuerzas en el engrane si el piñón tiene 16 dientes, un ángulo de presión de 20° y $p_d = 7$ y la potencia transmitida al piñón es de 3 hp a 600 rpm.

†***9.8***. Una máquina papelera procesa rollos de papel cuya densidad es de 984 kg/cm^3. El rollo de papel mide 1.50 m de diámetro exterior (*OD*) × 0.22 m de diámetro interior (*ID*) × 3.23 m de largo y está simplemente apoyado por un eje de acero hueco, con S_{ut} = 400 Mpa. Diseñe un engranaje helicoidal con una reducción de 25:1, con la finalidad de impulsar este eje y obtener así un factor de seguridad dinámico mínimo de 2 para una vida de 10 años si el diámetro exterior del eje es de 0.22 m y el rollo gira a 50 rpm absorbiendo 1.2 hp.

*9.9. Un engranaje sin fin de dos inicios tiene d = 50 mm, p_x = 10 mm, m_G = 22:1. Obtenga el avance, el ángulo de avance, el diámetro del engrane y la distancia entre centros. ¿Se autobloqueará? La velocidad de entrada es de 2 200 rpm.

9-10. Un engranaje sin fin de tres inicios tiene d = 1.75 in, p_x = 0.2 in, m_G = 17:1. Obtenga el avance, el ángulo de avance, el diámetro del engrane y la distancia entre centros. ¿Se autobloqueará? La velocidad de entrada es de 1 400 rpm.

*9-11. Un engranaje sin fin de un inicio tiene d = 40 mm, p_x = 5 mm, m_G = 82:1. Obtenga el avance, el ángulo de avance, el diámetro del engrane y la distancia entre centros. ¿Se autobloqueará? La velocidad de entrada es de 4 500 rpm.

*9-12. Determine la potencia transmitida, así como los torques y las fuerzas en el acoplado del engranaje, del problema 9-9, si el tornillo sin fin funciona a 1 000 rpm.

9-13. Determine la potencia transmitida, así como los torques y las fuerzas en el acoplado del engranaje, del problema 9-10, si el tornillo sin fin funciona a 500 rpm.

*9-14. Si el engranaje del problema 9-3 transmite 125 hp a 1 000 rpm del piñón, obtenga el torque sobre cada eje.

9-15. Si el engranaje del problema 9-4 transmite 33 kW a 1 600 rpm del piñón, obtenga el torque sobre cada eje.

**9-16*. Dimensione los engranes helicoidales del problema 9-14 para un factor de seguridad contra la flexión de, por lo menos, 2, suponiendo un torque constante, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad completa, un factor de ancho de cara de 10, Q_v = 9, un piñón de acero AISI 4140 y un engrane de hierro fundido clase 40.

9-17. Dimensione los engranes helicoidales del problema 9-15 para un factor de seguridad contra la flexión de 2.5, suponiendo un torque constante, un ángulo de presión de 20°, dientes de profundidad completa, un factor de ancho de cara de 12, $Q_v = 11$, un piñón de acero AISI 4340 y un engrane de hierro nodular A-7-d.

**9-18*. Dimensione los engranes helicoidales del problema 9-14 para un factor de seguridad superficial de, por lo menos, 1.6, suponiendo un torque constante, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad completa, un factor de ancho de cara de 10, $Q_v = 9$, un piñón de acero AISI 4140 y un engrane de hierro fundido clase 40.

9-19. Dimensione los engranes helicoidales del problema 9-15 para un factor de seguridad contra la flexión de 1.2, suponiendo un torque constante, un ángulo de presión de 20°, dientes de profundidad total, un factor de ancho de cara de 12, $Q_v = 11$, un piñón de acero AISI 4340 y un engrane de hierro nodular A-7-d.

**9-20*. Dimensione los engranes cónicos del problema 9-5 para un factor de seguridad contra la flexión de 2, suponiendo cinco años de vida con un turno de operación, torque constante, $Q_v = 9$ y un piñón de acero AISI 4140 igual que el engrane.

9-21. Dimensione los engranes cónicos del problema 9-6 para un factor de seguridad contra la flexión de 2.5, suponiendo 15 años de vida con tres turnos de operación, torque constante, $Q_v = 11$ y un piñón de acero AISI 4340 igual que el engrane.

9-22. Dimensione los engranes cónicos del problema 9-7 para un factor de seguridad contra la flexión de 2.2, suponiendo 10 años de vida con tres turnos de operación, torque constante, $Q_v = 8$ y un piñón de acero AISI 4340 igual que el engrane.

**9-23*. Dimensione los engranes cónicos del problema 9-5 para un factor de seguridad mínimo de 1.4, contra cualquier modo de falla del piñón o del engrane, suponiendo cinco años de vida con un turno de operación, torque constante, $Q_v = 9$ y un piñón de acero AISI 4140 igual material para el engrane.

9-24. Dimensione los engranes cónicos del problema 9-6 para un factor de seguridad superficial de 1.3, suponiendo 15 años de vida con tres turnos de operación, torque constante, $Q_v = 11$ y un piñón de acero AISI 4340 igual material para el engrane.

9-25. Dimensione los engranes cónicos del problema 9-7 para un factor de seguridad superficial de 1.4, suponiendo 10 años de vida con tres turnos de operación, torque constante, $Q_v = 8$ y un piñón de acero AISI 4340 igual material para el engrane.

9-26. Calcule la potencia clasificada y el torque clasificado de salida del engranaje sin fin del problema 9-9, con una velocidad de entrada de 2 200 rpm.

*9-27. Determine la potencia clasificada y el torque clasificado de salida del engranaje sin fin del problema 9-10, con una velocidad de entrada de 1 400 rpm.

9-28. Obtenga la potencia clasificada y el torque clasificado de salida del engranaje sin fin del problema 9-11, con una velocidad de entrada de 4 500 rpm.

9-29. Un engrane helicoidal de 23 dientes se corta con un fresa a un ángulo de presión de 20° y a un ángulo de hélice de 25°. La fresa tiene un paso diametral estándar de 5. Los dientes resultantes tienen dimensiones estándares de engranes rectos en el plano normal. Obtenga el diámetro de paso, adéndum, dedéndum y diámetro exterior, así como los pasos normal, transversal y axial, además del ángulo de presión transversal.

9-30. Un engrane helicoidal de 38 dientes se corta con una fresa a un ángulo de presión de 25° y a un ángulo de hélice de 30°. La fresa tiene un paso diametral estándar de 4. Los dientes resultantes tienen dimensiones estándares de dientes rectos en el plano normal. Determine el diámetro de paso, adéndum, dedéndum y diámetro exterior, así como los pasos normal, transversal y axial, además del ángulo de presión transversal.

9-31. Un engrane helicoidal de 39 dientes y un ángulo de hélice de 20° está engranado con un piñón de 18 dientes. El $P_d = 8$ y $\phi = 25°$. Calcule las razones de contacto axial y transversal.

9-32. Un engrane helicoidal de 79 dientes y un ángulo de hélice de 30° está acoplado con un piñón de 20 dientes. El $P_d = 6$ y $\phi = 20°$. Obtenga las razones de contacto axial y transversal.

9-33. Si el engranaje del problema 9-31 transmite 135 hp a 1 200 rpm en el piñón, calcule el torque sobre cada eje.

9-34. Si el engranaje del problema 9-32 transmite 30 kW a 1 200 rpm en el piñón, determine el torque sobre cada eje.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

9-35. Dimensione los engranes helicoidales del problema 9-33 para un factor de seguridad contra la flexión de, por lo menos, 2, suponiendo un torque constante, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad total, índice de calidad de 9, un piñón de acero AISI 4140 y un engrane de hierro fundido clase 40.

9-36. Dimensione los engranes helicoidales del problema 9-34 para un factor de seguridad contra la flexión de, por lo menos, 2.5, suponiendo un torque constante, un ángulo de presión de 20°, dientes de profundidad total, índice de calidad de 11, un piñón de acero AISI 4340 y un engrane de hierro nodular A-7-d.

9-37. Dimensione los engranes helicoidales del problema 9-33 para un factor de seguridad superficial de, por lo menos, 1.6, suponiendo un torque constante, un ángulo de presión de 25°, dientes de profundidad total, índice de calidad de 9, un piñón de acero AISI 4140 y un engrane de hierro fundido clase 40.

9-38. Dimensione los engranes helicoidales del problema 9-34 para un factor de seguridad superficial de, por lo menos, 1.2, suponiendo un torque constante, un ángulo de presión de 20°, dientes de profundidad total, índice de calidad de 11, un piñón de acero AISI 4340 y un engrane de hierro nodular A-7-d.

9-39. Se necesita un engranaje cónico recto a 90° para suministrar una reducción de 3:1. Determine los ángulos de los conos de paso, diámetros de paso y fuerzas en el engrane si el piñón tiene 15 dientes, un ángulo de presión de 25° y $p_d = 4$ y la potencia transmitida es de 8 hp a 550 rpm en el piñón.

9-40. Se necesita un engranaje cónico recto a 90° para suministrar una reducción de 6:1. Determine los ángulos de paso de los conos, los diámetros de paso y las fuerzas en el engrane si el piñón tiene 20 dientes, un ángulo de presión de 20°, y $p_d = 8$ y la potencia transmitida es de 3 kW a 900 rpm en el piñón.

9-41. Se necesita un engranaje cónico espiral a 90° para suministrar una reducción de 8:1. Determine los ángulos de paso de los conos, los diámetros de paso y las fuerzas en el engrane si el piñón tiene 21 dientes, un ángulo de presión de 20° y $p_d = 10$ y la potencia transmitida es de 2.5 kW a 1100 rpm en el piñón.

9

9-42. Un engranaje sin fin de un inicio tiene $d = 2.00$ in, $p_x = 0.25$ in y $m_G = 40$. Calcule el avance, el ángulo de avance, el diámetro del engrane y la distancia entre centros. ¿Se autobloqueará? La velocidad de entrada es de 1100 rpm.

9-43. Un engranaje sin fin de dos inicios tiene $d = 2.50$ in, $p_x = 0.30$ in y $m_G = 50$. Obtenga el avance, el ángulo de avance, el diámetro del engrane y la distancia entre centros. ¿Se autobloqueará? La velocidad de entrada es de 1800 rpm.

9-44. Un engranaje sin fin de tres inicios tiene $d = 60$ mm, $p_x = 12$ mm y $m_G = 60$. Determine el avance, el ángulo de avance, el diámetro del engrane y la distancia entre centros. ¿Se autobloqueará? La velocidad de entrada es de 2500 rpm.

9-45. Determine la potencia transmitida y los torques y las fuerzas en el acoplado del engranaje del problema 9-42, si funciona con tornillo sin fin a 800 rpm.

9-46. Determine la potencia transmitida, así como los torques y las fuerzas en el acoplado del engranaje del problema 9-43 si funciona con el tornillo sin fin a 1200 rpm.

9-47. Un engranaje sin fin de dos inicios tiene $L = 2.00$ in, $C = 9.00$ in y $m_G = 20$ y el ángulo entre los ejes es de 90°. Obtenga los diámetros de paso del tornillo sin fin y del engrane, el ángulo de avance y el paso axial.

9-48. Un engranaje sin fin de cinco arranques tiene l = 20°, $C = 2.75$ in y $N_g = 33$ y el ángulo entre los ejes es de 90°. Obtenga los diámetros de paso del tornillo sin fin y del engrane, el avance y el paso axial.

**9-49*. Dimensione los engranes cónicos del problema 9-40 para un factor de seguridad contra la flexión de, por lo menos, 2.5, asumiendo cinco años de vida con dos turnos de operación, torque constante, un índice de calidad de 8 y un piñón de acero AISI 4140, igual material para el engrane.

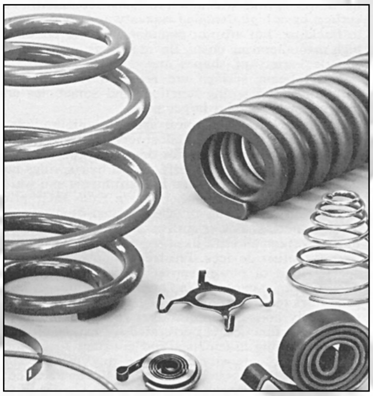
9-50. Dimensione los engranes cónicos del problema 9-40 para un factor de seguridad mínimo de 1.8, para cualquier modo de falla del piñón o del engrane, suponiendo cinco años de vida con dos turnos de operación, torque constante, un índice de calidad de 8 y un piñón de acero AISI 4140, igual material para el engrane.

9-51. Dimensione los engranes espirales del problema 9-41 para un factor de seguridad contra la flexión de, por lo menos, 2.0, suponiendo siete años de vida con tres turnos de operación, torque constante, un índice de calidad de 8 y un piñón de acero AISI 4340, igual material para el engrane.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

10

DISEÑO DE RESORTES



No saber es malo;
no querer saber es peor.

PROVERBIO NIGERIANO

10.0 INTRODUCCIÓN

Prácticamente cualquier pieza fabricada con un material elástico tiene algo de “resorte” en ella. El término *resorte*, en el contexto de este capítulo, se refiere a las piezas elaboradas, con configuraciones específicas, para brindar un intervalo de fuerza durante una deflexión significativa y/o almacenar energía potencial. Los resortes se diseñan para dar un *empuje*, un *jalón* o una fuerza de *giro* (torque) o, fundamentalmente, para almacenar energía, que se dividen en esas cuatro categorías. Hay muchas configuraciones de resortes en cada categoría. Los resortes se pueden hacer con alambre redondo o rectangular, doblándolos en forma adecuada como una bobina, o bien, con material plano cargado como una viga. La fotografía de inicio del capítulo muestra unas cuantas configuraciones de resortes. Existen muchas configuraciones estándares de resortes en los catálogos de inventario de artículos de los fabricantes. Generalmente es más económico para un diseñador utilizar un resorte de inventario, cuando es posible. Algunas veces la tarea requiere un diseño de resorte a la medida del cliente. Los resortes a la medida realizan funciones secundarias, como la ubicación o el montaje de otras piezas. En cualquier caso, el diseñador debe entender, y usar adecuadamente, la teoría de diseño de resortes para especificar o diseñar la pieza. La tabla 10-0 define las variables usadas en este capítulo y hace referencia a la sección o a la(s) ecuación(es) donde se usan.

10.1 CONSTANTE DE RESORTE

Independientemente de la configuración del resorte, éste posee una **constante de resorte** *k*, definida como la pendiente de su curva de fuerza-deflexión. Si tal pendiente es constante, se trata de un resorte lineal y *k* se define como

$$k = \frac{F}{y} \tag{10.1}$$

La fotografía de inicio del capítulo es cortesía de Associated Spring, Barnes Group Inc.

Tabla 10-0 Variables utilizadas en este capítulo
Parte 1 de 2

Símbolo	Variable	unidades ips	unidades SI	Véase
A	área	in^2	m^2	Ec. 10.8a
C	índice de resorte	ninguna	ninguna	Ec. 10.5
d	diámetro del alambre	in	m	varias
D	diámetro medio de la espiral	in	m	varias
D_i	diámetro interior	in	m	varias
D_o	diámetro exterior	in	m	varias
E	módulo de Young	psi	Pa	varias
F	fuerza o carga	lb	N	varias
F_a	carga alternante	lb	N	Ec. 10.15
F_i	tensión inicial, resorte de extensión	lb	N	Ec. 10.20
F_m	carga media	lb	N	Ec. 10.15
$F_{máx}$	carga fluctuante máxima	lb	N	Ec. 10.15
$F_{mín}$	carga fluctuante mínima	lb	N	Ec. 10.15
f_n	frecuencia natural	Hz	Hz	Ec. 10.11
g	aceleración gravitacional	in/seg^2	m/seg^2	varias
G	módulo de corte, módulo de rigidez	psi	Pa	varias
h	altura del cono	in	m	Ec. 10.35
k	razón o constante de resorte	lb/in	N/m	Ec. 10.1
K_b	factor de Wahl, flexión	ninguna	ninguna	Ec. 10.23*b*
K_c	factor de curvatura	ninguna	ninguna	Ec. 10.10
K_s	factor de cortante directo	ninguna	ninguna	Ec. 10.8*b*
K_{rw}	factor de cortante para alambre rectangular	ninguna	ninguna	Ec. 10.11*a*
K_w	factor de Wahl, torsión	ninguna	ninguna	Ec. 10.9*b*
L_b	longitud del cuerpo, resorte de extensión	in	m	Ec. 10.19
L_f	longitud libre, resorte de compresión	in	m	varias
$L_{máx}$	longitud de la espira, resorte de torsión	in	m	Ej. 10.3
L_s	altura de bloqueo, resorte de compresión	in	m	Ej. 10.3
M	momento	lb-in	N-m	Ec. 10.27
N	número de ciclos	ninguna	ninguna	varias
N_a	número de espiras activas	ninguna	ninguna	varias
N_{f_s}	factor de seguridad contra la fatiga, torsión	ninguna	ninguna	Ec. 10.16*a*
N_{f_b}	factor de seguridad contra la fatiga, flexión	ninguna	ninguna	Ec. 10.34*b*
N_t	número total de espiras	ninguna	ninguna	varias
N_s	factor de seguridad, fluencia estática	ninguna	ninguna	Ec. 10.14
r	radio	in	m	varias
R	razón de esfuerzo	ninguna	ninguna	varias
R_d	razón de diámetro	ninguna	ninguna	Ec. 10.35*b*
R_F	razón de fuerza	ninguna	ninguna	Ec. 10.15*b*
s	logaritmo natural del índice C del resorte	ninguna	ninguna	Ec. 10.11

10

El autor desea expresar su agradecimiento a **Associated Spring, Barnes Group Inc.,** 10 Main St., Bristol, Conn., por permitir el uso de material de su *Design Handbook Engineering Guide to Spring Design*, edición de 1987.

Tabla 10-0 Variables utilizadas en este capítulo
Parte 2 de 2

Símbolo	Variable	unidades ips	unidades SI	Véase
S_f, S_e	fatiga por flexión, resistencias físicas; $R = -1$	psi	Pa	Ec. 10.34
S_{fs}, S_{es}	fatiga por torsión, resistencias físicas; $R = -1$	psi	Pa	Ec. 10.17*b*
S_{fw}, S_{ew}	resistencias del alambre a la fatiga por torsión; $R = 0$	psi	Pa	Ec. 10.12
S_{fw_b}, S_{ew_b}	resistencias del alambre a la fatiga por flexión; $R = 0$	psi	Pa	Ec. 10.33
S_{ys}, S_y	resistencias al cortante, a la fluencia por tensión	psi	Pa	Tablas 10-6, -13
S_{ms}	resistencia media a la torsión en 10^3 ciclos	psi	Pa	Ec. 10.13
S_{us}	resistencia última al cortante	psi	Pa	Ec. 10.4
S_{ut}	resistencia última a la tensión	psi	Pa	Ec. 10.3
t	espesor	in	m	Ec. 10.35
T	torque	lb-in	N-m	Ec. 10.8*a*
W	peso	lb	N	Ec. 10.11*b*
y	deflexión	in	m	varias
ν	razón de Poisson	ninguna	ninguna	Ec. 10.35
θ	deflexión angular, torsión	rad	rad	Ec. 10.27
γ	densidad de peso	lb/in^3	N/m^3	Ec. 10.11
σ	esfuerzo normal (flexión)	psi	Pa	Ec. 10.23*a*
τ	esfuerzo cortante	psi	Pa	varios
ω_n	frecuencia natural	rad/seg	rad/seg	Ec. 10.11*a*

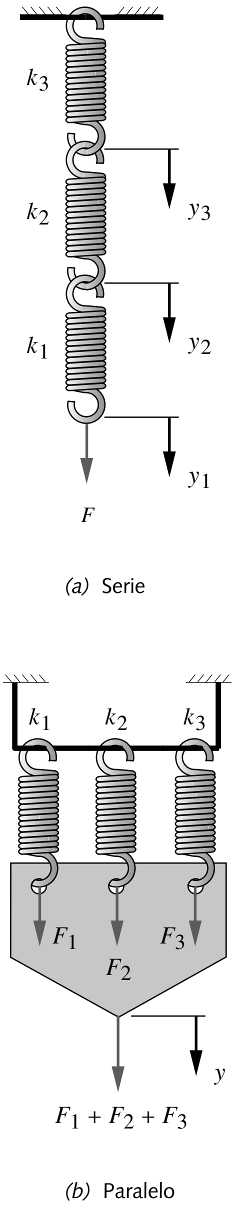


FIGURA 10-1
Resortes en serie y en paralelo

10

donde F es la fuerza aplicada y y la deflexión. Como la función de deflexión se determina siempre para cualquier carga y geometría conocidas, además de que, debido a que la función de deflexión, expresa una relación entre la carga aplicada y la deflexión, se reagrupa para expresar k como la ecuación 10.1.

La constante de resorte puede ser un valor fijo (resorte lineal) o variar con la deflexión (resorte no lineal). Ambos tienen sus aplicaciones, pero con frecuencia se desea un resorte lineal para controlar la carga. Muchas configuraciones de resorte presentan constantes de resorte fijas y algunas son iguales a cero (fuerza constante).

Cuando se combinan varios resortes, la constante de resorte resultante depende de si se combinan en serie o en paralelo. En las combinaciones en serie, la misma fuerza pasa a través de todos los resortes y cada uno contribuye con una parte de la deflexión total, como se indica en la figura 10-1*a*. En los resortes en paralelo, todos tienen la misma deflexión, mientras la fuerza total se divide entre los resortes individuales, como se muestra en la figura 10-1*b*. En los resortes en paralelo, las constantes individuales del resorte se suman directamente:

$$k_{total} = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n \tag{10.2a}$$

En los resortes en serie, las constantes de resorte se suman recíprocamente:

$$\frac{1}{k_{total}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \ldots + \frac{1}{k_n} \tag{10.2b}$$

10.2 CONFIGURACIONES DE RESORTE

Los resortes se clasifican de diferentes maneras. Los cuatro tipos de carga mencionados en la sección 10.0 son una de ellas. Otra es por la configuración física del resorte. Aquí se utilizará este último procedimiento. La figura 10-2 ilustra una selección de configuraciones de resorte. En la referencia 1 se encuentran ejemplos adicionales. Existen formas de resorte como **helicoidal de compresión**, **helicoidal de tensión** y **helicoidal de torsión**, así como formas a pedido del cliente. Los resortes planos típicamente son **vigas en voladizo** o **simplemente apoyadas**, que tienen muchas formas. Hay resortes de arandela con estilos variados: **curvos**, **ondulados**, **de dedo** y **Belleville**. Los resortes de espira son resortes de **motor** (reloj), de **voluta** o de **fuerza constante**. Se analizarán brevemente todas las configuraciones y el diseño de alguno de ellos en detalle.

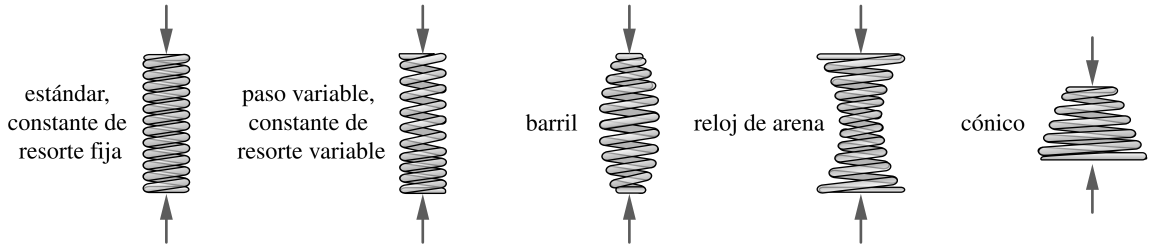
La figura 10-2*a* muestra cinco formas de **resortes helicoidales de compresión**. Todas proporcionan una fuerza de empuje y tienen una gran capacidad de deflexión. Se utilizan comúnmente como resortes de retorno de válvulas en motores de gasolina, resortes para troqueles, etcétera. La forma estándar tiene una espiral con diámetro constante, paso constante (distancia axial entre las espiras) y constante de resorte fija. Es la configuración de resorte más común y está disponible comercialmente en muchos tamaños. La mayoría se fabricaron con alambre redondo, pero también se elaboran con alambre rectangular. El paso es variable para elaborar un **resorte de constante variable**. Las espiras con razones de resorte pequeñas se cierran primero, incrementando así la constante de resorte efectiva cuando se tocan entre sí o "tocan fondo".

Los **resortes cónicos** se fabrican con una constante de resorte fija o creciente. Por lo general, su constante de resorte es no lineal, lo cual aumenta con la deflexión, debido a que las espiras con diámetros más pequeños ofrecen mayor resistencia a la deflexión, y las espiras más grandes se flexionan primero. Al variar el paso de la espira, se puede obtener una constante de resorte aproximadamente constante. Su ventaja principal es cerrarse a una altura tan pequeña como el diámetro del alambre, si las espirales se comprimen. Los resortes de barril y de reloj de arena se visualizan como dos resortes cónicos espalda con espalda; además, tienen una constante de resorte no lineal. Las formas de **barril** y de **reloj de arena** se emplean sobre todo para cambiar la frecuencia natural del resorte de forma estándar.

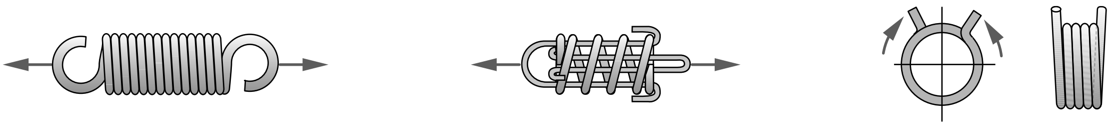
La figura 10-2*b* ilustra un **resorte helicoidal de extensión** con ganchos en cada extremo. El resorte proporciona una fuerza para jalar y tiene gran capacidad de deflexión. Estos resortes se usan comúnmente para cerrar puertas y como contrapesos. El gancho soporta mayores esfuerzos que las espiras y falla primero. Cualquier objeto suspendido del gancho caerá cuando el resorte de extensión se rompa, lo cual lo hace un diseño potencialmente inseguro. La figura 10-2*c* muestra un **resorte de remolque** que soluciona el problema mediante un resorte helicoidal de compresión en una modalidad de jalón. Las barras de los extremos comprimen el resorte, el cual, si se rompe, todavía sostendrá la carga con seguridad. La figura 10-2*d* presenta un resorte helicoidal de torsión enrollado de manera similar al resorte de extensión helicoidal, pero con carga de giro (torque). Se aplica frecuentemente en puertas de estacionamiento, como contrapesos, ratoneras, etcétera. Existen formas y detalles diversos de sus "piernas".

La figura 10-2*e* ilustra cinco variedades comunes de **arandelas de resorte**. Todas ofrecen una fuerza de empuje y se usan comúnmente para cargar algo axialmente; por ejemplo, al incrementar la holgura axial de un cojinete. Suelen tener pequeñas deflexiones y, con excepción de la arandela Belleville, sólo pueden suministrar cargas ligeras. El **resorte de voluta** de la figura 10-2*f* proporciona fuerza de empuje, aunque tiene fricción e histéresis significativas.

La figura 10-2*g* presenta tres variedades de **resortes viga**. Cualquier viga sirve como resorte. Las vigas en voladizo y simplemente soportadas son las más comunes. Un resorte viga puede tener ancho constante o forma trapezoidal, como se indica en el ejemplo. La constante de resorte y la distribución de esfuerzos se controlan mediante



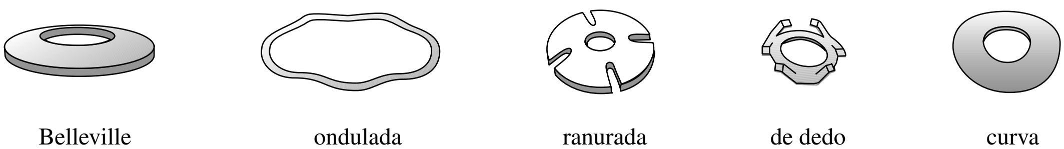
(a) Resortes helicoidales de compresión. *Empuje*: intervalo amplio de carga y deflexión, alambre redondo o rectangular. El resorte estándar tiene constantes el diámetro, el paso y la constante de resorte de la espira. Los resortes de barril, de reloj de arena y de paso variable se utilizan para minimizar el aumento repentino de la resonancia y la vibración. Los resortes cónicos se fabrican con altura sólida mínima y con una constante de resorte fija o creciente.



(b) Resortes helicoidales de extensión. *De extensión*: intervalo amplio de carga y deflexión, alambre redondo o rectangular, constante de resorte fija.

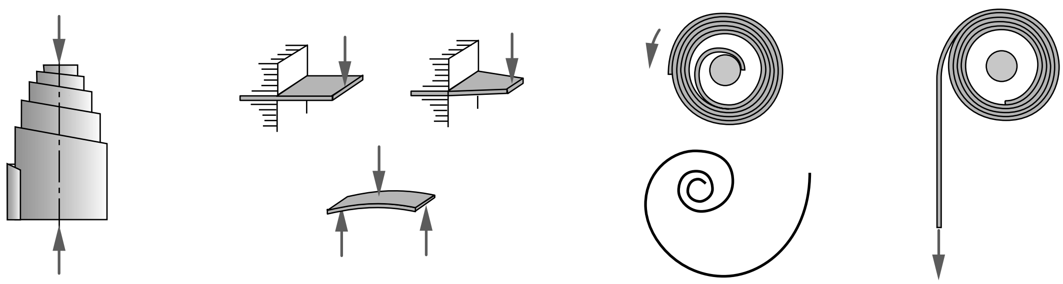
(c) Resortes de remolque. *De extensión*: utiliza un resorte de compresión y barras de enganche para realizar el jalón de extensión con seguro contra falla, detención o paro sin problemas.

(d) Resortes de torsión. *Giro*: alambre redondo o rectangular, constante de resorte fija.



10

(e) Arandelas de resortes. *Empuje*: la Belleville tiene cargas altas y deflexiones bajas, selección de constantes de resorte (fija, creciente o decreciente). El ondulado, con cargas ligeras y deflexión baja, usa un espacio radial limitado. El ranurado presenta mayores deflexiones que la Belleville. La arandela de dedo sirve para carga axial de cojinetes. La curva se utiliza para eliminar la holgura axial.



(f) Resorte de voluta. *Empuje*: amortigua la fricción de modo inherente.

(g) Resortes de viga. *Empuje o jalón*: carga amplia, pero con intervalo de deflexión pequeño, rectangular, en forma de voladizo o simplemente apoyado.

(h) Resortes de potencia o de cuerda. *Giro*: ejerce torque sobre muchas espiras. Se muestra con y sin retenedor.

(i) Fuerza constante. *Jalón*: deflexión grande con constante baja o igual a cero.

FIGURA 10-2

Configuraciones de resortes (Adaptado de: *Design Handbook*: *Engineering Guide to Spring Design*, 1987, Associated Spring, Barnes Group Inc., 10 Main St., Bristol, Conn., con autorización)

cambios en el ancho de la viga o cambios en la profundidad a lo largo de su longitud. Las cargas pueden ser altas, pero las deflexiones son limitadas.

La figura 10-2*h* muestra un tipo de **resorte de potencia**, llamado también **resorte de cuerda** o **de reloj**. Se utiliza principalmente para almacenar energía y dar giro. Las cuerdas de los relojes y los juguetes llevan este tipo de resorte. La figura 10-2*i* presenta un resorte de fuerza constante (Neg′ator) que sirve para contrabalancear cargas, regresar el carro de una máquina de escribir y producir torque constante en motores de cuerda. Proporciona deflexiones súbitas muy grandes con una fuerza de tensión casi constante (constante de resorte igual a cero).

Se analizará el diseño de algunos de estos tipos de resorte. Para mayor información sobre los otros, véase la referencia 1.

10.3 MATERIALES PARA RESORTES

Hay un número limitado de materiales y aleaciones adecuados para fabricar resortes. El material ideal para un resorte debería tener alta resistencia última, un punto de fluencia alto y bajo módulo de elasticidad para que ofrezca un almacenamiento máximo de energía (área debajo de la porción elástica de la curva de esfuerzo-deformación). Para resortes cargados dinámicamente, las propiedades de resistencia a la fatiga del material son de relevancia primordial. Las resistencias altas y los puntos de fluencia altos se logran con aleaciones de acero al medio y al alto carbonos; éstas son los materiales más comunes para resortes, a pesar de su alto módulo de elasticidad. Sólo unas cuantas aleaciones de acero inoxidable son apropiadas para fabricar resortes; entre las aleaciones de cobre se encuentran las de cobre al berilio y las de bronce al fósforo.

La mayoría de los resortes para trabajo ligero se fabrican con alambre redondo o rectangular formado en frío; o bien, con material en tiras planas delgadas, roladas en frío. Los resortes para trabajo pesado, como las piezas de la suspensión de automóvil, se hacen típicamente forjándolos o rolándolos en caliente. En general, los materiales para resortes se endurecen para obtener la resistencia requerida. Las secciones transversales pequeñas se trabajan para endurecerlas aplicando el proceso de forjado en frío. Las secciones grandes normalmente reciben tratamiento térmico, el cual se utiliza a bajas temperaturas (175 °C a 510 °C) después del formado, con la finalidad de mitigar los esfuerzos residuales y estabilizar sus dimensiones,[1] incluso en piezas con sección pequeña. El templado y el revenido a altas temperaturas sirven para endurecer los resortes más grandes, que se forman aplicando el recocido.

Alambre para resortes

El alambre redondo es, por mucho, el material más común para fabricar resortes. Existe en una variedad de aleaciones y un amplio rango de tamaños. El alambre rectangular tan sólo está disponible en unos cuantos tamaños. En la tabla 10-1 se presentan algunas aleaciones comunes para alambre y sus descripciones, identificadas con las designaciones tanto de la ASTM como de la SAE. En la tabla 10-2 se muestran algunos tamaños de alambre comúnmente disponibles en inventario, junto con una indicación de los rangos de tamaño disponibles para las aleaciones de acero usuales, identificadas con el número de la ASTM. El diseñador debe tratar de utilizar dichos tamaños para mejorar el costo y la disponibilidad, aun cuando hay también otros tamaños que no se indican. La tabla 10-3 presenta los costos relativos de una selección de materiales comunes para alambres redondos de acero para resortes.

RESISTENCIA A LA TENSIÓN La relación entre el tamaño del alambre y la resistencia a la tensión, mostrada en la figura 10-3, se descubrió por casualidad. Como se indica en la sección B.7 y en la tabla B-8 (apéndice B), cuando se hacen materiales con una sección transversal muy pequeña, empiezan a aproximarse a las resistencias teóricas muy altas de sus límites atómicos, de modo que las resistencias a la tensión de un alambre fino de acero se vuelven bastante altas. El mismo acero que se puede romper a 200 000 psi en

Tabla 10-1 Materiales comunes de alambre para resortes
Fuente: Referencia 2

ASTM #	Material	SAE #	Descripción
A227	Alambre forjado en frío ("forjado duro")	1066	Alambre menos costoso para resortes de uso general. Adecuado para cargas estáticas, pero no contra la fatiga o el impacto. Intervalo de temperatura 0 °C a 120 °C (250 °F).
A228	Alambre musical	1085	El material más duro, más ampliamente usado en resortes con espiras pequeñas. Mayor resistencia contra la fatiga y la tensión que todos los demás alambres para resortes. Intervalo de temperatura de 0 °C a 120 °C (250 °F).
A229	Alambre revenido al aceite	1065	Acero para resortes de uso general. Menos costoso y disponible en tamaños más grandes que el alambre musical. Adecuado para cargas estáticas, pero no para cargas de fatiga o impacto. Intervalo de temperatura 0° a 180 °C (350 °F).
A230	Alambre revenido en aceite	1070	Resorte con calidad para válvula, apropiado para cargas de fatiga.
A232	Cromo-vanadio	6150	La aleación de acero más popular para resortes. Con calidad para válvulas, adecuada para cargas de fatiga. También buena para cargas de choque y de impacto. Para temperaturas hasta de 220 °C (425 °F). Disponible recocida o prerrevenida.
A313 (302)	Acero inoxidable	30302	Adecuado para aplicaciones de fatiga.
A401	Cromo-silicio	9254	Resorte con calidad para válvulas, apropiado para cargas de fatiga. Segunda mayor resistencia después del alambre musical, y con resistencia más alta a la temperatura, de hasta 220 °C (425 °F).
B134, #260	Resorte de latón	CA-260	Resistencia baja; buena resistencia contra la corrosión.
B159	Bronce al fósforo	CA-510	Mayor resistencia que el latón; mejor resistencia a la fatiga; buena resistencia contra la corrosión. No se puede tratar térmicamente ni doblarse a lo largo de la veta.
B197	Cobre al berilio	CA-172	Mayor resistencia que el latón; mejor resistencia a la fatiga; buena resistencia contra la corrosión. Se puede tratar térmicamente y doblarse a lo largo de la veta.
-	Inconel X-750	-	Resistencia contra la corrosión.

Tabla 10-2
Diámetros de alambre preferidos

U.S. (in)	Material	SI (mm)
0.004		0.10
0.005		0.12
0.006		0.16
0.008		0.20
0.010		0.25
0.012		0.30
0.014		0.35
0.016	A229	0.40
0.018		0.45
0.020		0.50
0.022		0.55
0.024	A227	0.60
0.026		0.65
0.028		0.70
0.030		0.80
0.035		0.90
0.038		1.00
0.042		1.10
0.045		
0.048		1.20
0.051		
0.055	A401	1.40
0.059		
0.063		1.60
0.067		
0.072		1.80
0.076		
0.081		2.00
0.085		2.20
0.092		
0.098		2.50
0.105		
0.112		2.80
0.125		3.00
0.135		3.50
0.148		
0.162		4.00
0.177		4.50
0.192		5.00
0.207		5.50
0.225		6.00
0.250		6.50
0.281	A228	7.00
0.312		8.00
0.343		9.00
0.362		
0.375		
0.406		10.0
0.437		11.0
0.469	A232	12.0
0.500		13.0
0.531		14.0
0.562		15.0
0.625		16.0

Tabla 10-3 Costos relativos de alambres comunes para resortes
Fuente: Referencia 1

ASTM #	Material	Costo relativo del alambre de 2 mm (0.08 in) de diámetro	
		Cantidades en millones	Lotes en bodega
A227	Alambre forjado en frío	1.0	1.0
A229	Alambre revenido en aceite	1.3	1.3
A228	Alambre musical	2.6	1.4
A230	Alambre revenido en aceite	3.1	1.9
A401	Cromo-silicio	4.0	3.9
A313 (302)	Acero inoxidable 302	7.6	4.7
B159	Bronce al fósforo	8.0	6.7
A313 (631)	Acero inoxidable 17-7ph	11.0	8.7
B197	Cobre al berilio	27.0	17.0
-	Inconel X-750	44.0	31.0

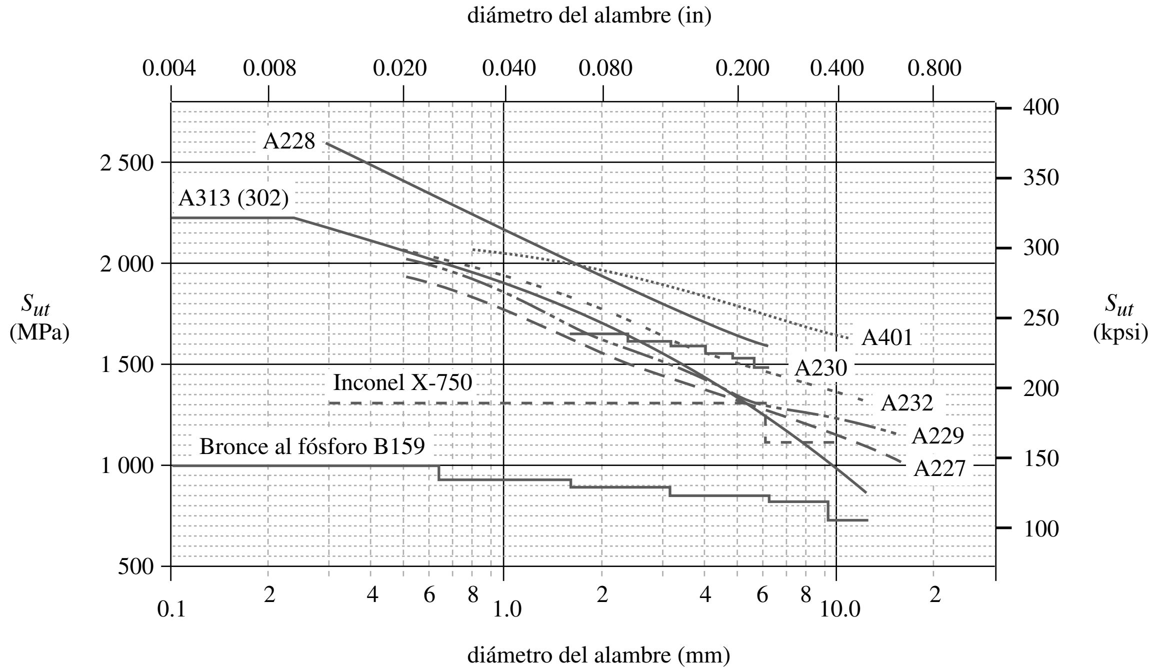


FIGURA 10-3

Resistencias mínimas a la tensión de alambres para resortes, identificados por el número de la ASTM; véase la tabla 10-1 Fuente: *Design Handbook Engineering Guide to Spring Design*, 1987, Associated Spring, Barnes Group Inc., Bristol, Conn.

una muestra de prueba de 0.3 in (7.4 mm) de diámetro puede tener aproximadamente el doble de esa resistencia, después de que se forja en frío hasta 0.010 in (0.25 mm). El proceso de forjado en frío es el responsable del endurecimiento y la resistencia del material, a expensas de mucho de su ductilidad.

La figura 10-3 es una gráfica semilogarítmica de resistencia del alambre contra el diámetro, con base en pruebas extensas del Associated Spring, Barnes Group Inc. Los datos de los cinco materiales mostrados en la figura se ajustan bastante bien a una función exponencial de la forma

$$S_{ut} \cong Ad^b \tag{10.3}$$

Tabla 10-4 Coeficientes y exponentes para la ecuación 10.3
Fuente: Referencia 1

ASTM #	Material	Intervalo mm	Intervalo in	Exponente b	Coeficiente A MPa	Coeficiente A psi	Factor de correlación
A227	Forjado en frío	0.5–16	0.020–0.625	–0.182 2	1 753.3	141 040	0.998
A228	Alambre musical	0.3–6	0.010–0.250	–0.162 5	2 153.5	184 649	0.9997
A229	Revenido en aceite	0.5–16	0.020–0.625	–0.183 3	1 831.2	146 780	0.999
A232	Cromo-v.	0.5–12	0.020–0.500	–0.145 3	1 909.9	173 128	0.998
A401	Cromo-s.	0.8–11	0.031–0.437	–0.093 4	2 059.2	220 779	0.991

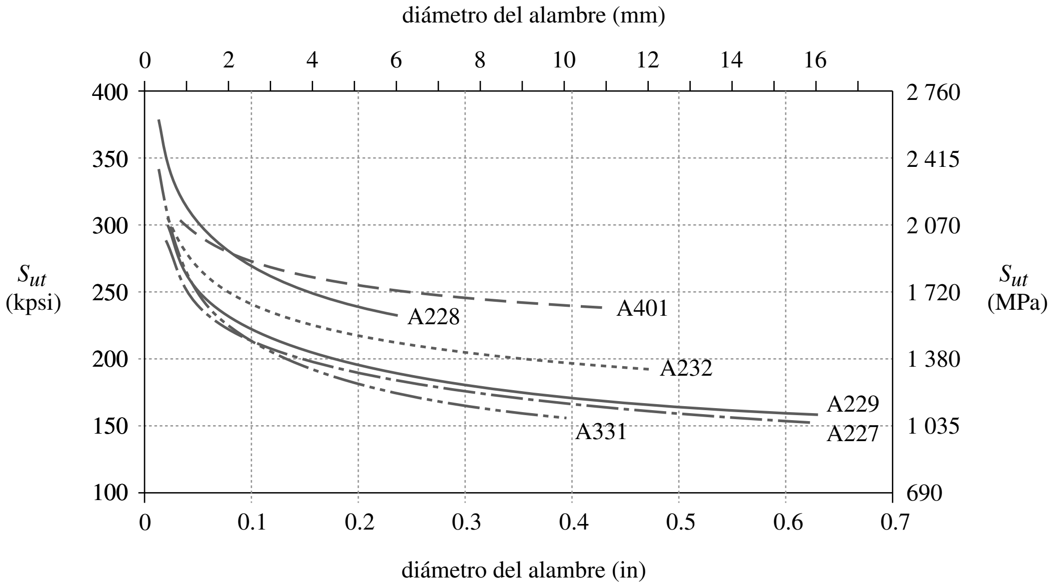


FIGURA 10-4

Resistencias mínimas a la tensión de alambres de resortes de acero, generadas con la ecuación 10.3 y la tabla 10-4

donde A y b están definidos en la tabla 10-4 para tales materiales de alambres en los rangos de diámetros especificados. Estas funciones empíricas ofrecen un medio conveniente para calcular las resistencias a la tensión del alambre de acero con un programa de diseño por computadora para resortes, realizar la iteración rápidamente y obtener una solución de diseño aceptable. La figura 10-4 grafica tales funciones de resistencia empírica para demostrar, sobre ejes lineales, el cambio en la resistencia conforme se reduce el diámetro.

RESISTENCIA CORTANTE Se ha determinado, a través de pruebas extensas, que una estimación razonable de la resistencia última a la torsión* de materiales comunes para resortes es del 67% de la resistencia última a la tensión.†[1]

$$S_{us} \cong 0.67 S_{ut} \tag{10.4}$$

Resortes de tiras planas

Las tiras recortadas de acero al medio y alto carbonos son las más comúnmente utilizadas como material para resortes (vigas) plano(a)s, de voluta, resortes de reloj y de potencia, arandelas de resorte, etcétera. Cuando se necesita resistencia a la corrosión, también se usan las aleaciones de acero inoxidable 301 y 302, así como cobre al berilio, con fósforo 17-7 o bronce al fósforo para resortes planos.

Los aceros AISI 1050, 1065, 1074 y 1095, rolados en frío, son las aleaciones disponibles de tiras planas que se utilizan normalmente. Éstos se comercializan en las condiciones ya mencionadas de recocido y prerrevenido para dureza de 1/4, 1/2, 3/4 o total. Los dos revenidos más blandos se forman (curvan) fácilmente en varios perfiles, pero los más duros son más difíciles de formar. Los aceros con dureza total se pueden formar con contornos suaves, pero no se curvan con radios pequeños. La ventaja de formar las tiras de acero preendurecidas es eliminar la distorsión del tratamiento térmico de la parte formada. Si se requieren curvas muy cerradas, se tienen que emplear los materiales recocidos, los cuales se endurecen después del formado.

* Observe que lo anterior relaciona la resistencia última al cortante con la resistencia última a la tensión. Se trata de una relación diferente del criterio de la energía de distorsión (de Von Mises), el cual relaciona las resistencias a la fluencia por cortante y por tensión del material como $S_{ys} = 0.577 S_y$.

† El factor en la ecuación 10.4 difiere de los factores sugeridos en la ecuación B.5*b* (apéndice B), la cual proporciona razones generales entre la resistencia última al cortante y la resistencia última a la tensión. El factor de la ecuación 10.4 se basa en pruebas exhaustivas de materiales de alambre para resortes que habían sido trabajados en frío durante su proceso de forjado. Esto podría justificar la diferencia en su resistencia al cortante. De cualquier manera, las diferencias en los números publicados indican las incertidumbres que hay en la estimación de las resistencias de materiales sin realizar pruebas bajo condiciones de carga reales. La ecuación 10.4 se dedujo a partir de los numerosos datos de pruebas sobre un tipo de elemento y material específico en condiciones de carga controladas. Por ello, debería considerarse como una buena estimación para tal situación. Sin embargo, quizá no sea directamente aplicable a diferentes materiales o aplicaciones.

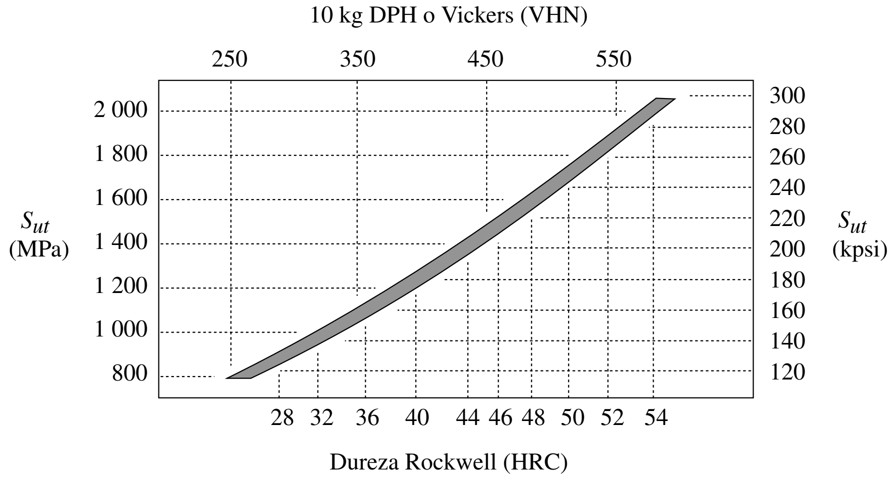


FIGURA 10-5

Resistencia a la tensión contra dureza de resortes de tiras de acero templadas y revenidas
Fuente: Referencia 1

El proceso de rolado en frío crea una "veta" en el material, similar a la veta de la madera (pero mucho menos pronunciada). Así como la madera se agrieta fácilmente cuando se dobla a lo largo de la veta, el metal no permite las flexiones de radio pequeño a lo largo de su "veta" sin agrietarse. La veta se presenta en dirección del enrollamiento, el cual, en las tiras de inventario, se encuentra en el eje más largo. Por lo mismo, las piezas de hojas metálicas, formadas con contornos afilados, se deben curvar a través de la veta. Si se requieren curvaturas ortogonales, la veta se tiene que orientar a 45° de las curvas. Se ha definido un factor adimensional de curva igual a $2r/t$ (donde r es el radio de la curva y t el espesor de la tira), con la finalidad de indicar la capacidad de formado relativa de la tira. Valores bajos de $2r/t$ indican mayor capacidad de formado. Las tiras de acero, endurecido a 3/4 y totalmente, se fracturarán si se curvan a lo largo de la veta.

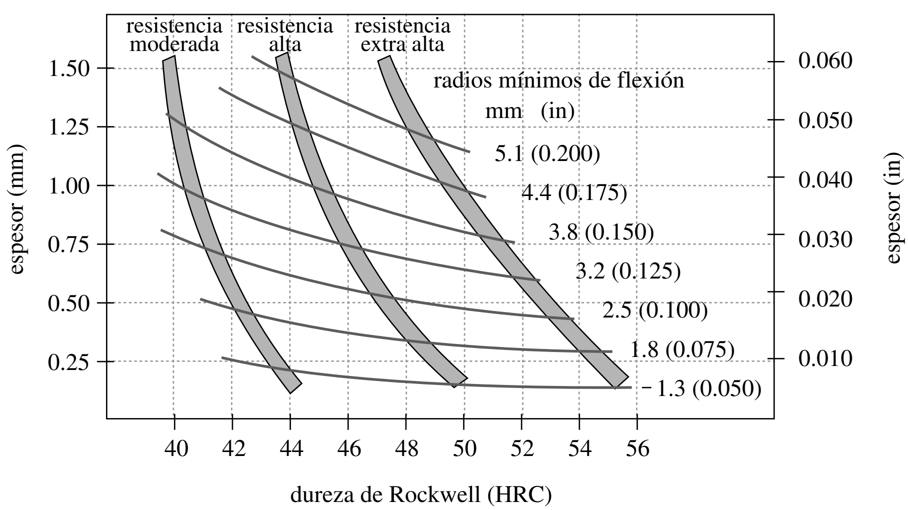


FIGURA 10-6

Radios mínimos de flexión transversales (a través de la veta) para diversos revenidos y espesores en resortes de acero revenidos Fuente: Referencia 1

Tabla 10-5 Propiedades típicas de tiras de aleación recocidas para resortes
Fuente: Referencia 1

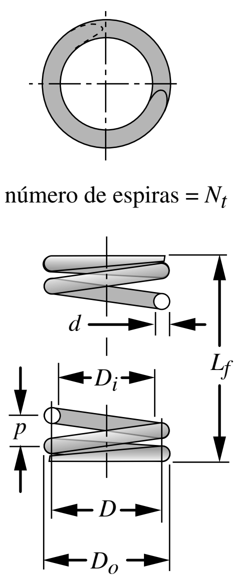
Material	Sut MPa (ksi)	Dureza de Rockwell	Elongación %	Factor de flexión	E GPa (Mpsi)	Razón de Poisson
Resorte de acero	1 700 (246)	C50	2	5	207 (30)	0.30
Inoxidable 301	1 300 (189)	C40	8	3	193 (28)	0.31
Inoxidable 302	1 300 (189)	C40	5	4	193 (28)	0.31
Monel 400	690 (100)	B95	2	5	179 (26)	0.32
Monel K500	1 200 (174)	C34	40	5	17.9 (26)	0.29
Inconel 600	1 040 (151)	C30	2	2	214 (31)	0.29
Inconel X-750	1 050 (152)	C35	20	3	214 (31)	0.29
Cobre al berilio	1 300 (189)	C40	2	5	128 (18.5)	0.33
Ni-Span-C	1 400 (203)	C42	6	2	186 (27)	–
Latón CA 260	620 (90)	B90	3	3	11 (16)	0.33
Bronce al fósforo	690 (100)	B90	3	2.5	103 (15	0.20
17-7PH RH950	1 450 (210)	C44	6	plano	203 (29.5)	0.34
17-7PH Cond. C	1 650 (239)	C46	1	2.5	203 (29.5)	0.34

Las tiras de acero para resorte se fabrican con una dureza específica, que se relaciona con su resistencia a la tensión. La figura 10-5 presenta una gráfica de resistencia a la tensión contra dureza para aceros templados y revenidos. Los aceros AISI para resortes ya anotados, con cualquier nivel de carbono, se pueden endurecer con valores dentro del intervalo mostrado en la figura 10-5, lo cual significa que la dureza final, y no el contenido de carbono, es lo que define la resistencia a la tensión. La tabla 10-5 incluye las resistencias, las durezas y los factores de curva en algunos materiales comunes para resortes planos.

La figura 10-6 muestra los radios mínimos de flexión que los resortes planos de acero son capaces de soportar de modo transversal a la veta. Se indican tres intervalos de resistencias de aceros, como bandas que dependen del espesor y la dureza del material, correspondientes a tres puntos tomados del intervalo superior de la figura 10-5. Las líneas representan los radios de flexión mínimos para la resistencia del acero que intersecan. Se puede hacer interpolación entre las líneas o entre las bandas.



(a)



(b)

FIGURA 10-7
(*a*) Resortes de muestra y (*b*) Parámetros dimensionales de los resortes helicoidales de compresión

10

10.4 RESORTES HELICOIDALES DE COMPRESIÓN

El resorte helicoidal de compresión más común tiene diámetro constante en la espira, paso constante, resorte de alambre redondo, como el de la figura 10-2*a* (p. 651). Se refiere a éste como el resorte de compresión helicoidal estándar (HCS). Hay otras configuraciones, como cónicas, de barril, de reloj de arena y de paso variable, que también se incluyen en la figura 10-2*a*. Todas proporcionan una fuerza de empuje. Un resorte helicoidal se enreda tanto hacia la izquierda como hacia la derecha.

En la figura 10-7 se ilustran ejemplos de resortes y parámetros dimensionales para un resorte estándar helicoidal de compresión. El **diámetro del alambre** es d y el **diámetro medio de la espiral** es D; estas dos dimensiones, junto con la **longitud libre** L_f y el **número de espiras** N_t o el **paso** p **de la espira**, se utilizan para definir la geometría del resorte para objetivos de cálculo y manufactura. El diámetro exterior D_o y el diámetro interior D_i son de interés para definir, sobre todo, el orificio mínimo donde se ajustará, o bien, el perno más grande sobre el que se coloca. Se obtienen sumando o restando el

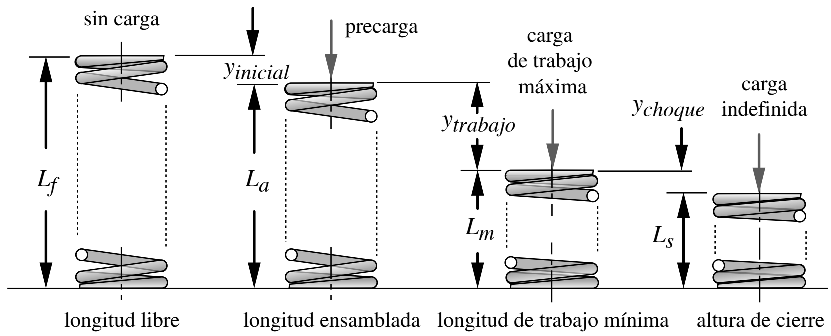


FIGURA 10-8

Varias longitudes que se utilizan en resortes helicoidales de compresión

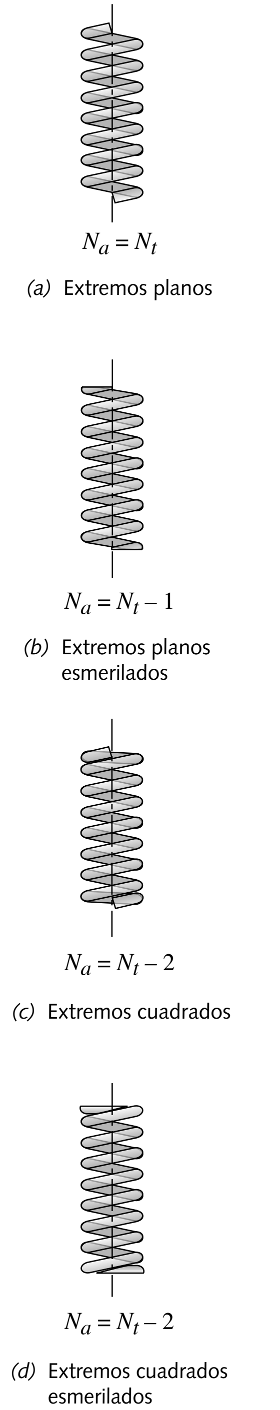


FIGURA 10-9

Cuatro estilos de tratamientos en los extremos de la espiral de resortes helicoidales de compresión

diámetro *d* del alambre al o del diámetro medio *D* de la espiral. Las holguras diametrales mínimas recomendadas entre D_o y el orificio o entre D_i y el perno son de 0.10*D* para $D < 0.5$ in (13 mm) o bien, 0.05*D* para $D > 0.5$ in (13 mm).[1]

Longitudes del resorte

Los resortes helicoidales de compresión tienen varias longitudes y deflexiones de interés, como se indica en la figura 10-8. La **longitud libre** L_f es la longitud total del resorte cuando no tiene carga, es decir, tal como se fabricó. La **longitud ensamblada** L_a es la longitud después de su instalación hasta su deflexión inicial $y_{inicial}$. Tal deflexión inicial, combinada con la constante *k* de resorte, determina la fuerza de **precarga** en el montaje. La **carga de trabajo** se aplica para comprimir más el resorte a través de su **deflexión de trabajo** $y_{trabajo}$. La **longitud de trabajo mínima** L_m es la dimensión más pequeña a la cual se comprime el resorte cuando está en servicio. La **altura de cierre** o **altura sólida** L_s es la longitud del resorte cuando se comprime, de modo que todas las espiras están en contacto. Una vez cerrado, el resorte puede soportar cargas "indefinidas" mucho mayores hasta alcanzar la resistencia a la compresión del alambre. La **holgura de choque** o **entre espiras** y_{choque} es la diferencia entre la longitud de trabajo mínima y la altura de cierre, expresada como un porcentaje de la deflexión de trabajo. Se recomienda una holgura mínima de choque del 10% al 15% para eliminar la posibilidad de alcanzar la altura de cierre durante el servicio en resortes fuera de tolerancia, o con deflexiones excesivas.

Detalles de extremos

Hay cuatro tipos de detalles en los extremos de los resortes helicoidales de compresión: *plano, plano esmerilado, cuadrado* y *cuadrado esmerilado*, como se indica en la figura 10-9. Los extremos planos se obtienen con el simple corte de las espiras y dejando los extremos con el mismo paso del resto del resorte. Éste es el detalle menos costoso, pero ofrece una alineación deficiente con la superficie contra la que se presiona el resorte. Las espiras de los extremos se pueden esmerilar planas y perpendiculares al eje del resorte, con la finalidad de obtener superficies normales a la aplicación de la carga. La cuadratura de los extremos implica la fluencia de las espiras de los extremos para aplanarlas y eliminar su paso. Ello mejora la alineación. Se recomienda una superficie plana sobre la espira del extremo de, por lo menos, 270° para una operación adecuada.[1] La cuadratura y el esmerilado combinados brindan una superficie plana de 270° a 330° para la aplicación de la carga. Es el más costoso de los tratamientos de extremos; no obstante, se recomienda para los resortes en maquinaria, a menos que el diámetro del alambre sea muy pequeño (<0.02 in o 0.5 mm), en cuyo caso deberían ser cuadrados, pero no esmerilados.[1]

* Algunas máquinas modernas que fabrican resortes, servocontroladas, pueden obtener hasta 1/10 de precisión en la espira.

Espiras activas

El número total de espiras N_t puede contribuir activamente o no a la deflexión del resorte, dependiendo del tratamiento en los extremos. Se necesita el número de espiras activas N_a para efectos de cálculo. Los extremos cuadrados eliminan efectivamente dos espiras de la deflexión activa. El esmerilado elimina por sí mismo una espira activa. La figura 10-9 muestra las relaciones entre el número total N_t de espiras y las espiras activas N_a, para cada una de las cuatro condiciones de las espiras en los extremos. El número calculado de espiras activas normalmente se redondea al 1/4 más próximo de la espira, en vista de que el proceso de fabricación no siempre logra una precisión mayor.*

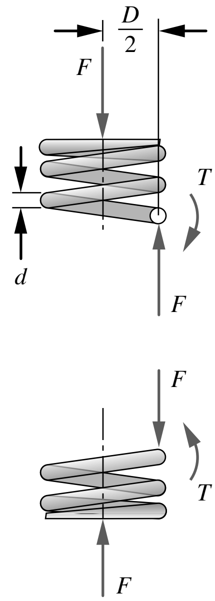


FIGURA 10-10
Fuerzas y torques sobre las espiras de un resorte helicoidal de compresión

Índice de resorte

El índice C de resorte es la razón entre el diámetro D de la espiral y el diámetro d del alambre.

$$C = \frac{D}{d} \tag{10.5}$$

El rango preferido de C se encuentra entre 4 y 12.[1] Es difícil fabricar un resorte con $C < 4$ y con $C > 12$ estaría propenso a pandearse, pero también a enredarse con facilidad cuando se maneja masivamente.

Deflexión del resorte

La figura 10-10 ilustra una parte de la espira de un resorte helicoidal con cargas axiales de compresión aplicadas. Observe que aun cuando la carga sobre el resorte es de compresión, el alambre del resorte se encuentra en *torsión*, ya que la carga sobre cualquier espira tiende a hacer girar al resorte alrededor de su eje. Un modelo simplificado de dicha carga, despreciando la curvatura del alambre, es la barra de torsión que se muestra en la figura 2-28 (p. 107). Un resorte helicoidal de compresión es, de hecho, una barra de torsión enrollada de manera helicoidal, la cual se aloja más fácilmente. La deflexión del alambre redondo de un resorte helicoidal de compresión es

$$y = \frac{8FD^3N_a}{d^4G} \tag{10.6}$$

donde F es la carga axial aplicada sobre el resorte, D es el diámetro medio de la espiral, d es el diámetro del alambre, N_a es el número de espiras activas y G es el módulo de corte del material.

Constante de resorte

La ecuación de la constante del resorte se obtiene reorganizando la ecuación de la deflexión:

$$k = \frac{F}{y} = \frac{d^4G}{8D^3N_a} \tag{10.7}$$

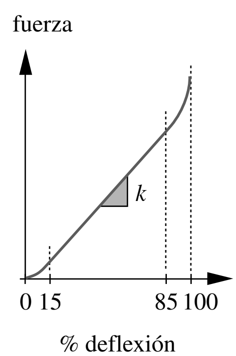


FIGURA 10-11
Curva de fuerza-deflexión de un resorte estándar helicoidal de compresión
(Adaptado de la referencia 1)

El resorte de compresión helicoidal estándar, de paso constante, tiene una constante de resorte k, que es básicamente lineal en la mayoría de su rango operativo, como se indica en la figura 10-11. La primera y la última pequeñas porciones de esta deflexión tienen una constante no lineal. Cuando alcanza su **altura de cierre** L_s, todas las espiras están en contacto y la constante de resorte se vuelve igual a la rigidez de las espiras sólidas en compresión. La constante de resorte está definida entre el 15% y 85% de su deflexión total,[1] mientras su intervalo de deflexión de trabajo $L_a - L_m$ permanece en esa región (véase la figura 10-8). Observe que los resortes enrollados con paso variable de la espira o con diámetro variable

a lo largo de su longitud como los de la figura 10-2*a* (p. 651) pueden tener una constante de resorte variable con la deflexión.

Esfuerzos en las espiras de un resorte helicoidal de compresión

El diagrama de cuerpo libre de la figura 10-10 muestra que hay dos componentes de esfuerzo sobre cualquier sección transversal de una espira: un esfuerzo cortante por torsión, debido al torque T, y un esfuerzo cortante directo, debido a la fuerza F. Los dos esfuerzos cortantes tienen las distribuciones, a través de la sección, que se muestran en las figuras 10-12*a* y *b*. Se suman directamente, de modo que el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ se presenta en la fibra interior de la sección transversal del alambre, como se observa en la figura 10-12*c*.

$$\tau_{máx} = \frac{Tr}{J} + \frac{F}{A} = \frac{F(D/2)(d/2)}{\pi d^4/32} + \frac{F}{\pi d^2/4}$$
$$= \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} \qquad (10.8a)$$

Sustituyendo la expresión del índice de resorte C de la ecuación 10.5 en la ecuación 10.8*a*.

$$\tau_{máx} = \frac{8FC}{\pi d^2} + \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{8FC + 4F}{\pi d^2}$$
$$= \frac{8FC}{\pi d^2}\left(1 + \frac{1}{2C}\right) = \frac{8FD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{0.5}{C}\right)$$
$$\tau_{máx} = K_s \frac{8FD}{\pi d^3} \qquad \text{donde} \quad K_s = \left(1 + \frac{0.5}{C}\right) \qquad (10.8b)$$

Esta manipulación convirtió el término de cortante directo de la ecuación 10.8*a* en el **factor de cortante directo** K_s. Las dos ecuaciones son idénticas en valor, pero se prefiere la segunda versión (ecuación 10.8*b*).

Si el alambre fuera recto y estuviera sometido a la combinación de una fuerza de cortante directo F, para el torque T, mostrado en la figura 10-10, la ecuación 10.8 sería la solución precisa. Sin embargo, este alambre se curva como una espiral. En la sección 2.9 (p. 84), se aprendió que las vigas curvadas tienen una concentración de esfuerzos en la superficie de curvatura interior. Aun cuando el resorte no esté cargado como una viga, se aplica el mismo principio; por lo tanto, existe un mayor esfuerzo en la superficie interior de la espiral. Wahl[3] determinó el factor de concentración de esfuerzos para un alambre redondo y definió el factor K_w, el cual incluye tanto los efectos de cortante directo como la concentración de esfuerzos debida a la curvatura, lo cual es válido para un alambre redondo con $C \geq 1.2$.[5]

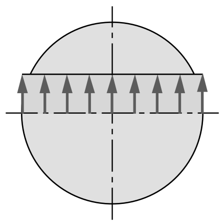
$$K_w = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0.615}{C} \qquad (10.9a)$$

$$\tau_{máx} = K_w \frac{8FD}{\pi d^3} \qquad (10.9b)$$

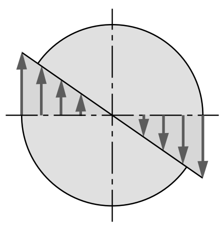
Este esfuerzo combinado se presenta en la figura 10-12*d*.

Como el factor K_w de Wahl incluye ambos efectos, pueden separarse en un factor de curvatura K_c y el factor de cortante directo K_s mediante

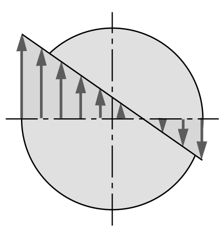
$$K_w = K_s K_c\,; \qquad K_c = \frac{K_w}{K_s} \qquad (10.10)$$



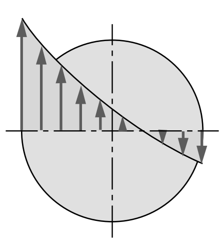
(a) Distribución del esfuerzo cortante directo a través de la sección



(b) Distribución del esfuerzo cortante por torsión a través de la sección



(c) Esfuerzos combinados cortante directo y cortante por torsión



(d) Efectos de la concentración de esfuerzo en el borde interior

FIGURA 10-12

Distribuciones de esfuerzo a través del alambre de un resorte de compresión helicoidal

Si un resorte está cargado estáticamente, entonces el criterio de falla es la fluencia. Cuando el material cede localmente, entonces mitigará la concentración local de esfuerzos que se deben al factor de curvatura K_c, y se emplea la ecuación 10.8*b* para tomar en cuenta sólo el cortante directo. Pero si el resorte está cargado dinámicamente, entonces la falla se presentará por fatiga con esfuerzos muy por debajo del punto de fluencia, y habría que utilizar la ecuación 10.9*b* para incorporar tanto el cortante directo como los efectos de la curvatura. En el caso de carga de fatiga, con cargas medias y alternantes, se tienen que usar la ecuación 10.8*b*, para calcular la componente de esfuerzo medio, y la ecuación 10.9*b,* para la componente de esfuerzo alternante.

Resortes con espiral helicoidal de alambre que no está redondeado

El alambre redondo es, por mucho, el material más común para resortes con espiral helicoidal. Sin embargo, algunas veces se utiliza alambre cuadrado o rectangular cuando se necesita mayor capacidad de carga de la que se obtendría con un alambre redondo en un espacio limitado. Lo anterior se debe a que, para una dimensión dada de una sección transversal, una sección transversal cuadrada tiene un mayor momento de inercia de área, el cual, para la misma resistencia del material, es capaz de sostener una carga mayor con el mismo nivel de esfuerzo. Una desventaja es que un alambre con sección transversal cuadrada o rectangular presenta una concentración de esfuerzos mayor, por la curvatura de la espira, que un alambre redondo; por ende, no se aplica la ecuación 10.9*a* de Wahl.

El *Manual de diseño de resortes*[6] proporciona factores de concentración de esfuerzos para algunas secciones que no son redondas. Cornwell[5] desarrolló expresiones para factores de concentración de esfuerzos tanto rectangulares como secciones transversales de alambre de forma arbitraria, como un elemento curvo sometido a cargas combinadas de cortante directo y cortante por torsión. Se hizo un análisis de elementos finitos (FEA) en perfiles rectangulares sólidos y huecos, vigas-I, canaletas *C* y *Z*, así como tes, con valores del índice de resorte en el intervalo de $1.2 \le C \le 10$. Los factores de concentración de esfuerzos para perfiles redondos calculados con este método se ajustan a la ecuación de Wahl, validando así el método.

10

Mientras que la concentración de esfuerzos en una sección circular siempre es más grande en el borde interior de la espiral, no siempre es así en secciones transversales rectangulares. Si están enrolladas “sobre la parte plana”, la mayor concentración de esfuerzos estará en el borde interior, pero si se enreda “sobre una arista” puede ocurrir en lo profundo de la sección. Lo anterior también es válido para secciones con esquinas opuestas como en las tes. Los datos de concentración de esfuerzos generados por el FEA, para secciones rectangulares sólidas, se ajustaron a una curva para obtener la ecuación de una razón entre el esfuerzo local máximo de cortante en la sección y el esfuerzo nominal:

$$K_{rw} = e^{\left(S_0 - S_1 s + S_2 s^2 - S_3 s^3 + S_4 s^4\right)} \tag{10.11a}$$

donde $s = \ln(C)$ y los valores de S_i se obtienen de la tabla 10-6, donde b y h son las dimensiones de la sección transversal rectangular con h paralela al eje de la espiral. La ecuación reproduce y amplía los resultados tabulares presentados en la referencia [6].

El esfuerzo en un resorte helicoidal de compresión de alambre rectangular se determina con

$$\tau = \frac{K_{rw} K_2 F D}{b h^2} \tag{10.11b}$$

La deflexión es

$$y = \frac{F D^3 N_a}{K_1 b h^3 G} \tag{10.11c}$$

Tabla 10-6 Parámetros ajustados a una curva de concentración de esfuerzo por cortante en secciones transversales rectangulares[5]

b/h	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4
1/20	1.9128	3.5104	3.1247	1.3315	0.2123
1/10	1.8908	3.4673	3.0834	1.3129	0.2093
1/8	1.8762	3.4879	3.1492	1.3592	0.2192
1/6	1.8555	3.4495	3.1234	1.3517	0.2184
1/4	1.7984	3.4031	3.1335	1.3760	0.2253
1/3.5	1.7812	3.3661	3.1067	1.3684	0.2246
1/3	1.7737	3.2849	2.9623	1.2741	0.2045
1/2.5	1.7340	3.2187	2.9178	1.2607	0.2031
1/2	1.7090	3.1197	2.8074	1.2111	0.1951
1/1.5	1.6862	2.9657	2.6014	1.1029	0.1752
1/1	1.6844	2.8219	2.4577	1.0591	0.1721
1.5/1	1.5381	2.6479	2.2312	0.9670	0.1614
2/1	1.4268	2.3349	1.7867	0.7321	0.1220
2.5/1	1.3610	2.0761	1.3481	0.4480	0.0628
3/1	1.3350	2.0087	1.2315	0.3597	0.0421
3.5/1	1.3053	1.8913	1.0961	0.2831	0.0261
4/1	1.2941	1.8802	1.1094	0.2869	0.0250
6/1	1.3089	2.2639	1.9437	0.8026	0.1240
8/1	1.2465	2.2094	2.1381	0.9873	0.1660
10/1	1.1545	1.8620	1.8344	0.8908	0.1568
20/1	0.7530	−0.2210	−0.8708	−0.4760	−0.0822

y la constante de resorte es:

$$k = \frac{F}{y} = K_1 \frac{bh^3 G}{D^3 N_a} \tag{10.11d}$$

10

donde F es la fuerza del resorte, D es el diámetro medio de la espiral, G es el módulo de corte y K_{rw} es de la ecuación 10.11*a*. K_1 y K_2 se obtienen de la tabla 10-7.

Esfuerzos residuales

Cuando un alambre se enreda como una hélice, se desarrollan esfuerzos residuales de tensión en la superficie interior, mientras en la superficie exterior hay esfuerzos residuales de compresión. Ninguno de estos esfuerzos residuales es benéfico, por lo que se eliminan al del esfuerzo (recocer) al resorte.

Asentamiento Se pueden introducir esfuerzos residuales benéficos mediante un proceso llamado, desconcertantemente por los fabricantes, "eliminación de asentamiento" o "asentamiento del resorte". El asentamiento puede incrementar la capacidad de carga estática de un 45% a 65%, así como duplicar la capacidad de almacenamiento de energía del resorte por cada libra de material.[1] El asentamiento se hace comprimiendo el resorte hasta su altura de cierre y haciendo ceder el material para introducir esfuerzos residuales benéficos. Recuerde que en la sección 4.8 (p. 277) se vio que la regla para introducir esfuerzos residuales benéficos es *someter a esfuerzos excesivos el material (hacerlo ceder) en la misma dirección en que se aplicarán los esfuerzos durante el servicio*. El resorte "en conjunto" pierde un poco de su longitud libre, pero gana los beneficios descritos arriba. Para obtener las ventajas del asentamiento, la longitud libre inicial debe ser mayor que la longitud deseada (postasentamiento) y tiene que diseñarse para brindar un esfuerzo con la altura sólida de aproximadamente 10 a 30% más grande que la resistencia a la fluencia del material. Menos de esa cantidad de sobrecarga no creará un esfuerzo residual suficiente. Más del 30% de sobreesfuerzo agrega pocos beneficios e incrementa la distorsión.[1]

Tabla 10-7
Factores de forma para resortes de alambre rectangular

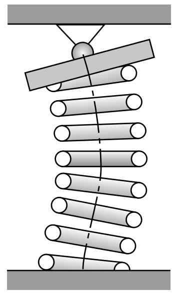
b/h	K_1	K_2
1.00	0.180	2.41
1.50	0.250	2.16
1.75	0.272	2.09
2.00	0.292	2.04
2.50	0.317	1.94
3.00	0.335	1.87
4.00	0.358	1.77
6.00	0.381	1.67

El esfuerzo permisible (es decir, la resistencia) de un resorte que se ha "asentado" es significativamente más alta que la de un resorte únicamente enrollado. Asimismo, la ecuación 10.8*b* con el factor K_s más pequeño se puede utilizar, en lugar de la ecuación 10.9*b*, para calcular el esfuerzo en un resorte "asentado", en vista de que, para carga estática, la fluencia durante el asentamiento elimina la concentración de esfuerzos en las curvaturas. El asentamiento es de lo más valioso para resortes cargados estáticamente, pero también tiene valor en cargas cíclicas.

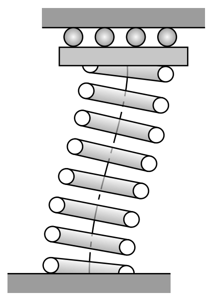
No todos los resortes comerciales se asientan, ya que esto eleva su costo. El diseñador debe especificar el asentamiento, si así se desea. No se tiene que asumir que se hará como algo rutinario. Algunas veces, la operación de asentamiento se especifica como parte del proceso de ensamblado, no como parte del proceso de fabricación del resorte. Si es conveniente, un resorte puede ciclarse deliberadamente a su altura sólida antes de su localización final de una máquina o cuando se ensamble en ésta.

CARGA INVERTIDA Ya sea que se asienten o no, los resortes espirales tienen generalmente algunos esfuerzos residuales. Por tal razón, no es aceptable aplicarles cargas invertidas. Suponiendo que los esfuerzos residuales se hayan acondicionado para ser benéficos contra la dirección esperada de la carga, la inversión de la carga evidentemente agudizará los esfuerzos residuales y provocará una falla temprana. Un resorte de compresión nunca debe cargarse a la tensión, mientras que un resorte de tensión nunca debe cargarse a la compresión. Incluso los resortes de torsión, como se verá, necesitan un torque aplicado unidireccional para evitar una falla prematura.

GRANALLADO CON PARTÍCULAS Es otro modo de obtener esfuerzos residuales benéficos en resortes y es más efectivo contra cargas cíclicas de fatiga. Ofrece poco beneficio tratándose de resortes con cargas estáticas. El proceso de bombardeo con partículas se analizó en la sección 4.8 (p. 277). Para resortes de alambre, normalmente se utilizan diámetros de partículas entre 0.008 in (0.2 mm) y 0.055 in (1.4 mm). Los resortes con un diámetro muy pequeño del alambre no se benefician tanto con el granallado de partículas, como los resortes de alambre con diámetros más grandes. Por otro lado, si el paso de las espiras es pequeño (es decir, un resorte enredado ajustadamente), la granalla no puede impactar efectivamente las superficies interiores de las espiras.



(a) Extremos no paralelos



(b) Extremos paralelos

FIGURA 10-13

Las condiciones de extremo determinan la situación crítica de pandeo

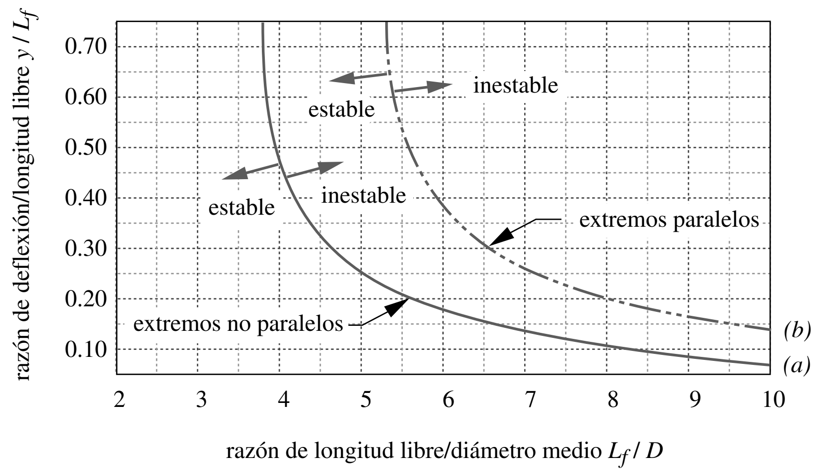


FIGURA 10-14

Curvas de situación crítica de pandeo Adaptadas de la referencia 1

Pandeo en resortes de compresión

Un resorte de compresión con carga es como una columna que se puede pandear si es muy estrecho. En el capítulo 2 se desarrolló una razón de esbeltez para columnas sólidas. Esa medida no es directamente aplicable a los resortes, debido a su geometría tan diferente. Sin embargo, se aplica un factor de esbeltez similar, como la razón de aspecto entre la longitud libre y el diámetro medio de la espiral L_f / D. Si este factor es > 4, el resorte se puede pandear. El pandeo exagerado se evita colocando el resorte dentro de un orificio o sobre una varilla. No obstante, la fricción de las espiras sobre tales guías enviará hacia tierra algo de la fuerza del resorte a través de la fricción y reducirá la carga entregada en el extremo del resorte.

Igual que en las columnas sólidas, las restricciones de extremo del resorte afectan la tendencia de éste hacia el pandeo. Si un extremo es libre de inclinarse, como se indica en la figura 10-13*a*, el resorte se pandeará con una razón de aspecto menor que si se mantiene fijo contra placas paralelas en cada extremo, como se indica en la figura 10-13*b*.

La razón de la deflexión del resorte, con su longitud libre, también afecta su tendencia al pandeo. La figura 10-14 presenta una gráfica de dos líneas, que describen la estabilidad de los dos casos de restricciones de extremo de la figura 10-13. Los resortes con combinaciones de razón de aspecto y razón deflexión-longitud a la izquierda de estas líneas son estables contra el pandeo.

Oscilación en resortes de compresión

10

Cualquier dispositivo con masa y elasticidad tiene una o más frecuencias naturales, como se vio en el capítulo 6, en relación con las vibraciones en ejes. Los resortes no son la excepción a esta regla; pueden vibrar tanto lateral como longitudinalmente cuando se excitan dinámicamente cerca de sus frecuencias naturales. Si se les permite entrar en resonancia, las ondas de las vibraciones longitudinales, llamadas oscilaciones, causan que las espiras se impacten entre sí. Las grandes fuerzas, debidas a las deflexiones excesivas de las espiras y a los impactos, harán fallar el resorte. Para eliminar tal condición, el resorte no debería ciclarse a una frecuencia cercana a su frecuencia natural. Idealmente, la frecuencia natural del resorte tiene que ser aproximadamente 13 veces más grande que la frecuencia forzada aplicada.

La frecuencia natural ω_n o f_n de un resorte helicoidal de compresión, depende de sus condiciones de frontera. La configuración más común y deseable es con los dos extremos fijos, mientras la frecuencia natural es igual al doble de un resorte con un extremo fijo y el otro libre. Para el caso fijo-fijo:

$$\omega_n = \pi \sqrt{\frac{kg}{W_a}} \text{ rad/seg} \qquad f_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{kg}{W_a}} \text{ Hz} \tag{10.12a}$$

donde k es la constante del resorte, W_a es el peso de las espiras activas del resorte y g es la constante gravitacional. Se puede expresar como frecuencia angular ω_n y como frecuencia lineal f_n. El peso de las espiras activas se determina con

$$W_a = \frac{\pi^2 d^2 D N_a \gamma}{4} \tag{10.12b}$$

donde γ es la densidad de peso del material. Para el peso total del resorte se sustituye N_t por N_a.

Sustituyendo las ecuaciones 10.7 (p. 659) y 10.11*a* en la 10.11*b,* resulta

Tabla 10-8 Resistencia máxima a la fluencia por torsión S_{ys} para resortes helicoidales de compresión en aplicaciones estáticas

No se incluyen los esfuerzos de flexión o de pandeo. Fuente: Adaptado de la ref. 1

Material	Porcentaje máximo de la resistencia última a la tensión	
	Antes de la remoción de asentamiento (Use la ec. 9.10*b*)	Después de la remoción de asentamiento (Use la ec. 9.9*b*)
Acero al carbono forjado en frío (p. ej., A227, A228)	45%	60–70%
Acero al carbono endurecido y revenido, así como acero al bajo carbono (p. ej., A229, A230, A232, A401)	50	65–75
Acero inoxidable austenítico (p. ej., A313)	35	55–65
Aleaciones no ferrosas (p. ej., B134, B159, B197)	35	55–65

$$f_n = \frac{2}{\pi N_a}\frac{d}{D^2}\sqrt{\frac{Gg}{32\gamma}} \text{ Hz} \qquad (10.12c)$$

para la frecuencia natural de un resorte espiral helicoidal fijo-fijo. Si un extremo del resorte está fijo y el otro está libre, actuará como un resorte fijo-fijo del doble de su longitud. Su frecuencia natural se determina usando un número para N_a en la ecuación 10.12*c*, que es el doble del número real de espiras activas presente en el resorte fijo-libre.

Resistencias permisibles para resortes de compresión

Existen bastantes datos de prueba sobre las resistencias contra falla en resortes helicoidales de compresión de alambre redondo, tanto con carga estática como con carga dinámica. Las relaciones de la resistencia última a la tensión, con el diámetro del alambre, se analizaron en la sección 10.3 (p. 652). Para el diseño de resortes, se necesitan datos adicionales de resistencia para obtener las resistencias a la fluencia y la fatiga.

RESISTENCIA A LA FLUENCIA POR TORSIÓN Las resistencias a la fluencia por torsión de un resorte de alambre varían, dependiendo del material y si el resorte se ha asentado o no. La tabla 10-8 presenta los factores de resistencia a la fluencia por torsión recomendados —para varios resortes de alambres comunes— como un porcentaje de la resistencia última a la tensión del alambre. Se deben utilizar tales factores para determinar la resistencia estimada de un resorte helicoidal de compresión con carga estática.*

Tabla 10-9 Resistencia máxima a la fatiga por torsión S_{fw}' para resortes helicoidales de compresión con alambre redondo en aplicaciones cíclicas (razón de esfuerzo, R = 0)

Sin oscilaciones, a temperatura ambiente y ambiente no corrosivo. Fuente: Ref. 1

Vida de fatiga (ciclos)	Porcentaje de la resistencia última a la tensión			
	Acero inoxidable austenítico y no ferroso ASTM 228		ASTM A230 y A232	
	Sin granallado de partículas	Con granallado de partículas	Sin granallado de partículas	Con granallado de partículas
10^5	36%	42%	42%	49%
10^6	33	39	40	47
10^7	30	36	38	46

* Observe en la tabla 10-8 que la Associated Spring Inc.[1] recomienda utilizar el factor de Wahl (ecuación 10.10) para calcular el esfuerzo en un resorte cargado estáticamente, si no se ha eliminado el "asentamiento" para introducir esfuerzos residuales benéficos, y usar el menor factor de corte directo (ecuación 10.9), si ya se eliminó el "asentamiento". Lo anterior contradice la regla (primer párrafo de la p. 659) acerca de ignorar la concentración de esfuerzos en situaciones de carga estática, ya que su enfoque se aplica al factor de concentración de esfuerzos de Wahl para un resorte no asentado cargado estáticamente. El suyo es un enfoque más conservador que la regla general, basado en su amplia experiencia en la manufactura de resortes. N.B.

10

Resistencia a la fatiga por torsión En el intervalo de $10^3 \leq N \leq 10^7$ ciclos, varía con el material y si se bombardeó con partículas o no. La tabla 10-8 muestra los valores recomendados para varios materiales de alambre en condiciones, con bombardeo o sin bombardeo de partículas, en tres puntos de sus diagramas *S-N*, 10^5, 10^6 y 10^7 ciclos. Observe que éstas son las resistencias a la fatiga por torsión, que se determinaron a partir de pruebas de resortes cargados con componentes iguales de esfuerzos medio y alternante (razón de esfuerzo $R = \tau_{mín}/\tau_{máx} = 0$). Entonces, no son directamente comparables con cualquiera de las resistencias a la fatiga de ciclo invertido, generadas a partir de las muestras giratorias con flexión estudiadas en el capítulo 4, a causa de la carga de torsión y la presencia de una componente de esfuerzo media. Se identificarán tales resistencias a la fatiga del alambre como S_{fw}', para diferenciarlas de las resistencias a la fatiga de ciclo invertido del capítulo 4. No obstante, las resistencias a la fatiga S_{fw}' son muy útiles, en vista de que representan una situación real (y típica) de carga de fatiga en un resorte, que se generan a partir de muestras de resortes no de muestras de prueba, de modo que la geometría y el tamaño sean los correctos. Advierta que las resistencias a la fatiga de la tabla 10-8 se reducen con el incremento del número de ciclos, incluso por arriba de los 10^6 ciclos, donde los aceros normalmente presentan el límite de resistencia.

Límite de resistencia a la torsión El acero puede tener un límite de resistencia para vida infinita. Los materiales con alta resistencia tienden a mostrar un "tope" en sus límites de resistencia, con el incremento de su resistencia última. Las figuras 4-9 (p. 248) y 4-11 (p. 249) muestran esta tendencia y la ecuación 4.5*a* (p. 260) define un límite de resistencia a la tensión sin corregir, para flexión de ciclo invertido en aceros con $S_{ut} >$ 200 kpsi, que permanece constante con el aumento de la resistencia a la tensión por arriba de ese valor. Observe en la figura 10-3 (p. 654) que la mayoría de los alambres de resorte, con diámetros menores de 10 mm aproximadamente, se encuentran en esta categoría de resistencia última, lo cual implicaría que tales materiales de alambre para resortes deberían tener un límite de resistencia a la torsión independiente del tamaño o la composición particular de la aleación. Otra investigación lo sustenta. Zimmerli[4] reporta que todos los alambres para resortes de acero, con diámetro $<$ 10 mm, muestran un límite de resistencia a la torsión para vida infinita, con una razón de esfuerzo $R = 0$ (a la que, para diferenciarse del límite de resistencia de ciclo invertido, se le llamará S_{ew}').

$$
\begin{aligned}
S_{ew'} &\cong 45.0 \text{ kpsi } (310 \text{ MPa}) \quad \text{para resortes sin granallar} \\
S_{ew'} &\cong 67.5 \text{ kpsi } (465 \text{ MPa}) \quad \text{para resortes granallados}
\end{aligned}
\tag{10.13}
$$

En este caso, no es necesario aplicar factores de corrección en superficie, tamaño o carga para S_{fw}' o S_{ew}', ya que los datos de prueba se desarrollaron en condiciones reales, en cuanto a los materiales del alambre se refiere. En la tabla 10-9 se observa que los datos de resistencia a la fatiga se obtuvieron a temperatura ambiente, en una atmósfera no corrosiva y sin oscilaciones. Esto también es válido para los datos de Zimmerli. Si el resorte va a operar con altas temperaturas, o en un ambiente corrosivo, la resistencia a la fatiga o el límite de resistencia se pueden reducir según la ecuación 4.8 (p. 267). La figura 4-31 (p. 266) también brinda información, en relación con ambientes corrosivos. El factor de temperatura K_{temp} y/o el factor de confiabilidad K_{conf} se aplican todavía en la ecuación 4.7*f* y en la tabla 4-4 (p. 265). Se utilizarán aquí los valores sin corregir de S_{fw}' para S_{fw} y S_{ew}' para S_{ew}, suponiendo temperatura ambiente, ausencia de corrosión y 50% de confiabilidad.

Diagrama *S-N* de corte por torsión para el alambre de un resorte

El diagrama *S-N* de cortante por torsión, para el material y tamaño particular de un alambre, se elabora con la información de las tablas 10-4 y 10-7 (pp. 654 y 662), mediante el método para elaborar diagramas S-*N* descrito en la sección 4.6 (p. 257). La región de

interés para fatiga de alto ciclo es de $N = 1\,000$ ciclos a $N = 1E7$ ciclos y más allá. El límite de resistencia para vida infinita de un alambre para resorte se define con la ecuación 10.13. La resistencia a la tensión S_m en 1 000 ciclos se toma generalmente como el 90% de la resistencia última S_{ut} a 1 ciclo (la resistencia estática). Como se trata de una situación de carga por torsión, las resistencias a la tensión del alambre mostradas en la figura 10-3 (p. 654), definidas por la ecuación 10.3 y la tabla 10-4 (p. 654) se deben convertir a resistencias de torsión con la ecuación 10.4 (p. 655). Lo anterior hace a la resistencia a la torsión S_{ms} en 1 000 ciclos igual a

$$S_{ms} \cong 0.9 S_{us} \cong 0.9\left(0.67 S_{ut}\right) \cong 0.6 S_{ut} \tag{10.14}$$

EJEMPLO 10-1

Construcción del diagrama *S-N* para el material de un resorte de alambre

Problema **Elabore los diagramas *S-N* de cortante por torsión para un intervalo de tamaños de alambres para resorte.**

Se proporciona **Alambre musical ASTM A228, sin granallado de partículas.**

Suposiciones **Se utilizarán tres diámetros: 0.010 in (0.25 mm), 0.042 in (1.1 mm) y 0.250 in (6.5 mm).**

Solución **Véase la figura 10-15.**

1. La resistencia a la tensión para cada tamaño de alambre se obtiene a partir de la ecuación 10.3, en combinación con el coeficiente y el exponente de la tabla 10-4 para este material.

$$\begin{aligned} S_{ut} &\cong 184\,649\, d^{-0.1625} \\ &= 184\,649(0.010)^{-0.1625} = 390\,239 \text{ psi} \\ &= 184\,649(0.042)^{-0.1625} = 309\,071 \text{ psi} \\ &= 184\,649(0.250)^{-0.1625} = 231\,301 \text{ psi} \end{aligned} \tag{a}$$

2. Estos valores se convierten a resistencias al cortante para 1 000 ciclos mediante la ecuación 10.14:

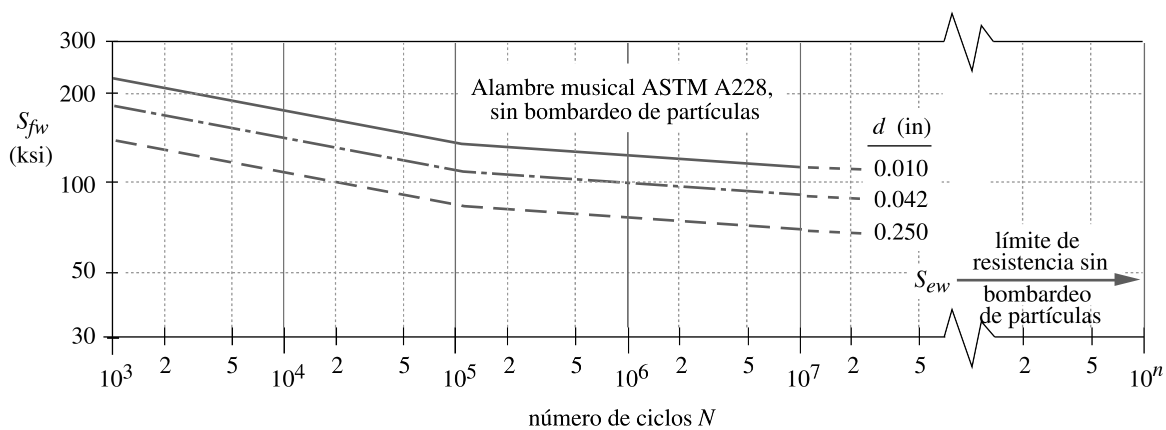


FIGURA 10-15

Diagramas *S-N* de fatiga por torsión para alambre musical de varios diámetros

10

$$S_{ms} \cong 0.6 S_{ut}$$
$$d = 0.010: \quad S_{ms} \cong 0.6(390\,239) = 234\,143 \text{ psi}$$
$$d = 0.042: \quad S_{ms} \cong 0.6(309\,071) = 185\,443 \text{ psi} \qquad (b)$$
$$d = 0.250: \quad S_{ms} \cong 0.6(231\,301) = 138\,781 \text{ psi}$$

3. Las resistencias a la fatiga por torsión S_{fw}, para los tres valores de N, se proporcionan como porcentajes de la resistencia a la tensión en la tabla 10-9 para alambre musical A228 sin granallado de partículas.

$$d = 0.010 \quad @N = 1E5: \; S_{fw} \cong 0.36(390\,239) = 140\,486 \text{ psi}$$
$$d = 0.010 \quad @N = 1E6: \; S_{fw} \cong 0.33(390\,239) = 128\,779 \text{ psi} \qquad (c)$$
$$d = 0.010 \quad @N = 1E7: \; S_{fw} \cong 0.30(390\,239) = 117\,072 \text{ psi}$$

Tales valores se grafican en combinación con el resultado de la ecuación 10.14 para generar las curvas *S-N*.

4. La figura 10-15 ilustra las curvas *S-N*. Existen dos partes separadas de cada curva *S-N*: el segmento $1E3 \leq N < 1E5$ y el segmento para $N \geq 1E5$. El límite de resistencia S_{ew} para vida infinita del alambre, sin granallado de partículas, también se muestra para 45 000 psi (ecuación 10.13).

5. Si se desea, cualquiera de estas curvas *S-N* se ajusta a una ecuación exponencial (ecuaciones 4.10 de la p. 268) por el método mostrado en la sección 4-6. La evaluación por separado de coeficientes y exponentes, para los dos segmentos de la curva *S-N*, permite que la resistencia a la fatiga S_{fw} del alambre en cuestión se calcule fácilmente para cualquier número de ciclos.

6. Es importante recordar que los datos de S_{fw} de la tabla 10-9 se aplican para el estado de esfuerzos repetidos, no para la condición de esfuerzo de ciclo invertido, lo cual significa que el diagrama *S-N* se tomó en algún punto a lo largo del eje σ_m de la figura 4-43 (p. 292).

10

Diagrama de Goodman modificado para un resorte de alambre

Se puede elaborar un diagrama de Goodman modificado para cualquier situación de un resorte cargado. En la sección 4.13 (p. 311) se presentó el procedimiento general de diseño contra fatiga, que incluye la obtención de los esfuerzos efectivos de Von Mises para facilitar el procedimiento en cualquier caso de carga combinada. Se hizo notar que de esa manera también se resuelve una situación de carga de torsión pura, al convertir los esfuerzos cortantes a esfuerzos de Von Mises, así como al compararlos con las resistencias a la tensión del material. Sin embargo, en el caso del diseño de resortes helicoidales de compresión, tiene poco sentido utilizar el procedimiento de Von Mises, porque las resistencias a la fatiga desarrolladas empíricamente se expresan como resistencias a la torsión. Por lo tanto, es más fácil construir un diagrama de Goodman con resistencias a la torsión y la aplicación directa de los esfuerzos de torsión calculados. Los resultados son los mismos, sin importar el procedimiento que se emplee.

EJEMPLO 10-2

Creación del diagrama de Goodman modificado para un resorte helicoidal

Problema **Obtenga la línea de Goodman para el resorte de alambre del ejemplo 10-1.**

Se proporciona **El ciclo de vida requerido es $N = 1E6$ ciclos. El alambre tiene 0.042 in (1.1 mm) de diámetro.**

Suposiciones **Se utilizarán las resistencias a la torsión y los esfuerzos cortantes por torsión en el diagrama de Goodman.**

Solución **Véase la figura 10-16.**

1. La resistencia última a la tensión del material de la figura 10-3 o de la ecuación 10.3 (p. 654), convertida en resistencia última a la torsión con la ecuación 10.4 (p. 655), mediante los datos de la tabla 10-4 (p. 654), permite determinar un punto sobre la línea de Goodman.

$$S_{ut} \cong 184\,649(0.042)^{-0.1625} = 309\,071 \text{ psi} \tag{a}$$

$$\begin{aligned} S_{us} &\cong 0.67 S_{ut} \\ &= 0.67(309\,071) = 207\,078 \text{ psi} \end{aligned} \tag{b}$$

   Este valor se grafica como el punto A sobre el diagrama en la figura 10-16.

2. Cada uno de los diagramas S-N proporciona un punto (S_{fw} o S_{ew}, dependiendo de si se trata de vida finita o vida infinita) sobre la línea de Goodman modificada para la combinación material/tamaño en carga de torsión pura. La resistencia a la fatiga S_{fw}, para el material de ese alambre y esa condición, se toma de la línea S-N de la figura 10-15 o bien, se calcula a partir de los datos de la tabla 10-9 (p. 665) como

$$@N = 1E6: \qquad S_{fw} \cong 0.33(309\,071) = 101\,993 \text{ psi} \tag{c}$$

   La x y la y se intersecan en $0.5S_{fw} = 50\,996$ psi. Esto se grafica como el punto B sobre el diagrama de la figura 10-16. Observe que, para vida infinita, el valor de S_{ew}, de la ecuación 10.13, se graficaría en B, en lugar de este valor de S_{fw} para vida finita.

3. En la figura 10-16 advierta que la resistencia a la fatiga S_{fw} del alambre se grafica en el punto B ($\tau_a = \tau_m = 0.5\, S_{fw}$), correspondiente a las condiciones de prueba de componentes iguales en esfuerzos medio y alternante (razón de esfuerzo $R = \tau_{mín}/\tau_{máx} = 0$). Luego se conecta el punto B con la resistencia última cortante S_{us} sobre el eje de esfuerzo medio, en el punto A, para dibujar la línea de Goodman, la cual se extiende al punto C.

4. Ahora se determinará el valor de la resistencia a la fatiga de ciclo invertido ($R = -1$), la cual es el punto C sobre el diagrama. Este valor se obtiene a partir de la ecuación de la línea de Goodman, definida en términos de sus dos puntos conocidos, A y B:

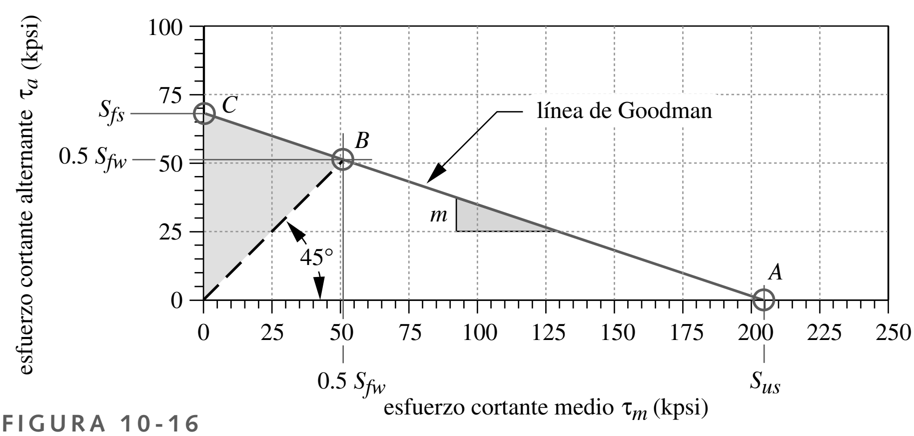


FIGURA 10-16

Diagrama de Goodman modificado del esfuerzo de torsión para un alambre ASTM A228 de 0.045 in de diámetro en $N = 1E6$ ciclos

$$m = -\frac{0.5S_{fw}}{S_{us} - 0.5S_{fw}}$$

$$S_{fs} = -mS_{us}$$

$$S_{fs} = 0.5\frac{S_{fw}S_{us}}{S_{us} - 0.5S_{fw}} \qquad (d)$$

$$= 0.5\frac{101\,993(207\,078)}{207\,078 - 0.5(101\,993)} = 67\,658 \text{ psi}$$

5. El uso de la línea de Goodman es conservador para razones de esfuerzos $R \geq 0$, aunque su empleo se justifica en este caso porque los resortes siempre deberían estar cargados en la misma dirección. Los resortes helicoidales de compresión suelen tener razones de esfuerzo entre 0 y 0.8, lo cual coloca a sus coordenadas de esfuerzos a la derecha de la línea de 45° en la figura, donde la línea de Goodman es más conservadora que la línea de Gerber.
6. Cualquiera otra combinación de esfuerzos medio y alternante, con una razón de esfuerzo $R \geq 0$ para este material y número de ciclos, se grafica en este diagrama para obtener el factor de seguridad.

10.5 DISEÑO DE RESORTES HELICOIDALES DE COMPRESIÓN PARA CARGA ESTÁTICA

Los requerimientos funcionales para el diseño de un resorte son bastante variados. Quizá se trate de un requerimiento para una fuerza específica con alguna deflexión o, tal vez, la constante de resorte se defina para un rango de deflexión. En algunos casos, existen limitaciones sobre el diámetro exterior, el diámetro interior o la longitud de trabajo. El procedimiento para el diseño variará según tales requerimientos. En cualquier caso, el diseño del resorte es un problema inherentemente iterativo. Se deben hacer algunas suposiciones para establecer los valores de las variables suficientes para calcular los esfuerzos, las deflexiones y la constante de resorte. Como el tamaño del resorte es una potencia a la tercera o a la cuarta en las ecuaciones de esfuerzo y deflexión; además, debido a que la resistencia del material depende del tamaño del alambre, la seguridad del diseño es muy susceptible a este parámetro.

Se pueden aplicar muchos procedimientos para diseñar resortes, y más de una combinación de parámetros del resorte satisface cualquier conjunto de requerimientos funcionales. Es posible optimizar parámetros, tal como el peso del resorte para un conjunto dado de requerimientos de funcionalidad. Para minimizar peso y costo, los niveles de esfuerzo tienen que hacerse tan altos como sea posible, sin causar fluencia estática durante el servicio.

Se debe suponer un diámetro d del alambre de prueba y elegir un índice C razonable del resorte, a partir de lo cual se determina el diámetro D de la espiral con la ecuación 10.5 (p. 659). Se elige también un material candidato para el resorte y se calculan las resistencias relevantes del material para el diámetro del alambre candidato. Es conveniente determinar el esfuerzo antes de calcular la deflexión, ya que mientras ambos implican d y D, sólo la deflexión depende de N_a. Si se define la fuerza F requerida, se calcula el esfuerzo para dicha fuerza con la ecuación 10.8 o con la 10.9 (p. 660) como debería ser. Si se define que operan dos fuerzas con una deflexión especificada entre sí, ellas definirán la constante de resorte.

El estado de esfuerzos se compara con la resistencia a la fluencia para carga estática. El factor de seguridad para carga estática es

$$N_s = \frac{S_{ys}}{\tau} \tag{10.15}$$

Si el esfuerzo calculado es demasiado alto, comparado con la resistencia del material, se pueden cambiar el diámetro del material, el índice de resorte o el material mismo para mejorar el resultado. Cuando el esfuerzo calculado con la fuerza de operación requerida parece razonable, comparado con la resistencia del material, se debe suponer un número determinado de espiras y una holgura entre espiras, así como volver a hacer los cálculos con esas constantes de resorte, deflexión y longitud libre, con las ecuaciones 10.6 y 10.7 (p. 659). Si se obtienen valores que no son razonables de cualquiera de estos parámetros, se realizará otra iteración con nuevas suposiciones.

Después de varias iteraciones, normalmente se obtiene una combinación razonable de parámetros. Algunas de las cuestiones que necesitan verificarse, antes de que el diseño esté completo, son el esfuerzo con la altura sólida, D_i, D_o, y la longitud libre de la espiral, en relación con las consideraciones de embalaje. Asimismo, se requiere verificar la posibilidad de pandeo.

Si el proceso anterior parece complicado, el lector debería considerar la posibilidad de que una computadora realice el "trabajo sucio". El diseño de resortes, como cualquier proceso de diseño iterativo, es una tarea obvia para ejecutarse mediante una computadora. Los solucionadores de ecuaciones que permiten iteración automática están muy bien adaptados para esta clase de tareas, pues resuelven todos los aspectos del problema simultáneamente. Se presentarán ahora algunos ejemplos de problemas de diseño de resortes y se mostrará cómo utilizar un solucionador de ecuaciones para obtener soluciones expeditas.

EJEMPLO 10-3

Diseño de un resorte helicoidal de compresión con carga estática

Problema **Diseñe un resorte de compresión para carga estática con deflexión conocida.**

Se proporciona **El resorte debe suministrar una fuerza mínima de 100 lb y una fuerza máxima de 150 lb, en un rango ajustado de deflexión de 0.75 in.**

Suposiciones **Use el alambre para resorte forjado en frío (ASTM A227) menos costoso y sin granallado de partículas, ya que las cargas son estáticas.**

Solución **Véase la tabla 10-10.**

1. Suponga un diámetro del alambre de 0.162 in de los tamaños disponibles en la tabla 10-2 (p. 653).

2. Suponga un índice de resorte de 8, el cual se encuentra a la mitad del intervalo recomendado, luego calcule el diámetro medio D de la espiral; hágalo a partir de la ecuación 10.5 (p. 659).

$$D = Cd = 8(0.162) = 1.30 \text{ in} \tag{a}$$

3. Determine el factor de cortante directo K_s y úselo para calcular el esfuerzo cortante en la espira con la mayor fuerza.

$$K_s = 1 + \frac{0.5}{C} = 1 + \frac{0.5}{8} = 1.06 \tag{b}$$

$$\tau = K_s \frac{8FD}{\pi d^3} = 1.06 \frac{8(150)(1.30)}{\pi(0.162)^3} = 123\ 714 \text{ psi} \tag{c}$$

4. Calcule la resistencia última a la tensión del material de este alambre, con la ecuación 10.3 y la tabla 10-4 (p. 654), luego úsela para calcular la resistencia a la fluencia por torsión a partir de la tabla 10-8 (p. 665), suponiendo que se eliminó el asentamiento y usando el valor mínimo del intervalo recomendado.

$$S_{ut} = Ad^b = 141\,040(0.162)^{-0.1822} = 196\,503 \text{ psi} \tag{d}$$

$$S_{ys} = 0.60S_{ut} = 0.60(196\,503) = 117\,902 \text{ psi} \tag{e}$$

5. Determine el factor de seguridad contra la fluencia para esta deflexión de trabajo, considerando la ecuación 10.15 (p. 671).

$$N_s = \frac{S_{ys}}{\tau} = \frac{117\,902 \text{ psi}}{123\,714 \text{ psi}} = 0.95 \tag{f}$$

Evidentemente esto no es aceptable, de modo que se debe iterar el diseño, modificando algún parámetro.

6. Intente incrementando ligeramente el diámetro del alambre, quizás a 0.192 in, y conservando el mismo índice de resorte. Recalcule el diámetro, el esfuerzo, la resistencia y el factor de seguridad de la espira.

$$D = Cd = 8(0.192) = 1.54 \text{ in} \tag{g}$$

$$\tau = K_s \frac{8FD}{\pi d^3} = 1.06 \frac{8(150)(1.54)}{\pi(0.192)^3} = 88\,074 \text{ psi} \tag{h}$$

$$S_{ut} = Ad^b = 141\,040(0.192)^{-0.1822} = 190\,513 \text{ psi} \tag{i}$$

$$S_{ys} = 0.60S_{ut} = 0.60(190\,513) = 114\,308 \text{ psi} \tag{j}$$

10

$$N_s = \frac{S_{ys}}{\tau} = \frac{114\,308 \text{ psi}}{88\,074 \text{ psi}} = 1.30 \tag{k}$$

Lo anterior parece aceptable, de modo que se continuará con el diseño calculando otros parámetros del resorte.

7. La constante de resorte está definida en este problema por las dos fuerzas especificadas para una deflexión relativa particular.

$$k = \frac{\Delta F}{y} = \frac{150 - 100}{0.75} = 66.7 \text{ lb/in} \tag{l}$$

8. Para alcanzar esta constante de resorte, el número de espiras activas debe satisfacer la ecuación 10.7 (p. 659):

$$k = \frac{d^4G}{8D^3N_a} \quad \text{o} \quad N_a = \frac{d^4G}{8D^3k} = \frac{(0.192)^4 11.5E6}{8(1.54)^3 66.67} = 8.09 \cong 8 \tag{m}$$

Advierta que se ha redondeado al 1/4 de espira más próximo, en vista de que la tolerancia de fabricación no puede alcanzar una precisión mayor. Esto hace a la constante de resorte $k = 67.4$ lb/in.

9. Suponga extremos cuadrados y esmerilados para obtener el número total de espiras a partir de la figura 10-9 (p. 658):

$$N_t = N_a + 2 = 8 + 2 = 10 \tag{n}$$

10. Ahora se determina la altura de cierre.

$$L_s = dN_t = 0.192(10) = 1.92 \text{ in} \tag{o}$$

11. La deflexión inicial para alcanzar la más pequeña de las dos cargas especificadas es

$$y_{inicial} = \frac{F_{inicial}}{k} = \frac{100}{67.4} = 1.48 \text{ in} \qquad (p)$$

12. Suponga una holgura de golpeo del 15% de la deflexión de trabajo:

$$y_{choque} = 0.15y = 0.15(0.75) = 0.113 \text{ in} \qquad (q)$$

13. La longitud libre (véase la figura 10-8, p. 658) se obtiene ahora a partir de

$$L_f = L_s + y_{choque} + y_{trabajo} + y_{inicial} = 1.92 + 0.113 + 0.75 + 1.48 = 4.26 \text{ in} \qquad (r)$$

14. La deflexión para altura de cierre es

$$y_{sólida} = L_f - L_s = 4.26 - 1.92 = 2.34 \text{ in} \qquad (s)$$

15. La fuerza para la deflexión en la altura de cierre es

$$F_{sólida} = k\,y_{sólida} = 67.4(2.34) = 158 \text{ lb} \qquad (t)$$

16. El esfuerzo en la altura de cierre y el factor de seguridad son

$$\tau_{cierre} = K_s \frac{8FD}{\pi d^3} = 1.06 \frac{8(158)(1.54)}{\pi(0.192)^3} = 92\,794 \text{ psi} \qquad (u)$$

$$N_{s_{cierre}} = \frac{S_{sy}}{\tau_{cierre}} = \frac{114\,308 \text{ psi}}{92\,794 \text{ psi}} = 1.2 \qquad (v)$$

lo cual es aceptable.

17. Para la verificación del pandeo, se deben calcular dos razones, L_f/D y $y_{máx}/L_f$.

$$\frac{L_f}{D} = \frac{4.26}{1.54} = 2.77$$

$$\frac{y_{máx}}{L_f} = \frac{y_{inicial} + y_{trabajo}}{L_f} = \frac{1.48 + 0.75}{4.26} = 0.52 \qquad (w)$$

Se toman los dos valores de la figura 10-14 (p. 663) y se ve que sus coordenadas se encuentran seguras dentro de las zonas que son estables contra el pandeo para cualquier condición de extremo.

18. Los diámetros interior y exterior de la espira son

$$D_o = D + d = 1.54 + 0.192 = 1.73 \text{ in}$$
$$D_i = D - d = 1.54 - 0.192 = 1.34 \text{ in} \qquad (x)$$

19. El orificio más pequeño y el perno más grande que se deben usar en este resorte son

$$orificio_{mín} = D_o + 0.05D = 1.73 + 0.05(1.54) = 1.81 \cong 1\tfrac{13}{16} \text{ in}$$
$$perno_{máx} = D_i - 0.05D = 1.34 - 0.05(1.54) = 1.26 \cong 1\tfrac{1}{4} \text{ in} \qquad (y)$$

20. El peso total del resorte es

$$W_t = \frac{\pi^2 d^2 D N_t \rho}{4} = \frac{\pi^2 (0.192)^2 (1.54)(10)(0.28)}{4} = 0.40 \text{ lb} \qquad (z)$$

21. Ahora se tiene la especificación completa de diseño para este resorte de alambre A227:

$$d = 0.192 \text{ in} \qquad OD = 1.73 \text{ in} \qquad N_t = 10, \text{ sq \& g} \qquad L_f = 4.26 \text{ in} \qquad (aa)$$

En la tabla 10-10 se muestran otros parámetros calculados para este resorte.

22. Los modelos de este ejemplo se encuentran en el CD-ROM como EX14-03. Existen también procedimientos alternos para la solución de este ejemplo, que se incluyen por separado en los archivos Mathcad y TKSolver del CD-ROM con una letra agregada a su nombre.

10.6 DISEÑO DE RESORTES HELICOIDALES DE COMPRESIÓN CON CARGA DE FATIGA

Cuando las cargas sobre el resorte son dinámicas (variables en el tiempo), se da una situación de esfuerzo por fatiga en el resorte. El proceso de diseño para carga dinámica es similar al de carga estática con algunas diferencias significativas. Un resorte cargado dinámicamente opera entre dos niveles de fuerzas, $F_{mín}$ y $F_{máx}$. Con tales valores, las componentes de fuerza alternante y media se determinan con

$$F_a = \frac{F_{máx} - F_{mín}}{2} \qquad F_m = \frac{F_{máx} + F_{mín}}{2} \tag{10.16a}$$

La **razón de fuerza** R_F también se define como:

$$R_F = \frac{F_{mín}}{F_{máx}} \tag{10.16b}$$

10

En los casos más comunes de carga sobre resorte $F_{mín}$ y $F_{máx}$ son positivas, con una razón de fuerza de aproximadamente $0 < R_F < 0.8$. Como se vio en el estudio anterior de esfuerzos residuales, se deben evitar las cargas bidireccionales en resortes espirales, en vista de que provocan fallas tempranas.

El procedimiento de diseño contra la fatiga es básicamente como se describió en la sección previa para carga estática. También se trata de un problema iterativo. Se debe suponer un diámetro d del alambre candidato y elegir un índice C razonable del resorte, a partir de lo cual se calcula el diámetro D de la espiral con la ecuación 10.5 (p. 659). Se elige también un material candidato para el resorte y se calculan las resistencias pertinentes del material para el diámetro elegido del alambre. Se necesitan la resistencia última al cortante, la resistencia a la fluencia cortante y la resistencia límite (o resistencia a la fatiga en cualquier número de ciclos). El planteamiento del problema normalmente contiene información suficiente para calcular el número de ciclos de vida requerido. Para carga dinámica, los esfuerzos alternante y medio se calculan por separado (con las $F_{mín}$ y $F_{máx}$ de la ecuación 10.16a).

La carga unidireccional, también llamada carga variable o repetida en el capítulo 4, tiene un esfuerzo medio diferente de cero; por lo tanto, requiere un análisis de falla con el diagrama de Goodman. Como todos los esfuerzos significativos en este resorte son esfuerzos cortantes por torsión y la mayoría de los datos de la resistencia del alambre del resorte son para carga por torsión, se utilizará un **diagrama de torsión de Goodman** como ya se dijo. El diagrama de Goodman modificado se construye como se indica en las figuras 10-16 (p. 669) y 10-17 (p. 677) con la resistencia a la fatiga por torsión S_{fw} o

Tabla 10-10 Ejemplo 10-3 Diseño de un resorte helicoidal de compresión para carga estática

Entrada	Variable	Salida	Unidad	Comentarios
8	*C*			índice de resorte de prueba
0.192	*diámetro*			diámetro de resorte de prueba
0.750	*y*		in	deflexión del resorte
15	*holgura entre espiras*		%	% de deflexión para holgura entre espiras
'forjend	*material*			'musical, 'revenido en aceite, 'endurecido forjado, 'cromoev, etc.
'cuadesm	*extremo*			'plano, 'plesme, 'cuad, 'cuadesme
'singran	*superficie*			'sin granallado o 'con granallado
'relajado	*relajado marcado*			relajado o no relajado
150	*Fmáx*		lb	fuerza máxima aplicada
100	*Fmín*		lb	fuerza mínima aplicada
	Fcierre	158	lb	fuerza en la altura de cierre
	k	67.4	lb/in	constante de resorte con N_a redondeado
	Na	8		núm. de espiras activas, al 1/4 de espira más próximo
	Ntot	10		núm. total de espiras
	D	1.54	in	diámetro medio de la espiral
	Dext	1.73	in	diámetro exterior de la espiral
	Din	1.34	in	diámetro interior de la espiral
	Ks	1.06		factor estático, corte directo, ec. 9.8
	Kw	1.18		factor de Wahl, ec. 9.9
	tauinic	58 716	psi	esfuerzo cortante en cualquier longitud
	tauest	88 074	psi	esfuerzo cortante en Fmáx para carga estática
	Taudisparo	92 478	psi	esfuerzo cortante en la altura de disparo
	Sut	190 513	psi	resistencia última a la tensión, ec. 9.3 y tabla 9-4
	Sus	127 644	psi	resistencia última cortante, ec. 9.4
	Sys	114 308	psi	fluencia por cortante según la tabla 9-6
	Ns_estático	1.30		factor de seguridad, carga estática en Fmáx
	Ns_cierre	1.23		factor de seguridad, altura sólida (fluencia)
	Lf	4.26	in	longitud libre
	Linstal	2.78	in	cualquier longitud
	Lcomp	2.03	in	longitud comprimido
	Lcierre	1.92	in	altura de cierre
	yinic	1.48	in	deflexión inicial en el ensamblaje
	ymáx	2.23	in	deflexión máxima de trabajo
	yholgura	0.113	in	holgura de la espira
	ycierre	2.34	in	deflexión para altura de cierre

la resistencia física del alambre S_{ew} definida a lo largo de la línea de 45° del origen para representar los datos de prueba que se generaron con $R_F = 0$. La figura 10-17 utiliza el valor de la resistencia límite de torsión S_{ew} para vida infinita de un alambre de acero granallado con partículas, en combinación con la resistencia última a la torsión S_{us}, para crear la línea de Goodman para la torsión.

La línea de carga, que representa el estado de esfuerzos aplicado, no se traza a partir del origen en este caso, sino desde un punto sobre el eje τ_m, que representa el esfuerzo inicial τ_i en las espiras del ensamblaje, como se ilustra en la figura 10-17. Esto supone que se aplica alguna precarga al resorte, lo cual es un caso habitual. En una situación de carga dinámica, no es deseable que $F_{mín} = 0$, ya que se crean cargas de impacto sobre las espiras (véase la sección 1.8 en la p. 36). Si $F_{mín} = 0$, la línea de carga partiría del origen. El factor de seguridad de fatiga por torsión N_{fs} se expresa como la razón de la resistencia alternante S_a en la intersección de la línea de carga y la línea de Goodman (punto *D*) al esfuerzo alternante aplicado τ_a en el punto *E*.

$$N_{fs} = S_a / \tau_a \tag{10.17a}$$

Esta razón se deduce a partir de la geometría de las dos líneas; sea *x* la variable independiente sobre el eje de esfuerzo medio, *m* la pendiente de la línea y *b* su intercepción con *y*. Haga que el valor sobre la línea de carga para cualquier *x* sea y_{carga}. La ecuación de la línea de carga es

$$y_{carga} = m_{carga} x + b_{carga}$$

de la geometría
$$m_{carga} = \frac{\tau_a}{\tau_m - \tau_i} \quad \text{y} \quad b_{carga} = -m_{carga}\tau_i$$

$$y_{carga} = \frac{\tau_a}{\tau_m - \tau_i}\left(x - \tau_i\right) \tag{10.17b}$$

Sea y_{Good} el valor sobre la línea de Goodman para cualquier *x*. Entonces, esta ecuación es:

$$y_{Good} = m_{Good} x + b_{Good}$$

de la geometría
$$m_{Good} = -\frac{S_{es}}{S_{us}} \quad \text{y} \quad b_{Good} = S_{es}$$

$$y_{Good} = -\frac{S_{es}}{S_{us}} x + S_{es} = S_{es}\left(1 - \frac{x}{S_{us}}\right) \tag{10.17c}$$

En el punto de falla, $y_{carga} = y_{Good}$. Igualando 10.16*b* y *c* y despejando *x*,

$$S_{es}\left(1 - \frac{x}{S_{us}}\right) = \frac{\tau_a}{\tau_m - \tau_i}\left(x - \tau_i\right)$$

$$x = \frac{S_{us}\left[S_{es}\left(\tau_i - \tau_m\right) - \tau_a \tau_i\right]}{S_{es}\left(\tau_i - \tau_m\right) - S_{us}\tau_a} \tag{10.17d}$$

Sustituyendo la ecuación 10.17*c* en 10.16*a*:

$$N_{fs} = S_a / \tau_a = y_{Good} / \tau_a = S_{es}\left(1 - \frac{x}{S_{us}}\right) \Big/ \tau_a \tag{10.17e}$$

Sustituyendo la ecuación 10.17*d* en 10.16*e* y simplificando, se obtiene el factor de seguridad como

$$N_{f_s} = \frac{S_{es}\left(S_{us} - \tau_i\right)}{S_{es}\left(\tau_m - \tau_i\right) + S_{us}\tau_a} \tag{10.18a}$$

donde la resistencia límite de ciclo invertido (punto *C*) del ejemplo 10-3 es

$$S_{es} = 0.5 \frac{S_{ew} S_{us}}{S_{us} - 0.5 S_{ew}} \tag{10.18b}$$

10

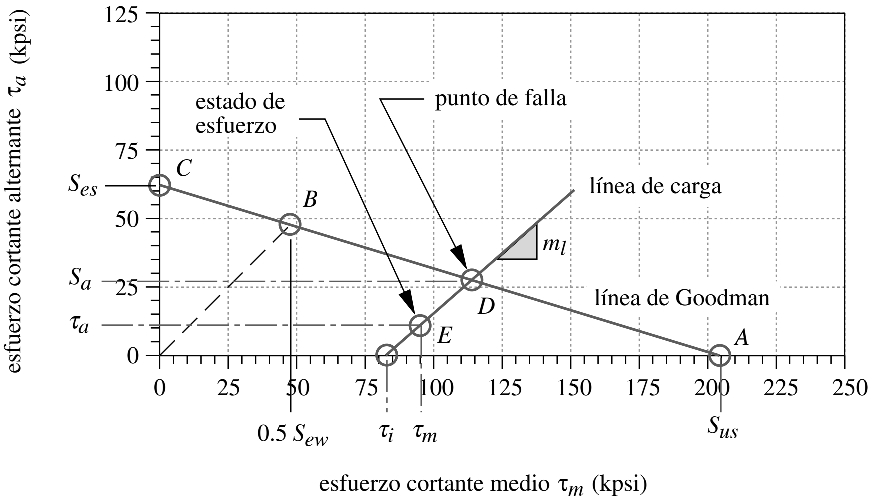


FIGURA 10-17

Diagrama de Goodman modificado que muestra la línea de carga y los datos necesarios para calcular el factor de seguridad de un resorte de compresión cargado dinámicamente

Este procedimiento supone que la precarga inicial no varía significativamente durante la vida de la parte y, también, que cualquier incremento en la carga mantiene una razón constante entre las componentes de esfuerzo medio y alternante. Lo anterior corresponde al caso 3 de la figura 4-46 (p. 296). Si ésta no es la situación, entonces se debería utilizar uno de los otros casos de la sección 4.11 para obtener el factor de seguridad aplicando las ecuaciones 10.16. Hay que tomar en cuenta el esfuerzo de la precarga inicial, el cual puede variar en condiciones de servicio.

Si el factor de seguridad es muy bajo, el diámetro del alambre, el índice de resorte o el material se pueden cambiar para mejorar el resultado. Cuando el factor de seguridad contra la fatiga es aceptable, se intentan un número de espiras y una holgura entre éstas; además, se realizan más cálculos para obtener la constante de resorte, así como la deflexión y la longitud libre resultante, con las ecuaciones 10.6 y 10.7 (p. 659). Los valores irrazonables de cualesquiera de estos parámetros requerirán más iteración con suposiciones modificadas.

Después de varias iteraciones, normalmente se obtiene una combinación razonable de parámetros. Algunas de las cosas que deben verificarse antes de que se complete el diseño son el esfuerzo y la altura de cierre contra el esfuerzo de fluencia, así como el D_i, D_o y la longitud libre de la espiral, en cuanto a consideraciones de embalaje. Asimismo, se tiene que verificar también la posibilidad de pandeo; mientras que para carga dinámica hay que comparar la frecuencia natural del resorte, con las frecuencias de las fuerzas del sistema para protección contra la oscilación.

El diseño del resorte para cargas de fatiga se beneficia enormemente con ayuda de una computadora. Los resolvedores de ecuaciones con iteración automática se adaptan bastante bien a esta clase de tareas, en vista de que resuelven simultáneamente todos los aspectos del problema. Se presentará ahora un ejemplo del diseño de un resorte para carga de fatiga.

EJEMPLO 10-4

Diseño de un resorte helicoidal de compresión para carga cíclica

Problema **Diseñe un resorte de compresión para una carga dinámica y una deflexión determinada.**

Se proporciona **El resorte debe suministrar una fuerza mínima de 60 lb y una fuerza máxima de 150 lb, con una deflexión dinámica de 1.00 in. La frecuencia forzadora es de 1 000 rpm. Se desea una vida de operación de 10 años, considerando un solo turno.**

Suposiciones **Se utilizará alambre musical (ASTM A228), ya que las cargas son dinámicas. Se usará granallado con partículas para lograr una mayor resistencia física.**

Solución **Véase las figuras 10-18 y 10-19, así como la tabla 10-11.**

1. Obtenga el número de ciclos que soportará el resorte para su vida de diseño.

$$N_{vida} = 1\,000 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \left(\frac{60 \text{ min}}{\text{hr}} \right) \left(\frac{2\,080 \text{ hr}}{\text{turno-año}} \right) (10 \text{ año}) = 1.2E9 \text{ ciclos} \tag{a}$$

   Este número tan grande requiere que se emplee un límite de resistencia para vida infinita.

2. Obtenga las fuerzas media y alternante con la ecuación 10.16*a*:

$$F_a = \frac{F_{máx} - F_{mín}}{2} = \frac{150 - 60}{2} = 45 \text{ lb}$$
$$F_m = \frac{F_{máx} + F_{mín}}{2} = \frac{150 + 60}{2} = 105 \text{ lb} \tag{b}$$

3. Suponga un diámetro del alambre de 0.207 in de los que se encuentran en la tabla 10-2 (p. 653) y un índice de resorte de 9; calcule el diámetro medio D de la espiral con la ecuación 10.5 (p. 659).

$$D = Cd = 9(0.207) = 1.863 \text{ in} \tag{c}$$

4. Obtenga el factor de cortante directo K_s y úselo para calcular el esfuerzo τ_i de la deflexión inicial (la menor fuerza definida), así como el esfuerzo medio τ_m:

$$K_s = 1 + \frac{0.5}{C} = 1 + \frac{0.5}{9} = 1.056 \tag{d}$$

$$\tau_i = K_s \frac{8F_i D}{\pi d^3} = 1.056 \frac{8(60)(1.863)}{\pi (0.207)^3} = 33\,875 \text{ psi} \tag{e}$$

$$\tau_m = K_s \frac{8F_m D}{\pi d^3} = 1.056 \frac{8(105)(1.863)}{\pi (0.207)^3} = 59\,281 \text{ psi} \tag{f}$$

5. Obtenga el factor de Wahl K_w y úselo para calcular el esfuerzo cortante alternante τ_a en la espiral.

$$K_w = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0.615}{C} = \frac{4(9) - 1}{4(9) - 4} + \frac{0.615}{9} = 1.162 \tag{g}$$

$$\tau_a = K_w \frac{8F_a D}{\pi d^3} = 1.162 \frac{8(45)(1.863)}{\pi (0.207)^3} = 27\,970 \text{ psi} \tag{h}$$

6. Obtenga la resistencia última a la tensión de este alambre musical con la ecuación 10.3 y la tabla 10-4 (p. 654), luego úsela para obtener la resistencia última cortante con la ecuación 10.4 y la resistencia a la fluencia por torsión en la tabla 10-8 (p. 665), suponiendo que se ha eliminado el asentamiento y con el límite inferior del intervalo recomendado.

$$S_{ut} = Ad^b = 184\,649(0.207)^{-0.1625} = 238\,507 \text{ psi}$$
$$S_{us} = 0.67S_{ut} = 159\,800 \text{ psi} \qquad (i)$$
$$S_{ys} = 0.60S_{ut} = 0.60(238\,507) = 143\,104 \text{ psi} \qquad (j)$$

7. Calcule el límite de resistencia para resortes granallados con partículas y con cargas repetidas con la ecuación 10.13 (p. 666), luego conviértalo en una resistencia física de ciclo totalmente invertido con la ecuación 10.18*b* (p. 676).

$$S_{ew} = 67\,500 \text{ psi} \qquad (k)$$
$$S_{es} = 0.5\frac{S_{ew}S_{us}}{S_{us} - 0.5S_{ew}} = 0.5\frac{67\,500(159\,800)}{159\,800 - 0.5(67\,500)} = 42\,787 \text{ psi} \qquad (l)$$

8. El factor de seguridad se calcula con la ecuación 10.18*a* (p. 676).

$$N_{fs} = \frac{S_{es}(S_{us} - \tau_i)}{S_{es}(\tau_m - \tau_i) + S_{us}\tau_a}$$
$$= \frac{42\,787(159\,800 - 33\,875)}{42\,787(59\,281 - 33\,875) + 159\,800(27\,970)} = 1.0 \qquad (m)$$

Evidentemente éste no es un diseño aceptable. Para tener una idea de lo que se debe cambiar para mejorarlo, se resolvió el modelo para un conjunto de valores del índice *C* del resorte, de 4 a 14, manteniendo los otros parámetros, como se habían definido. Los valores resultantes del diámetro de la espira, longitud libre, peso del resorte y factor de seguridad contra fatiga por torsión están graficados en la figura 10-18. Observe que el diámetro del alambre se mantuvo constante para desarrollar la variación de parámetros con el índice de resorte, como se indica en la figura 10-18.

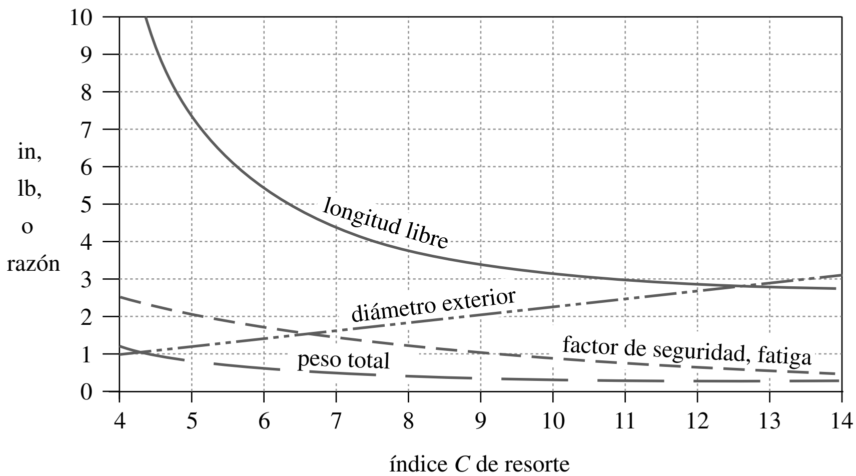


FIGURA 10-18

Variación de los parámetros de un resorte helicoidal de compresión, con el índice de resorte, diámetro del alambre constante

10

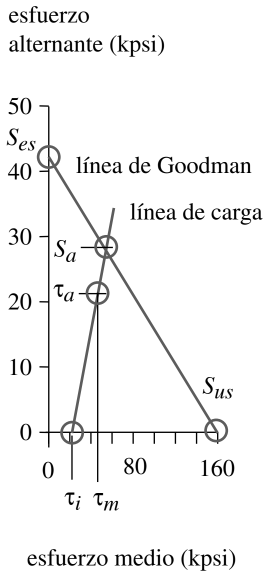


FIGURA 10-19

Diagrama de Goodman del esfuerzo de torsión del ejemplo 10-4

Si se hubiera mantenido constante otro parámetro, como el diámetro medio D de la espira, se obtendría un conjunto de funciones diferentes para longitud libre, peso, factor de seguridad, etcétera.

El factor de seguridad se incrementa con la disminución del índice de resorte, de modo que una reducción en el valor supuesto de C mejorará el factor de seguridad, incluso sin cambiar el diámetro del alambre. Observe, sin embargo, que la longitud libre aumenta exponencialmente con la reducción del índice de resorte. Si se limita el tamaño del embalaje, no se podrá disminuir demasiado el índice de resorte para eliminar la longitud excesiva del resorte. El diámetro de la espiral se incrementa linealmente con el índice de resorte para un diámetro constante del alambre. El peso del resorte disminuye lentamente con el incremento del índice de resorte.

Si se disminuye el índice de resorte de 9 a 7, manteniendo los otros parámetros iguales, se obtendrá un diseño aceptable, en este caso, con $N_f = 1.3$. La tabla 10-11 muestra los resultados de este nuevo cálculo y de los cálculos necesarios descritos abajo para completar el diseño. La figura 10-19 ilustra el diagrama de Goodman modificado para el diseño final. El resumen de los valores modificados es

$$\begin{array}{llll} C = 7 & D = 1.45 \text{ in} & K_w = 1.21 & K_s = 1.07 \\ \tau_i = 26\,743 \text{ psi} & \tau_a = 22\,705 \text{ psi} & \tau_m = 46\,800 \text{ psi} & N_{f_s} = 1.3 \end{array} \tag{n}$$

9. La constante de resorte se define a partir de las dos fuerzas especificadas para su deflexión relativa.

$$k = \frac{\Delta F}{y} = \frac{150 - 60}{1.0} = 90 \text{ lb/in} \tag{o}$$

10. Para obtener la constante definida del resorte, el número de espiras activas debe satisfacer la ecuación 10.7 (p. 659):

$$k = \frac{d^4 G}{8 D^3 N_a} \quad \text{o bien,} \quad N_a = \frac{d^4 G}{8 D^3 k} = \frac{(0.207)^4 11.5E6}{8(1.45)^3(90)} = 9.64 \cong 9\frac{3}{4} \tag{p}$$

Observe que se redondea al 1/4 de espira más cercano, en vista de que la tolerancia de manufactura no puede alcanzar una mejor precisión. Esto hace a la razón del resorte igual a $k = 89$ lb/in.

11. Suponga extremos cuadrados y esmerilados, tomando el número total de espiras de la figura 10-9 (p. 658):

$$N_t = N_a + 2 = 9.75 + 2 = 11.75 \tag{q}$$

12. La altura de cierre se determina ahora:

$$L_s = dN_t = 0.207(11.75) = 2.43 \text{ in} \tag{r}$$

13. La deflexión inicial para alcanzar la menor de las dos cargas especificadas es

$$y_{inicial} = \frac{F_{inicial}}{k} = \frac{60}{89} = 0.674 \text{ in} \tag{s}$$

14. Suponga una tolerancia entre espiras del 15% de la deflexión de trabajo:

$$y_{golpe} = 0.15y = 0.15(1.0) = 0.15 \text{ in} \tag{t}$$

15. La longitud libre (véase la figura 10-8, p. 658) se obtiene ahora a partir de

$$L_f = L_s + y_{golpe} + y_{trabajo} + y_{inicial} = 1.82 + 0.15 + 1.0 + 0.674 = 4.25 \text{ in} \tag{u}$$

16. La deflexión para esta altura sólida es

10

$$y_{cierre} = L_f - L_s = 4.25 - 2.43 = 1.82 \text{ in} \qquad (v)$$

17. La fuerza en la deflexión de altura de cierre es

$$F_{cierre} = k\, y_{cierre} = 89(1.82) = 162 \text{ lb} \qquad (w)$$

18. El esfuerzo en la altura sólida y el factor de seguridad son

$$\tau_{cierre} = K_s \frac{8F_{cierre} D}{\pi d^3} = 1.07 \frac{8(164)(1.45)}{\pi (0.207)^3} = 72\,875 \text{ psi} \qquad (x)$$

$$N_{s_{cierre}} = \frac{S_{ys}}{\tau_{cierre}} = \frac{143\,104 \text{ psi}}{72\,875 \text{ psi}} = 2.0 \qquad (y)$$

lo cual es aceptable.

19. Para verificar el pandeo, es necesario calcular las dos razones, L_f/D y $y_{máx}/L_f$.

$$\frac{L_f}{D} = \frac{4.25}{1.45} = 2.93 \qquad (z)$$

$$\frac{y_{máx}}{L_f} = \frac{y_{inicial} + y_{trabajo}}{L_f} = \frac{0.674 + 1.0}{4.25} = 0.39$$

Emplee estos dos valores en la figura 10-14 (p. 663) y vea que sus coordenadas seguramente se encuentran dentro de las zonas que son estables contra pandeo para cada condición de extremo.

20. El peso de las espiras activas del resorte de la ecuación 10.12*b* (p. 664) es

$$W_a = \frac{\pi^2 d^2 D N_a \gamma}{4} = \frac{\pi^2 (0.207)^2 (1.45)(9.75)(0.285)}{4} = 0.426 \text{ lb} \qquad (aa)$$

21. La frecuencia natural de este resorte se obtiene con la ecuación 10.12*a* (p. 664) y es

$$f_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{kg}{W}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{89(386)}{0.426}} = 142 \text{ Hz} = 8\,521 \ \frac{\text{ciclos}}{\text{min}} \qquad (ab)$$

La razón entre la frecuencia natural y la frecuencia forzada es

$$\frac{8\,520}{1\,000} = 8.5 \qquad (ac)$$

la cual es lo suficientemente alta.

22. La especificación de diseño para este resorte de alambre A228 es

$$d = 0.207 \text{ in} \qquad D_o = 1.66 \text{ in} \qquad N_t = 11.75, \text{ sq \& g} \qquad L_f = 4.25 \qquad (ad)$$

23. En la tabla 10-11 se presentan los resultados detallados. Los archivos EX14-04 se encuentran en el CD-ROM. También existen enfoques alternativos para la solución de este ejemplo, que se incluyen por separado en los archivos Mathcad y TKSolver en el CD-ROM, con una letra adicional en su nombre.

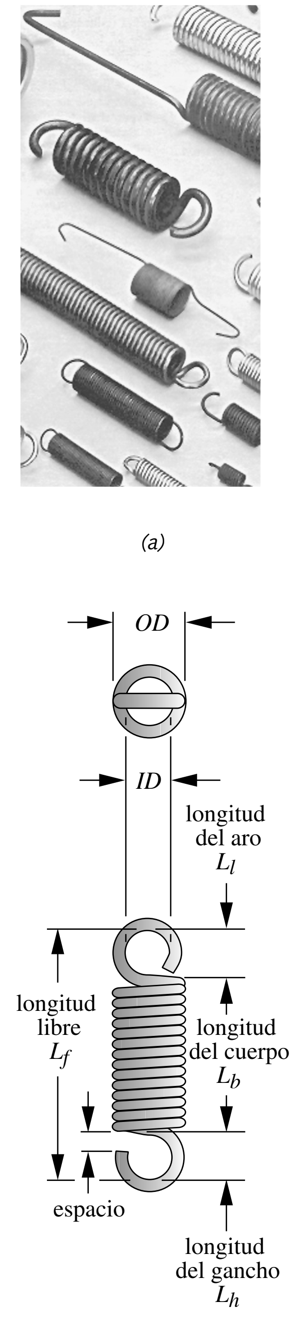


FIGURA 10-20

(*a*) Resortes de muestra y (*b*) dimensiones de un resorte de extensión

Tabla 10-11 Ejemplo 10-4 Diseño de un resorte helicoidal de compresión para carga dinámica

Entrada	Variable	Salida	Unidad	Comentarios
1 000	*rpm*		rpm	frecuencia de excitación
7	*C*			índice del resorte de prueba
0.207	*d*		in	diámetro comercial del resorte (lista de funciones)
1	*y*		in	deflexión del resorte
'music	*material*			'musical, 'revenido en aceite, 'forjado endurecido, etc.
'cuadesme	*extremo*			'plano, 'planoesme, 'cuad, 'cuadesme
'gran	*superficie*			'sin granallado o 'con granallado
'set	*'marca de asentamiento*			marca de resorte asentado; si no hay, sin asentamiento
150	*Fmáx*		lb	fuerza máxima aplicada
60	*Fmín*		lb	fuerza mínima aplicada
	Falt	45	lb	fuerza alternante
	Fmed	105	lb	fuerza media
	Fcierre	164	lb	fuerza en la altura de cierre
	k	89	lb/in	constante de resorte con N_a redondeado
	Na	9.75		núm. de espiras activas, redondeado al 1/4 de espira más próximo
	Nt	11.75		núm. total de espiras
	D	1.45	in	diámetro medio de la espiral
	Dext	1.66	in	diámetro exterior de la espiral
	Din	1.24	in	diámetro interior de la espiral
	Ks	1.07		factor estático, cortante directo, ec. 9.8
	Kw	1.21		factor de Wahl, ec. 9.9
	tauinic	26 743	psi	esfuerzo cortante en la longitud instalada
	taucierre	72 875	psi	esfuerzo en la altura de cierre
	taualt	22 705	psi	esfuerzo cortante alterno por fatiga
	taumed	46 800	psi	esfuerzo cortante medio por fatiga
	Sut	238 507	psi	resistencia a la tensión, ec. 9.3 y tabla 9-4
	Sus	159 800	psi	resistencia última cortante, ec. 9.4
	Sys	143 104	psi	fluencia por cortante con base en la tabla 9-6
	Sew	67 500	psi	resistencia límite del alambre, ec. 9.12
	Ses	42 787	psi	resistencia límite de ciclo invertido, ec. 9.16*b*
	Nf	1.3		factor de seguridad, fatiga, ec. 9.14
	Ncierre	2.0		factor de seguridad, altura de cierre (fluencia)
	Lf	4.25	in	longitud libre
	Lcierre	2.43	in	altura de cierre
	yinic	0.67	in	deflexión inicial en el ensamble
	ycierre	1.82	in	deflexión para altura de cierre
	nf	142	Hz	frecuencia natural en Hz
	FreqFac	8.5		razón entre frec. nat. y frec. de excit.

10.7 RESORTES HELICOIDALES DE EXTENSIÓN

Los resortes helicoidales de extensión son similares a los resortes helicoidales de compresión, sólo que se cargan por tensión, como se ilustra en la figura 10-2*b*. La figura 10-20 muestra las dimensiones importantes de un resorte de extensión. Los ganchos o

las orejas sirven para permitir que se aplique una fuerza de extensión. En la figura se presentan un gancho y una oreja estándares, pero existen muchas variaciones. Véase la referencia 1 para las descripciones de otras configuraciones de ganchos y orejas. Los extremos estándares se forman simplemente flexionando la última espira a 90° de la espiral del cuerpo. Los ganchos y las orejas tienen mayores esfuerzos que el cuerpo de la espiral, pero éstos limitan la seguridad del diseño. En las espiras de los resortes de extensión no se aplica el asentamiento, en tanto que el bombardeo con partículas no es práctico, ya que las espiras enrolladas estrechamente se protegen entre sí contra los disparos.

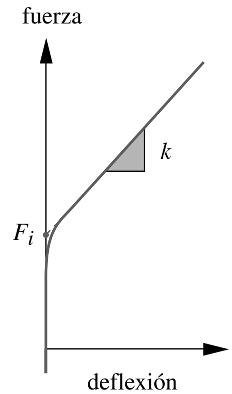


FIGURA 10-21
Curva de fuerza-deflexión de un resorte helicoidal de extensión, donde se muestra su tensión inicial

Espiras activas en los resortes de extensión

Todas las espiras del cuerpo se consideran espiras activas, pero normalmente se agrega una al número de espiras activas para obtener la longitud del cuerpo L_b.

$$N_t = N_a + 1 \tag{10.19}$$

$$L_b = dN_t \tag{10.20}$$

La longitud libre se mide a partir del interior de un extremo de la oreja (o gancho) al interior del otro, pero podría variar al cambiar la configuración del extremo sin modificar el número de espiras.

Constante de resorte en resortes de extensión

Las espiras de un resorte de extensión están enrolladas estrechamente, mientras el alambre se dobla conforme se enrolla, creando una precarga en las espiras que se debe vencer para separarlas. La figura 10-21 muestra una curva típica de carga-deflexión de un resorte helicoidal de extensión. La constante k del resorte es lineal, con excepción de la porción inicial. La precarga F_i se mide extrapolando la parte lineal de la curva hasta el eje de la fuerza. La constante de resorte se expresa como

$$k = \frac{F - F_i}{y} = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} \tag{10.21}$$

Observe que no hay deflexión, sino hasta que la fuerza aplicada excede la fuerza de precarga F_i inherente al resorte.

Índice de resorte en los resortes de extensión

El índice de resorte se obtiene con la ecuación 10.5 y se debería mantener en el mismo intervalo de 4 a 12, como se recomienda para los resortes de compresión.

Precarga de la espira en resortes de extensión

La precarga F_i se puede controlar en alguna medida durante el proceso de manufactura, por lo que se debe diseñar para mantener el esfuerzo inicial de la espira dentro del intervalo preferente que se muestra en la figura 10-22.[1] Ésta presenta los rangos deseados del esfuerzo inicial de la espira en función del índice de resorte. Los valores fuera del intervalo son posibles, aunque difíciles de fabricar. Se han ajustado funciones cúbicas, a las curvas de la figura 10-22, para facilitar el uso de una computadora. Las expresiones cúbicas aproximadas se muestran en la figura y son

$$\tau_i \cong -4.231C^3 + 181.5C^2 - 3\,387C + 28\,640 \tag{10.22a}$$

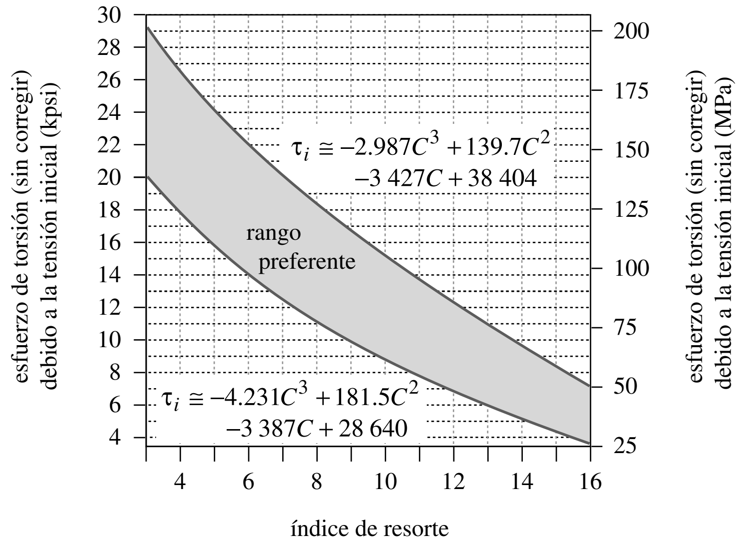


FIGURA 10-22

Rango preferente del esfuerzo inicial en resortes de extensión en función del índice de resorte

$$\tau_i \cong -2.987C^3 + 139.7C^2 - 3\,427C + 38\,404 \tag{10.22b}$$

donde τ_i está en psi. El promedio de los dos valores, calculados a partir de tales funciones, es un buen valor inicial para el esfuerzo inicial de la espira.

Deflexión en resortes de extensión

La deflexión en la espira se obtiene con la misma ecuación que se utiliza para el resorte de compresión con una modificación por la precarga.

$$y = \frac{8(F - F_i)D^3 N_a}{d^4 G} \tag{10.23}$$

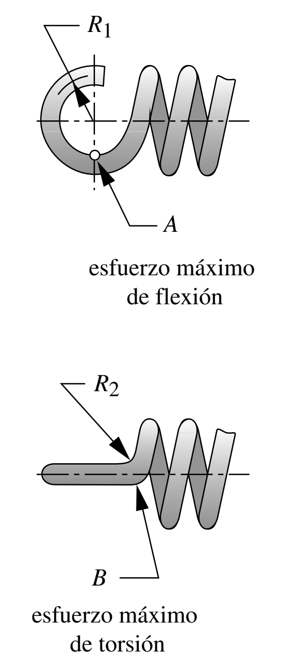


FIGURA 10-23

Puntos de esfuerzo máximo en el gancho o la oreja de un resorte de extensión

Esfuerzos en la espira en resortes de extensión

Los esfuerzos en las espiras se calculan con las mismas fórmulas utilizadas en los resortes de compresión. Véase las ecuaciones 10.8 y 10.9 (p. 660). Los factores K_s y K_w se emplean del mismo modo.

Esfuerzos en los extremos en resortes de extensión

Los ganchos o las orejas estándares tienen dos ubicaciones de alto esfuerzo, como se indica en la figura 10-23. El esfuerzo máximo de torsión ocurre en el punto B, donde el radio de flexión es menor. También existe un esfuerzo de flexión en el gancho o la oreja en el punto A, puesto que el extremo está cargado como una viga curva. Asimismo, Wahl definió un factor K_b de concentración de esfuerzos de flexión en un alambre curvo.

El esfuerzo de flexión en el punto A se determina con

$$\sigma_A = K_b \frac{16DF}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} \tag{10.24a}$$

donde

$$K_b = \frac{4C_1^2 - C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} \tag{10.24b}$$

y

$$C_1 = \frac{2R_1}{d} \tag{10.24c}$$

R_1 es el radio promedio del gancho, como se ilustra en la figura 10-23. Observe que para un extremo estándar, el radio promedio del gancho es el mismo que el radio de la espira.

El esfuerzo de torsión en el punto B se obtiene a partir de

$$\tau_B = K_{w_2} \frac{8DF}{\pi d^3} \tag{10.25a}$$

donde

$$K_{W_2} = \frac{4C_2 - 1}{4C_2 - 4} \tag{10.25b}$$

y

$$C_2 = \frac{2R_2}{d} \tag{10.25c}$$

R_2 es el radio en el lado de doblez, como se muestra en la figura 10-23. C_2 debe ser mayor que 4.[1]

Oscilaciones en resortes de extensión

La frecuencia natural de un resorte helicoidal de extensión, con sus dos extremos fijos para prevenir la deflexión axial, es la misma que la de un resorte helicoidal de compresión (véase la ecuación 10.12*a*):

$$f_n = \frac{2}{\pi N_a} \frac{d}{D^2} \sqrt{\frac{Gg}{32\gamma}} \quad \text{Hz} \tag{10.26}$$

Resistencias de materiales para resortes de extensión

Se utilizan los mismos materiales, tanto para los resortes de extensión como para los resortes de compresión. Algunos de los datos de resistencia desarrollados para los resortes de compresión se aplican también para los resortes de extensión. La tabla 10-12 muestra las resistencias recomendadas para fluencia estática del cuerpo de la espiral y los extremos del resorte, tanto a la torsión como a la flexión. Observe que las resistencias de torsión del alambre son las mismas que las de los resortes de compresión de las tablas 10-8 y 10-9 (p. 665). La tabla 10-13 presenta las resistencias a la fatiga recomendadas para dos materiales en varios ciclos de vida, mostrando por separado los datos de las espiras del cuerpo y los de los extremos. Los límites de resistencia de la ecuación 10.13 (p. 666) son válidos para resortes de extensión, por lo que se deben convertir a valores de ciclo invertido con la ecuación 10.18*b* (p. 676), con la finalidad de aplicarlos a la expresión del factor de seguridad en la línea de Goodman de la ecuación 10.18*a* (p. 676).

Tabla 10-12 Resistencias máximas a la fluencia por torsión y por flexión S_{ys} y S_y en resortes helicoidales de extensión en aplicaciones estáticas

Sin remoción de asentamiento y con aplicación de tratamiento térmico a baja temperatura. Fuente: Ref. 1

Material	Porcentaje máximo de resistencia última a la tensión		
	S_{ys} a la torsión		S_y a la flexión
	Cuerpo	Extremo	Extremo
Acero al carbono forjado en frío (p. ej., A227, A228)	45%	40%	75%
Acero al carbono endurecido y revenido, y aleación de acero al bajo carbono (p. ej., A229, A230, A232, A401)	50	40	75
Acero inoxidable austenítico y aleaciones no ferrosas (p. ej., A313, B134, B159, B197)	35	30	55

Diseño de resortes helicoidales de extensión

El procedimiento de diseño para resortes de extensión es básicamente el mismo que el de los resortes de compresión, con la consideración adicional de los detalles de los extremos. Se deben suponer los parámetros de diseño suficientes para permitir un intento de cálculo. Los valores supuestos se ajustan con base en los resultados y se itera el diseño hasta obtener una solución aceptable.

En los problemas de diseño de un resorte de extensión, con frecuencia conviene suponer un índice de resorte y un diámetro del alambre, como se hace para los resortes de compresión. El diámetro medio de la espiral se puede obtener con la ecuación 10.5 (p. 659). El índice supuesto del resorte se utiliza en las ecuaciones 10.21 (p. 683) para determinar el esfuerzo inicial aproximado en la espira. Mediante ese valor de esfuerzo inicial es posible calcular la precarga F_i en la espiral con la ecuación de esfuerzo 10.8 (p. 660). Se pueden obtener en seguida los esfuerzos en la espira y en el extremo, pero se realizan los ajustes adecuados en los valores supuestos para obtener factores de seguridad aceptables.

10

La deflexión o el número de espiras se calculan con la ecuación 10.23, una vez que se supone o se toma el valor especificado de una de ellas. Entonces se obtiene la constante de resorte mediante la fuerza máxima de diseño y la precarga en combinación con la deflexión supuesta o calculada, aplicando la ecuación 10.21. El pandeo no existe en los resortes de extensión, pero la frecuencia natural se debería comparar con la frecuencia forzada en escenarios dinámicos.

Tabla 10-13 Resistencias máximas de fatiga por torsión y por flexión S_{fw}' y S_{fwb}' para alambre de acero inoxidable ASTM A228 y alambre de acero tipo 302, en resortes helicoidales de extensión con aplicaciones cíclicas

Sin remoción de asentamiento, sin granallado de partículas, temperatura ambiente y con aplicación de tratamiento térmico a baja temperatura Fuente: Ref. 1

Vida de fatiga (ciclos)	Porcentaje de resistencia última a la tensión		
	S_{fw}' a la torsión		S_{fwb}' a la flexión
	Cuerpo	Extremo	Extremo
10^5	36%	34%	51%
10^6	33	30	47
10^7	30	28	45

Los factores de seguridad se obtienen con las ecuaciones 10.14 y 10.17 (pp. 667 y 676), teniendo cuidado de utilizar la resistencia adecuada del material para la torsión en las espiras, así como para la flexión o cortante en los extremos. Se necesita un análisis de la línea de Goodman para resortes cargados cíclicamente, el cual está resumido en la ecuación 10.18. Se requiere también un análisis de fatiga para los extremos y para las espiras.

EJEMPLO 10-5

Diseño de un resorte helicoidal de extensión para carga cíclica

Problema **Diseñe un resorte de extensión para carga dinámica con una deflexión determinada.**

Se proporciona **El resorte debe proporcionar una fuerza mínima de 50 lb y una fuerza máxima de 85 lb para una deflexión dinámica de 0.50 in. La frecuencia forzada es de 500 rpm. Se desea vida infinita.**

Suposiciones **Se utilizarán ganchos estándar en cada extremo. Se empleará alambre musical (ASTM A228), pues las cargas son dinámicas. No se puede usar el asentamiento ni el granallado de partículas para lograr una mayor resistencia física en un resorte de extensión.**

Solución **Véase la figura 10-24 (p. 690) y la tabla 10-14 (pp. 691-692).**

1. Suponga un diámetro de prueba del alambre de 0.177 in de los tamaños disponibles en la tabla 10-2 (p. 653). Suponga un índice de resorte $C = 9$ y empléelo para calcular el diámetro medio D de la espiral con la ecuación 10.5 (p. 659).

$$D = Cd = 9(0.177) = 1.59 \text{ in} \tag{a}$$

2. Utilice el valor supuesto de C para determinar el valor adecuado del esfuerzo inicial τ_i en la espira, con las ecuaciones 10.21 (p. 683):

$$\begin{aligned}\tau_{i_1} &\cong -4.231C^3 + 181.5C^2 - 3\,387C + 28\,640 \\ &= -4.231(9)^3 + 181.5(9)^2 - 3\,387(9) + 28\,640 = 9\,774 \text{ psi}\end{aligned} \tag{b}$$

$$\begin{aligned}\tau_{i_2} &\cong -2.987C^3 + 139.7C^2 - 3\,427C + 38\,404 \\ &= -2.987(9)^3 + 139.7(9)^2 - 3\,427(9) + 38\,404 = 16\,699 \text{ psi}\end{aligned} \tag{c}$$

$$\tau_i \cong \frac{\tau_{i_1} + \tau_{i_2}}{2} = \frac{9\,774 + 16\,699}{2} = 13\,237 \text{ psi} \tag{d}$$

3. Obtenga el factor de cortante directo:

$$K_s = 1 + \frac{0.5}{C} = 1 + \frac{0.5}{9} = 1.06 \tag{e}$$

4. Sustituya el K_s del paso 3 y el valor de τ_i de la ecuación (d) del paso 2 para obtener $\tau_{máx}$, con la ecuación 10.8b (p. 660) y calcular la fuerza de tensión inicial F_i en la espira:

$$F_i = \frac{\pi d^3 \tau_i}{8K_s D} = \frac{\pi(0.177)^3(13\,237)}{8(1.06)(1.59)} = 17.1 \text{ lb} \tag{f}$$

Verifique que esta fuerza sea menor que la fuerza aplicada mínima requerida $F_{mín}$, la cual en este caso lo es. Cualquier fuerza aplicada menor que F_i no flexionará el resorte.

5. Determine las fuerzas media y alternante con la ecuación 10.16*a* (p. 674):

$$F_a = \frac{F_{máx} - F_{mín}}{2} = \frac{85 - 50}{2} = 17.5 \text{ lb}$$
$$F_m = \frac{F_{máx} + F_{mín}}{2} = \frac{85 + 50}{2} = 67.5 \text{ lb} \qquad (g)$$

6. Utilice el factor K_s de cortante directo y los valores supuestos previamente para calcular el esfuerzo medio* τ_m:

$$\tau_m = K_s \frac{8F_m D}{\pi d^3} = 1.06 \frac{8(67.5)(1.59)}{\pi(0.177)^3} = 52\,122 \text{ psi} \qquad (h)$$

7. Obtenga el factor de Wahl K_w y utilícelo para calcular el esfuerzo cortante alternante τ_a en la espira.

$$K_w = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0.615}{C} = \frac{4(9) - 1}{4(9) - 4} + \frac{0.615}{9} = 1.16 \qquad (i)$$

$$\tau_a = K_w \frac{8F_a D}{\pi d^3} = 1.16 \frac{8(17.5)(1.59)}{\pi(0.177)^3} = 14\,877 \text{ psi} \qquad (j)$$

8. Determine la resistencia última a la tensión para este alambre musical, con la ecuación 10.3 y la tabla 10-4 (p. 654). Úsela para obtener la resistencia última cortante con la ecuación 10.4 y la resistencia de fluencia a la torsión para la espiral en la tabla 10-12, suponiendo que no existe remoción de asentamiento.

$$S_{ut} = Ad^b = 184\,649(0.177)^{-0.1625} = 244\,633 \text{ psi}$$
$$S_{us} = 0.667 S_{ut} = 163\,918 \text{ psi} \qquad (k)$$

$$S_{ys} = 0.45 S_{ut} = 0.45(244\,633) = 110\,094 \text{ psi} \qquad (l)$$

9. Calcule la resistencia límite del alambre para resortes sin granallado de partículas, con la ecuación 10.14 (p. 667), y conviértala a resistencia física de ciclo invertido con la ecuación 10.18*b* (p. 676).

$$S_{ew} = 45\,000 \text{ psi} \qquad (m)$$

$$S_{es} = 0.5 \frac{S_{ew} S_{us}}{S_{us} - 0.5 S_{ew}} = 0.5 \frac{45\,000(163\,918)}{163\,918 - 0.5(45\,000)} = 26\,080 \text{ psi} \qquad (n)$$

10. El factor de seguridad contra la fatiga para las espiras en torsión se calcula con la ecuación 10.18*a* (p. 676).

$$C_1 = \frac{2R_1}{d} = \frac{2D}{2d} = C = 9$$
$$K_b = \frac{4C_1^2 - C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} = \frac{4(9)^2 - (9) - 1}{4(9)(9 - 1)} = 1.09 \qquad (p)$$

Observe que en este cálculo se utiliza el esfuerzo mínimo debido a la fuerza $F_{mín}$, **no** el esfuerzo de enrollamiento de la espira de la ecuación (*d*).

10

* Se emplea el factor K_s de cortante directo, en lugar del factor de Wahl, para el cálculo del esfuerzo medio, porque el factor de concentración de esfuerzos se considera igual a 1 para el esfuerzo medio.

11. Se necesita calcular también los esfuerzos en los ganchos de los extremos. Los esfuerzos de flexión en el gancho se obtienen con la ecuación 10.24 (p. 685):

$$C_1 = \frac{2R_1}{d} = \frac{2D}{2d} = C = 9$$

$$K_b = \frac{4C_1^2 - C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} = \frac{4(9)^2 - (9) - 1}{4(9)(9-1)} = 1.09 \qquad (p)$$

$$\sigma_a = K_b \frac{16DF_a}{\pi d^3} + \frac{4F_a}{\pi d^2} = 1.09 \frac{16(1.59)(17.5)}{\pi(0.177)^3} + \frac{4(17.5)}{\pi(0.177)^2} = 28\,626 \text{ psi}$$

$$(q)$$

$$\sigma_m = K_b \frac{16DF_m}{\pi d^3} + \frac{4F_m}{\pi d^2} = 1.09 \frac{16(1.59)(67.5)}{\pi(0.177)^3} + \frac{4(67.5)}{\pi(0.177)^2} = 110\,416 \text{ psi}$$

$$\sigma_{mín} = K_b \frac{16DF_{mín}}{\pi d^3} + \frac{4F_{mín}}{\pi d^2} = 1.09 \frac{16(1.59)(50)}{\pi(0.177)^3} + \frac{4(50)}{\pi(0.177)^2} = 81\,790 \text{ psi} \qquad (r)$$

12. Con la ecuación 10.4 (p. 655), convierta la resistencia a la fatiga por torsión en resistencia física a la tensión, y luego úsela junto con la resistencia última a la tensión del paso 8 en la ecuación 10.18 (p. 676) para determinar el factor de seguridad a la fatiga para el gancho en flexión:

$$S_e = \frac{S_{es}}{0.67} = \frac{26\,080}{0.67} = 38\,925 \text{ psi}$$

$$N_{f_b} = \frac{S_e(S_{ut} - \sigma_{mín})}{S_e(\sigma_{med} - \sigma_{mín}) + S_{ut}\sigma_{alt}}$$

$$= \frac{38\,925(244\,633 - 81\,790)}{38\,925(110\,416 - 81\,790) + 244\,633(28\,626)} = 0.78 \qquad (s)$$

10

13. Los esfuerzos de torsión en el gancho se obtienen con la ecuación 10.25 (p. 685) utilizando un valor supuesto de $C_2 = 5$.

$$R_2 = \frac{C_2 d}{2} = \frac{5(0.177)}{2} = 0.44 \text{ in}$$

$$K_{w_2} = \frac{4C_2 - 1}{4C_2 - 4} = \frac{4(5) - 1}{4(5) - 4} = 1.2 \qquad (t)$$

$$\tau_{B_a} = K_{w_2} \frac{8DF_a}{\pi d^3} = 1.19 \frac{8(1.59)17.5}{\pi(0.177)^3} = 15\,202 \text{ psi}$$

$$\tau_{B_m} = K_{w_2} \frac{8DF_m}{\pi d^3} = 1.19 \frac{8(1.59)67.5}{\pi(0.177)^3} = 58\,637 \text{ psi} \qquad (u)$$

$$\tau_{B_{mín}} = K_{w_2} \frac{8DF_{mín}}{\pi d^3} = 1.19 \frac{8(1.59)50}{\pi(0.177)^3} = 43\,435 \text{ psi}$$

14. El factor de seguridad contra la fatiga por torsión en el gancho se calcula con la ecuación 10.18*a* (p. 676).

$$N_{f_s} = \frac{S_{es}(S_{us} - \tau_{\text{mín}})}{S_{es}(\tau_m - \tau_{\text{mín}}) + S_{us}\tau_a}$$

$$= \frac{26\,080(163\,918 - 43\,435)}{26\,080(58\,637 - 43\,435) + 163\,918(15\,202)} = 1.1 \qquad (v)$$

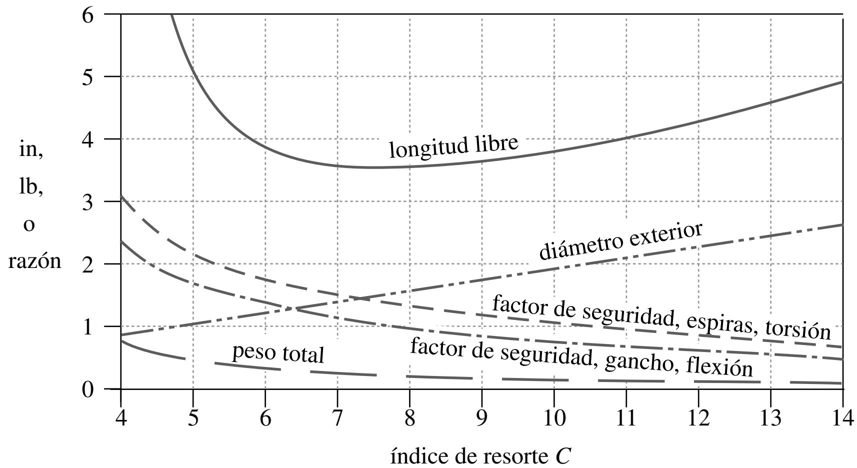


FIGURA 10-24

Variación de parámetros de un resorte helicoidal de extensión con el índice de resorte; diámetro del alambre constante

15. Uno de estos factores de seguridad es menor que 1, haciendo esto un diseño inviable. Para tener una idea de lo que se debe cambiar para mejorarlo, se resolvió el modelo para una lista de valores del índice del resorte de 4 a 14, manteniendo todos los otros parámetros como se definió anteriormente. Los valores resultantes del diámetro de la espiral, la longitud libre, el peso del resorte y el factor de seguridad contra la fatiga están graficados en la figura 10-24.

    Los factores de seguridad disminuyen con el incremento del índice de resorte, de modo que una reducción en el valor asumido de C mejorará el diseño, incluso sin cambiar el diámetro del alambre. Note, sin embargo, que la longitud libre del resorte muestra un valor mínimo con un índice de resorte de aproximadamente 7.5. El diámetro de la espira crece linealmente con el índice de resorte para un diámetro constante del alambre. El peso del resorte disminuye con el incremento del índice de resorte.

    Si se disminuye el índice de resorte de 9 a 7.5 y se incrementa el diámetro del alambre a un tamaño de 0.192 in, manteniendo los otros parámetros iguales, se obtendrá un diseño aceptable en este caso con el $N_f = 1.2$ menor para el gancho en flexión.

16. La tabla 10-14 muestra los resultados completos de este nuevo diseño. Un resumen del nuevo diseño es:

$$\begin{array}{llll} C = 7.5 & D = 1.44 \text{ in} & K_w = 1.20 & K_s = 1.07 \\ \tau_i = 15\,481 \text{ psi} & \tau_{mín} = 27\,631 \text{ psi} & \tau_a = 10\,856 \text{ psi} & \tau_m = 37\,302 \text{ psi} \\ N_{s_{espira}} = 2.3 & N_{f_{s_{espira}}} = 1.8 & N_{f_{s_{gancho}}} = 1.7 & N_{f_{b_{gancho}}} = 1.2 \end{array} \qquad (w)$$

    El diseño del resorte se completa ahora con base en el nuevo diámetro del alambre y el índice del resorte, a partir del paso 15.

17. La constante de resorte se define con las dos fuerzas especificadas en su deflexión relativa.

$$k = \frac{\Delta F}{y} = \frac{85 - 50}{0.5} = 70 \text{ lb/in} \qquad (x)$$

18. Para obtener la constante del resorte definida, el número de espiras activas debe satisfacer la ecuación 10.7 (p. 659):

Tabla 10-14a Parte 1 de 2 **Ejemplo 10-5, diseño de un resorte helicoidal de extensión para cargas cíclicas**

Entrada	Variable	Salida	Unidad	Comentarios
500	*fn*		rpm	frecuencia de excitación
7.50	*C*			índice de resorte de prueba
0.192	*d*		in	diámetro de prueba del alambre (lista de funciones)
0.50	*y*		in	rango de la deflexión para Fmín y Fmáx
	ymáx	0.81	in	deflexión máxima con Fmáx
	ymín	0.31	in	deflexión mínima con Fmín
'music	*matl*			'musical, 'revenido en aceite, 'endurecido forjado, etc.
85	*Fmáx*		lb	fuerza máxima aplicada
50	*Fmín*		lb	fuerza mínima aplicada
	Finic	28.01	lb	fuerza de tensión inicial
	Fbaja	50.00	lb	fuerza más baja aplicada sobre el resorte
	Falt	17.50	lb	fuerza alternante
	Fmed	67.50	lb	fuerza media
	k	70.70	lb/in	constante de resorte con N_a redondeado
	N	9.35		núm. de espiras activas, exactas
	Na	9.25		núm. de espiras activas, 1/4 de la espira más próxima
	Ntot	10.25		núm. total de espiras
	D	1.44	in	diámetro medio de la espiral
	Dext	1.63	in	diámetro exterior de la espiral
	Din	1.25	in	diámetro interior de la espiral
	Ks	1.07		factor estático, ec. 9.8
	Kw	1.20		factor de Wahl, ec. 9.9
	tauinic	15 481	psi	esfuerzo cortante con tensión inicial
	taumín	27 631	psi	esfuerzo cortante con Fmín
	taumáx	46 973	psi	esfuerzo cortante con Fmáx
	taualt	10 856	psi	esfuerzo cortante alternante por fatiga
	taumed	37 302	psi	esfuerzo cortante medio por fatiga
	Sut	241 441	psi	resistencia a la tensión, ec. 9.3 y tabla 9-4
	Sus	161 765	psi	resistencia última cortante, ec. 9.4
	Ssy	108 648	psi	fluencia al cortante con base en la tabla 9-10
	Ssyh	96 576	psi	fluencia al cortante en el gancho, tabla 9-10
	Sew	45 000	psi	resistencia límite del alambre, ec. 9.12
	Ses	26 135	psi	resist. lím. de ciclo invertido, ec. 9.16*b*
	Sy	181 081	psi	resistencia a la fluencia por flexión
	Se	39 008	psi	resistencia límite a la fatiga en tensión

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} \quad \text{o bien,} \quad N_a = \frac{d^4 G}{8D^3 k} = \frac{(0.192)^4 11.5E6}{8(1.44)^3 (70)} = 9.35 \cong 9\frac{1}{4} \tag{y}$$

Tabla 10-14b Parte 2 de 2 **Ejemplo 10-5, diseño de un resorte helicoidal de extensión para cargas cíclicas**

Entrada	Variable	Salida	Unidad	Comentarios
	N_f	1.8		Fac. de seg. de las espiras, fatiga, ec. 9.14
	N_s	2.3		Fac. de seg. de las espiras. Carga estática con Fmáx
	N_{fht}	1.7		Fac. de seg. del gancho, fatiga por torsión
	N_{sht}	1.8		Fac. de seg. del gancho, fluencia por torsión
	N_{fhs}	1.2		Fac. de seg. del gancho, fatiga por flexión
	N_{shs}	1.8		Fac. de seg. del gancho, fluencia por flexión
	L_{espira}	1.97	in	longitud de la espira
	gancho1	1.25	in	longitud del gancho en un extremo
	gancho2	1.25	in	longitud del gancho en el otro extremo
	L_f	4.46	in	longitud libre en el interior de los ganchos
	W_{total}	0.38	lb	peso total de las espiras, ec. 9.11*b*
	n_f	140.7	Hz	frecuencia natural en Hz
	c_{rpm}	8 440	rpm	frecuencia natural en rpm
	FrecFac	16.9		razón, frec. natural y frec. forzada
5.00	C_2			debería ser > 4
	R_2	0.48	in	radio del lado doblado en la raíz del gancho
	K_{gancho}	1.19		Factor *K* del gancho en torsión
	$t_{ganchomáx}$	52 294	psi	esfuerzo de torsión máximo en el gancho
	$t_{ganchomín}$	30 761	psi	esfuerzo de torsión mínimo en el gancho
	$t_{ganchoalt}$	10 766	psi	esfuerzo de torsión alternante en el gancho
	$t_{ganchomed}$	41 528	psi	esfuerzo de torsión medio en el gancho
	C_1	7.50		índice de resorte para el gancho

Observe que se redondea al 1/4 de espira más cercano, en vista de que la tolerancia de manufactura no tiene una mayor precisión, lo cual hace a la constante del resorte $k = 70.7$ lb/in.

19. El número total de espiras en la espiral y la longitud de la espiral son

$$\begin{aligned} N_t &= N_a + 1 = 9.25 + 1 = 10.25 \\ L_b &= N_t d = 10.25(0.192) = 1.97 \text{ in} \end{aligned} \tag{z}$$

20. Ahora se determina la longitud libre. La longitud de un gancho estándar es igual al diámetro interno de la espira:

$$L_f = L_b + 2L_{gancho} = 1.97 + 2(1.25) = 4.46 \tag{aa}$$

21. La deflexión para alcanzar la mayor de las dos cargas especificadas es

$$y_{máx} = \frac{F_{máx} - F_{inicial}}{k} = \frac{85 - 28}{70.7} = 0.81 \text{ in} \tag{ab}$$

22. La frecuencia natural de este resorte se obtiene con la ecuación 10.26 (p. 685) y es

$$f_n = \frac{2}{\pi N_a}\frac{d}{D^2}\sqrt{\frac{Gg}{32\gamma}} = \frac{2(0.192)}{\pi(9.25)(1.44)^2}\sqrt{\frac{11.5E6(386)}{32(0.285)}} = 140.6 \text{ Hz} = 8\,436 \text{ rpm} \qquad (ac)$$

La razón entre la frecuencia natural y la frecuencia forzada es

$$\frac{8\,440}{500} = 16.9 \qquad (ad)$$

la cual es lo suficientemente alta.

23. La especificación de diseño de este resorte de alambre A228 es

$$d = 0.192 \text{ in} \qquad OD = 1.63 \text{ in} \qquad N_t = 10.25 \qquad L_f = 4.46 \qquad (ae)$$

24. Los resultados se muestran en la tabla 10-14. Los archivos EX14-05 se encuentran en el CD-ROM. Existen también enfoques alternos para la solución de este ejemplo mostrados por separado en Mathcad y TKSolver en el CD-ROM, con una letra agregada a su nombre.

10.8 RESORTES HELICOIDALES DE TORSIÓN

Un resorte helicoidal enredado se puede cargar a la torsión, en vez de a la compresión o la tensión, y recibe el nombre de **resorte de torsión**. Los extremos de la espiral se extienden tangencialmente para proveer brazos sobre los cuales se aplica el momento de carga, como se indica en la figura 10-25. Los extremos de la espira son de varias formas para ajustarse a la aplicación. Las espiras normalmente están enredadas estrechamente como un resorte de extensión, aunque no tienen tensión inicial. Las espiras también se enrollan espaciadas como un resorte de compresión, lo cual elimina la fricción entre las espiras. Sin embargo, la mayoría de los resortes de torsión están enrollados estrechamente.

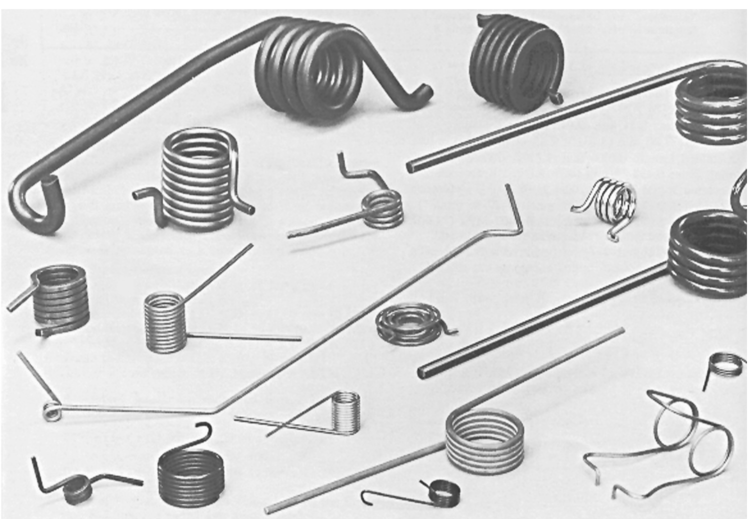
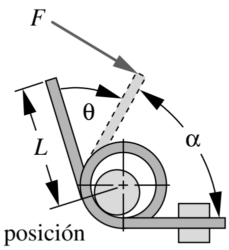
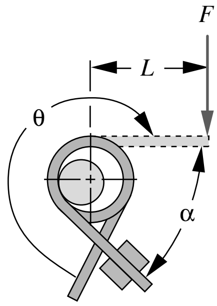


FIGURA 10-25

Existen varios detalles de extremos en resortes helicoidales de torsión *Cortesía de Associated Spring, Barnes Group Inc., Bristol, Conn.*





especifique:
α—ángulo entre los extremos
F—carga sobre los extremos en α
L—brazo del momento
θ—deflexión angular en posición libre

FIGURA 10-26

Especificación de la carga y requerimientos de deflexión para resortes de torsión
Fuente: referencia 1

El momento aplicado sobre las espiras pone al alambre en flexión como una viga curva, como se ilustra en la figura 10-26. El momento aplicado siempre debería estar configurado para cerrar las espiras en lugar de abrirlas, porque los esfuerzos residuales del enrollado de las espiras son favorables al momento de cierre. El momento aplicado nunca tiene que invertirse durante el servicio. Las cargas dinámicas deben ser repetidas o variables con una razón de esfuerzo $R \geq 0$.

Se debe dar soporte radial en tres o más puntos sobre el diámetro de la espiral, para obtener las fuerzas de reacción. Este soporte normalmente tiene lugar por medio de una varilla colocada en el interior de la espiral. La varilla no debería tener un diámetro mayor del 90% del diámetro interior más pequeño de la espira cuando se "enrolla" bajo carga, con la finalidad de evitar que se trabe.

Las especificaciones de manufactura de un resorte de torsión tienen que definir los parámetros indicados en la figura 10-26, así como el diámetro del alambre, el diámetro exterior de la espira, el número de espiras y la constante del resorte. La carga se debe definir en un ángulo α entre los extremos tangenciales en posición de carga, en vez de la deflexión en posición libre.

Puesto que la carga es de flexión, el alambre rectangular es más eficiente en términos de rigidez por unidad de volumen (mayor I para la misma dimensión). Sin embargo, la mayoría de los resortes helicoidales de torsión se fabrican con alambre redondo simplemente por su menor costo, así como por su mayor variedad en tamaños y materiales comerciales disponibles.

Terminología de los resortes de torsión

10

Los siguientes parámetros tienen el mismo significado para los resortes de torsión y los resortes helicoidales de compresión: diámetro medio D de la espiral, diámetro d del alambre, índice C del resorte, diámetro exterior D_o, diámetro interior D_i y número de espiras activas N_a. La constante de resorte k se expresa como momento por unidad de deflexión angular.

Número de espiras en resortes de torsión

Las espiras activas son iguales al número de vueltas N_b en la espiral, más alguna contribución de los extremos, los cuales también son curvos. Para extremos rectos, la contribución se expresa como el número equivalente de espiras N_e:

$$N_e = \frac{L_1 + L_2}{3\pi D} \tag{10.27a}$$

donde L_1 y L_2 son las longitudes respectivas de los extremos tangentes de la espira. El número de espiras activas es entonces

$$N_a = N_b + N_e \tag{10.27b}$$

donde N_b es el número de espiras en el cuerpo del resorte.

Deflexión en resortes de torsión

La deflexión angular en el extremo de la espira generalmente se expresa en radianes; no obstante, con frecuencia se convierte a revoluciones. Se usarán revoluciones. Como se trata esencialmente de una viga curva en flexión, la deflexión (angular) se expresa como

$$\theta_{rev} = \frac{1}{2\pi}\theta_{rad} = \frac{1}{2\pi}\frac{ML_w}{EI} \tag{10.28a}$$

donde M es el momento aplicado, L_w es la longitud del alambre, E es el módulo de Young del material e I es el segundo momento de área de la sección transversal del alambre en relación con el eje neutro.

Para torsión en resortes de alambre redondo, se sustituye la geometría adecuada para obtener

$$\theta_{rev} = \frac{ML_w}{EI} = \frac{1}{2\pi}\frac{M(\pi DN_a)}{E(\pi d^4/64)}$$
$$= \frac{64}{2\pi}\frac{MDN_a}{d^4E} \tag{10.28b}$$
$$\theta_{rev} \cong 10.2\frac{MDN_a}{d^4E}$$

Con base en la experiencia, el factor 10.2 generalmente se incrementa a 10.8 para tomar en cuenta la fricción entre las espiras; entonces, la ecuación se convierte en[1]

$$\theta_{rev} \cong 10.8\frac{MDN_a}{d^4E} \tag{10.28c}$$

Constante de resorte en resortes de torsión

La constante de resorte se obtiene siempre a partir de la fórmula de la deflexión:

$$k = \frac{M}{\theta_{rev}} \cong \frac{d^4E}{10.8DN_a} \tag{10.29}$$

Cierre de la espira

Cuando un resorte de torsión se carga para cerrar las espiras (como debería ser), el diámetro de la espiral decrece y su longitud se incrementa conforme la espira se “enrolla”. El diámetro interior mínimo de la espira con deflexión total es

$$D_{i_{mín}} = \frac{DN_b}{N_b + \theta_{rev}} - d \tag{10.30}$$

donde D es el diámetro medio de la espira sin carga. Cualquier perno que la espiral tenga en su interior está limitado al 90% de este diámetro interior mínimo.

La longitud máxima del cuerpo de la espiral con “enrollamiento” completo es:

$$L_{máx} = d(N_b + 1 + \theta) \tag{10.31}$$

Esfuerzos en la espira de resortes de torsión

El esfuerzo en la fibra exterior de una viga recta es $M\,c\,/\,I$, pero aquí se trata de una viga curva; en la sección 2.9 (p. 84) se aprendió que en una viga curva el esfuerzo se concentra en su interior. Wahl[3] dedujo el factor de concentración de esfuerzos de flexión en el interior de un alambre redondo enrollado como

$$K_{b_i} = \frac{4C^2 - C - 1}{4C(C-1)} \tag{10.32a}$$

y en la parte exterior de la espira

$$K_{b_o} = \frac{4C^2 + C - 1}{4C(C+1)} \tag{10.32b}$$

donde C es el índice de resorte.

El esfuerzo máximo de flexión por compresión, en el diámetro interior de la espira de un resorte helicoidal de torsión con alambre redondo (cargado para cerrar sus espiras), es entonces

$$\sigma_{i_{máx}} = K_{b_i} \frac{M_{máx} c}{I} = K_{b_i} \frac{M_{máx}(d/2)}{\pi d^4/64} = K_{b_i} \frac{32 M_{máx}}{\pi d^3} \tag{10.33a}$$

en tanto las componentes del esfuerzo de tensión por flexión en el diámetro exterior de la espiral son

$$\sigma_{o_{mín}} = K_{b_o} \frac{32 M_{mín}}{\pi d^3}; \qquad \sigma_{o_{máx}} = K_{b_o} \frac{32 M_{máx}}{\pi d^3} \tag{10.33b}$$

$$\sigma_{o_{medio}} = \frac{\sigma_{o_{máx}} + \sigma_{o_{mín}}}{2}; \qquad \sigma_{o_{alt}} = \frac{\sigma_{o_{máx}} - \sigma_{o_{mín}}}{2} \tag{10.33c}$$

10

Observe que para falla (fluencia) estática de un resorte de torsión cargado para cerrar sus espiras, el mayor esfuerzo de compresión $\sigma_{imáx}$, en el interior de la espira, es de la mayor relevancia, pero para falla por fatiga, la cual es un fenómeno de esfuerzos de tensión, por lo que el esfuerzo ligeramente menor de máxima tensión en el exterior de las espiras es el importante. Por lo tanto, las componentes de esfuerzo alternante y medio se calculan en el exterior de la espira. Si el resorte se carga para abrir las espiras (lo que no se recomienda), debe liberarse de esfuerzos para eliminar los esfuerzos residuales del enrollado y, luego, se debe utilizar el esfuerzo en el interior de la espira para calcular las componentes para la determinación del factor de seguridad contra la fatiga.

Parámetros del material para resortes de torsión

En esta instancia se necesitan las resistencias límite a la fatiga y de fluencia. La tabla 10-15 presenta las resistencias a la fluencia sugeridas para varios materiales de alambre, como un porcentaje de su resistencia última a la tensión. Observe que los esfuerzos residuales favorables permiten que la resistencia última del material se utilice como criterio de fluencia en algunos casos. La tabla 10-16 muestra los porcentajes de resistencia a la fatiga por flexión de varios alambres en 10^5 y 10^6 ciclos, para estados con granallado y sin granallado de partículas. Se aplican las mismas limitaciones para el granallado de partículas efectivo en resortes de torsión enrollados estrechamente que para los resortes de extensión, ya que las espiras espaciadas estrechamente evitan que los disparos impacten el diámetro interior de la espiral. El granallado con partículas no es efectivo en muchos resortes de torsión.

Los datos de límite de resistencia a la fatiga por torsión para resortes helicoidales de compresión, mostrados en la ecuación 10.13 (p. 666), se adaptan para flexión mediante la relación entre la carga de torsión y de tensión de Von Mises.

$$S_{ew'_b} = \frac{S_{ew'}}{0.577} \tag{10.34a}$$

Tabla 10-15 Resistencia máxima a la fluencia por flexión S_y, recomendada para resortes helicoidales de torsión en aplicaciones estáticas

Fuente: Adaptado de la referencia 1

Material	Porcentaje máximo de resistencia última a la tensión	
	Esfuerzo eliminado	Esfuerzo residual favorable
Acero al carbono forjado en frío (p. ej., A227, A228)	80%	100%
Acero al carbono endurecido y revenido, (y aleación de acero al bajo carbono revenido y endurecido (p. ej., A229, A230, A232, A401)	85	100
Acero inoxidable austenítico y aleaciones no ferrosas (p. ej., A313, B134, B159, B197)	60	80

lo cual da

$$S_{ew_b'} \cong \frac{45.0}{0.577} = 78 \text{ kpsi} \quad (537 \text{ MPa}) \quad \text{para resortes no granallados}$$

$$S_{ew_b'} \cong \frac{67.5}{0.577} = 117 \text{ kpsi} \quad (806 \text{ MPa}) \quad \text{para resortes granallados} \tag{10.34b}$$

Factores de seguridad para resortes de torsión

La falla por fluencia se anticipa en el interior de la superficie de la espira, mientras el factor de seguridad se determina mediante

$$N_y = \frac{S_y}{\sigma_{i_{máx}}} \tag{10.35a}$$

Observe que los datos disponibles de resistencia y de fatiga son para escenarios de esfuerzo repetido (componentes media y alternante iguales); por consiguiente, se deben convertir a valores de ciclo invertido antes de calcular el factor de seguridad contra la fatiga con las ecuaciones 10.17. Puesto que la notación para la flexión es ligeramente diferente, se repiten aquí las ecuaciones 10.17, con las sustituciones adecuadas de variables para el caso de resortes de torsión.

$$N_{f_b} = \frac{S_e\left(S_{ut} - \sigma_{o_{mín}}\right)}{S_e\left(\sigma_{o_{medio}} - \sigma_{o_{mín}}\right) + S_{ut}\sigma_{o_{alt}}} \tag{10.35b}$$

Tabla 10-16 Resistencia máxima a la fatiga por flexión S_{fw}', recomendada para resortes helicoidales de torsión en aplicaciones cíclicas (razón de esfuerzo, R = 0)

Esfuerzos eliminados, sin oscilaciones; el granallado con partículas no es posible en todos los casos. Fuente: Referencia 1

Vida de fatiga (ciclos)	Porcentaje de resistencia última a la tensión			
	Acero inoxidable ASTM A228 o 302		ASTM A230 y A232	
	Sin granallado de partículas	Con granallado de partículas	Sin granallado de partículas	Con granallado de partículas
10^5	53%	62%	55%	64%
10^6	50	60	53	62

10

$$S_e = 0.5\frac{S_{ew_b} S_{ut}}{S_{ut} - 0.5 S_{ew_b}} \tag{10.35c}$$

Diseño de resortes helicoidales de torsión

El proceso de diseño de resortes helicoidales de torsión es muy similar al de resortes helicoidales de compresión. El mejor modo de ilustrarlo es con un ejemplo.

EJEMPLO 10-6

Diseño de un resorte helicoidal de torsión para carga cíclica

Problema **Diseñe un resorte de torsión para carga dinámica con una deflexión determinada.**

Se proporciona **El resorte debe dar un momento mínimo de 50 lb-in y un momento máximo de 80 lb-in con una deflexión dinámica de 0.25 revoluciones (90°). Se desea vida infinita.**

Suposiciones **Emplee alambre musical (ASTM A228) sin granallado de partículas. Use extremos tangentes rectos de 2 in de longitud. La espiral se carga para cerrarla.**

Solución **Véase la figura 10-27.**

1. Intente con un diámetro del alambre de 0.192 in de los tamaños disponibles en la tabla 10-2 (p. 653). Suponga un índice de resorte C = 9 y úselo para calcular el diámetro medio D de la espira con la ecuación 10.5 (p. 659).

$$D = Cd = 9(0.192) = 1.73 \text{ in} \tag{a}$$

2. Obtenga los momentos medio y alternante:

$$M_m = \frac{M_{máx} + M_{mín}}{2} = \frac{80 + 50}{2} = 65 \text{ lb}$$
$$M_a = \frac{M_{máx} - M_{mín}}{2} = \frac{80 - 50}{2} = 15 \text{ lb} \tag{b}$$

3. Determine el factor de flexión de Wahl K_{b_i} para la superficie interior, luego úselo para calcular el esfuerzo de compresión máximo en la superficie interior de la espira.

$$K_{b_i} = \frac{4C^2 - C - 1}{4C(C-1)} = \frac{4(9)^2 - 9 - 1}{4(9)(9-1)} = 1.090 \tag{c}$$

$$\sigma_{i_{máx}} = K_{b_i}\frac{32 M_{máx}}{\pi d^3} = 1.09\frac{32(80)}{\pi(0.192)^3} = 125\,523 \text{ psi} \tag{d}$$

4. Calcule el factor de flexión de Wahl K_{b_o} para la superficie exterior y calcule los esfuerzos máximo, mínimo, alternante y medio de tensión en la superficie exterior de la espira.

$$K_{b_o} = \frac{4C^2 + C - 1}{4C(C+1)} = \frac{4(9)^2 + 9 - 1}{4(9)(9+1)} = 0.9222 \tag{e}$$

$$\sigma_{o_{mín}} = K_{b_o} \frac{32 M_{mín}}{\pi d^3} = 0.9222 \frac{32(50)}{\pi(0.192)^3} = 66\,359 \text{ psi}$$

$$\sigma_{o_{máx}} = K_{b_o} \frac{32 M_{máx}}{\pi d^3} = 0.9222 \frac{32(80)}{\pi(0.192)^3} = 106\,175 \text{ psi} \qquad (f)$$

$$\sigma_{o_{medio}} = \frac{\sigma_{o_{máx}} + \sigma_{o_{mín}}}{2} = \frac{66\,359 + 106\,175}{2} = 86\,267$$

$$\sigma_{o_{alt}} = \frac{\sigma_{o_{máx}} - \sigma_{o_{mín}}}{2} = \frac{66\,359 - 106\,175}{2} = 19\,908 \qquad (g)$$

5. Obtenga la resistencia última a la tensión de este alambre musical con la ecuación 10.3 y la tabla 10-4 (p. 654), y luego úsela para obtener la resistencia de fluencia por flexión en el cuerpo de la espira en la tabla 10-15, suponiendo que no se han mitigado los esfuerzos.

$$S_{ut} = Ad^b = 184\,649(0.192)^{-0.1625} = 241\,441 \text{ psi} \qquad (h)$$

$$S_y = 1.0 S_{ut} = 241\,441 \text{ psi} \qquad (i)$$

6. Determine la resistencia límite a la fatiga por flexión del alambre, para resortes no granallados con partículas, usando la ecuación 10.34, y conviértala a resistencia a la fatiga por flexión totalmente invertido, con la ecuación 10.35*b*.

$$S_{ew_b'} \cong \frac{45\,000}{0.577} = 77\,990 \text{ psi} \qquad (j)$$

$$S_e = 0.5 \frac{S_{ew_b} S_{ut}}{S_{ut} - 0.5 S_{ew_b}} = 0.5 \frac{77\,990(241\,441)}{241\,441 - 0.5(77\,990)} = 46\,506 \text{ psi} \qquad (k)$$

7. El factor de seguridad contra la fatiga para las espiras en flexión se calcula con la ecuación 10.35*a*.

$$N_{f_b} = \frac{S_e\left(S_{ut} - \sigma_{o_{mín}}\right)}{S_e\left(\sigma_{o_{medio}} - \sigma_{o_{mín}}\right) + S_{ut}\sigma_{o_{alt}}}$$

$$= \frac{46\,506(241\,441 - 66\,359)}{46\,506(86\,267 - 66\,359) + 241\,441(19\,908)} = 1.4 \qquad (l)$$

8. El factor de seguridad estático contra la fluencia es

$$N_{y_b} = \frac{S_y}{\sigma_{i_{máx}}} = \frac{241\,441}{125\,523} = 1.9 \qquad (m)$$

Éstos son factores de seguridad aceptables.

9. La constante de resorte se define con los dos momentos especificados para su deflexión relativa.

$$k = \frac{\Delta M}{\theta} = \frac{80 - 50}{0.25} = 120 \text{ lb - in/rev} \qquad (n)$$

10. Para determinar la constante de resorte definida, el número de espiras activas debe satisfacer la ecuación 10.29:

$$k = \frac{d^4 E}{10.8 D N_a} \quad \text{o bien,} \quad N_a = \frac{d^4 E}{10.8 D k} = \frac{(0.192)^4 30E6}{10.8(1.73)(120)} = 18.2 \qquad (o)$$

10

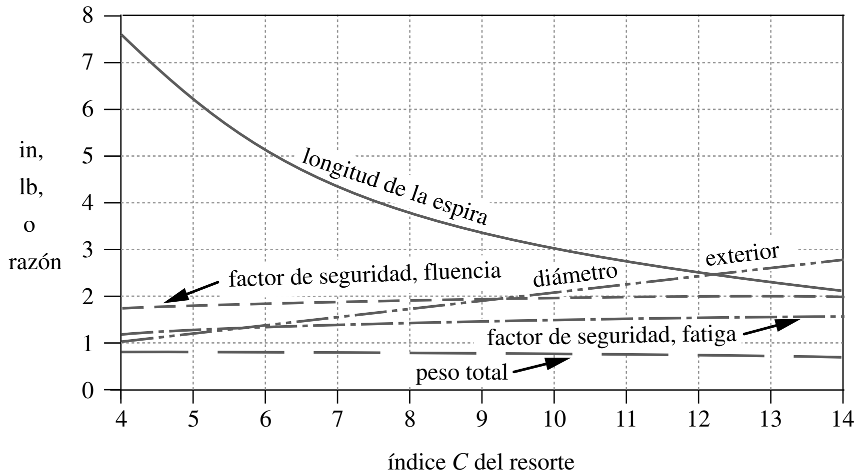


FIGURA 10-27

Variación de los parámetros de un resorte helicoidal de torsión, con el índice de resorte; diámetro del alambre constante

Los extremos contribuyen a las espiras activas como

$$N_e = \frac{L_1 + L_2}{3\pi D} = \frac{2+2}{3\pi(1.73)} = 0.25 \qquad (p)$$

mientras el número de espiras en el cuerpo del resorte es

$$N_b = N_a - N_e = 18.2 - 0.25 \cong 18 \qquad (q)$$

10

11. Las deflexiones angulares para las cargas especificadas, a partir de la ecuación 10.28*c*, son

$$\theta_{mín} \cong 10.8\frac{M_{mín} D N_a}{d^4 E} = 10.8\frac{50(1.73)(18.2)}{(0.192)^4(30E6)} = 0.417 \text{ rev} = 150 \text{ grad} \qquad (r)$$

$$\theta_{máx} \cong 10.8\frac{M_{máx} D N_a}{d^4 E} = 10.8\frac{80(1.73)(18.2)}{(0.192)^4(30E6)} = 0.667 \text{ rev} = 240 \text{ grad} \qquad (s)$$

12. Los archivos EX14-06 se encuentran en el CD-ROM.

En aras de la brevedad, se presenta tan sólo la solución exitosa del ejemplo anterior. No obstante, al igual que en los ejemplos anteriores, fue necesario iterar para lograr una solución adecuada. Los intentos en longitud de la espira, diámetro exterior, factores de seguridad estáticos y contra la fatiga, así como peso del resorte para un alambre de torsión en función de su índice de resorte, se muestran en la figura 10-27. A diferencia de los resortes de extensión y compresión, los factores de seguridad para resortes de torsión se incrementan con el índice de resorte.

10.9 ARANDELAS PARA RESORTES BELLEVILLE*

Las arandelas Belleville (llamadas también resortes de disco), patentadas en Francia por J. F. Belleville, en 1867, tienen una fuerza-deflexión no lineal característica, lo cual

* Se puede encontrar información adicional del diseño sobre arandelas Belleville en http://spirol.com

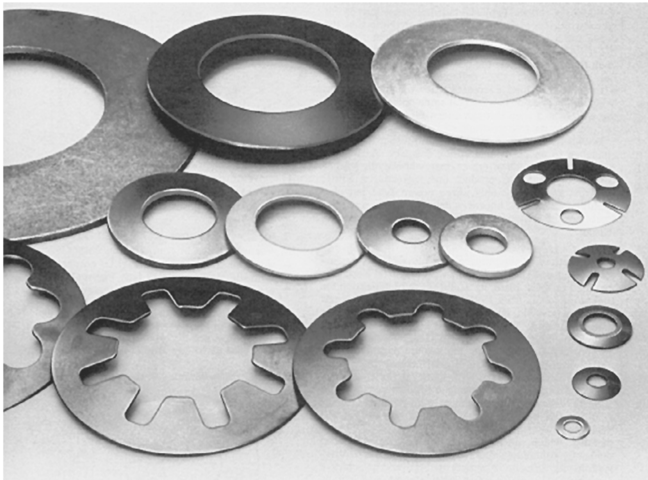


FIGURA 10-28

Arandelas Belleville comercialmente disponibles *Cortesía de Associated Spring, Barnes Group Inc., Bristol, Conn.*

las hace muy útiles en ciertas aplicaciones. En la figura 10-28 se ilustra una selección de arandelas Belleville comerciales. Su sección transversal es de forma cónica, con un espesor *t* del material y una altura interior *h* del cono, como se indica en la figura 10-29. Son extremadamente compactas y capaces de producir grandes fuerzas de empuje, pero sus deflexiones son limitadas. Si se colocan en una superficie plana, su deflexión máxima es *h*, la cual las vuelve "planas", pero se deberían operar sólo entre el 15 y el 85% de la deflexión de aplanamiento. Más adelante se mostrará cómo se flexionan más allá de la posición plana, para obtener algunos efectos interesantes. Estos resortes se usan en aplicaciones donde se necesitan cargas grandes y deflexiones pequeñas en espacios reducidos, como el formado de pernos de metal en un dado, mecanismos de rebote en armas de fuego, etcétera. Con el modo de constante de resorte igual a cero (fuerza constante), sirven para cargar embragues y sellos, los cuales necesitan carga uniforme con una pequeña deflexión.

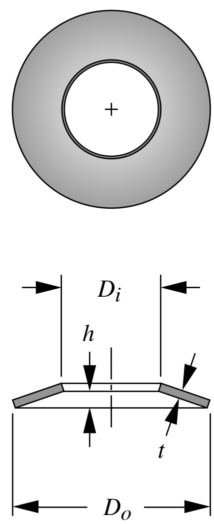


FIGURA 10-29

Arandela de resorte Belleville

La razón de D_o a D_i, conocida como R_d, afecta su comportamiento. Con un R_d aproximadamente igual a 2, el resorte desarrolla su capacidad máxima de almacenamiento de energía. Dependiendo de la razón h/t, la constante del resorte puede ser básicamente lineal, aumentar o disminuir con el incremento de la deflexión, o bien, ser básicamente constante durante una parte de la deflexión.

La figura 10-30 muestra curvas de fuerza-deflexión para arandelas Belleville con un intervalo de razones h/t de 0.4 a 2.8. Tales curvas están normalizadas en ambos ejes para la condición plana de compresión del resorte. La fuerza y deflexión se toman iguales a cero en la posición libre, como se muestra en la figura 10-29. Un 100% de deflexión representa la condición plana, en tanto que el 100% de fuerza representa la fuerza de ese resorte en condición plana. Los valores absolutos de fuerza y deflexión varían con la razón h/t, el grosor *t* y el material.

En $h/t = 0.4$, la constante del resorte se acerca a la linealidad y se asemeja a la curva de la constante de un resorte helicoidal. Conforme h/t se incrementa por arriba de 0.4, la razón se vuelve crecientemente no lineal; mientras en $h/t = 1.414$, la curva tiene una parte con valor aproximadamente constante, con centro en la posición plana. Su fuerza se desvía menos del $\pm 1\%$ del valor de la fuerza para el 100% de deflexión, en el intervalo de 80 a 120% de deflexión para aplanamiento, y se encuentra dentro de un $\pm 10\%$ en un intervalo de 55 a 145% de deflexión para aplanamiento, como se indica en la figura 10-31.

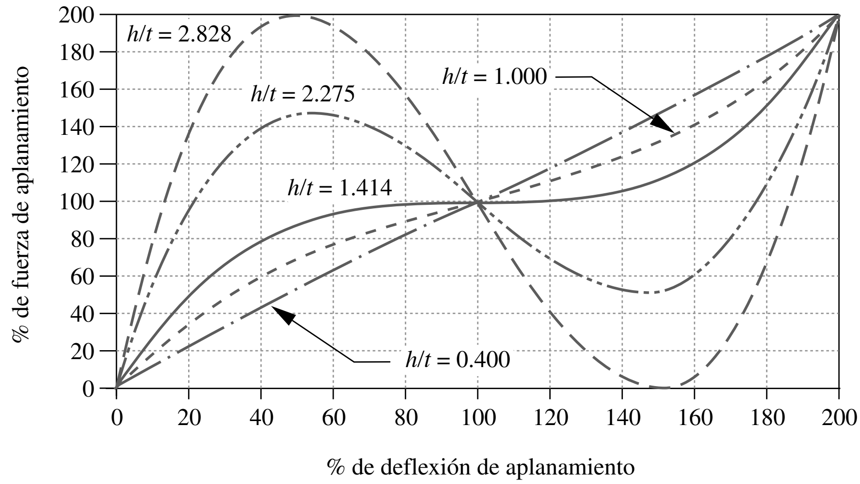


FIGURA 10-30

Fuerza-deflexión normalizadas características de resortes Belleville para varias razones *h / t*

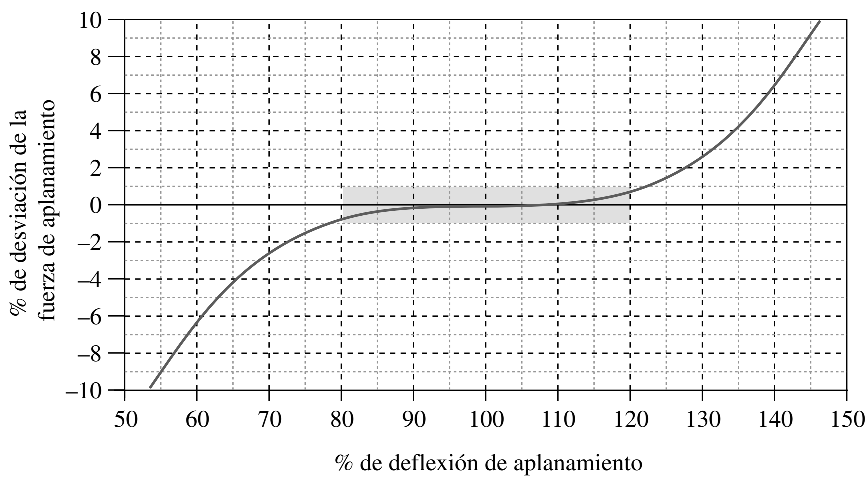
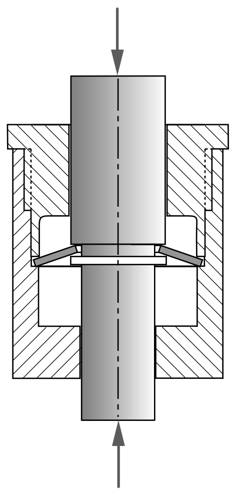
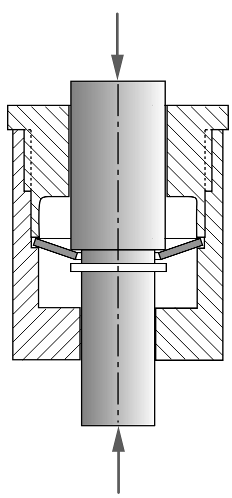


FIGURA 10-31

Porcentaje de error en un resorte Belleville de fuerza constante alrededor de su posición plana (R_d = 2.0, *h / t* = 1.414)



(a) Arandela por arriba del centro



(b) Arandela por abajo del centro

FIGURA 10-32

Montaje de una arandela de resorte Belleville para permitir la deflexión más allá de la posición plana

Para razones h/t por arriba de 1.414, la curva se vuelve bimodal. Una fuerza aplicada determinada corresponde a más de una posible deflexión. Si un resorte como éste se monta para permitirle ir más allá de la condición plana, como se muestra en la figura 10-32, se vuelve biestable, por lo que se requiere una fuerza en cada dirección para moverla después del centro. La técnica de montaje, mostrada en la figura 10-32, también es útil para los resortes con menores razones de h/t, ya que permite el doble de la deflexión potencial y puede utilizar la sección de un resorte con una razón h/t igual a 1.414 de fuerza constante.

Función carga-deflexión en arandelas Belleville

La relación carga-deflexión no es lineal, de modo que no se debería emplear como constante de resorte. Se calcula a partir de

$$F = \frac{4Ey}{K_1 D_o^2 \left(1 - \nu^2\right)} \left[(h - y)\left(h - \frac{y}{2}\right)t + t^3 \right] \tag{10.36a}$$

donde
$$K_1 = \frac{6}{\pi \ln R_d} \left[\frac{\left(R_d - 1\right)^2}{R_d^2} \right] \quad \text{y} \quad R_d = \frac{D_o}{D_i} \tag{10.36b}$$

La carga en posición plana ($y = h$) es

$$F_{plana} = \frac{4Eht^3}{K_1 D_o^2 \left(1 - \nu^2\right)} \tag{10.36c}$$

Las curvas de la figura 10-30 se generaron con estas ecuaciones.

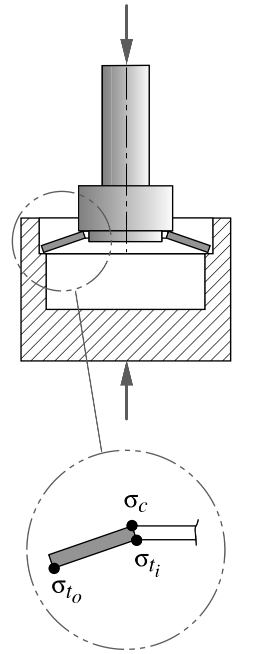


FIGURA 10-33

Puntos del esfuerzo más alto en una arandela Belleville de resorte

Esfuerzos en arandelas Belleville

Los esfuerzos no se distribuyen uniformemente sobre la arandela, sino que están concentrados en los bordes de los diámetros interiores y exteriores, como se indica en la figura 10-33. El mayor esfuerzo σ_c se presenta en el radio interior sobre el lado convexo y es de compresión. Los bordes sobre el lado cóncavo tienen esfuerzos de tensión, donde el esfuerzo σ_{t_o} en el borde externo, es generalmente más grande que el esfuerzo σ_{t_i} del borde interior. Las expresiones para los esfuerzos en las ubicaciones definidas en la figura 10-33 son

$$\sigma_c = -\frac{4Ey}{K_1 D_o^2 \left(1 - \nu^2\right)} \left[K_2 \left(h - \frac{y}{2}\right) + K_3 t \right] \tag{10.37a}$$

$$\sigma_{t_i} = \frac{4Ey}{K_1 D_o^2 \left(1 - \nu^2\right)} \left[-K_2 \left(h - \frac{y}{2}\right) + K_3 t \right] \tag{10.37b}$$

$$\sigma_{t_o} = \frac{4Ey}{K_1 D_o^2 \left(1 - \nu^2\right)} \left[K_4 \left(h - \frac{y}{2}\right) + K_5 t \right] \tag{10.37c}$$

donde
$$K_2 = \frac{6}{\pi \ln R_d} \left(\frac{R_d - 1}{\ln R_d} - 1 \right) \quad \text{y} \quad R_d = \frac{D_o}{D_i} \tag{10.37d}$$

$$K_3 = \frac{6}{\pi \ln R_d} \left(\frac{R_d - 1}{2} \right) \tag{10.37e}$$

$$K_4 = \left[\frac{R_d \ln R_d - \left(R_d - 1\right)}{\ln R_d} \right] \left[\frac{R_d}{\left(R_d - 1\right)^2} \right] \tag{10.37f}$$

$$K_5 = \frac{R_d}{2\left(R_d - 1\right)} \tag{10.37g}$$

Véase la ecuación 10.36*b* para K_1. Una variación típica de estos esfuerzos con deflexión se muestra en la figura 10-34. Las dimensiones del resorte de acero en este caso son $t = 0.012$ in, $h = 0.017$ in, $h/t = 1.414$, $D_o = 1$ in, $D_i = 0.5$ in.

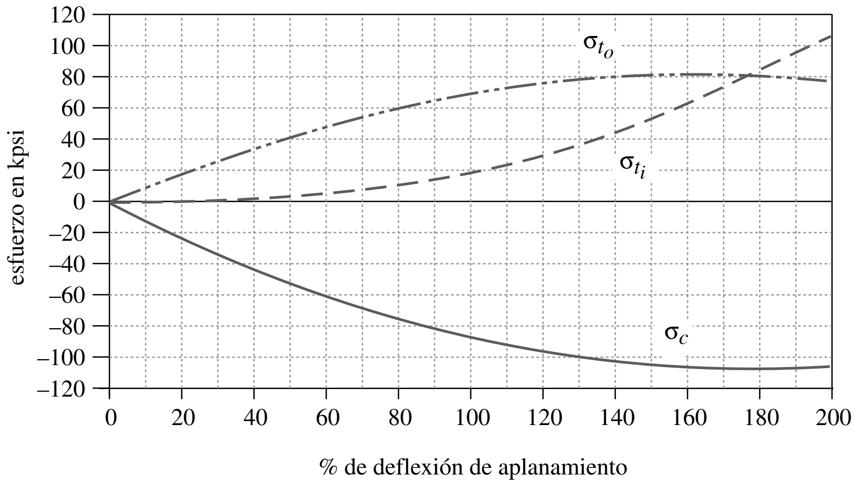


FIGURA 10-34

Esfuerzos en un resorte Belleville de acero al carbono (con $R_d = 2.0$, $h / t = 1.414$, $t = 0.012$, $h = 0.017$ in)

Carga estática en arandelas Belleville

El esfuerzo de compresión σ_c por lo general controla el diseño en carga estática, pero debido a que el esfuerzo se encuentra altamente concentrado en los bordes, ocurre una fluencia local que lo mitiga, por lo que el esfuerzo a través del resorte es menor. Como el σ_c local es mayor que el esfuerzo promedio, se puede comparar con un valor de resistencia más grande que el valor de la resistencia última a la compresión S_{uc}. Por lo tanto, en los resortes se utilizan comúnmente materiales con las mismas resistencias últimas a la tensión y a la compresión. La tabla 10-15 muestra algunos porcentajes recomendados de S_{ut} para efectos de comparación con σ_c en carga estática. Se admite que un material en general no puede soportar estos niveles de esfuerzo. Son sólo un medio para predecir la falla con base en el esfuerzo localizado σ_c. Se emplea el asentamiento (la remoción de éste) para introducir esfuerzos residuales favorables; mientras el esfuerzo permisible se incrementa significativamente, tal como se indica en la tabla 10-17.

Carga dinámica

Si el resorte está dinámicamente cargado, los esfuerzos máximos y mínimos de tensión σ_{t_i} y σ_{t_o}, en los extremos del rango de su deflexión, se deberían calcular con las ecuaciones 10.36, y determinar las componentes alternante y media a partir de ellas. Luego se efectúa un análisis con el diagrama de Goodman y se obtiene el factor de seguridad con la ecuación 10.35*b*. El límite de resistencia a la fatiga del material se determina con los métodos del capítulo 4. Se usa el granallado con partículas para incrementar la vida de fatiga.

Resortes apilados

La deflexión máxima de un resorte Belleville suele ser pequeña. Para obtener más deflexión, se apilan en serie, como se ilustra en la figura 10-35*b*. La fuerza total es la misma que la de un resorte, pero la deflexión se suma. También se apilan en paralelo, como se indica en la figura 10-35*a*, en cuyo caso la deflexión total es la misma que la de un resorte y las fuerzas se suman. También es posible configurar combinaciones en serie-paralelo.

Tabla 10-17 Niveles de esfuerzo máximo de compresión σ_c recomendado para arandelas Belleville en aplicaciones estáticas, suponiendo que $S_{uc} = S_{ut}$
Fuente: Referencia 1

Material	Porcentaje máximo de resistencia última a la tensión	
	Antes de la remoción de asentamiento	Después de la remoción de asentamiento
Aleación de acero o acero al carbono	120%	275%
Acero inoxidable no ferroso y austenítico	95	160

Observe, sin embargo, que los apilamientos en serie o en serie-paralelo son inherentemente inestables, por lo que tienen que guiarse con un perno endurecido o dentro de un orificio endurecido, en cuyo caso la fricción reduce la carga disponible. La fricción entre las hojas también puede ser considerable en pilas paralelas, creando así histéresis. En http://spirol.com se encuentran configuraciones recomendables de apilamiento.

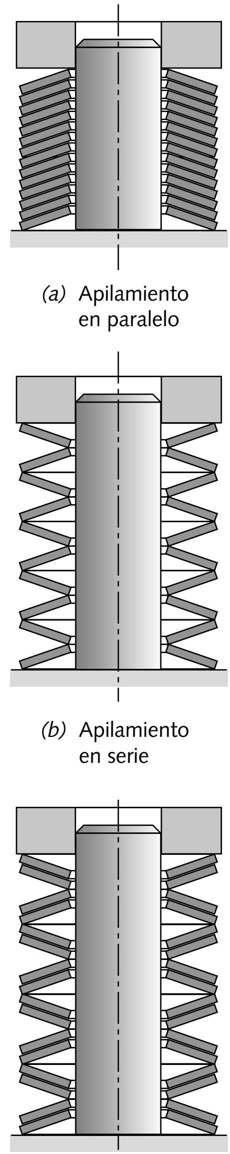
Diseño de resortes Belleville

El diseño de resortes Belleville requiere iteración. Se deben elegir valores supuestos de la razón de diámetro R_d y de la razón h/t. El tipo de curva fuerza-deflexión deseada sugerirá una razón h/t adecuada (véase la figura 10-30). Si se especifican una fuerza o un intervalo de fuerzas, la deflexión asociada se calcula con las ecuaciones 10-35, una vez que se han supuesto un diámetro exterior y un espesor. Es posible calcular el espesor requerido para obtener una fuerza determinada para posición de aplanamiento a partir de

$$t = \sqrt[4]{\frac{F_{plana}}{19.2E7}\frac{D_o^2}{h/t}} \qquad (10.38us)$$

$$t = \frac{1}{10}\sqrt[4]{\frac{F_{plana}}{132.4}\frac{D_o^2}{h/t}} \qquad (10.38si)$$

El resultado de cualquier versión de la ecuación 10.38 en el sistema inglés o el *SI**, en combinación con otros valores supuestos, se utiliza en las ecuaciones 10.35 y 10.36 para obtener la deflexión y los esfuerzos. La mejor manera de ilustrar dicho proceso es con un ejemplo.



(a) Apilamiento en paralelo

(b) Apilamiento en serie

(c) Apilamiento en serie-paralelo

FIGURA 10-35
Las arandelas Belleville se combinan en serie, paralelo o serie-paralelo.

10

EJEMPLO 10-7

Diseño de un resorte Belleville para carga estática

Problema Diseñe un resorte Belleville para que brinde carga constante durante una deflexión determinada.

Se proporciona El sello del extremo de un eje requiere una carga aproximadamente constante, durante pequeños movimientos asociados con el cambio de temperatura. El resorte debe aplicar una fuerza nominal de 10 lb ±5%, en un rango de ±0.006 in, en una deflexión nominal conveniente. El resorte se tiene que ajustar a un orificio de 1.25 in de diámetro.

Suposiciones Una razón de diámetro R_d = 2. Utilice un resorte de acero al carbono 50 HRC sin remoción de asentamiento.

* Cada una de las ecuaciones 10.38*us* y 10.38*si* contienen constantes que requieren que se usen unidades particulares. En la versión de *US* se manejan pulgadas y libras. En la versión del *SI* se usan mm y newtons.

Solución

1. Suponga un diámetro exterior D_o de 1.2 in para permitir alguna tolerancia en el orificio.

2. Como se necesita un resorte de fuerza constante, la razón h/t es 1.414 (véase la figura 10-30).

3. La variación requerida de la fuerza de no más de ±5% se determina eligiendo un intervalo de deflexión adecuado para operar, de acuerdo con la figura 10-31. Si la deflexión se mantiene entre el 65 y el 135% de la deflexión para aplanamiento, se obtendrá esta tolerancia. La fuerza nominal se presenta entonces en la posición plana y el resorte debe operar sobre ambos lados, de modo que se monta de forma similar a la mostrada en la figura 10-33.

4. Utilice los valores anteriores y la fuerza nominal especificada en la ecuación 10.38*us* para obtener un espesor t apropiado del resorte:

$$t = \sqrt[4]{\frac{F_{plana}}{19.2E7}\frac{D_o^2}{h/t}} = \sqrt[4]{\frac{10}{19.2E7}\frac{(1.2)^2}{1.414}} = 0.015 \text{ in} \qquad (a)$$

5. Se calcula ahora la altura h:

$$h = 1.414t = 1.414(0.015) = 0.021 \text{ in} \qquad (b)$$

6. Con base en las elecciones del paso 3 anterior, determine las deflexiones mínima y máxima:

$$\begin{aligned} y_{mín} &= 0.65h = 0.65(0.021) = 0.014 \text{ in} \\ y_{máx} &= 1.35h = 1.35(0.021) = 0.029 \text{ in} \end{aligned} \qquad (c)$$

La diferencia entre estas distancias es mayor que el intervalo de deflexión requerido, de modo que la tolerancia de la fuerza se obtiene dentro de dicho intervalo.

7. La figura 10-34 muestra que el peor estado de esfuerzos se presentará con la mayor deflexión $y_{máx}$, entonces se despejan las ecuaciones 10.36*b* y 10.37 para los esfuerzos en esa deflexión:

$$K_1 = \frac{6}{\pi \ln R_d}\left[\frac{(R_d-1)^2}{R_d^2}\right] = \frac{6}{\pi \ln 2}\left[\frac{(2-1)^2}{2^2}\right] = 0.689 \qquad (d)$$

$$K_2 = \frac{6}{\pi \ln R_d}\left(\frac{R_d-1}{\ln R_d}-1\right) = \frac{6}{\pi \ln 2}\left(\frac{2-1}{\ln 2}-1\right) = 1.220 \qquad (e)$$

$$K_3 = \frac{6}{\pi \ln R_d}\left(\frac{R_d-1}{2}\right) = \frac{2}{\pi \ln 2}\left(\frac{2-1}{2}\right) = 1.378 \qquad (f)$$

$$K_4 = \left[\frac{R_d \ln R_d-(R_d-1)}{\ln R_d}\right]\left[\frac{R_d}{(R_d-1)^2}\right] = \left[\frac{2\ln 2-(2-1)}{\ln 2}\right]\left[\frac{2}{(2-1)^2}\right] = 1.115 \qquad (g)$$

$$K_5 = \frac{R_d}{2(R_d-1)} = \frac{2}{2(2-1)} = 1 \qquad (h)$$

10

$$\sigma_c = -\frac{4Ey}{K_1 D_o^2\left(1-\nu^2\right)}\left[K_2\left(h-\frac{y}{2}\right)+K_3 t\right]$$

$$= -\frac{4(30E6)(0.029)}{0.689(1.2)^2\left(1-0.3^2\right)}\left[1.220\left(0.021-\frac{0.029}{2}\right)+1.378(0.015)\right] \qquad (i)$$

$$\sigma_c = -112\ 227 \text{ psi}$$

$$\sigma_{t_i} = \frac{4Ey}{K_1 D_o^2\left(1-\nu^2\right)}\left[-K_2\left(h-\frac{y}{2}\right)+K_3 t\right]$$

$$= \frac{4(30E6)(0.029)}{0.689(1.2)^2\left(1-0.3^2\right)}\left[-1.220\left(0.021-\frac{0.029}{2}\right)+1.378(0.015)\right] \qquad (j)$$

$$\sigma_{t_i} = 46\ 600 \text{ psi}$$

$$\sigma_{t_o} = \frac{4Ey}{K_1 D_o^2\left(1-\nu^2\right)}\left[K_4\left(h-\frac{y}{2}\right)+K_5 t\right]$$

$$= \frac{4(30E6)(0.029)}{0.689(1.2)^2\left(1-0.3^2\right)}\left[1.115\left(0.021-\frac{0.029}{2}\right)+(1)(0.015)\right] \qquad (k)$$

$$\sigma_{t_o} = 87\ 628 \text{ psi}$$

8. La tabla 10-5 (p. 659) nos da una S_{ut} = 246 kpsi para este material. La tabla 10-17 indica que es posible utilizar el 120% de este valor para un resorte sin remoción de asentamiento. El factor de seguridad para carga estática es, entonces,

$$N_s = \frac{1.2 S_{ut}}{\sigma_c} = \frac{1.2(246\ 000)}{112\ 227} = 2.6 \qquad (l)$$

   lo cual es aceptable.

9. Un resumen del diseño de este resorte es

$$D_o = 1.2 \qquad D_i = 0.6 \qquad t = 0.015 \qquad h = 0.021 \qquad (m)$$

10. Los archivos EX14-07 se encuentran en el CD-ROM.

10.10 ESTUDIOS DE CASO

Se verá ahora el diseño de un resorte en uno de los Estudios de caso que se definen en el apéndice D.

Diseño de un resorte de retorno en una máquina para probar levas

El diseño preliminar de este dispositivo se ilustra en la figura 10-36. El brazo del seguidor se carga contra la leva mediante un resorte de extensión con ganchos en cada extremo. Los cálculos realizados en el estudio de caso 10A indican que la constante de resorte de 25 lb/in y la precarga de 25 lb mantendrán positiva la fuerza del seguidor entre los valores de 13 y 110 lb para la velocidad requerida de diseño de 180 rpm. La longitud

del resorte debería adecuarse al embalaje, como se indica en la figura 10-36, es decir, del mismo orden que el diámetro de la leva, el cual es de 8 in. El accesorio de fijación del resorte a la estructura es variable.

ESTUDIO DE CASO 10C

Diseño de un resorte de retorno del brazo seguidor de una leva

Problema — **Diseñe un resorte de extensión para el brazo del seguidor de la leva de la figura 10-36, con base en las cargas definidas en el estudio de caso 10A (apéndice D).**

Se proporciona — **La constante de resorte es de 25 lb/in con una precarga de 25 lb. La deflexión dinámica del resorte es de 1.5 in.**

Suposiciones — **El resorte opera en un baño de aceite, cuya temperatura está abajo de los 250 °F. Se requiere vida infinita. Use alambre musical ASTM A228 y ganchos estándar sobre cada extremo.**

Solución — **Véase la figura 10-36.**

1. Intente con un diámetro del alambre de 0.177 in, de los tamaños disponibles en la tabla 10-2 (p. 653). Suponga un índice de resorte $C = 8$ y calcule el diámetro medio de la espira D con la ecuación 10.5 (p. 659).

$$D = Cd = 8(0.177) = 1.42 \text{ in} \qquad (a)$$

2. Utilice el valor supuesto de C para obtener un valor adecuado del esfuerzo inicial τ_i en la espira, con las ecuaciones 10.21 (p. 683), y el valor promedio de las funciones que encierran un intervalo aceptable de precargas del resorte en la figura 10-22 (p. 684):

$$\tau_{i_1} \cong -4.231C^3 + 181.5C^2 - 3\,387C + 28\,640$$

$$= -4.231(8)^3 + 181.5(8)^2 - 3\,387(8) + 28\,640 = 10\,994 \text{ psi} \qquad (b)$$

$$\tau_{i_2} \cong -2.987C^3 + 139.7C^2 - 3\,427C + 38\,404$$

$$= -2.987(8)^3 + 139.7(8)^2 - 3\,427(8) + 38\,404 = 18\,399 \text{ psi} \qquad (c)$$

$$\tau_i \cong \frac{\tau_{i_1} + \tau_{i_2}}{2} = \frac{10\,994 + 18\,399}{2} = 14\,697 \text{ psi} \qquad (d)$$

3. Determine el factor de cortante directo:

$$K_s = 1 + \frac{0.5}{C} = 1 + \frac{0.5}{8} = 1.0625 \qquad (e)$$

4. Sustituya K_s del paso 3 y el valor de τ_i de la ecuación (d) del paso 2 para $\tau_{máx}$, en la ecuación 10.8b (p. 660), con la finalidad de calcular la fuerza inicial F_i correspondiente de tensión en la espira.

$$F_i = \frac{\pi d^3 \tau_i}{8 K_s D} = \frac{\pi(0.177)^3(14\,697)}{8(1.0625)(1.416)} = 21.272 \text{ lb} \qquad (f)$$

Verifique que esta fuerza sea menor que la fuerza mínima aplicada $F_{mín}$ requerida de 25 lb, lo cual en este caso así es. Cualquier fuerza menor que F_i en el resorte no lo flexionará.

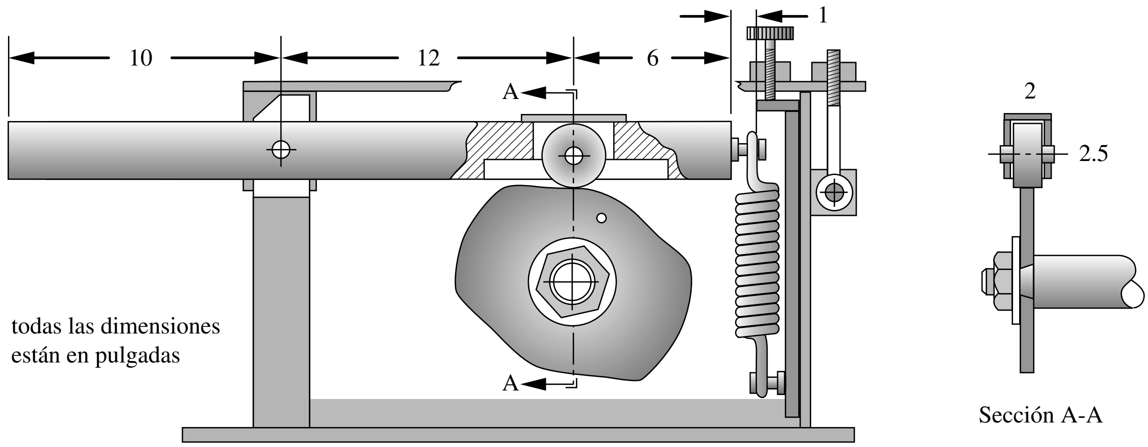


FIGURA 10-36

Brazo seguidor de una leva con resorte helicoidal de extensión

5. Obtenga la fuerza máxima a partir de la constante y deflexión dadas; úselas para determinar las fuerzas media y alternante con la ecuación 10.16*a* (p. 674):

$$F_{máx} = F_{mín} + ky = 25 + 25(1.5) = 62.5 \text{ lb}$$

$$F_a = \frac{F_{máx} - F_{mín}}{2} = \frac{62.5 - 25}{2} = 18.75 \text{ lb} \qquad (g)$$

$$F_m = \frac{F_{máx} + F_{mín}}{2} = \frac{62.5 + 25}{2} = 43.75 \text{ lb}$$

6. Emplee el factor de cortante directo K_s y los valores antes supuestos para calcular el esfuerzo mínimo $\tau_{mín}$ y el esfuerzo medio τ_m:

$$\tau_{mín} = K_s \frac{8F_{mín}D}{\pi d^3} = 1.0625 \frac{8(25)(1.416)}{\pi(0.177)^3} = 17\,272 \text{ psi}$$

$$(h)$$

$$\tau_m = K_s \frac{8F_m D}{\pi d^3} = 1.0625 \frac{8(43.75)(1.416)}{\pi(0.177)^3} = 30\,227 \text{ psi}$$

7. Obtenga el factor de Wahl K_w y utilícelo para calcular el esfuerzo cortante alternante en la espira.

$$K_w = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0.615}{C} = \frac{4(8)-1}{4(8)-4} + \frac{0.615}{8} = 1.184 \qquad (i)$$

$$\tau_a = K_w \frac{8F_a D}{\pi d^3} = 1.184 \frac{8(18.75)(1.416)}{\pi(0.177)^3} = 14\,436 \text{ psi} \qquad (j)$$

8. Determine la resistencia última a la tensión de este alambre musical con la ecuación 10.3 y la tabla 10-4 (p. 654), y úsela para calcular la resistencia última al cortante con la ecuación 10.4 (p. 655) y la resistencia a la fluencia por torsión del cuerpo de la espiral de la tabla 10-12 (p. 686), suponiendo que no hay remoción de asentamiento.

$$S_{ut} = Ad^b = 184\,649(0.177)^{-0.1625} = 244\,653 \text{ psi}$$
$$S_{us} = 0.67 S_{ut} = 163\,918 \text{ psi} \qquad (k)$$

$$S_{ys} = 0.45 S_{ut} = 0.45(244\,653) = 110\,094 \text{ psi} \qquad (l)$$

9. Obtenga la resistencia límite del alambre para resortes sin granallado de partículas con la ecuación 10.13 (p. 666), y luego conviértala a resistencia a la fatiga totalmente invertida con la ecuación 10.18*b* (p. 676).

$$S_{ew} = 45\,000 \text{ psi} \qquad (m)$$

$$S_{es} = 0.5\frac{S_{ew}S_{us}}{S_{us} - 0.5S_{ew}} = 0.5\frac{45\,000(163\,918)}{163\,918 - 0.5(45\,000)} = 26\,080 \text{ psi} \qquad (n)$$

10. El factor de seguridad contra la fatiga para las espiras en torsión se calcula con la ecuación 10.18*a* (p. 676).

$$N_{f_s} = \frac{S_{es}(S_{us} - \tau_{mín})}{S_{es}(\tau_m - \tau_{mín}) + S_{us}\tau_a}$$
$$= \frac{26\,080(163\,918 - 17\,272)}{26\,080(30\,227 - 17\,272) + 163\,918(14\,436)} = 1.4 \qquad (o)$$

Observe que se utiliza el esfuerzo mínimo debido a la fuerza $F_{mín}$ en este cálculo, **no** el esfuerzo de enrollamiento de la espira de la ecuación (*d*).

11. También es necesario determinar los esfuerzos en los ganchos de los extremos. Los esfuerzos de flexión en el punto *A* del gancho de la figura 10-33 (repetida aquí), se calculan con la ecuación 10.24 (p. 685):

$$C_1 = \frac{2R_1}{d} = \frac{2D}{2d} = C = 8$$
$$K_b = \frac{4C_1^2 - C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} = \frac{4(8)^2 - 8 - 1}{4(8)(8-1)} = 1.103 \qquad (p)$$

$$\sigma_a = K_b\frac{16DF_a}{\pi d^3} + \frac{4F_a}{\pi d^2} = 1.103\frac{16(1.416)(18.75)}{\pi(0.177)^3} + \frac{4(18.75)}{\pi(0.177)^2} = 27\,650 \text{ psi}$$
$$(q)$$
$$\sigma_m = K_b\frac{16DF_m}{\pi d^3} + \frac{4F_m}{\pi d^2} = 1.103\frac{16(1.416)(43.75)}{\pi(0.177)^3} + \frac{4(43.75)}{\pi(0.177)^2} = 64\,517 \text{ psi}$$

$$\sigma_{mín} = K_b\frac{16DF_{mín}}{\pi d^3} + \frac{4F_{mín}}{\pi d^2} = 1.103\frac{16(1.416)(25)}{\pi(0.177)^3} + \frac{4(25)}{\pi(0.177)^2} = 36\,867 \text{ psi} \qquad (r)$$

12. Convierta la resistencia a la fatiga de torsión en resistencia a la fatiga de tensión con la ecuación 10.4 (p. 655), luego úsela junto con la resistencia última a la tensión en la ecuación 10.18 (p. 676), para obtener el factor de seguridad contra la fatiga del gancho en flexión:

$$S_e = \frac{S_{es}}{0.67} = \frac{26\,080}{0.67} = 38\,925 \text{ psi}$$
$$N_{f_b} = \frac{S_e(S_{ut} - \sigma_{mín})}{S_e(\sigma_m - \sigma_{mín}) + S_{ut}\sigma_a}$$
$$= \frac{38\,925(244\,633 - 38\,867)}{38\,925(64\,517 - 38\,867) + 244\,633(27\,650)} = 1.0 \qquad (s)$$

10

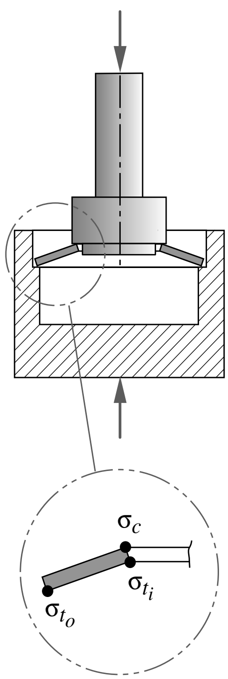


FIGURA 10-33

Puntos de esfuerzo más alto en una arandela de resorte Belleville

13. Obtenga los esfuerzos de torsión en el punto B del gancho de la figura 10-23, mediante la ecuación 10.25 (p. 685) y el valor supuesto de $C_2 = 5$.

$$R_2 = \frac{C_2 d}{2} = \frac{5(0.177)}{2} = 0.443 \text{ in}$$

$$K_{w_2} = \frac{4C_2 - 1}{4C_2 - 4} = \frac{4(5)-1}{4(5)-4} = 1.188 \tag{t}$$

$$\tau_{B_a} = K_{w_2}\frac{8DF_a}{\pi d^3} = 1.188\frac{8(1.416)18.75}{\pi(0.177)^3} = 14\,478 \text{ psi}$$

$$\tau_{B_m} = K_{w_2}\frac{8DF_m}{\pi d^3} = 1.188\frac{8(1.416)43.75}{\pi(0.177)^3} = 33\,783 \text{ psi} \tag{u}$$

$$\tau_{B_{mín}} = K_{w_2}\frac{8DF_{mín}}{\pi d^3} = 1.188\frac{8(1.416)25}{\pi(0.177)^3} = 19\,304 \text{ psi}$$

14. El factor de seguridad contra la fatiga para el gancho en torsión se calcula con la ecuación 10.18*a* (p. 676).

$$N_{f_s} = \frac{S_{es}(S_{us} - \tau_{mín})}{S_{es}(\tau_m - \tau_{mín}) + S_{us}\tau_a}$$

$$= \frac{26\,080(163\,918 - 19\,304)}{26\,080(33\,783 - 19\,304) + 163\,918(14\,478)} = 1.4 \tag{v}$$

Dos de estos factores de seguridad son aceptables. La seguridad del gancho en flexión es baja.

15. Para determinar la constante de resorte especificada, el número de espiras activas debe satisfacer la ecuación 10.7 (p. 659):

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} \quad \text{o bien,} \quad N_a = \frac{d^4 G}{8D^3 k} = \frac{(0.177)^4 11.5E6}{8(1.416)^3(25)} = 19.88 \cong 20 \tag{w}$$

Observe que se redondea al 1/4 de espira más próximo, ya que la tolerancia de manufactura no puede alcanzar una mayor precisión. Lo anterior hace a la constante real del resorte igual a $k = 24.8$ lb/in.

16. El número total de espiras en la espiral y en la longitud de la espiral es

$$N_t = N_a + 1 = 20 + 1 = 21$$
$$L_b = N_t d = 21(0.177) = 3.72 \text{ in} \tag{x}$$

17. La longitud de un gancho estándar es igual al diámetro interior de la espira. La longitud libre es

$$L_f = L_b + 2L_{gancho} = 3.72 + 2(1.24) = 6.2 \text{ in} \tag{y}$$

18. La deflexión y longitud el resorte máximas para esta deflexión son

$$y_{máx} = \frac{F_{máx} - F_{inicial}}{k} = \frac{62.5 - 21.27}{25} = 1.65 \text{ in}$$
$$L_{máx} = L_f + y_{máx} = 6.2 + 1.65 = 7.85 \text{ in} \tag{z}$$

Esta longitud se encuentra dentro del diámetro máximo de la leva, de modo que es aceptable.

19. La frecuencia natural de este resorte se calcula con la ecuación 10.26 (p. 685) y es

$$f_n = \frac{2}{\pi N_a}\frac{d}{D^2}\sqrt{\frac{Gg}{32\gamma}} = \frac{2(0.177)}{\pi(20)(1.416)^2}\sqrt{\frac{11.5E6(386)}{32(0.285)}} = 62 \text{ Hz } = 3\,720 \text{ rpm} \qquad (aa)$$

La razón entre la frecuencia natural y la frecuencia forzada es

$$\frac{3\,720}{180} = 20.7 \qquad (ab)$$

la cual es lo suficientemente alta.

20. La especificación de diseño para este resorte de alambre A228 es

$$d = 0.177 \text{ in} \qquad OD = 1.593 \text{ in} \qquad N_t = 21 \qquad L_f = 6.2 \text{ in} \qquad (ac)$$

21. Este diseño es marginal, en vista de que se prevé que el gancho fallará a la fatiga por flexión, después de un millón de ciclos de operación aproximadamente. Si ésa es una vida muy corta, entonces el diseño se debería iterar otra vez para mejorarlo. Incrementando el tamaño del alambre a 0.192 in y el índice de resorte a 8.5, aumentarán todos los factores de seguridad, con el más bajo, de 1.2, en el gancho en flexión.

22. Los modelos CASE10C-1 y CASE10C-2 se encuentran en el CD-ROM. El modelo 1 es como se indica en este ejemplo. El modelo 2 utiliza los parámetros modificados del paso 21 para mejorar el diseño.

10.11 RESUMEN

Los resortes se utilizan ampliamente en maquinaria de todos tipos para brindar fuerzas de empuje, jalón o torsión, o bien, para almacenar energía potencial. En este capítulo se estudiaron los usos de varios resortes y el diseño de unos cuantos tipos de los resortes más comunes: helicoidales de compresión, helicoidales de extensión, helicoidales de torsión y Belleville. Los nombres de los tres primeros definen el tipo de carga externa aplicada, no el tipo de esfuerzo. Es fácil confundir estos dos aspectos. Los resortes helicoidales de compresión o extensión tienen esfuerzo de torsión en sus espiras; mientras un resorte helicoidal de torsión tiene esfuerzos de tensión y compresión en sus espiras. Estos tres tipos de resortes se fabrican con alambre enrollado. El alambre usualmente es redondo; sin embargo, algunas veces se usa alambre rectangular. Las arandelas de resorte Belleville se fabrican en forma de cono con material de inventario. Los resortes helicoidales tienen esencialmente fuerza-deflexión lineal característica (constante de resorte fija). Los resortes Belleville presentan una alta característica de no linealidad, lo cual es una ventaja para obtener una constante cerca de cero o una acción biestable.

Se han desarrollado muchos datos sobre las características de resistencia de resortes de alambre y resortes planos de inventario. Muchos de estos conceptos se reproducen en este capítulo. La resistencia del material generalmente se incrementa conforme se reduce la sección transversal del alambre, de manera que un alambre fino tiene muy alta resistencia al rompimiento bajo cargas estáticas. La resistencia a la fatiga de materiales con alta resistencia estática tiende a saturarse ("llegar al tope") a niveles razonablemente altos, en lugar de estar en función de la resistencia estática. En este capítulo se presentaron también estimados de resistencia a la fatiga en varios materiales para resortes.

El diseño de resortes, para carga estática o dinámica, es un ejercicio intrínsecamente iterativo. Al realizar los cálculos se deben hacer suposiciones para los valores de varios parámetros. En general, el primer resultado no es un diseño exitoso, por lo que se requieren cambios en los valores supuestos y efectuar otro cálculo. Una computadora es

una ayuda indispensable en este proceso. En el capítulo se expusieron muchos ejemplos resueltos completamente; se invita al lector a estudiarlos junto con sus respectivos archivos, los cuales brindan más información de la incluida en las tablas.

Ecuaciones importantes utilizadas en este capítulo

Constante de resorte (sección 10.1):

$$k = \frac{F}{y} \tag{10.1}$$

Combinación de resortes en paralelo (sección 10.1):

$$k_{total} = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n \tag{10.2a}$$

Combinación de resortes en serie (sección 10.1):

$$\frac{1}{k_{total}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \ldots + \frac{1}{k_n} \tag{10.2b}$$

Índice de resorte (sección 10.4):

$$C = \frac{D}{d} \tag{10.5}$$

Deflexión de resortes helicoidales de compresión (sección 10.4):

$$y = \frac{8FD^3N_a}{d^4G} \tag{10.6}$$

Deflexión de resortes helicoidales de extensión (sección 10.7):

$$y = \frac{8(F - F_i)D^3N_a}{d^4G} \tag{10.23}$$

Deflexión de resortes helicoidales de torsión con alambre redondo (sección 10.8):

$$\theta_{rev} \cong 10.8\frac{MDN_a}{d^4E} \tag{10.28c}$$

Constante de resortes helicoidales de compresión (sección 10.4)

$$k = \frac{F}{y} = \frac{d^4G}{8D^3N_a} \tag{10.7}$$

Constante de resortes helicoidales de extensión (sección 10.7):

$$k = \frac{F - F_i}{y} = \frac{d^4G}{8D^3N_a} \tag{10.21}$$

Constante de resortes helicoidales de torsión con alambre redondo (sección 10.8):

$$k = \frac{M}{\theta_{rev}} \cong \frac{d^4E}{10.8DN_a} \tag{10.29}$$

Esfuerzo estático en resortes helicoidales de compresión o de extensión (sección 10.7):

$$\tau_{máx} = K_s \frac{8FD}{\pi d^3} \qquad \text{donde} \quad K_s = \left(1 + \frac{0.5}{C}\right) \tag{10.8b}$$

Esfuerzo dinámico en resortes helicoidales de compresión o de extensión (sección 10.7):

$$K_w = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0.615}{C} \tag{10.9a}$$

$$\tau_{máx} = K_w \frac{8FD}{\pi d^3} \tag{10.9b}$$

Esfuerzo en el diámetro interior de resortes helicoidales de torsión (sección 10.8):

$$K_{b_i} = \frac{4C^2 - C - 1}{4C(C-1)} \tag{10.32a}$$

$$\sigma_{i_{máx}} = K_{b_i} \frac{M_{máx} c}{I} = K_{b_i} \frac{M_{máx}(d/2)}{\pi d^4/64} = K_{b_i} \frac{32 M_{máx}}{\pi d^3} \tag{10.33a}$$

Esfuerzo en el diámetro exterior de resortes helicoidales de torsión (sección 10.8):

$$K_{b_o} = \frac{4C^2 + C - 1}{4C(C+1)} \tag{10.32b}$$

$$\sigma_{o_{mín}} = K_{b_o} \frac{32 M_{mín}}{\pi d^3}; \qquad \sigma_{o_{máx}} = K_{b_o} \frac{32 M_{máx}}{\pi d^3} \tag{10.33b}$$

10

Resistencia última a la tensión en alambres de acero; véase la tabla 10-4 para las constantes (sección 10.4):

$$S_{ut} \cong A d^b \tag{10.3}$$

Resistencia última al cortante del alambre (sección 10.4):

$$S_{us} \cong 0.67 S_{ut} \tag{10.4}$$

Resistencias límite a la fatiga por torsión de resortes; alambre de acero con una razón R = 0 (sección 10.4):

$$\begin{aligned} S_{ew'} &\cong 45.0 \text{ kpsi } (310 \text{ MPa}) \quad \text{para resortes sin granallado de partículas} \\ S_{ew'} &\cong 67.5 \text{ kpsi } (465 \text{ MPa}) \quad \text{para resortes con granallado de partículas} \end{aligned} \tag{10.13}$$

Resistencias límite a la fatiga por torsión de resortes; alambre de acero con una razón R = –1 (sección 10.4):

$$S_{es} = 0.5 \frac{S_{ew} S_{us}}{S_{us} - 0.5 S_{ew}} \tag{10.18b}$$

Resistencias límite a la fatiga por flexión de resortes; alambre de acero con una razón R = 0 (sección 10.4):

$$S_{ew'_b} = \frac{S_{ew'}}{0.577} \tag{10.34a}$$

Resistencias límite a la fatiga por flexión para resortes de alambre de acero con razón R = –1 (sección 10.4):

$$S_e = 0.5 \frac{S_{ew_b} S_{ut}}{S_{ut} - 0.5 S_{ew_b}} \tag{10.35c}$$

Factor de seguridad estático para resortes helicoidales de compresión o de extensión (sección 10.5):

$$N_s = \frac{S_{ys}}{\tau} \tag{10.15}$$

Factor de seguridad dinámico en resortes helicoidales de compresión o de extensión (sección 10.4):

$$N_{f_s} = \frac{S_{es}(S_{us} - \tau_i)}{S_{es}(\tau_m - \tau_i) + S_{us}\tau_a} \tag{10.18a}$$

Factor de seguridad dinámico en resortes helicoidales de torsión (sección 10.8):

$$N_{f_b} = \frac{S_e\left(S_{ut} - \sigma_{o_{mín}}\right)}{S_e\left(\sigma_{o_{medio}} - \sigma_{o_{mín}}\right) + S_{ut}\sigma_{o_{alt}}} \tag{10.35b}$$

Función de carga-deflexión en una arandela Belleville (sección 10.9):

$$F = \frac{4Ey}{K_1 D_o^2 (1 - \nu^2)} \left[(h - y)\left(h - \frac{y}{2}\right) t + t^3 \right] \tag{10.36a}$$

donde $$K_1 = \frac{6}{\pi \ln R_d} \left[\frac{(R_d - 1)^2}{R_d^2} \right] \quad \text{y} \quad R_d = \frac{D_o}{D_i} \tag{10.36b}$$

Esfuerzo máximo de compresión en una arandela Belleville (sección 10.9):

$$\sigma_c = -\frac{4Ey}{K_1 D_o^2 (1 - \nu^2)} \left[K_2 \left(h - \frac{y}{2}\right) + K_3 t \right] \tag{10.37a}$$

donde $$K_2 = \frac{6}{\pi \ln R_d} \left(\frac{R_d - 1}{\ln R_d} - 1 \right) \quad \text{y} \quad R_d = \frac{D_o}{D_i} \tag{10.37d}$$

$$K_3 = \frac{6}{\pi \ln R_d} \left(\frac{R_d - 1}{2} \right) \tag{10.37e}$$

Espesor requerido en un resorte Belleville para la fuerza de aplanamiento (sección 10.9):

$$t = \sqrt[4]{\frac{F_{plana}}{19.2E7} \frac{D_o^2}{h/t}} \tag{10.38us}$$

10.12 REFERENCIAS

1. **Associated Spring**, *Design Handbook: Engineering Guide to Spring Design*. Associated Spring, Barnes Group Inc., Bristol, Conn., 1987.

10

2. **H.C.R. Carlson**, Selection and Application of Spring Material. *Mechanical Engineering*, **78**: pp. 331-334, 1956.
3. **A.M. Wahl**, *Mechanical Springs*. McGraw-Hill: Nueva York, 1963.
4. **F.P. Zimmerli**, "Human Failures in Spring Design". *The Mainspring, Associated Spring Corp.*, ago-sept. 1957.
5. **R.E. Cornwell**, "Stress Concentration Factors for the Torsion of Curved Beams of Arbitrary Cross Section". *Proc. Inst. Mechanical Engineers – Part C – Journal of Mechanical Engineering Science*; dic. de 2006, vol. 220, núm. 12, pp. 1709-1726.
6. *Handbook of Spring Design*. Spring Manufacturers Institute, Oak Brook, IL, 2002.

Tabla P10-0†
Matriz tema/problema

Tema	Problemas
10.1 Constante de resorte	10-1, **10-8**, **10-10**, **10-12**, 10-46, 10-47, 10-53
10.3 Materiales de resortes	10-9, 10-33, 10-34, 10-35, 10-36
10.4 Resortes de compresión	10-2, 10-3, 10-4, 10-5, 10-6, 10-7, 10-49, 10-52
10.5 Carga estática	*10-11*, *10-21*, *10-44*, *10-45*, 10-48, 10-54
10.6 Carga de fatiga	*10-14*, ***10-14***, 10-15, **10-16**, *10-19*, *10-20*, *10-28*, 10-31, *10-32*
10.7 Resortes de extensión	*10-17*, *10-18*, 10-29, *10-37*, *10-38*, 10-50
10.8 Resortes de torsión	
Diseño estático	*10-22*, *10-23*, *10-39*, *10-40*
Diseño de fatiga	*10-24*, *10-25*, *10-30*, *10-41*
10.9 Resortes Belleville	
Diseño estático	*10-26*, *10-42*, *10-43*, 10-51
Diseño de fatiga	10-27

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problema en *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador.

10.13 PROBLEMAS

*10-1. Un resorte lineal debe proporcionar 200 N en su deflexión máxima de 150 mm, y 40 N en su deflexión mínima de 50 mm. ¿Cuál es la constante de resorte?

10-2. Determine la resistencia última a la tensión, la resistencia última al cortante y la resistencia a la fluencia por torsión en un alambre de acero A229 revenido en aceite, de 1.8 mm de diámetro.

*10-3. Calcule la resistencia a la fluencia por torsión, y la resistencia última al cortante, de un alambre sin asentamiento A229 de 0.105 in de diámetro que se usará para un resorte helicoidal de compresión.

*10-4. ¿Cuál es la resistencia a la fatiga por torsión del alambre del problema 10-3 para $N = 5E6$ ciclos?

10-5. Grafique el diagrama de Goodman modificado para el alambre del problema 10-3.

*10-6. ¿Cuál es la constante de resorte y cuál es el índice de resorte de un resorte de compresión de alambre cuadrado y esmerilado con $d = 1$ mm, $D = 10$ mm y 12 espiras en total?

*10-7. Determine la frecuencia natural del resorte del problema 10-6.

†**10-8**. Una máquina procesa rollos de papel cuya densidad es de 984 kg/m^3. El rollo de papel tiene un diámetro exterior (*OD*) de 1.50 m × 0.22 m de diámetro interior (*ID*) × 3.23 m de largo y se encuentra sobre un eje de acero hueco, simplemente apoyado, con 0.22 cm de *OD* × 20 cm de *ID*, tan larga como el rollo de papel. Calcule la constante de resorte del eje y la frecuencia natural fundamental del montaje eje-rollo.

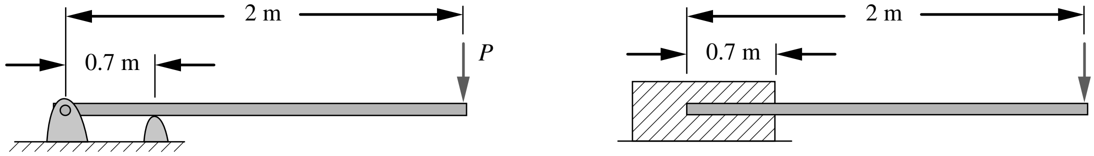
10-9. Determine el radio mínimo permisible de doblez para un resorte de cinta de acero 50HRC de 1 mm de espesor.

***10-10**. En la figura P10-1*a* se muestra un trampolín sobresaliente. Una persona de 100 kg está parada en el centro del ancho del extremo libre. Suponga unas dimensiones de la sección transversal de 305 mm × 32 mm y un material con un $E = 10.3$ GPa. ¿Cuál es la constante de resorte y cuál la frecuencia natural fundamental de la combinación clavadista-trampolín?

*†*10-11*. Diseñe un resorte helicoidal de compresión para una carga estática de 45 lb, con una deflexión de 1.25 in y un factor de seguridad de 2.5. Use $C = 7.5$. Especifique todos los parámetros necesarios para fabricar el resorte.

10-12. Repita el problema 10-10 con el diseño del trampolín en voladizo de la figura P10-1*b*.

**10-13*. Dados $d = 0.312$ in, $y_{trabajo} = 0.75$ in, 15% de holgura por golpeo, alambre al cromo vanadio sin granallado de partículas, extremos cuadrados, $F_{máx} = 250$ lb y $F_{mín} = 50$ lb, obtenga N_a, D, L_f, L_{cierre}, k, $y_{inicial}$ y el diámetro mínimo del orificio del resorte. Se desea vida infinita con un factor de seguridad de 1.4. Elija un índice aceptable de resorte. Se realizará asentamiento.



(*a*) Trampolín suspendido (*b*) Trampolín en voladizo

FIGURA P10-1

Problemas 10-10 y 10-12

10-14. La figura P10-2 muestra un juguete infantil llamado *cangurín*. Un niño permanece sobre las almohadillas aplicando la mitad de su peso en cada lado. Salta del suelo, manteniendo las almohadillas contra sus pies, y rebota junto con el resorte amortiguando el impacto y almacenando energía para facilitar cada rebote. Suponga un niña de 60 lb y una constante de resorte de 100 lb/in. El cangurín pesa 5 lb. Diseñe un resorte helicoidal de compresión para realizar un salto de 2 in con un factor de seguridad dinámico de 1, para vida finita en 5*E*4 ciclos. Determine la frecuencia natural fundamental del sistema.

10-15. Grafique el diagrama de Goodman modificado para el siguiente diseño de resorte y obtenga el factor de seguridad: S_{fw} = 40 kpsi, S_{us} = 200 kpsi, τ_a = 12 kpsi, τ_m = 95 kpsi, τ_i = 75 kpsi.

10-16. El problema 4-16 describe la guía para unas bolas de boliche con 4.5 in de diámetro y 2.5 lb de peso. Diseñe un lanzador con un resorte cargado que permita que jugadores cuadrapléjicos lancen las bolas a la mesa desde un punto donde la guía del problema 4-16 las deje caer, tan sólo con el cierre de un switch que libere el disparador. El émbolo del disparador será amartillado por un asistente; mientras la energía se almacenará en el resorte helicoidal de compresión, que usted diseñará, guiará al émbolo hacia la bola y la rodará hacia la pista (mesa). Se deben definir las restricciones adecuadas y hacer muchas suposiciones acerca de cuestiones como el tamaño de la pista, las pérdidas por fricción y la energía necesaria para derribar los pinos.

**10-17*. Diseñe un resorte helicoidal de extensión para manejar una carga dinámica que varía de 175 a 225 N, durante una deflexión de trabajo de 0.85 cm. Utilice alambre musical y ganchos estándares. La frecuencia forzada es de 1 500 rpm. Se desea vida infinita. Minimice el tamaño del embalaje. Seleccione los factores de seguridad adecuados contra fatiga, fluencia y oscilaciones.

10-18. Diseñe un resorte helicoidal de extensión con ganchos estándar, para manejar una carga dinámica que varía de 300 a 500 lb durante una deflexión de trabajo de 2 in. Use alambre de cromo-vanadio. La frecuencia forzada es de 1 000 rpm. Se desea vida infinita. Minimice el tamaño del embalaje. Seleccione los factores de seguridad apropiados contra fatiga, fluencia y oscilación.

**10-19*. Diseñe un resorte helicoidal de compresión para manejar una carga dinámica que varía de 780 N a 1000 N, durante una deflexión de trabajo de 22 mm. Utilice alambre musical cuadrado y esmerilado, sin granallado de partículas, y 10% de holgura de golpeo. La frecuencia forzada es de 500 rpm. Se desea vida infinita. Minimice el tamaño del embalaje. Seleccione los factores de seguridad adecuados contra fatiga, fluencia y oscilación.

10-20. Diseñe un resorte helicoidal de compresión para manejar una carga dinámica que varía de 135 N a 220 N, durante una deflexión de trabajo de 32 mm. Utilice alambre cuadrado de cromo-vanadio, con granallado de partículas, y 15% de holgura de golpeo. La frecuencia forzada es de 250 rpm. Se desea vida infinita. Minimice el tamaño del embalaje. Seleccione los factores de seguridad adecuados contra fatiga, fluencia y oleaje.

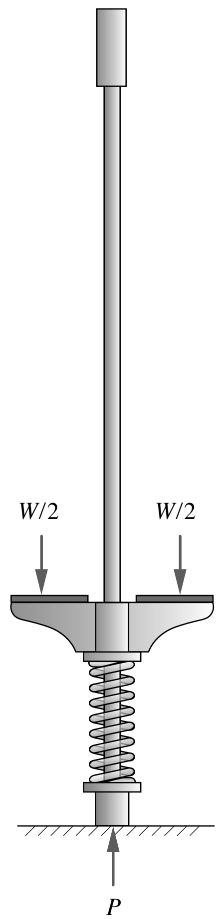


FIGURA P10-2

Problema 10-14

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

*10-21. Diseñe un resorte helicoidal de compresión para una carga estática de 400 N, con una deflexión de 45 mm y un factor de seguridad de 2.5. Use $C = 8$. Especifique todos los parámetros necesarios para fabricar el resorte. Defina todas las suposiciones.

*10-22. Diseñe un resorte helicoidal de torsión con extremos rectos para una carga estática de 200 N-m, con una deflexión de 45° y un factor de seguridad de 1.8. Especifique todos los parámetros necesarios para fabricar el resorte. Defina todas las suposiciones.

10-23. Diseñe un resorte helicoidal de torsión con extremos rectos para una carga estática de 300 in-lb, con una deflexión de 75° y un factor de seguridad de 2. Especifique todos los parámetros necesarios para fabricar el resorte. Defina todas las suposiciones.

*10-24. Diseñe un resorte helicoidal de torsión con extremos rectos para una carga dinámica de 50-105 N-m, con una deflexión de 80° y un factor de seguridad de 2.5. Especifique todos los parámetros necesarios para fabricar el resorte. Defina todas las suposiciones.

10-25. Diseñe un resorte helicoidal de torsión con extremos rectos para una carga dinámica de 150-350 in-lb, con una deflexión de 50° y un factor de seguridad de 1.4. Especifique todos los parámetros necesarios para fabricar el resorte. Defina todas las suposiciones.

*10-26. Diseñe un resorte Belleville para proporcionar una fuerza estática constante de 400 N ± 10%, durante una deflexión de 1 mm.

10-27. Diseñe un resorte Belleville para operación bimodal entre ±50 N.

10-28. Dados los siguientes datos de un resorte helicoidal de compresión cargado a la fatiga, diseñe un resorte para vida infinita. Defina las suposiciones y las fuentes de datos empíricos que se deben utilizar. $C = 8.5$, $d = 8$ mm, 625 rpm, deflexión de trabajo = 20 mm, 15% de holgura de golpeo, alambre musical sin granallado de partículas, extremos cuadrados, preasentamiento, $F_{máx} = 450$ N, $F_{mín} = 225$ N.

10-29. Un resorte helicoidal de extensión, cargado a la fatiga, se ha diseñado para vida infinita con los siguientes datos: $C = 9$, $d = 8$ mm, deflexión de trabajo = 50 mm, alambre de cromo silicio sin granallado de partículas, $F_{máx} = 935$ N, $F_{mín} = 665$ N, $F_{inic} = 235$ N, 13.75 espiras activas. Obtenga los factores de seguridad para falla en los ganchos estándares. Defina las suposiciones y las fuentes de datos empíricos que se deben utilizar.

10

10-30. Dados los siguientes datos de un resorte helicoidal de torsión cargado a la fatiga, determine el índice de resorte, el diámetro de la espira sin carga, el diámetro de la espira con carga mínima y el factor de seguridad contra la fatiga. Defina todas las suposiciones y las fuentes de datos empíricos que se deben utilizar. La deflexión en el montaje es de 0.25 rev, deflexión de trabajo = 0.5 rev, $k = 60$ lb-in/rev, $N_a = 20$, alambre musical sin granallado de partículas de 0.192 in.

10-31. Se requiere un resorte helicoidal de compresión para proporcionar una fuerza mínima de 150 lb ya instalado, que tiene una deflexión de trabajo de 1 in. La constante de resorte es de 75 lb/in. La espira se debe ajustar a un orificio de 2.1 in de diámetro, con una tolerancia de 0.1 in. Utilice alambre musical de 0.25 in de diámetro, sin granallado de partículas y con extremos cuadrados esmerilados. Con un 15% de holgura de golpeo, calcule:

a) Los esfuerzos y el factor de seguridad para vida infinita a la fatiga
b) La altura de cierre
c) El esfuerzo y el factor de seguridad en la altura de cierre
d) El número total de espiras
e) La longitud libre
f) La frecuencia natural en Hz
g) Grafique un diagrama de Goodman y muestre el factor de seguridad del inciso (*a*) sobre él.

10-32. Se requiere un resorte helicoidal de compresión para suministrar una fuerza variable, con el tiempo que se encuentre en un intervalo de 100 lb a 300 lb, con una deflexión de 1 in. Necesita trabajar libremente sobre un eje de 1.25 in de diámetro. Utilice un alambre de acero al carbono forjado en frío con $S_{ut} = 250\,000$ psi. Se desea un índice de resorte de 6, una holgura de golpeo del 15% y extremos cuadrados esmerilados.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

10-33. Determine la resistencia última a la tensión y la resistencia última al cortante de un alambre musical ASTM A228, con los siguientes diámetros preferentes: 0.5 mm, 1.0 mm, 2.0 mm, 4.0 mm y 6.0 mm.

10-34. Determine la resistencia última a la tensión y la resistencia última al cortante de un alambre musical ASTM A228, con los siguientes diámetros preferentes: 0.020 in, 0.038 in, 0.081 in, 0.162 in y 0.250 in.

10-35. Seleccione el diámetro preferente para un alambre ASTM A227 forjado en frío, que debe tener una resistencia última a la tensión lo más cercana a 180 kpsi, pero no menor de esto.

10-36. Seleccione el diámetro preferente para un alambre ASTM A229 revenido en aceite, que debe tener una resistencia última a la tensión lo más cercana a 1 430 MPa, pero no menor de esto.

10-37. Diseñe un resorte helicoidal de extensión para manejar una carga dinámica que varía de 275 N a 325 N, durante una deflexión de trabajo de 10 mm. Emplee alambre de cromo silicio y ganchos estándares. La frecuencia forzada es de 800 rpm. Se desea vida infinita. Minimice el tamaño del embalaje. Elija los factores de seguridad adecuados contra fatiga, fluencia y oscilación.

10-38. Diseñe un resorte helicoidal de extensión para manejar una carga dinámica que varía de 60 a 75 lb, durante una deflexión de trabajo de 0.5 in. Emplee alambre musical y ganchos estándares. La frecuencia forzada es de 1 200 rpm. Se desea vida infinita. Minimice el tamaño del embalaje. Seleccione los factores de seguridad adecuados contra fatiga, fluencia y oscilación.

10-39. Diseñe un resorte helicoidal de torsión con extremos rectos para una carga estática de 50 N-m, en una deflexión de 60°, con un factor de seguridad de 2. Especifique todos los parámetros necesarios para fabricar el resorte. Defina todas las suposiciones.

10-40. Diseñe un resorte helicoidal de torsión con extremos rectos para una carga estática de 430 in-lb, en una deflexión de 55°, con un factor de seguridad de 2. Especifique todos los parámetros necesarios para fabricar el resorte. Defina todas las suposiciones.

10

10-41. Dados los siguientes datos de un resorte helicoidal de torsión cargado a la fatiga, obtenga el índice de resorte, el diámetro de la espira sin carga, el diámetro de la espira con carga mínima y el factor de seguridad a la fatiga. Defina las suposiciones y las fuentes de datos empíricos que se deben utilizar. La deflexión en el montaje es de 15 rev, la deflexión de trabajo = 0.35 rev, $k = 10$ N-m/rev, $N_a = 25$, alambre revenido en aceite sin granallado de partículas de 4.50 mm de diámetro.

**10-42.* Diseñe un resorte Belleville para suministrar una fuerza estática de aproximadamente 2 000 lb, con una deflexión máxima de 0.05 in, con una constante de resorte aproximadamente fija.

10-43. Diseñe un resorte Belleville para suministrar una fuerza estática de 400 lb, con 50% de la deflexión para aplanamiento y 200 lb para aplanamiento.

**10-44.* Diseñe un resorte helicoidal de compresión para una carga estática de 60 lb, con una deflexión de 1.50 in, con un factor de seguridad de 2, para trabajar en un orificio con diámetro igual a 1.06 in. Especifique los parámetros necesarios para fabricar el resorte.

10-45. Diseñe un resorte helicoidal de compresión para una carga estática de 200 N, con una deflexión de 40 mm, con un factor de seguridad de 1.8, para trabajar en un orificio con diámetro de 25 mm. Especifique los parámetros necesarios para fabricar el resorte.

10-46. Tres resortes se configuran en serie de manera similar al diseño de la figura 1-1(a). Tienen constantes de resorte $k_1 = 50$ N/mm, $k_2 = 150$ N/mm y $k_3 = 500$ N/mm, respectivamente. Determine la constante total de resorte, la deflexión de cada resorte y la deflexión completa, si se aplica una carga $F = 600$ N.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H. Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

10-47. Tres resortes se configuran en paralelo como el diseño de la figura 1-1(*b*). Tienen constantes de resorte $k_1 = 50$ N/mm, $k_2 = 150$ N/mm y $k_3 = 500$ N/mm, respectivamente. Determine la constante total de resorte, la fuerza transportada por cada resorte y la deflexión completa, si se aplica una carga $F = 600$ N.

10-48. Un resorte hecho de alambre ASTM A228 con extremos cuadrados y esmerilados, diámetro del alambre $d = 3$ mm, diámetro exterior $D_o = 27$ mm, total de espiras igual a 14 y longitud libre $L_f = 80$ mm, se eligió para una aplicación. Determine el factor de seguridad estática si el resorte está sujeto a una carga estática de 175 N.

10-49. Un resorte con extremos cuadrados y esmerilados, diámetro del alambre $d = 4$ mm, diámetro exterior $D_o = 40$ mm, total de espiras igual a 18 y longitud libre $L_f =$ 140 mm, se eligió para una aplicación donde la deflexión inicial es de 15 mm y la deflexión de trabajo es de 50 mm. Determine la longitud mínima de trabajo, la altura de cierre, la holgura entre espiras, el índice de resorte y la constante de resorte.

10-50. Un resorte de extensión tiene un diámetro del alambre igual a 3 mm y un diámetro exterior $D_o = 27$ mm. Determine la precarga preferente para este resorte.

10-51. Se requieren resortes Belleville apilados en serie para obtener mayor deflexión en un diseño. El apilamiento está guiado por un perno interno, como se indica en la figura 10-35(*b*). El diámetro mínimo interior de los resortes individuales apilados es $D_i = 25$ mm. Determine las condiciones superficiales recomendadas para el perno y el diámetro máximo del perno. (Sugerencia: vaya al sitio www.spirol.com en Internet y vea apilamiento de resortes de disco).

10-52. La ecuación 10.9*a* define la combinación de cortante directo y el factor de concentración de esfuerzo K_w, para usarlo en resortes helicoidales de alambre redondo. La ecuación 10.11*a* define un factor similar K_{rw} para el cálculo del esfuerzo de cortante en las espiras de resortes de alambre rectangular. Obtenga y grafique la razón K_{rw}/K_w para alambre cuadrado con valores de índice de resorte entre 1.2 y 10.

10-53. Repita el problema 10-6 con alambre cuadrado de 1 mm, en lugar de alambre redondo.

10-54. Se requiere un resorte helicoidal de compresión para suministrar una fuerza mínima de 650 N ya instalado, pero tiene una deflexión de trabajo de 25 mm. La constante de resorte es de 13 N/mm. La espira se debe ajustar en un orificio de 53 mm de diámetro con una tolerancia de 3 mm. Emplee alambre musical cuadrado de 6 mm con extremos cuadrados esmerilados. Con un 15% de holgura de golpeo, determine:

a) El esfuerzo con la deflexión de trabajo.
b) La altura de cierre.
c) El esfuerzo en la altura de cierre.
d) El número total de espiras.
e) La longitud libre.
f) La frecuencia natural en Hz.

11



TORNILLOS Y SUJETADORES

A falta de un clavo se pierde la herradura;
a falta de la herradura se pierde el caballo,
y a falta del caballo se pierde el jinete.

GEORGE HERBERT

11.0 INTRODUCCIÓN

Parecería que “tuercas y pernos” es el aspecto menos interesante del diseño; pero, de hecho, es uno de los más fascinantes. El éxito o el fracaso de un diseño podrían depender de la selección y el uso adecuados de los sujetadores. Además, el diseño y la fabricación de sujetadores es un gran negocio y forma parte importante de la economía. Literalmente, los vendedores ofrecen miles de diseños diferentes de sujetadores, así como de miles a millones de sujetadores se utilizan en ensambles individuales complejos, como los automóviles o los aviones. El Boeing 747 emplea 2.5 millones de sujetadores aproximadamente, algunos de los cuales cuestan varios dólares cada uno.[1]

Existe una enorme variedad de sujetadores disponibles comercialmente, que van desde las tuercas y pernos comunes hasta dispositivos de varias piezas para apertura rápida de paneles, o aplicaciones con sujetadores ocultos. La figura 11-1 presenta una pequeña muestra de la variedad disponible. Evidentemente, no se pueden cubrir todas las variedades en un solo capítulo. Se han escrito libros completos sobre sujetadores, algunos de los cuales están referidos en la bibliografía de este capítulo. Nuestro estudio se limitará al diseño y la selección de sujetadores convencionales como pernos, tornillos, tuercas, etcétera, que se usan en las aplicaciones de diseño de máquinas donde hay cargas y esfuerzos significativos.

Los tornillos se usan como sujetadores para mantener elementos juntos y para mover cargas con los llamados tornillos de potencia o tornillos de avance (husillos). Se estudiarán las dos aplicaciones. Los tornillos como sujetadores se pueden configurar para soportar cargas de tensión, cargas cortantes o ambas. Se explorará la aplicación de precargas en tornillos sujetadores, lo cual beneficia considerablemente sus habilidades de transporte de carga. La tabla 11-0 muestra las variables que se utilizan en este capítulo, además de indicar las ecuaciones o secciones donde se encuentran.

Tabla 11-0 Variables utilizadas en este capítulo
Parte 1 de 2

Símbolo	Variable	Unidades ips	Unidades SI	Véase
A	área (con varios subíndices)	in^2	m^2	varios
A_b	área total del perno	in^2	m^2	Ec. 11.11*a*
A_m	rigidez efectiva del material en la zona de sujeción	in^2	m^2	Ec. 11.18-22
A_t	área del esfuerzo de tensión en el perno	in^2	m^2	Secc. 11.1
C	constante de rigidez de la junta	ninguna	ninguna	Ec. 11.13
C_{carga}	factor de carga	ninguna	ninguna	Ej. 11-3
C_{conf}	factor de confiabilidad	ninguna	ninguna	Ej. 11-3
$C_{tamaño}$	factor de tamaño	ninguna	ninguna	Ej. 11-3
C_{sup}	factor de superficie	ninguna	ninguna	Ej. 11-3
C_{temp}	factor de temperatura	ninguna	ninguna	Ej. 11-3
d	diámetro (con varios subíndices)	in	m	varios
D	diámetro (con varios subíndices)	in	m	varios
e	eficiencia	ninguna	ninguna	Ec. 11.7
E	módulo de Young	psi	Pa	varios
F	fuerza (con varios subíndices)	lb	N	varios
f	fuerza de fricción	lb	N	Ec. 11.4
F_b	fuerza máxima en el perno	lb	N	Secc. 11.7
F_i	fuerza de precarga	lb	N	Secc. 11.7
F_m	fuerza mínima en el material	lb	N	Secc. 11.7
HRC	Dureza Rockwell C	ninguna	ninguna	varios
J	segundo momento polar de área	in^4	m^4	Ec. 11.9
k	constante de resorte (con varios subíndices)	lb/in	N/m	Secc. 11.7
k_b	rigidez del perno (constante del resorte)	lb/in	N/m	Secc. 11.7
k_m	rigidez del material (constante del resorte)	lb/in	N/m	Secc. 11.7
K_f	factor de concentración de esfuerzo por fatiga	ninguna	ninguna	Ec. 11.15*b*
K_{fm}	factor de concentración de esfuerzo medio por fatiga	ninguna	ninguna	Ec. 11.15*b*
l	longitud (con varios subíndices)	in	m	varios
L	avance de la cuerda	in	mm	Secc. 11.2
n	número de sujetadores	ninguna	ninguna	Secc. 11.10
N	número de cuerdas por unidad de longitud	ninguna	ninguna	Secc. 11.2
N_f	factor de seguridad contra fatiga	ninguna	ninguna	Ec. 11.16
N_{afloj}	factor de seguridad, fuga	ninguna	ninguna	Est. de caso 8D
N_y	factor de seguridad, fluencia estática	ninguna	ninguna	Ej. 11-2
N_{sep}	factor de seguridad, separación	ninguna	ninguna	Ec. 11.14*d*
p	paso de la cuerda	in	mm	varios
P	carga (con varios subíndices)	lb	N	varios
P_b	porción de la carga experimentada por la precarga del perno	lb	N	Ec. 11.13
P_m	porción de la carga experimentada por la precarga del material	lb	N	Ec. 11.13
r	radio	in	m	Secc. 11.10

Con frecuencia se adjudica erróneamente el epígrafe de la página anterior a Benjamín Franklin, quien popularizó la máxima de Herbert como prefacio a su *Poor Richard's Almanac* un siglo más tarde. Como quiera que sea, la validez de la máxima se evidencia en una experiencia contemporánea. El *Boston Sunday Globe*, del 16 de octubre de 1994, informó que en el verano de 1994 tres ensambles de combustible radiactivo en la planta de energía nuclear de Seabrook, N.H., se dañaron cuando un perno de 5 libras, de varios pies de largo, se barrió dentro del reactor de enfriamiento por agua después de que vibró y se desajustó de la bomba a la que estaba sujeto. El cierre de la planta para las reparaciones costaría a los usuarios millones de dólares para reponer la electricidad. El accidente se atribuyó al diseño deficiente del sujetador. A falta de un tornillo…, etcétera.

La fotografía de inicio del capítulo es cortesía de Fastbolt Inc., South Hackensack, N.J., 07606

Tabla 11-0 Variables utilizadas en este capítulo
Parte 2 de 2

Símbolo	Variable	Unidades ips	Unidades SI	Véase
S_e	límite de resistencia corregido	psi	Pa	varios
$S_{e'}$	límite de resistencia sin corregir	psi	Pa	varios
S_p	resistencia de prueba del perno	psi	Pa	Secc. 11.6
S_{us}	resistencia última al cortante	psi	Pa	varios
S_{ut}	resistencia última a la tensión	psi	Pa	varios
S_y	resistencia a la fluencia	psi	Pa	varios
S_{ys}	resistencia a la fluencia por cortante	psi	Pa	Ej. 11.6
T	torque	lb-in	N-m	Ec. 11.5
w_i, w_o	factores geométricos de la cuerda	ninguna	ninguna	Tabla 11-5
W	trabajo	in-lb	joules	Ec. 11.7
x, y	variables de longitud generales	in	m	
α	ángulo radial de la cuerda	grad	grad	Ec. 11.5
δ	deflexión	in	m	Secc. 11.7
λ	ángulo de avance	grad	grad	Secc. 11.2
μ	coeficiente de fricción	ninguna	ninguna	Secc. 11.2
σ	esfuerzo normal (con varios subíndices)	psi	Pa	varios
τ	esfuerzo cortante (con varios subíndices)	psi	Pa	Secc. 11.3



FIGURA 11-1

Muestra de la variedad de sujetadores disponibles comercialmente *Cortesía de Bolt Products Inc., City of Industry, Calif., 91745*

11.1 PERFILES DE CUERDAS ESTÁNDARES

El elemento común entre tornillos sujetadores es la cuerda. En términos generales, la cuerda es una hélice que, cuando gira, provoca que el tornillo avance hacia la pieza de trabajo o la tuerca. La cuerda es externa (tornillo) o interna (tuerca u orificio roscado). Originalmente, los perfiles de la cuerda diferían entre sí, dependiendo del país de manufactura; no obstante, después de la Segunda Guerra Mundial se estandarizaron en Gran Bretaña, Canadá y Estados Unidos, por lo que ahora se conoce como estándar nacional unificado (UNS), como se muestra en la figura 11-2. También fue definido por la ISO un estándar europeo que tiene básicamente el mismo perfil de la sección transversal de la cuerda, pero utiliza dimensiones métricas, de modo que no es intercambiable con las cuerdas del UNS. En Estados Unidos se emplean tanto las cuerdas del UNS como de la ISO. Ambas emplean un ángulo incluido de 60° y definen el tamaño de la cuerda mediante el diámetro exterior (mayor) nominal d en una cuerda externa. El paso p de la cuerda es la distancia entre cuerdas adyacentes. Las crestas y las raíces se definen como aplanadas para reducir la concentración de esfuerzos de lo que sería una esquina afilada. Las especificaciones toman en cuenta el redondeo de dichas superficies planas debido al uso de la herramienta. El diámetro de paso d_p y el diámetro raíz d_r se definen en términos del paso p de la cuerda, con razones ligeramente diferentes entre las cuerdas de ISO y UNS.

El avance L de la cuerda es la distancia que una cuerda emparejada (tuerca) avanzará axialmente con una revolución de la tuerca. Si se trata de una **cuerda simple**, como la mostrada en la figura 11-2, el avance es igual al paso. Los tornillos también se fabrican con **cuerdas múltiples**, llamadas cuerdas de **arranque múltiple**. Una **cuerda doble** (2 arranques) tiene dos ranuras paralelas enrolladas alrededor del diámetro, como un par de “vías de ferrocarril” helicoidales. En este caso, el avance será el doble del paso. Una **cuerda triple** (3 arranques) tendrá un avance de tres veces el paso y así sucesivamente. La ventaja de las cuerdas múltiples se refleja en la menor altura de la cuerda y en el incremento del avance gracias a un avance rápido de la tuerca. Algunos tornillos automotrices, en una dirección de potencia, utilizan 5 cuerdas de arranque. Sin embargo, la mayoría de tornillos se fabrican sólo con una cuerda simple (1 arranque).

En las cuerdas de UNS se definen tres series de estándares para las familias de cuerdas: paso grueso (UNC), paso fino (UNF) y paso extrafino (UNEF). La ISO también define series de cuerdas gruesas y finas. La **serie gruesa** es más común y se recomienda para aplicaciones ordinarias, sobre todo donde se requieren inserciones y remociones frecuentes del tornillo, o bien, donde el tornillo está roscado en un material blando. Es menos probable que las cuerdas gruesas atraviesen o estropeen el material blando en las inserciones. Las **cuerdas finas** son más resistentes al aflojamiento por vibraciones que las cuerdas gruesas,

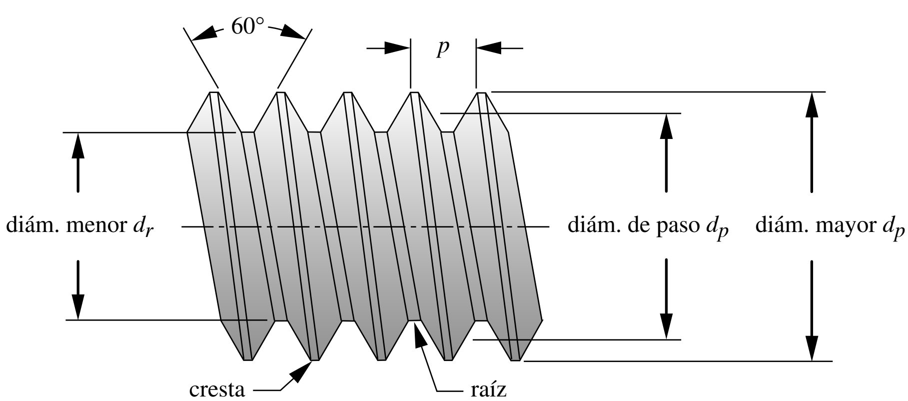


FIGURA 11-2

Perfil de cuerda estándar nacional unificado e ISO

debido al ángulo de hélice más pequeño;por lo mismo, se emplean en automóviles, aviones y otras aplicaciones sometidas a vibraciones. Las cuerdas de la **serie extrafina** se usan donde el espesor de la pared es limitado y sus cuerdas cortas son una ventaja.

Los estándares unificados nacionales e ISO definen rangos de tolerancia para cuerdas internas y externas, con la finalidad de controlar su ajuste. La UNS define tres clases de ajuste, identificadas como clase 1, 2 y 3. La clase 1 presenta las mayores tolerancias y se utiliza en sujetadores con "calidad de ferretería" (es decir, la menos costosa), y están orientadas al uso doméstico. La clase 2 define tolerancias más estrechas para un ajuste de mejor calidad entre las cuerdas emparejadas y es adecuada para aplicaciones generales en diseño de máquinas. La clase 3 es la de más alta precisión; se recomienda donde se necesitan ajustes de más alta exactitud. Los costos se incrementan con la clase de ajuste más alta. Una letra identifica si se trata de una cuerda externa (A) o de una cuerda interna (B).

Una cuerda se especifica con un código que define su serie, diámetro, paso y clase de ajuste. El paso de las cuerdas de UNS se define recíprocamente como el número de cuerdas por pulgada, mientras que el paso de cuerda métrico (ISO) se especifica por la dimensión del paso en mm. Un ejemplo de especificación de cuerda de UNS es

1/4-20 UNC-2A

la cual define un diámetro de 0.250 in por 20 cuerdas por pulgada, serie gruesa, clase de ajuste 2 y cuerda externa. Un ejemplo de especificación de cuerda métrica es

M8 x 1.25

que define un diámetro de 8 mm con un paso de cuerda igual a 1.25 mm en la serie gruesa de la ISO. Todas las cuerdas estándar están roscadas a la derecha (RH), si no se indica lo contrario, a menos que se detalle roscado a la izquierda agregando las letras LH a la especificación.* Una cuerda derecha avanzará la tuerca (o el tornillo) alejándose de usted cuando se gira en el sentido de las manecillas del reloj.

Área de esfuerzo a la tensión

Si una varilla roscada, como la que se ilustra en la figura 11-2, está sometida a carga de tensión pura, se podría esperar que su resistencia esté limitada por el área de su diámetro (de raíz) menor d_r. Sin embargo, las pruebas con varillas roscadas a la tensión muestran que su resistencia a la tensión está mejor definida por el promedio de los diámetros menor y de paso. El *área de esfuerzo por tensión* A_t se define como

$$A_t = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d_p + d_r}{2}\right)^2 \tag{11.1a}$$

donde, para cuerdas de UNS:

$$d_p = d - 0.649\,519/N \qquad d_r = d - 1.299\,038/N \tag{11.1b}$$

y para cuerdas de la ISO:

$$d_p = d - 0.649\,519p \qquad d_r = d - 1.226\,869p \tag{11.1c}$$

con d = diámetro exterior, N = número de cuerdas por pulgada y p = paso en mm.

El esfuerzo en una varilla roscada, debido a una carga F de torsión axial pura es, entonces,

$$\sigma_t = \frac{F}{A_t} \tag{11.2}$$

* Una tuerca roscada a la izquierda frecuentemente tiene una hendidura cortada circunferencialmente alrededor de sus planos hexagonales, para identificarla como una tuerca roscada a la izquierda (LH).

11

Dimensiones estándares de cuerda

La tabla 11-1 muestra las dimensiones principales de cuerdas del UNS y la tabla 11-2 presenta las mismas para las cuerdas ISO. Las cuerdas UNS con diámetro menor de 0.25 in se identifican por un número de calibre. Un algoritmo adecuado para determinar el diámetro de cuerdas numeradas es multiplicar el número de calibre por 13 y sumar 60.

Tabla 11-1 Dimensiones principales de las cuerdas de tornillos del estándar nacional unificado

Datos calculados con las ecuaciones 11.1; véase la referencia 3 para mayor información

		Cuerdas gruesas, UNC			Cuerdas finas, UNF		
Tamaño	Diámetro mayor d (in)	Cuerdas por pulgada	Diámetro menor d_r (in)	Área de esfuerzo por tensión A_t (in^2)	Cuerdas por pulgada	Diámetro menor d_r (in)	Área de esfuerzo por tensión A_t (in^2)
0	0.0600	–	–	–	80	0.0438	0.0018
1	0.0730	64	0.0527	0.0026	72	0.0550	0.0028
2	0.0860	56	0.0628	0.0037	64	0.0657	0.0039
3	0.0990	48	0.0719	0.0049	56	0.0758	0.0052
4	0.1120	40	0.0795	0.0060	48	0.0849	0.0066
5	0.1250	40	0.0925	0.0080	44	0.0955	0.0083
6	0.1380	32	0.0974	0.0091	40	0.1055	0.0101
8	0.1640	32	0.1234	0.0140	36	0.1279	0.0147
10	0.1900	24	0.1359	0.0175	32	0.1494	0.0200
12	0.2160	24	0.1619	0.0242	28	0.1696	0.0258
1/4	0.2500	20	0.1850	0.0318	28	0.2036	0.0364
5/16	0.3125	18	0.2403	0.0524	24	0.2584	0.0581
3/8	0.3750	16	0.2938	0.0775	24	0.3209	0.0878
7/16	0.4375	14	0.3447	0.1063	20	0.3725	0.1187
1/2	0.5000	13	0.4001	0.1419	20	0.4350	0.1600
9/16	0.5625	12	0.4542	0.1819	18	0.4903	0.2030
5/8	0.6250	11	0.5069	0.2260	18	0.5528	0.2560
3/4	0.7500	10	0.6201	0.3345	16	0.6688	0.3730
7/8	0.8750	9	0.7307	0.4617	14	0.7822	0.5095
1	1.0000	8	0.8376	0.6057	12	0.8917	0.6630
1 1/8	1.1250	7	0.9394	0.7633	12	1.0167	0.8557
1 1/4	1.2500	7	1.0644	0.9691	12	1.1417	1.0729
1 3/8	1.3750	6	1.1585	1.1549	12	1.2667	1.3147
1 1/2	1.5000	6	1.2835	1.4053	12	1.3917	1.5810
1 3/4	1.7500	5	1.4902	1.8995			
2	2.0000	4.5	1.7113	2.4982			
2 1/4	2.2500	4.5	1.9613	3.2477			
2 1/2	2.5000	4	2.1752	3.9988			
2 3/4	2.7500	4	2.4252	4.9340			
3	3.0000	4	2.6752	5.9674			
3 1/4	3.2500	4	2.9252	7.0989			
3 1/2	3.5000	4	3.1752	8.3286			
3 3/4	3.7500	4	3.4252	9.6565			
4	4.0000	4	3.6752	11.0826			

Tabla 11-2 Dimensiones principales de cuerdas de tornillos del estándar métrico ISO
Datos calculados con las ecuaciones 11.1; véase la referencia 4 para mayor información

	Cuerdas gruesas			Cuerdas finas		
Diámetro mayor d (mm)	Paso p mm	Diámetro menor d_r (mm)	Área de esfuerzo por tensión A_t (mm^2)	Paso p mm	Diámetro menor d_r (mm)	Área de esfuerzo por tensión A_t (mm^2)
3.0	0.50	2.39	5.03			
3.5	0.60	2.76	6.78			
4.0	0.70	3.14	8.78			
5.0	0.80	4.02	14.18			
6.0	1.00	4.77	20.12			
7.0	1.00	5.77	28.86			
8.0	1.25	6.47	36.61	1.00	6.77	39.17
10.0	1.50	8.16	57.99	1.25	8.47	61.20
12.0	1.75	9.85	84.27	1.25	10.47	92.07
14.0	2.00	11.55	115.44	1.50	12.16	124.55
16.0	2.00	13.55	156.67	1.50	14.16	167.25
18.0	2.50	14.93	192.47	1.50	16.16	216.23
20.0	2.50	16.93	244.79	1.50	18.16	271.50
22.0	2.50	18.93	303.40	1.50	20.16	333.06
24.0	3.00	20.32	352.50	2.00	21.55	384.42
27.0	3.00	23.32	459.41	2.00	24.55	495.74
30.0	3.50	25.71	560.59	2.00	27.55	621.20
33.0	3.50	28.71	693.55	2.00	30.55	760.80
36.0	4.00	31.09	816.72	3.00	32.32	864.94
39.0	4.00	34.09	975.75	3.00	35.32	1028.39

El resultado es aproximadamente el diámetro mayor en milésimas de pulgada. El diámetro menor es igual al diámetro mayor menos el paso. Consulte las referencias 2, 3 y 4 para información dimensional más detallada sobre cuerdas estándares, incluyendo tolerancias para diferentes clases de ajuste.

11.2 TORNILLOS DE POTENCIA

Los tornillos de potencia, llamados también tornillos de avance, convierten el movimiento giratorio en movimiento lineal en actuadores, máquinas de producción y gatos mecánicos, entre muchas otras aplicaciones. Son capaces de obtener ventajas mecánicas muy grandes; por consiguiente, pueden elevar o mover grandes cargas. En estos casos, se necesita un perfil de cuerda muy fuerte. Mientras que los perfiles estándares de cuerdas antes descritos están bien adaptados para utilizarse en sujetadores, quizá no sean lo suficientemente fuertes para todas las aplicaciones de tornillos de potencia. Se han estandarizado otros perfiles de cuerda para dichas aplicaciones.

Cuerdas cuadradas, Acme y reforzadas

La cuerda cuadrada mostrada en la figura 11-3*a* proporciona las mayores eficiencias y resistencias; asimismo, elimina las componentes radiales de fuerza entre el tornillo y la tuerca. Sin embargo, es más difícil cortarla debido a la perpendicularidad de su cara.

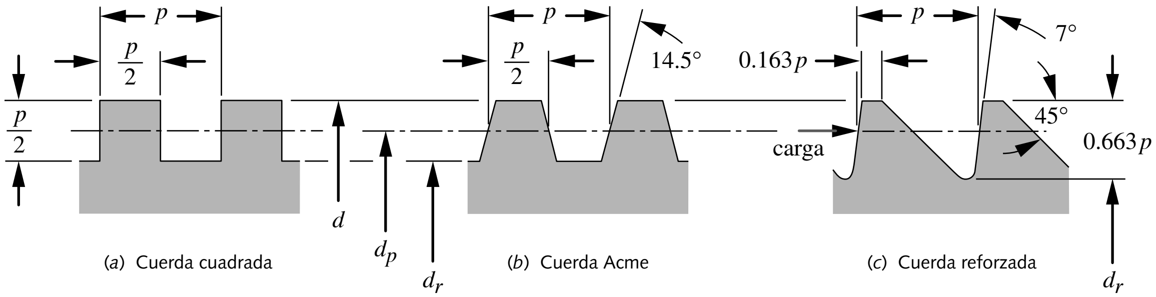


FIGURA 11-3

Cuerdas cuadrada, Acme y reforzada

Se fabrica también una cuerda, que es una modificación de la cuadrada (no mostrada) con un ángulo incluido de 10° para facilitar su fabricación. La cuerda Acme, de la figura 11-3*b*, tiene un ángulo incluido de 29°, lo cual la hace más fácil de fabricar y, asimismo, permite el uso de una tuerca dividida que se apriete radialmente contra el tornillo para reducir el desgaste. También existe una cuerda Acme de perno (no mostrada), con dientes de 0.3*p* de altura, en vez del estándar de 0.5*p*. Tiene la ventaja de un tratamiento térmico más uniforme. La cuerda Acme es una selección común para tornillos de potencia que deben transportar cargas en ambas direcciones. Si la carga axial sobre el tornillo es unidireccional, la cuerda reforzada (figura 11-3*c*) se podría usar para obtener una mayor resistencia en la raíz que cualquier otra de las mostradas. La tabla 11-3 muestra las dimensiones principales de las cuerdas estándares Acme.

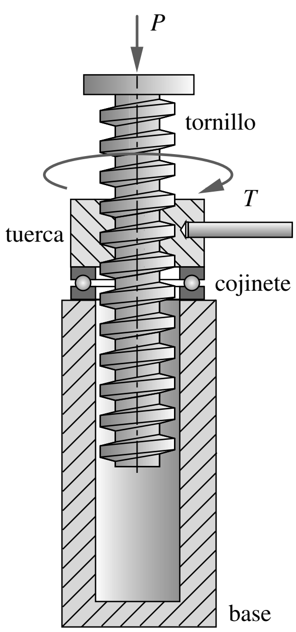


FIGURA 11-4

Gato mecánico con tornillo de potencia con cuerda Acme

11

Aplicación de tornillos de potencia

La figura 11-4 muestra una posible configuración de un tornillo de potencia como un gato mecánico para levantar una carga. La tuerca gira mediante el torque *T* aplicado y el tornillo se mueve hacia arriba para elevar o hacia abajo para bajar la carga *P*. Debe haber cierta fricción en la superficie de la carga para evitar que el tornillo gire junto con la tuerca. Una vez que se ocupa la carga *P*, esto no es un problema. Alternativamente, el tornillo puede girar contra una tuerca fija para levantar la carga. En cualquier caso, existirá fricción significativa entre el tornillo y la tuerca, así como fricción entre la tuerca y la base, lo cual requiere un cojinete de empuje, como se indica. Si se utiliza un cojinete plano de empuje (es decir, sin rodamientos) es posible generar, en el punto de contacto del cojinete, un torque con fricción mayor que en las cuerdas. En esta aplicación se usan con frecuencia cojinetes de bolas de empuje para reducir tales pérdidas.

Otras aplicaciones de los tornillos de potencia son los actuadores lineales que operan con el mismo principio mostrado en la figura 11-4, pero el giro de la tuerca se motoriza para trasladarlo al tornillo, o bien, se motoriza el giro del tornillo para trasladarlo a la tuerca, como se ilustra en la figura 11-5. Estos dispositivos se usan en máquinas herramientas para mover el banco y la pieza de trabajo bajo la herramienta de corte, en máquinas de ensamble para posicionar partes, y en aeroplanos para mover las superficies de control, así como en muchas otras aplicaciones. Si el giro de entrada se suministra con un servomotor o un motor por etapas, en combinación con un tornillo de avance de precisión, se obtiene un posicionamiento muy preciso.

Tabla 11-3 Dimensiones principales de cuerdas estándares Acme
Consulte la referencia 2 para información más completa sobre dimensiones y tolerancias

Diámetro mayor (in)	Cuerdas por pulgada	Paso de la cuerda (in)	Diámetro de paso (in)	Diámetro menor (in)	Área de esfuerzo por tensión (in^2)
0.250	16	0.063	0.219	0.188	0.032
0.313	14	0.071	0.277	0.241	0.053
0.375	12	0.083	0.333	0.292	0.077
0.438	12	0.083	0.396	0.354	0.110
0.500	10	0.100	0.450	0.400	0.142
0.625	8	0.125	0.563	0.500	0.222
0.750	6	0.167	0.667	0.583	0.307
0.875	6	0.167	0.792	0.708	0.442
1.000	5	0.200	0.900	0.800	0.568
1.125	5	0.200	1.025	0.925	0.747
1.250	5	0.200	1.150	1.050	0.950
1.375	4	0.250	1.250	1.125	1.108
1.500	4	0.250	1.375	1.250	1.353
1.750	4	0.250	1.625	1.500	1.918
2.000	4	0.250	1.875	1.750	2.580
2.250	3	0.333	2.083	1.917	3.142
2.500	3	0.333	2.333	2.167	3.976
2.750	3	0.333	2.583	2.417	4.909
3.000	2	0.500	2.750	2.500	5.412
3.500	2	0.500	3.250	3.000	7.670
4.000	2	0.500	3.750	3.500	10.321
4.500	2	0.500	4.250	4.000	13.364
5.000	2	0.500	4.750	4.500	16.800

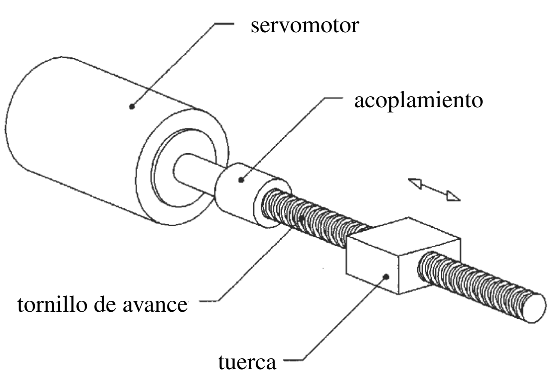


FIGURA 11-5

Tornillo de avance impulsado por un servomotor para usarse como un dispositivo de posicionamiento.
Cortesía de J. Karsberg, Gillette Co. Inc.

Análisis de fuerza y torque en un tornillo de potencia

CUERDAS CUADRADAS La cuerda de un tornillo es esencialmente un plano inclinado que se enrolla alrededor de un cilindro para crear una hélice. Si enrollamos una revolución de la hélice, luciría como en la figura 11-6*a*, la cual muestra un bloque que representa una tuerca que se desliza por el plano inclinado de la cuerda cuadrada. También se presenta el diagrama de cuerpo libre con las fuerzas que actúan sobre la tuerca. La figura 11-6*b* ilustra el diagrama de cuerpo libre de la misma tuerca, conforme se desliza hacia abajo del plano. La fuerza de fricción, desde luego, siempre se opone al movimiento. La inclinación del plano se conoce como el ángulo de avance λ.

$$\tan\lambda = \frac{L}{\pi d_p} \tag{11.3}$$

Para el caso de elevación de carga de la figura 11-6*a*, se suman las fuerzas en las direcciones x y y:

$$\sum F_x = 0 = F - f\cos\lambda - N\operatorname{sen}\lambda = F - \mu N\cos\lambda - N\operatorname{sen}\lambda$$

$$F = N(\mu\cos\lambda + \operatorname{sen}\lambda) \tag{11.4a}$$

$$\sum F_y = 0 = N\cos\lambda - f\operatorname{sen}\lambda - P = N\cos\lambda - \mu N\operatorname{sen}\lambda - P$$

$$N = \frac{P}{(\cos\lambda - \mu\operatorname{sen}\lambda)} \tag{11.4b}$$

donde μ es el coeficiente de fricción entre el tornillo y la tuerca, mientras las otras variables están definidas en la figura 11-6. Se combinan estas ecuaciones para obtener una expresión para la fuerza F:

$$F = P\frac{(\mu\cos\lambda + \operatorname{sen}\lambda)}{(\cos\lambda - \mu\operatorname{sen}\lambda)} \tag{11.4c}$$

11

El torque T_{s_u} del tornillo requerido para elevar la carga es

$$T_{s_u} = F\frac{d_p}{2} = \frac{Pd_p}{2}\frac{(\mu\cos\lambda + \operatorname{sen}\lambda)}{(\cos\lambda - \mu\operatorname{sen}\lambda)} \tag{11.4d}$$

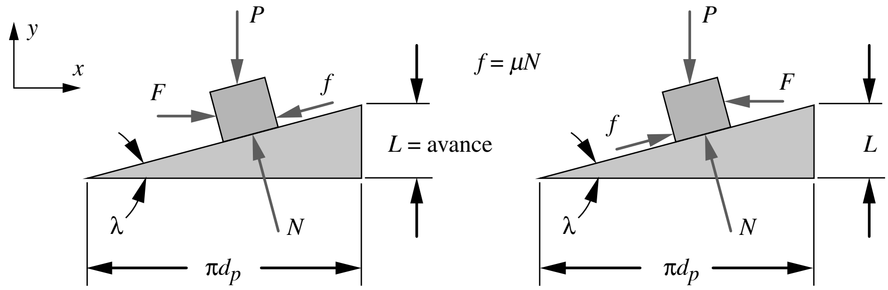
Algunas veces es más conveniente expresar esto como una función del avance L en vez del ángulo de avance λ, de modo que el numerador y el denominador de la ecuación 11.4*d* se dividen entre el cos λ y se sustituye el lado derecho de la ecuación 11.3 por tan λ:

$$T_{s_u} = \frac{Pd_p}{2}\frac{(\mu\pi d_p + L)}{(\pi d_p - \mu L)} \tag{11.4e}$$

Esta expresión toma en cuenta el punto de contacto tornillo-tuerca de una cuerda cuadrada, pero el collarín de empuje también contribuye al torque de fricción, el cual se debe sumar. El torque requerido para girar el collarín de empuje es

$$T_c = \mu_c P\frac{d_c}{2} \tag{11.4f}$$

donde d_c es el diámetro medio del collarín de empuje y μ_c es el coeficiente de fricción en el cojinete de empuje. Observe que el torque necesario para vencer la fricción del collarín



(*a*) Al levantar la carga arriba del plano (*b*) Al bajar la carga del plano

FIGURA 11-6

Análisis de fuerzas en el punto de contacto tornillo-tuerca

puede ser igual o bien, exceder el torque del tornillo, a menos que se usen cojinetes de rodamiento en el collarín de empuje. Diámetros menores en el collarín también reducen el torque del mismo.

El **torque total** T_u para **levantar la carga** con una cuerda cuadrada es, entonces,

$$T_u = T_{s_u} + T_c = \frac{Pd_p}{2}\frac{\left(\mu\pi d_p + L\right)}{\left(\pi d_p - \mu L\right)} + \mu_c P\frac{d_c}{2} \tag{11.4g}$$

Se puede hacer el mismo análisis para el caso del descenso de la carga, como se muestra en la figura 11-6*b*. Los signos de la fuerza aplicada y de fricción cambian, en tanto el **torque** T_d para **bajar la carga** es

$$T_d = T_{s_d} + T_c = \frac{Pd_p}{2}\frac{\left(\mu\pi d_p - L\right)}{\left(\pi d_p + \mu L\right)} + \mu_c P\frac{d_c}{2} \tag{11.4h}$$

Cuerdas Acme El ángulo radial de una cuerda Acme (o cualquiera otra) introduce un factor adicional en las ecuaciones de torque. La fuerza normal entre el tornillo y la tuerca está angulada en dos planos, en el ángulo de avance λ, como se muestra en la figura 11-6, y en el ángulo $\alpha = 14.5°$ de la cuerda Acme, como se indica en la figura 11-7. Se hace una deducción similar a la de la cuerda cuadrada para obtener las expresiones para los torques de elevación y descenso

$$T_u = T_{s_u} + T_c = \frac{Pd_p}{2}\frac{\left(\mu\pi d_p + L\cos\alpha\right)}{\left(\pi d_p\cos\alpha - \mu L\right)} + \mu_c P\frac{d_c}{2} \tag{11.5a}$$

$$T_d = T_{s_d} + T_c = \frac{Pd_p}{2}\frac{\left(\mu\pi d_p - L\cos\alpha\right)}{\left(\pi d_p\cos\alpha + \mu L\right)} + \mu_c P\frac{d_c}{2} \tag{11.5b}$$

Estas ecuaciones se reducen a las de cuerda cuadrada, cuando $\alpha = 0$.

Coeficientes de fricción

Los experimentos indican que el coeficiente de fricción en un conjunto cuerda-tuerca, lubricado con aceite, es de aproximadamente 0.15 ± 0.05.[5] La fricción en un cojinete plano (sin rodamientos) de empuje es aproximadamente la misma que en las cuerdas.

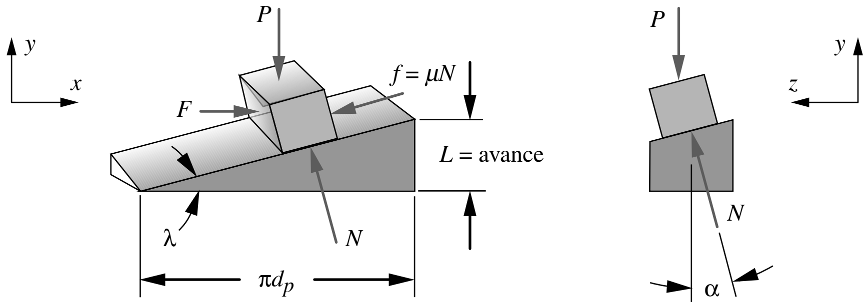


FIGURA 11-7

Análisis de fuerzas en el punto de contacto tornillo-tuerca en una cuerda Acme

El acero sobre bronce o acero sobre hierro colado son combinaciones comunes en los cojinetes planos. Si se utiliza un cojinete de rodamiento con arandela de empuje, su coeficiente de fricción será alrededor de 1/10 de los valores de un cojinete plano (es decir, de 0.01 a 0.02).

Autobloqueo y retroceso en tornillos de potencia

El autobloqueo se refiere a una condición donde el tornillo no se puede regresar, debido a la aplicación axial de una fuerza de cualquier magnitud (no un torque) a la tuerca. En otras palabras, un tornillo de autobloqueo mantendrá la carga en su lugar sin aplicación alguna de torque. No necesita un freno para sostener la carga. Ésta es una situación muy útil. Por ejemplo, si se levanta un automóvil con un gato mecánico de tornillo sin autobloqueo, tan pronto como usted deje de manejar el gato, el vehículo regresaría el gato hacia abajo. Tendría que ser bastante rápido con la llave de birlos para cambiar la llanta en este caso.

La situación contraria al autobloqueo es un tornillo que puede retrocederse, lo cual significa que el empuje axial sobre la tuerca causa el retorno del tornillo. Mientras no tiene valor en la aplicación del gato, ésta es una característica útil en otras situaciones. Un ejemplo es el llamado *destornillador Yankee*, que tiene una cuerda de gran avance en el barril que sujeta la hoja. El mango es la tuerca. Conforme se empuja el mango axialmente hacia abajo, el barril gira, impulsando el tornillo de madera a su lugar. Cualquier aplicación, donde se desee convertir movimiento lineal a movimiento giratorio, es candidata para un tornillo de avance con retroceso.

La condición de autobloqueo de un tornillo de avance o de potencia se pronostica fácilmente, si se conoce el coeficiente de fricción en la junta tornillo-tuerca. La relación entre el coeficiente de fricción y el ángulo de avance del tornillo determina la condición de autobloqueo. El tornillo se autobloqueará si

$$\mu \geq \frac{L}{\pi d_p} \cos\alpha \qquad \text{o bien,} \qquad \mu \geq \tan\lambda \cos\alpha \tag{11.6a}$$

Si se trata de una cuerda cuadrada, $\cos\alpha = 1$, lo cual se reduce a

$$\mu \geq \frac{L}{\pi d_p} \qquad \text{o bien,} \qquad \mu \geq \tan\lambda \tag{11.6b}$$

Observe que estas relaciones suponen una situación de carga estática. La presencia de cualquier vibración desde una carga dinámica u otras fuentes ocasionaría, entre otras cuestiones, el autobloqueo del tornillo para que no dé marcha hacia atrás. Cualquier vibración que implique movimiento relativo, entre el tornillo y la tuerca inevitablemente, causará deslizamiento hacia abajo de la pendiente de la cuerda.

Eficiencia del tornillo

La eficiencia de cualquier sistema se define como *trabajo saliente/trabajo entrante*. El trabajo realizado por un tornillo de potencia es el producto del torque por el desplazamiento angular (en radianes), el cual, para una revolución del tornillo, es

$$W_{ent} = 2\pi T \tag{11.7a}$$

El trabajo entregado en una revolución es la fuerza de la carga multiplicada por el avance:

$$W_{sal} = PL \tag{11.7b}$$

Entonces la eficiencia es

$$e = \frac{W_{sal}}{W_{ent}} = \frac{PL}{2\pi T} \tag{11.7c}$$

Sustituyendo la ecuación 11.15*a* (despreciando el término de fricción del collarín) se tiene

$$e = \frac{L}{\pi d_p} \frac{\pi d_p \cos\alpha - \mu L}{\pi \mu d_p + L\cos\alpha} \tag{11.7d}$$

Lo anterior se simplifica al sustituir la ecuación 11.3:

$$e = \frac{\cos\alpha - \mu \tan\lambda}{\cos\alpha + \mu \cot\lambda} \tag{11.7e}$$

Observe que la eficiencia es una función tan sólo de la geometría del tornillo y del coeficiente de fricción. Para una cuerda cuadrada, $\alpha = 0$ y

$$e = \frac{1 - \mu \tan\lambda}{1 + \mu \cot\lambda} \tag{11.7f}$$

La figura 11-8 muestra gráficas de la función de eficiencia de una cuerda Acme en un intervalo de coeficientes de fricción, despreciando la fricción del collarín. Mayores coeficientes de fricción reducen la eficiencia, como era de esperarse. Observe que la eficiencia es cero cuando el ángulo de avance $\lambda = 0$, porque no se realiza trabajo útil para levantar la carga, aunque la fricción aún esté presente. La eficiencia también se aproxima a cero con ángulos de avance grandes, debido a que el torque tan sólo incrementa la fuerza normal (y, por lo tanto, la fricción), sin una componente que haga girar la tuerca. La eficiencia total —incluyendo la fricción del collarín— es menor que la que se presenta en la figura 11-8.

La figura 11-8 señala la mayor desventaja de los tornillos de potencia convencionales: su eficiencia potencialmente baja. Los tornillos estándares Acme tienen ángulos de avance que varían entre 2° y 5°, como se indica en la tabla 11-4. Esto los coloca en el extremo izquierdo de este grupo de curvas en la figura 11-8. En la tabla 11-4 se observa que las eficiencias de los tornillos estándares Acme, para un coeficiente de fricción supuesto de 0.15, varían entre 18% y 36%. Si se reduce la fricción en la cuerda, se incrementaría significativamente la eficiencia.

Tabla 11-4
Ángulo de avance y eficiencia de cuerdas estándar Acme con el coeficiente de fricción μ = 0.15

Tamaño	Ángulo de avance (grad)	Eficiencia %
1/4 - 16	5.2	36
5/16 - 14	4.7	34
3/8 - 12	4.5	34
7/16 - 12	3.8	30
1/2 - 10	4.0	31
5/8 - 8	4.0	31
3/4 - 6	4.5	34
7/8 - 6	3.8	30
1 - 5	4.0	31
1 1/8 - 5	3.6	28
1 1/4 - 5	3.2	26
1 3/8 - 4	3.6	29
1 1/2 - 4	3.3	27
1 3/4 - 4	2.8	24
2 - 4	2.4	21
2 1/4 - 3	2.9	25
2 1/2 - 3	2.6	23
2 3/4 - 3	2.4	21
3 - 2	3.3	27
3 1/2 - 2	2.8	24
4 - 2	2.4	21
4 1/2 - 2	2.1	19
5 - 2	1.9	18

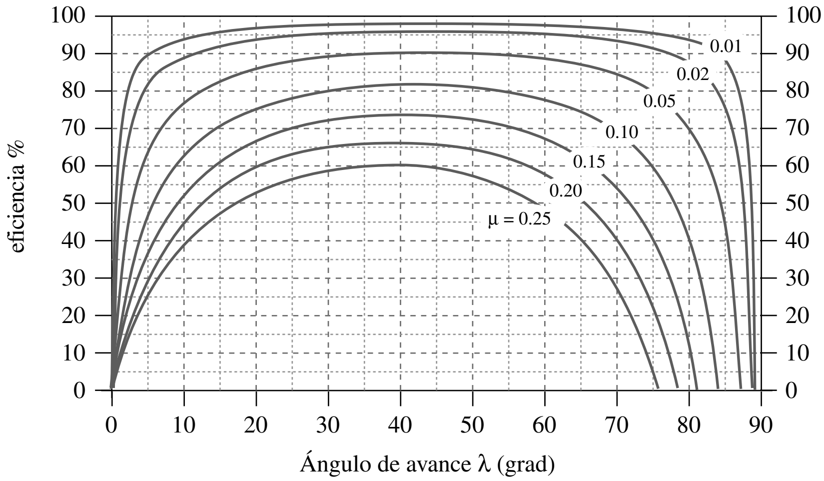


FIGURA 11-8

Eficiencia de un tornillo de potencia con cuerda Acme (despreciando la fricción del collarín de empuje)

Tornillos de bolas

Es posible obtener una reducción significativa en la fricción de la cuerda empleando tornillos de bolas, los cuales utilizan un tren de cojinetes de bolas en la tuerca, con la finalidad de crear un contacto aproximado de rodamiento con las cuerdas del tornillo, como se ilustra en la figura 11-9. El perfil de la cuerda se fabrica para ajustarse a las bolas esféricas, además de que usualmente se endurece y se esmerila para vida larga. El coeficiente de fricción es similar al de los cojinetes de bolas convencionales, colocándolos en el intervalo de las dos curvas superiores de la figura 11-8, donde se obtiene la eficiencia más alta.

La baja fricción en los tornillos de bolas los hace susceptibles al retroceso; por consiguiente, **no** son aptos para autobloqueo. De manera que se debe utilizar un freno para sostener una carga transportada por un tornillo de bolas. Así los tornillos de bolas se utilizan para convertir movimiento lineal a movimiento giratorio. Tienen una capacidad de

11

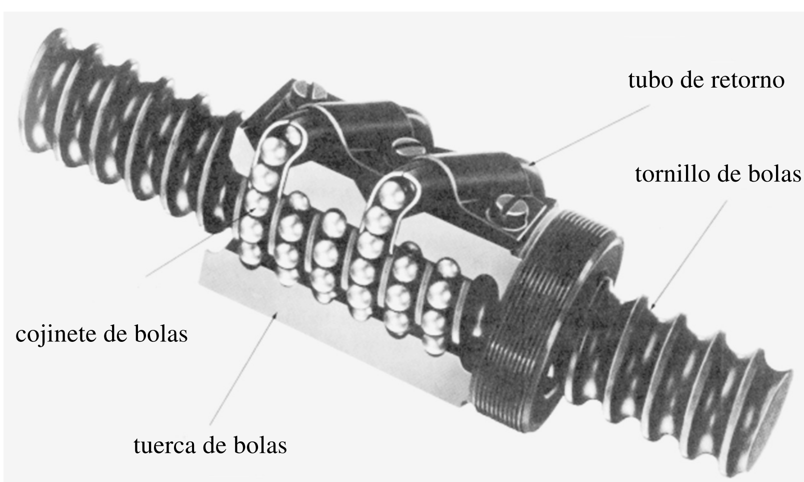


FIGURA 11-9

Tornillo y tuerca de bolas *Cortesía de Thompson-Saginaw Ball Screw Co., Saginaw, Mich.*

carga muy alta, generalmente más grande que un tornillo convencional del mismo diámetro y no padecen la adherencia/el deslizamiento característicos de las juntas con deslizamiento.

Los tornillos de bolas sirven en muchas aplicaciones, desde superficies de control en aeronaves, actuadores de engranes de aterrizaje, controles de máquinas herramientas y mecanismos de dirección automotrices, hasta mecanismos de camas de hospitales. Son muchos los fabricantes que ofrecen ensambles con tornillos de bolas, que se deberían consultar para información técnica en referente a su correcta aplicación.

EJEMPLO 11-1

Torque y eficiencia de un tornillo de potencia

Problema **Determine los torques de elevación y descenso, así como la eficiencia del tornillo de potencia mostrado en la figura 11-4 (p. 728) usando un tornillo y una tuerca Acme. ¿Es de autobloqueo? ¿Cuál es la contribución de la fricción del collarín contra la fricción del tornillo si el collarín tiene (a) fricción de deslizamiento, (b) fricción de rodamiento?**

Se proporciona **El tornillo es Acme 1.25-5 de arranque simple. La carga axial es de 1 000 lb. El diámetro medio del collarín es de 1.75 in.**

Suposiciones **El tornillo y la tuerca están lubricados con aceite. La fricción de deslizamiento es $\mu = 0.15$ y la fricción de rodamiento, $\mu = 0.02$.**

Solución

1. Hay varios aspectos en este problema. Se necesita calcular el torque de elevación y descenso para dos casos, uno con un collarín de deslizamiento con fricción y otro con un collarín con un cojinete de bolas. En ambos casos, se calcularán por separado, para fines de comparación, las contribuciones del tornillo y el collarín al torque, así como a la eficiencia y al efecto combinado. Primero se realizará el cálculo para el caso del collarín de deslizamiento.

2. Como se trata de una cuerda simple, el avance L es igual al paso p, que es $1/N = 0.2$. El diámetro de paso d_p de la cuerda se obtiene de la tabla 11-3 (p. 729). El torque para levantar la carga se determina con la ecuación 11.5a (p. 731):

$$T_u = T_{s_u} + T_c = \frac{Pd_p}{2}\frac{(\mu\pi d_p + L\cos\alpha)}{(\pi d_p\cos\alpha - \mu L)} + \mu_c P\frac{d_c}{2}$$

$$= \frac{1\,000(1.15)}{2}\frac{(0.15\pi(1.15) + 0.2\cos 14.5)}{(\pi(1.15)\cos 14.5 - 0.15(0.2))} + 0.15(1\,000)\frac{1.75}{2} \qquad (a)$$

$$T_u = 122.0 + 131.2 = 253.2 \text{ lb-in}$$

Observe que la fricción del collarín excede la fricción del tornillo.

3. El torque para bajar la carga se obtiene con la ecuación 11.5b:

$$T_d = T_{s_d} + T_c = \frac{Pd_p}{2}\frac{(\mu\pi d_p - L\cos\alpha)}{(\pi d_p\cos\alpha + \mu L)} + \mu_c P\frac{d_c}{2}$$

$$= \frac{1\,000(1.15)}{2}\frac{(0.15\pi(1.15) - 0.2\cos 14.5)}{(\pi(1.15)\cos 14.5 - 0.15(0.2))} + 0.15(1\,000)\frac{1.75}{2} \qquad (b)$$

$$T_d = 56.8 + 131.2 = 188.0 \text{ lb-in}$$

4. La eficiencia en la elevación es menor que la eficiencia del descenso y se calcula con las ecuaciones 11.7 (p. 733). Se elige la versión mostrada como la ecuación 11.7*c* para tomar en cuenta tanto la componente del tornillo como la del collarín.

$$e = \frac{PL}{2\pi T}$$

Para el tornillo $$e_{tornillo} = \frac{1\,000(0.2)}{2\pi(122.0)} = 0.26 \qquad (c)$$

Para ambos combinados $$e = \frac{1\,000(0.2)}{2\pi(253.2)} = 0.13$$

5. Ahora se recalculan el torque del collarín y el torque total para levantar la carga, con un cojinete de bolas con arandela de empuje, mediante la ecuación 11.4*f*.

$$T_c = \mu_c P \frac{d_c}{2} = 0.02(1\,000)\frac{1.75}{2} = 17.5 \text{ lb - in} \qquad (d)$$

$$T_u = T_{s_u} + T_c = 122.0 + 17.5 = 139.5 \text{ lb - in} \qquad (e)$$

6. La eficiencia con el cojinete de bolas y arandela de empuje es ahora:

$$e = \frac{PL}{2\pi T} = \frac{1\,000(0.2)}{2\pi(139.5)} = 0.23 \qquad (f)$$

La mejoría en la eficiencia es significativa y muestra por qué es una práctica deficiente usar cualquier cosa, salvo un cojinete de rodamiento con una arandela de empuje en un tornillo de potencia.

7. Los aspectos de autobloqueo del tornillo son independientes de la fricción del collarín y se determinan con la ecuación 11.6*a* (p. 732).

$$\mu \geq \frac{L}{\pi d_p}\cos\alpha$$

$$0.15 \geq \frac{0.2}{\pi(1.15)}\cos(14.5°) \qquad (g)$$

$$0.15 \geq 0.06$$ de modo que es de autobloqueo

Observe que el torque positivo de descenso del paso 3 también indica que el tornillo es de autobloqueo. Un torque negativo de descenso significa que se debe aplicar un torque de freno en sentido opuesto al torque de elevación, con la finalidad de sostener la carga. Los archivos EX15-01A y EX15-01B se encuentran en el CD-ROM.

11

11.3 ESFUERZOS EN CUERDAS

En cuerdas acopladas, se presenta una situación similar a la de los dientes de los engranes acoplados. En la sección 8.4 (p. 556) se estudió la conveniencia de tener varios dientes de engranes en contacto en un engranaje (razón de contacto > 1), en tanto la figura 8-19 (p. 568) muestra un engranaje, en el cual dos dientes soportan toda la carga debido a las imprecisiones en el espaciamiento del diente, a pesar de una razón de contacto aparentemente grande. Cuando una tuerca se enrosca en una cuerda, teóricamente todas las cuerdas en contacto deberían compartir la carga. En realidad, las imprecisiones en el espaciamiento de la cuerda ocasionan que toda la carga prácticamente esté soportada por el primer par de cuerdas. Por lo tanto, un enfoque conservador en el cálculo de los esfuerzos en la cuerda es suponer el peor de los casos de un par de cuerdas que soportan

la carga completa. El otro extremo es suponer que todas las cuerdas en contacto comparten la carga en la misma medida. Es posible utilizar ambos supuestos para calcular los esfuerzos en la cuerda. El esfuerzo verdadero estará entre tales extremos, pero quizá más cerca al supuesto de una cuerda. Los tornillos y sujetadores de potencia para aplicaciones con cargas grandes usualmente se hacen con acero de alta resistencia y, por lo general, se endurecen. Las tuercas para tornillos de potencia también pueden ser de material endurecido para mejorar la resistencia y la resistencia al desgaste. Las tuercas de sujetadores, por otro lado, con frecuencia se hacen de material blando; por consiguiente, suelen ser más débiles que el tornillo. Lo anterior facilita la fluencia local en las cuerdas de la tuerca cuando el sujetador está muy ajustado, lo cual puede mejorar el ajuste de la cuerda y facilitar la capacidad para compartir carga entre las cuerdas. Las tuercas endurecidas se usan en pernos endurecidos de alta resistencia.

Esfuerzo axial

Un tornillo de potencia puede experimentar cargas axiales de tensión o de compresión. Un sujetador roscado generalmente experimenta sólo tensión axial. El área del esfuerzo de tensión en la cuerda de un tornillo, que se analizó, está definida en la ecuación 11.1 (p. 725), así como en las tablas 11-1, 11-2 y 11-3 (pp. 726, 727 y 729, respectivamente) para varios tipos de cuerdas. La ecuación 11.2 (p. 725) se utiliza para calcular el esfuerzo de tensión axial en un tornillo. Para tornillos de potencia con carga de compresión, se debe verificar la posibilidad de pandeo mediante los métodos descritos en la sección 2.16 (p. 123). Utilice el diámetro menor del tornillo para calcular la razón de esbeltez.

Esfuerzo cortante

Una posible falla por cortante interviene en el barrido de las cuerdas de la tuerca o del tornillo. Lo cual, si ocurre cualquiera de estos dos escenarios, depende de las resistencias relativas de los materiales de la tuerca y del tornillo. Si el material de la tuerca es más débil (como es el caso con frecuencia), su cuerda se podría barrer en el diámetro mayor. Si el tornillo es más débil, su cuerda se barrería en el diámetro menor. Si ambos materiales son de igual resistencia, el ensamble se barrería a lo largo del diámetro de paso. En cualquier caso, se debe suponer algún grado de carga compartida entre las cuerdas para el cálculo de esfuerzo. Un procedimiento es considerar que, como se requiere una falla total para que todas las cuerdas se barran, todas las cuerdas comparten la carga por partes iguales. Éste es probablemente un buen supuesto, siempre que la tuerca o el tornillo (o ambos) sean dúctiles para permitir que cada cuerda ceda conforme el ensamble comienza a fallar. Sin embargo, si ambas partes son frágiles (p. ej., aceros o hierros fundidos con alta dureza) y el ajuste de la cuerda es deficiente, uno se imaginaría que cada cuerda tomará la carga completa en su momento hasta que se fractura y pasa el trabajo a la siguiente cuerda. La realidad se encuentra otra vez entre dichos extremos. Si se expresa el área de cortante, en términos del número de cuerdas en contacto, se puede hacer una evaluación en cada caso hasta que el grado para compartir carga sea el adecuado.

El área cortante por barrido A_s para la cuerda del tornillo es el área del cilindro de su diámetro menor d_r:

$$A_s = \pi d_r w_i p \tag{11.8a}$$

donde p es el paso de la cuerda y w_i es el factor que define el porcentaje del paso ocupado por el metal en el diámetro menor. En la tabla 11-5 se presentan valores de w_i para varios perfiles comunes de cuerda. Se multiplica el área de paso de una cuerda de la ecuación 11.8*a* por todos, uno o una fracción del número total de cuerdas en contacto, con base en el criterio del diseñador, para evaluar los factores analizados arriba en un caso específico.

Tabla 11-5
Factores de área para áreas de cortante de barrido en las cuerdas

Tipo de cuerda	w_i (menor)	w_o (mayor)
UNS/ISO	0.80	0.88
Cuadrada	0.50	0.50
Acme	0.77	0.63
Reforzada	0.90	0.83

11

Para el barrido de la tuerca en su diámetro mayor, el área de cortante de la cuerda de un tornillo es

$$A_s = \pi d w_o p \tag{11.8b}$$

donde el valor de w_o en el diámetro mayor se obtiene de la tabla 11-5.

El esfuerzo cortante τ_s para el barrido de la cuerda se determina entonces con:

$$\tau_s = \frac{F}{A_s} \tag{11.8c}$$

Longitud mínima de la tuerca Si la tuerca es lo suficientemente grande, la carga requerida para barrer las cuerdas excederá la carga necesaria para que el tornillo falle por tensión. Se pueden combinar las ecuaciones de ambos modos de falla para calcular una longitud mínima de la tuerca, con cualquier tamaño de tornillo. Para cualquier cuerda UNS/ISO o cuerda Acme de $d \le 1$ in, una longitud de tuerca de por lo menos $0.5d$ tendrá una mayor resistencia al barrido que la resistencia a la tensión del tornillo. Para diámetros más grandes en cuerdas Acme, la resistencia al barrido de una tuerca con longitud $\ge 0.6d$ excederá la resistencia a la tensión del tornillo. Estos números son válidos tan sólo si el tornillo y la tuerca son del mismo material, lo cual usualmente es el caso.

Contacto mínimo en orificios roscados Cuando un tornillo se rosca en un orificio roscado, en vez de una tuerca, se necesita un mayor contacto de enroscamiento. Para combinaciones del mismo material, se recomienda una longitud de enroscamiento, por lo menos, igual al diámetro nominal d de la cuerda. Para un tornillo de acero en hierro fundido, latón o bronce, se debería emplear $1.5d$. Para tornillos de acero en aluminio se utiliza $2d$ como longitud mínima de contacto entre cuerdas.

Esfuerzo de torsión

11

Cuando una tuerca se aprieta sobre un tornillo, o cuando se transmite un torque a través de la tuerca de un tornillo de potencia, se desarrolla un esfuerzo de torsión en el tornillo. El torque que tuerce el tornillo depende de la fricción en el punto de contacto tornillo-tuerca. Si ambos están bien lubricados, se transmite menos del torque aplicado al tornillo y se absorbe más entre la tuerca y la superficie sujetada. Si ambos están oxidados, todo el torque aplicado torcerá el tornillo, lo cual es la razón por la que los pernos oxidados usualmente se cortan, incluso cuando se intenta aflojar la tuerca. En un tornillo de potencia, si el collarín de empuje tiene baja fricción, todo el torque aplicado en la tuerca creará un esfuerzo de torsión en el tornillo (ya que se toma poco torque para anclar con el collarín de baja fricción). Por lo tanto, para tomar en cuenta el peor caso de alta fricción en la cuerda, se usa el torque total aplicado, en la ecuación de esfuerzo de torsión, en una sección redonda (véase la sección 2.12 en la p. 107).

$$\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{16T}{\pi d_r^3} \tag{11.9}$$

Se debería utilizar el diámetro menor d_r o de la cuerda en este cálculo.

11.4 TIPOS DE TORNILLOS SUJETADORES*

Hay disponible gran variedad de estilos de tornillos, muchos de los cuales son para aplicaciones especializadas. Los pernos y las tuercas convencionales generalmente usan cuerdas estándar, como las definidas en la sección 11.1. En las cuerdas estándar puede haber variaciones entre ciertos tipos de tornillos, sobre todo aquellos orientados a aplicaciones

* En la referencia 2 hay información completa disponible acerca de descripciones y tamaños de una gran variedad de sujetadores estándares.

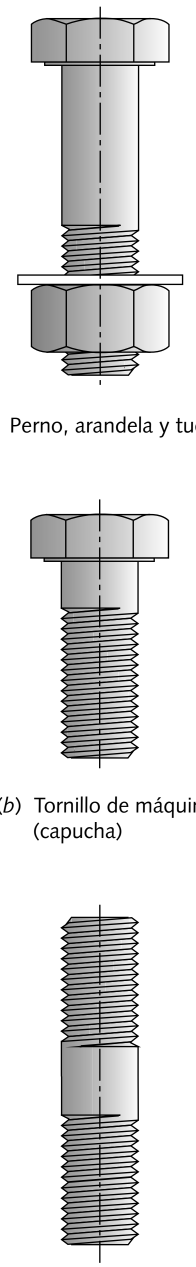
de autoenroscamiento. Los sujetadores se dividen de muchas maneras: por su uso esperado, por el estilo de la cabeza y por su resistencia. Existen sujetadores de todos los tipos en varios materiales, incluyendo acero, acero inoxidable, aluminio, latón, bronce y plásticos.

Clasificación por su uso esperado

PERNOS Y TORNILLOS PARA MÁQUINAS El mismo sujetador llega a tener un nombre diferente cuando se usa de manera especializada. Por ejemplo, un **perno** es un sujetador con cabeza, un vástago recto roscado para usarse con una **tuerca** y así mantener junto un ensamble. Sin embargo, el mismo sujetador se conoce como **tornillo de máquina** o **tornillo de capucha** cuando está enroscado en un orificio en vez de emplearlo con una tuerca. Ésta es tan sólo una distinción semántica, pero con la cual algunos puristas hacen su inventario. Los estándares de la ANSI distinguen entre un perno y un tornillo, destacando que un perno está orientado para mantenerse estacionario y una tuerca produce un torque sobre éste para crear la unión, mientras que un tornillo está orientado a girar en su receptáculo, ya sea en un orificio con rosca o sin ella, aplicando un torque en su cabeza. (Sin embargo, no es ilegal en la mayoría de los estados colocar una tuerca en un tornillo de máquina, pero se le advierte: ¡Usted lo convertirá instantáneamente en un perno haciendo eso!)

ESPÁRRAGOS Un **espárrago** es un sujetador sin cabeza, con cuerda en ambos extremos, cuya finalidad es estar atornillado semipermanentemente por un lado en la mitad de un ensamble. Un orificio en la parte emparejada se ajusta en el otro extremo del espárrago y se asegura con una tuerca. Cada extremo del espárrago puede tener el mismo o diferente paso de cuerda. El extremo permanente algunas veces tiene una clase más alta en la cuerda para que se apriete ajustadamente en el orificio roscado y resista el aflojamiento cuando la tuerca se quita de la mitad superior.

La figura 11-10 muestra un perno (con tuerca y arandela), un tornillo de máquina y un espárrago. Otra diferencia entre tornillos y pernos es que un perno tiene sólo cuerdas rectas y uniformes, mientras que un tornillo tiene cualquier forma de cuerda, incluyendo cónicas o discontinuas, como se indica en la figura 11-11, de modo que hay **tornillos para madera,** pero no "pernos para madera" (no obstante, se utilizan *pernos de transporte* para sujetar montajes de madera).



(*a*) Perno, arandela y tuerca

(*b*) Tornillo de máquina (capucha)

(*c*) Espárrago

FIGURA 11-10

Perno y tuerca, tornillo de máquina y espárrago

Clasificación por tipo de cuerda

TORNILLOS ROSCADOS Todos los sujetadores que hacen su propio orificio o sus propias cuerdas se conocen como **tornillos roscados**, como los *tornillos de autorroscado, formadores de cuerdas, cortadores de cuerdas* y *de autotaladramiento*. La figura 11-11 muestra una selección de muchos tipos de cuerda existentes en tornillos roscados. Las cuerdas de los tornillos roscados son similares al perfil estándar, aunque con frecuencia están más espaciadas (es decir, tienen mayor paso) para que al emplearlos en hojas de metal o plástico se logre desalojar el material desplazado, conforme el tornillo fuerza su camino en un pequeño orificio guía al ir formando las cuerdas. Los tornillos cortadores de cuerdas tienen un perfil estándar de cuerdas, pero mitigadas por ranuras axiales y endurecidas para proporcionar una orilla de corte para roscar la parte conforme se inserta el tornillo. Los tornillos autotaladrantes (que no se muestran) tienen forma de broca en la punta para hacer el orificio guía. De la misma manera, forman las cuerdas conforme van avanzando.

Clasificación por forma de cabeza

TORNILLOS RANURADOS Se fabrican muchos estilos de cabezas, incluyendo las de ranuras rectas, ranuras en cruz (Phillips), hexagonales, huecos hexagonales, y otros. La forma

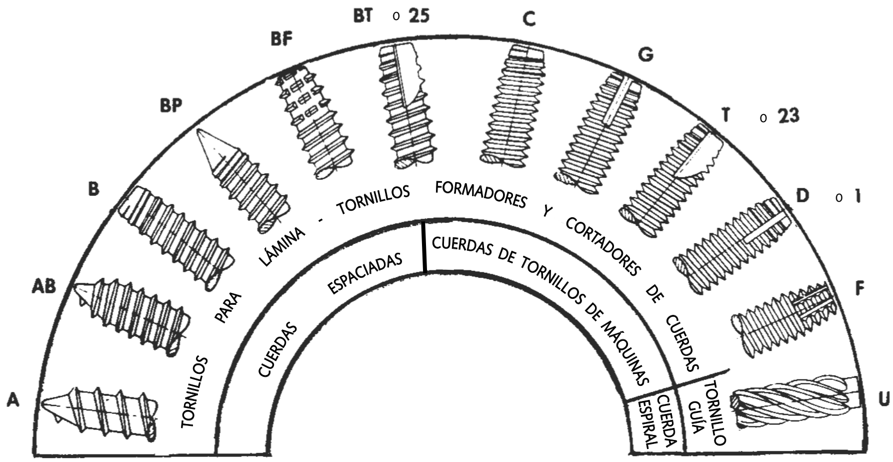
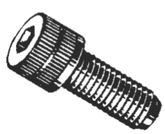
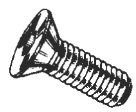


FIGURA 11-11

Varios estilos de cuerdas usadas en tornillos roscados. *Cortesía de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif. 90621*



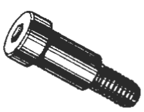
(*a*) Cabeza redonda para dado



(*b*) Cabeza plana para dado



(*c*) Cabeza de botón para dado



(*d*) Tornillo con hombro



(*e*) Tornillo prisionero para dado

FIGURA 11-13

Varios estilos de cabezas huecas en tornillos con capucha
Cortesía de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif.

de la cabeza puede ser redonda, plana (rebajada), ranurada, de cazuela, etcétera, como las de la figura 11-12. Dichos estilos de cabezas, combinados con ranuras simples o Phillips, generalmente se utilizan sólo en los tornillos de máquina o roscados más pequeños, ya que el torque máximo obtenible con las ranuras es limitado. Los torques más grandes se alcanzan más fácilmente con tornillos de cabezas hexagonales o con cabezas huecas hexagonales, como se indica en las figuras 11-10 y 11-13. La cabeza hexagonal es el estilo más popular para pernos y tornillos de máquina más grandes que requieren un torque sustancial, a menos que el espacio sea limitado, en cuyo caso el tornillo de cabeza hueca con capucha es una mejor elección.

Tornillos de cabeza hueca con capucha Como los de la figura 11-13, se fabrican usualmente con acero endurecido de alta resistencia, con acero inoxidable u otros metales, y se usan ampliamente en maquinaria. El dado hexagonal permite que se aplique torque suficiente con las llaves Allen hexagonales. La cabeza hueca estándar

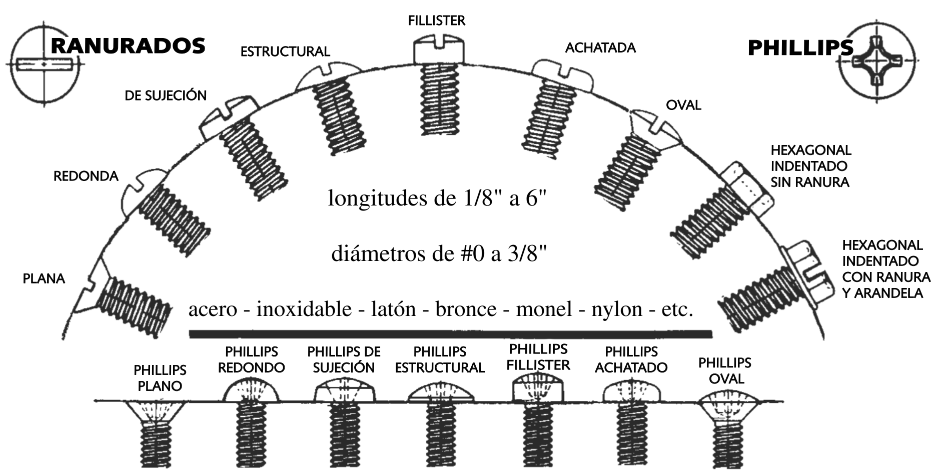


FIGURA 11-12

Estilos de cabezas usadas en tornillos de máquina pequeños *Cortesía de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif.*

(figura 11-13*a*) está diseñada para colocarse dentro de una caja, de modo que la cabeza queda por debajo de la superficie. El tornillo de cabeza plana con capucha (figura 11-13*b*) es para que se hunda. El tornillo con hombro (figura 11-13*d*) tiene poca tolerancia, caña con acabado esmerilado, y se puede utilizar como pivote o para ubicar con precisión una pieza. El tornillo está sometido a un torque apretado contra su hombro, por lo que una parte de tamaño adecuado estaría libre para pivotar entre su cabeza y la superficie a la que se atornilla. Los tornillos asentados (figura 11-13*e*) sirven para sujetar collarines y mazas a los ejes, como se expuso en el capítulo 6.

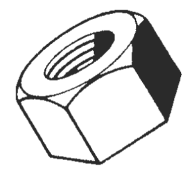
Tuercas y arandelas

TUERCAS La figura 11-14 presenta una muestra de la gran variedad de tuercas existentes. Una tuerca de presión es una versión más delgada de la tuerca hexagonal estándar; se usa en combinación con una tuerca estándar para asegurar la tuerca estándar al perno. La tuerca de corona tiene ranuras de inserción para una chaveta que atraviesa el perno, para evitar que la tuerca se afloje. La tuerca de bellota se utiliza con fines decorativos y una tuerca de mariposa permite desatornillarla sin herramientas.

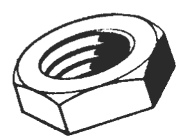
TUERCAS DE BLOQUEO Una preocupación universal es la prevención del aflojamiento espontáneo de la tuerca, a causa de la vibración. Este propósito se logra seguramente con dos tuercas de bloqueo, juntas sobre el perno, o bien, con una tuerca de corona con chaveta. Los fabricantes ofrecen otros diseños de muchas tuercas de bloqueo. Algunos se muestran en la figura 11-15. La tuerca elíptica de bloqueo se fabrica con un extremo en forma de elipse, de modo que unos cuantos hilos están distorsionados. Estos hilos causan interferencia con los del perno; además, cuando se fuerzan, aprietan la cuerda y resisten el aflojamiento. Las tuercas también se fabrican agregando a las cuerdas añadidos de nylon que se deforman cuando se fuerzan contra el perno. El nylon fluye hacia los espacios de la cuerda y aprieta el perno. Una tuerca con perno de seguridad tiene un perno de acero que permite el apretamiento, pero se clava en las cuerdas del perno para evitar el aflojamiento. Las tuercas también se fabrican con bordes dentados en una cara y se entierran en la parte sujetada para resistir el aflojamiento.

ARANDELAS Una arandela plana es simplemente una parte plana, en forma de rosquilla, que sirve para incrementar el área de contacto entre la cabeza del perno o tuerca y la parte que se sujeta (véase la figura 11-10). Las arandelas de acero endurecido se utilizan donde la carga de compresión del perno sobre la parte que se sujeta necesita distribuirse en un área más grande de la que brinda la cabeza del perno o la tuerca. Una arandela blanda cederá a la flexión en vez de distribuir efectivamente la carga. Cualquier arandela plana previene también la unión de la superficie de la pieza con la tuerca cuando está apretada. Se usan arandelas no metálicas cuando se requiere que el perno y la pieza estén aislados eléctricamente. Los tamaños de las arandelas planas están estandarizados con los tamaños de los pernos (véase la referencia 2). Si se necesitan arandelas más grandes que el diámetro estándar, se deben usar **arandelas fender** (las cuales tienen mayor diámetro exterior). Algunas veces se emplean **arandelas Belleville** (véase la sección 10.9, p. 700) debajo de tuercas o cabezas de tornillos, con la finalidad de suministrar una fuerza axial controlada en los cambios de longitud del perno.

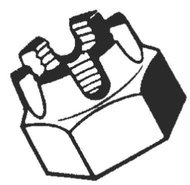
ARANDELAS DE BLOQUEO Para ayudar a prevenir el aflojamiento espontáneo en tuercas estándares (a diferencia de las tuercas de bloqueo), es posible utilizar arandelas de bloqueo bajo la tuerca de un perno o bajo la cabeza de un tornillo de máquina. La figura 11-16 presenta algunos de los diversos tipos de arandelas de bloqueo existentes. La arandela de bloqueo al deslizamiento es de acero endurecido y actúa como un resorte bajo la tuerca. Sus esquinas afiladas también suelen insertarse en las superficies que se sujetan. Asimismo, hay varios tipos de arandelas dentadas. Sus dientes vueltos hacia arriba se comprimen cuando se sujetan, que luego se insertan en las superficies de la pieza y de la tuerca. Las arandelas de bloqueo generalmente se consideran menos efectivas en la prevención del aflojamiento que las tuercas de bloqueo, las cuales son las preferidas en estos casos.



(*a*) Tuerca hexagonal estándar



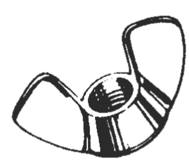
(*b*) Tuerca hexagonal de bloqueo



(*c*) Tuerca hexagonal de corona



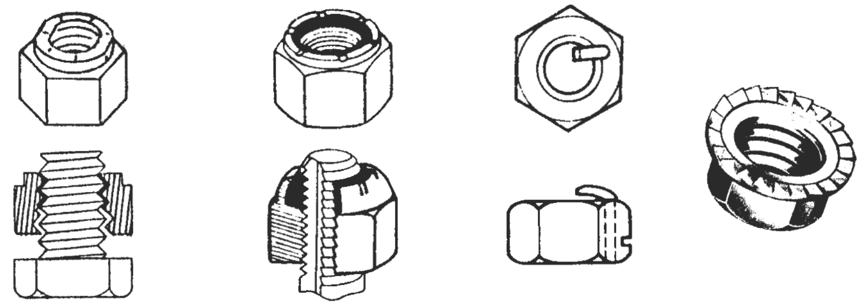
(*d*) Tuerca hexagonal de bellota



(*e*) Tuerca de mariposa

FIGURA 11-14

Algunos tipos de tuercas estándar *Cortesía de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif. 90621*



(*a*) Tuerca elíptica de bloqueo (*b*) Tuerca de bloqueo con inserto de nylon (*c*) Tuerca de bloqueo con perno (*d*) Tuerca de bloqueo con pestañas

FIGURA 11-15

Muestra de tipos de tuercas de bloqueo existentes *Cortesía de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif.*

SEMS Son combinaciones de tuercas y arandelas prisioneras de bloqueo que se mantienen en la tuerca. Hay de muchos tipos, uno de los cuales se ilustra en la figura 11-17. Su ventaja principal es garantizar que la arandela de bloqueo no sea excluida del ensamble o reensamble.

11.5 FABRICACIÓN DE SUJETADORES

CORTADOR DE CUERDAS Existen varias técnicas para hacer cuerdas. Las cuerdas internas generalmente se cortan con una herramienta especial, llamada **machuelo,** que tiene la forma de cuerda deseada y parece un tornillo. Los machuelos se fabrican con acero endurecido para herramientas y poseen ranuras axiales que interrumpen los hilos para proporcionar extremos cortantes en forma de cuerdas. Se taladra un orificio guía con un machuelo del tamaño adecuado y el machuelo lubricado se gira lentamente en el orificio, mientras avanza a una velocidad razonable. Las tuercas demasiado largas para taladrar se trabajan en un torno con una herramienta en forma de cuerda, que se avanza axialmente a través del orificio con un tornillo de avance para controlar tanto el avance como el paso. Las cuerdas externas también se pueden cortar con una herramienta de punto simple en un torno o alternativamente con un **dado**, el cual es equivalente a la cuerda externa de un machuelo. La varilla a la que se hace la cuerda es del mismo tamaño que el diámetro exterior de la cuerda. Se usan máquinas especializadas, conocidas como *máquinas para tornillos*, para elaborar tornillos, pernos y tuercas (así como otras partes giratorias) en grandes cantidades y a bajo costo. Todas las cuerdas que se fabrican con los métodos anteriores se clasifican como **cuerdas cortadas**.

ROLADO DE CUERDAS Un método superior para fabricar cuerdas externas es el **rolado de cuerdas**, llamado también **formado de cuerdas**. Dados de acero endurecido en forma de cuerdas se fuerzan hacia la superficie de la varilla sobre la que se van a formar las cuerdas. Los dados hacen fluir en frío el material hacia el perfil de la cuerda. El diámetro exterior final de la cuerda es más grande que el diámetro inicial de la varilla, debido a que el material se fuerza hacia afuera de las raíces y hacia las crestas de las cuerdas.

Existen varias ventajas del rolado frente al corte de cuerdas. El trabajo de formado en frío hace al material duro y resistente, crea radios en la raíz y la cresta, e introduce esfuerzos residuales favorables de compresión en las raíces de la cuerda. La conversión del perfil del material al perfil de las cuerdas genera una reorientación de la veta del material en el perfil de la cuerda. En contraste, el corte de cuerda interrumpe la veta. Todos estos factores contribuyen al incremento significativo de la resistencia de los hilos rolados comparados con los hilos cortados.Además de mejorar su resistencia, las cuerdas roladas



(*a*) Arandela de bloqueo al deslizamiento



(*b*) Arandela con dientes internos



(*c*) Arandela con dientes externos



(*d*) Arandela con dientes internos y externos



(*e*) Dientes para hundimiento

FIGURA 11-16

Tipos de arandelas de bloqueo *Cortesía de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif.*

tienen menos desperdicio que las cuerdas cortadas, ya que no se elimina material; por consiguiente, la masa virgen de material es menos voluminosa. Los sujetadores de alta resistencia por lo general son de acero endurecido. El rolado de las cuerdas se debería hacer después del endurecimiento del perno, si es posible, ya que el proceso de endurecimiento térmico mitiga los esfuerzos residuales deseables introducidos por el rolado.



FIGURA 11-17

Tuerca y arandela de bloqueo prisionera (SEM) *Cortesía de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif. 90621*

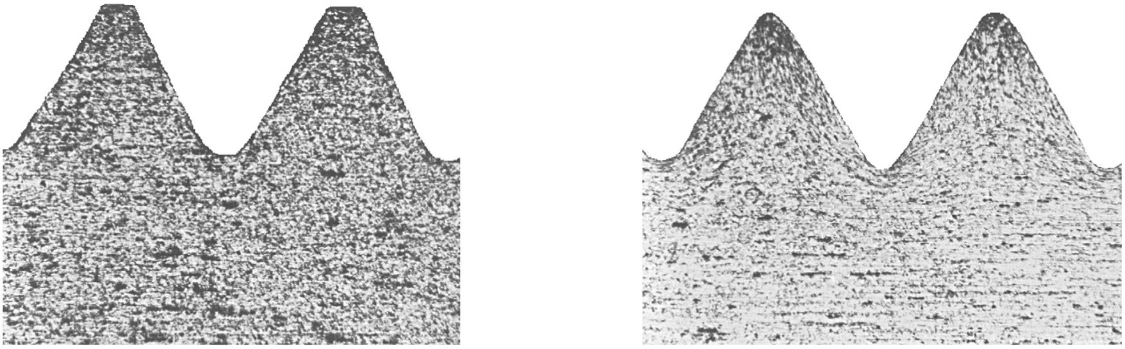
La figura 11-18 muestra la estructura de los perfiles y el grano de cuerdas cortadas y roladas. En cualquier aplicación donde las cargas sobre los sujetadores sean altas, o donde haya cargas de fatiga, se deberían usar siempre cuerdas roladas. En aplicaciones de carga no crítica o ligera, se suelen usar las cuerdas cortadas, pues son más débiles y menos costosas.

FORMADO DE LA CABEZA Las cabezas de los pernos y tornillos generalmente se forman en frío con un proceso de *forjado*. Para ilustrar dicho proceso, imagine que coloca en su mano una varilla de arcilla para modelar, dejando una pequeña porción de la varilla por encima de su puño. Golpee axialmente el extremo superior de la varilla de arcilla con su otra mano, mientras sostiene fuertemente la varilla con el puño, convertirá rápidamente el extremo de la varilla en una cabeza más corta, pero con mayor diámetro. De manera similar, el mango, con la longitud apropiada de lo que *será un tornillo,* se sostiene fuertemente en una máquina para hacer cabezas en frío. Un dado del diámetro de cabeza deseado rodea el extremo expuesto. Cuando el martillo baja, hace fluir el material hacia una cabeza redonda. Se obtienen en la cabeza mejorías en la orientación de la veta, similares a las descritas para las cuerdas roladas. Los pernos por arriba de 3/4 in de diámetro aproximadamente se deben calentar antes de que se les forme la cabeza. Los huecos hexagonales y las ranuras Phillips se forman en el proceso de elaboración de la cabeza en frío (o caliente). Los hexágonos planos y las ranuras en tornillos se maquinan posteriormente en forma de la cabeza.

11.6 RESISTENCIAS DE PERNOS ESTÁNDARES Y DE TORNILLOS DE MÁQUINA

Los pernos y tornillos para aplicaciones estructurales o cargas pesadas se deberían seleccionar con base en la resistencia de prueba S_p, como está definida en las especificaciones de SAE, ASTM o ISO. Estas organizaciones definen los grados o las clases de perno que especifican el material, el tratamiento térmico y la **resistencia mínima de prueba**, para el perno o el tornillo. La **resistencia de prueba** S_p es *el esfuerzo con el cual el perno comienza a tener una distorsión permanente*; está cerca de la resistencia a la fluencia del material, pero no más debajo de ésta. El grado o la clase de cada perno se señala

11



(*a*) Cuerdas cortadas (*b*) Cuerdas roladas

FIGURA 11-18

Estructura del grano de cuerdas cortadas y roladas Fuente: R.D. Barer y B.F. Peters, *Why Metals Fail*, Gordon y Breach, Nueva York, 1970, p. 23

Tabla 11-6 Especificaciones y resistencias de la SAE para pernos de acero

Número de grado de la SAE	Intervalo del tamaño del diám. ext. (in)	Resistencia de prueba mínima (kpsi)	Resistencia a la fluencia mínima (kpsi)	Resistencia a la tensión mínima (kpsi)	Material
1	0.25–1.5	33	36	60	bajo o medio carbono
2	0.25–0.75	55	57	74	bajo o medio carbono
2	0.875–1.5	33	36	60	bajo o medio carbono
4	0.25–1.5	65	100	115	medio carbono, forjado en frío
5	0.25–1.0	85	92	120	medio carbono, Q&T*
5	1.125–1.5	74	81	105	medio carbono, Q&T
5.2	0.25–1.0	85	92	120	martensita al bajo carbono, Q&T
7	0.25–1.5	105	115	133	aleación al medio carbono, Q&T
8	0.25–1.5	120	130	150	aleación al medio carbono, Q&T
8.2	0.25–1.0	120	130	150	martensita al bajo carbono, Q&T

* Templado y revenido

con marcas (o sin ellas) sobre la cabeza. La tabla 11-6 presenta información sobre la resistencia para varios grados SAE de pernos y la tabla 11-7 muestra información similar para pernos métricos. Las marcas en la cabeza, para cada grado o clase, se ilustran en las figuras 11-19 y 11-20.

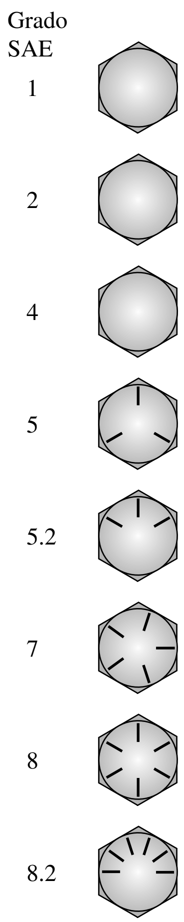


FIGURA 11-19

Marcas en las cabezas de pernos SAE

11.7 SUJETADORES PRECARGADOS A LA TENSIÓN

Una de las aplicaciones fundamentales de pernos y tuercas es sujetar piezas para mantenerlas juntas en situaciones donde las cargas aplicadas someten el(los) perno(s) a tensión, como se indica en la figura 11-21. Es una práctica común precargar la junta apretando el(los) perno(s) con un torque suficiente para crear cargas de tensión aproximadas a su resistencia de prueba. Para ensambles cargados estáticamente, se utiliza algunas veces una precarga que genera un esfuerzo en el perno tan alto como el 90% de la resistencia de prueba. Para ensambles cargados dinámicamente (carga de fatiga), se usa comúnmente una precarga del 75% o más de la resistencia de prueba. Suponiendo que los pernos tienen el tamaño adecuado para las cargas aplicadas, estas precargas altas hacen muy improbable que los pernos se rompan durante el servicio, si no se rompen

Tabla 11-7 Especificaciones métricas y resistencias para pernos de acero

Número de clase	Intervalo del tamaño del diám. ext. (mm)	Resistencia de prueba mínima (MPa)	Resistencia a la fluencia mínima (MPa)	Resistencia a la tensión mínima (MPa)	Material
4.6	M5–M36	225	240	400	bajo o medio carbono
4.8	M1.6–M16	310	340	420	bajo o medio carbono
5.8	M5–M24	380	420	520	bajo o medio carbono
8.8	M3–M36	600	660	830	medio carbono, Q&T
9.8	M1.6–M16	650	720	900	medio carbono, Q&T
10.9	M5–M36	830	940	1 040	martensita al bajo carbono, Q&T
12.9	M1.6–M36	970	1 100	1 220	aleación, templada y revenida

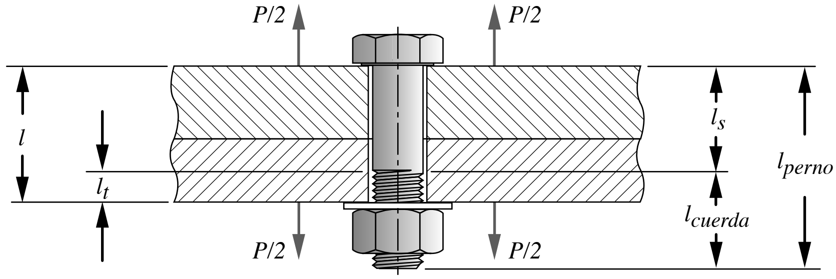


FIGURA 11-21

Ensamble con perno en tensión

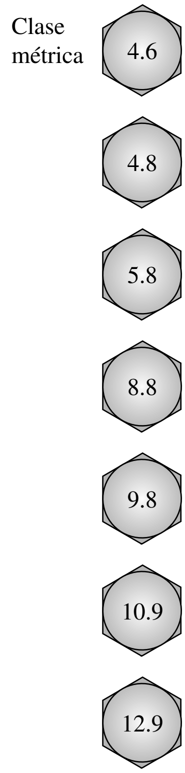


FIGURA 11-20

Marcas en la cabeza, tornillos métricos

mientras se someten a tensión (se aprietan). Las razones de esto son sutiles y requieren del conocimiento de cómo interactúan las elasticidades del perno y de los elementos sujetados, cuando el perno se aprieta y cuando una carga externa se aplica posteriormente.

La figura 11-22 ilustra un perno que sujeta un resorte, el cual es análogo al material sujetado de la figura 11-21. Siempre que se sujeta un material, éste tiene una constante de resorte y se comprime cuando se aprieta el perno. (El perno, que también es elástico, se estira cuando se aprieta.) Para propósitos de ilustración, en la figura 11-22*a* se muestra el resorte como si fuera el material sujetado para exagerar su compresión. Por el mismo motivo, también se postula un método inusual de sometimiento a la tensión de este perno específico. Suponga que se extravía la llave y por ende se pidió a Crusher Casey sujetar esa tuerca y jalarla hacia abajo con una fuerza de 100 lb, mientras se coloca un pedazo de acero entre la tuerca y la estructura para que sirva de tope, como se indica en (*b*). El perno tiene ahora sobre él 100 lb de precarga de tensión y el resorte (es decir, el material) recibe 100 lb de precarga por compresión. Esta precarga se conserva en el montaje, incluso después de que Crusher se haya ido (*c*). La situación descrita en (*c*) es idéntica a la que resultaría si la tuerca se aprieta convencionalmente para comprimir el resorte la misma cantidad.

La figura 11-22*d* muestra una carga nueva de 90 lb que se aplica al perno. Observe que la tensión en el perno todavía es de 100 lb y así continuará, a pesar de la carga externa aplicada, hasta que la carga exceda la precarga de 100 lb en este caso. La figura 11-22*e*

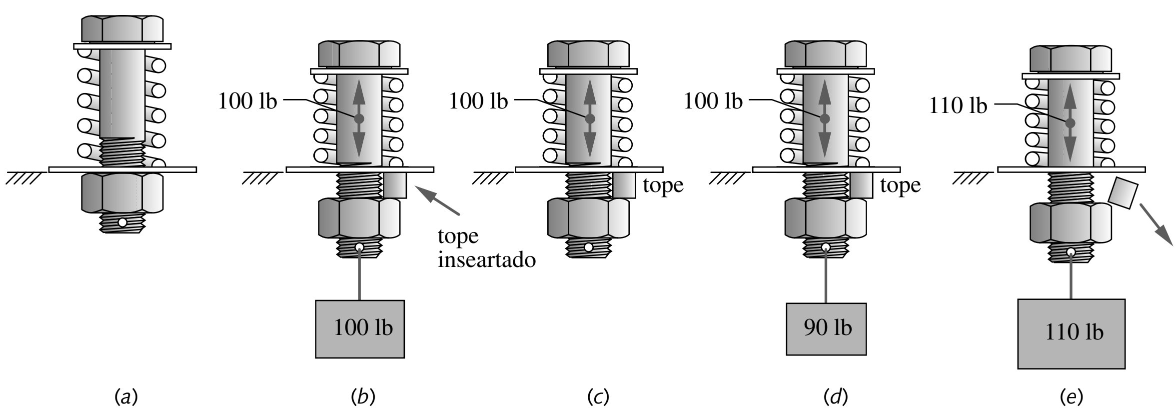


FIGURA 11-22

Precarga en un ensamble con perno

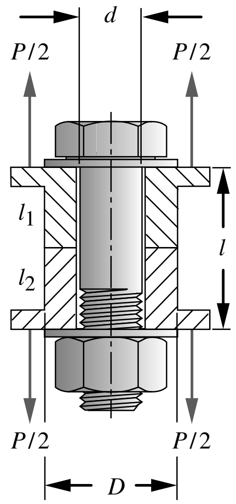


FIGURA 11-23

Perno precargado que comprime un cilindro al cual se aplican cargas externas

indica que una carga más grande que la precarga comprime más el resorte, rompiendo el contacto entre la tuerca y la estructura, por lo que ahora la tensión en el perno es igual a la nueva carga aplicada de 110 lb. Cuando el perno y el material están separados como en (*e*), el perno soporta la totalidad de la carga aplicada. Este diagrama da una idea de por qué es ventajosa la presencia de una precarga, sobre todo cuando las cargas aplicadas varían con el tiempo. Y para entender cabalmente por qué se requiere un examen adicional del comportamiento elástico de la junta bajo carga.

La figura 11-23 muestra un perno que sujeta un cilindro de sección transversal y longitud conocidas. Se quiere revisar las cargas, las deflexiones y los esfuerzos, tanto en el perno como el cilindro, bajo precarga, y después de que se aplica una carga externa. La constante de resorte de una barra en tensión se obtiene con la ecuación de la deflexión de una barra en tensión:

$$\delta = \frac{Fl}{AE} \tag{11.10a}$$

y

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{AE}{l} \tag{11.10b}$$

El material que se sujeta se compone generalmente de dos o más piezas, que suelen ser de materiales diferentes. Además, un perno largo tiene hilos sólo sobre una porción de su longitud; por lo tanto, tiene dos áreas con secciones transversales diferentes. Estas secciones de rigidez diferente actúan como resortes en serie que se combinan de acuerdo con la ecuación 10.2*b*, repetida aquí:

$$\frac{1}{k_{total}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \ldots + \frac{1}{k_n} \tag{10.2b}$$

11

La constante teórica de resorte para un perno redondo de diámetro *d,* con una longitud l_t de cuerda cargada axialmente dentro de la zona de sujeción y de longitud *l*, como se indica en la figura 11-21, es

$$\frac{1}{k_b} = \frac{l_t}{A_t E_b} + \frac{l - l_t}{A_b E_b} = \frac{l_t}{A_t E_b} + \frac{l_s}{A_b E_b} \quad \therefore \quad k_b = \frac{A_t A_b}{A_b l_t + A_t l_s} E_b \tag{11.11a}$$

donde A_b es el área total de la sección transversal, A_t es el área de esfuerzo por tensión del perno y $l_s = (l - l_t)$ es la longitud del vástago sin cuerda. La longitud de la porción con cuerda está estandarizada al doble del diámetro del perno, más 1/4 in para pernos estadounidenses (más 6 mm para pernos métricos), hasta 6 in (150 mm) de largo. En tornillos más largos se proporciona 1/4 in de cuerda adicional. Los tornillos más cortos que la longitud de cuerda estándar se encuerdan tan cerca de la cabeza como sea posible.[2]

Para la geometría del material cilíndrico de la figura 11-23 (ignorando las pestañas), la constante de resorte del material es

$$\frac{1}{k_m} = \frac{l_1}{A_{m_1} E_1} + \frac{l_2}{A_{m_2} E_2} = \frac{4 l_1}{\pi D_{ef_1}^2 E_1} + \frac{4 l_2}{\pi D_{ef_2}^2 E_2} \tag{11.11b}$$

donde A_m son las áreas efectivas de los materiales sujetados y D_{ef} son los diámetros efectivos de esas áreas.

Si los materiales sujetados son iguales

$$k_m = \frac{A_m E_m}{l} \tag{11.11c}$$

donde A_m es el área efectiva del material sujetado (véase también la sección 11.8). Si A_m se define como un cilindro sólido con un diámetro efectivo D_{ef}, la ecuación 11.11c se convierte en

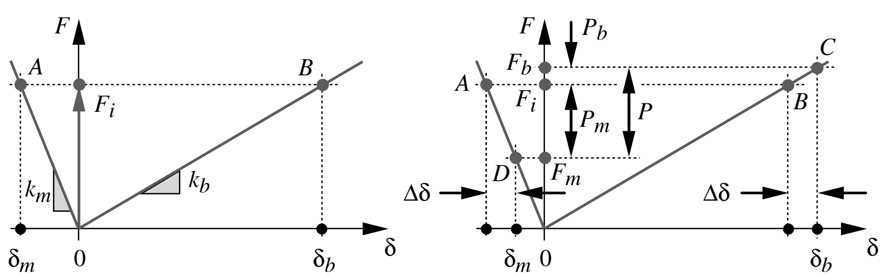
$$k_m = \frac{\pi D_{ef}^2}{4} \frac{E_m}{l} \tag{11.11d}$$

Pernos precargados bajo carga estática

La figura 11-24a grafica el comportamiento carga-deflexión del perno y el material sobre ejes comunes, con la longitud inicial tomada en la deflexión δ igual a cero. Observe que la pendiente de la línea del perno es positiva, debido a que su longitud se incrementa conforme aumenta la fuerza. La pendiente de la línea del material es negativa, ya que su longitud disminuye conforme se incrementa la fuerza. El material es más rígido que el perno, puesto que su área es típicamente más grande y se considera el mismo material para ambos. La fuerza en el material y en el perno es la misma, ya que permanecen en contacto. Como la fuerza de precarga F_i se introduce apretando el perno, la deflexión δ_b del perno y δ_m del material están controladas por sus constantes de resorte y alcanzan los puntos A y B en sus respectivas curvas de carga-deflexión, como se indica en la figura 11-24a. Considerando los supuestos de las magnitudes relativas de k_b y k_m, el perno se estira más (δ_b) de lo que se comprime el material (δ_m).

Cuando se aplica una carga externa P a la junta de la figura 11-23, se produce una deflexión adicional $\Delta\delta$ tanto en el perno como en el material, como se muestra en la figura 11-24b. Esta deflexión es la misma en el perno y en el material, a menos que la carga aplicada sea lo suficientemente grande para separar la junta (es decir, $P_m > F_i$, como se ilustra en la figura 11-22e). La deflexión adicional $\Delta\delta$ crea un nuevo escenario de carga en el perno y en el material, como se indica en la figura 11-24b. La carga en el material tiene una reducción P_m y mueve hacia abajo de la línea de rigidez del material, al punto D, con un nuevo valor F_m. La carga en el perno tiene un incremento P_b y mueve hacia arriba la línea de rigidez del perno al punto C, con un nuevo valor F_b. Advierta que la carga aplicada P está dividida en dos componentes, una (P_m) tomada por el material y otra (P_b) tomada por el perno.

$$P = P_m + P_b \tag{11.12a}$$



(a) Fuerza de precarga y deflexiones iniciales

(b) Deflexión por la carga y fuerzas resultantes

FIGURA 11-24

Efectos de la precarga sobre el perno y el material: (a) precarga y (b) carga aplicada

11

La carga de compresión F_m en el material es ahora

$$F_m = F_i - P_m : \qquad F_m \geq 0^* \tag{11.12b}$$

y la carga de tensión F_b sobre el perno se convierte en

$$F_b = F_i + P_b \tag{11.12c}$$

Observe lo que sucedió como resultado de la fuerza de precarga F_i. El "resorte" del material "se enrolló" con precarga. Las cargas aplicadas son soportadas parcialmente por la "porción desenrollada" de este resorte. Si la rigidez relativa del perno y el material es como se muestra en la figura 11-24 (es decir, el material es más rígido que el tornillo), el material soporta la mayoría de la carga aplicada y el perno experimenta una pequeña carga adicional por arriba de la precarga inicial. Lo anterior justifica parcialmente el enunciado señalado de que "si el perno no falla con la precarga, es probable que no falle en servicio". Hay otra razón para que esto sea válido, la cual se analizará en una sección posterior.

Observe, sin embargo, que si la carga aplicada P es lo suficientemente grande como para que la componente P_m exceda la fuerza de precarga F_i, entonces la junta se separará, F_m será igual a cero y el perno experimentará el valor total de la carga aplicada P. El material ya no puede contribuir a soportar la carga si la junta se separa. Ésta es la causa por la cual se recomiendan precargas tan grandes del porcentaje de la resistencia de prueba del perno. Para lograr el mayor beneficio por compartir la carga con el material, la precarga debe ser alta.

Se puede resumir la información de la figura 11-24 de la siguiente manera. El cambio común en la deflexión $\Delta\delta$ debido a la carga aplicada P es

$$\Delta\delta = \frac{P_b}{k_b} = \frac{P_m}{k_m} \tag{11.13a}$$

11

o bien,

$$P_b = \frac{k_b}{k_m} P_m \tag{11.13b}$$

Se sustituye la ecuación 11.12a para obtener:

$$P_b = \frac{k_b}{k_m + k_b} P$$

o bien, (11.13c)

$$P_b = CP \qquad \text{donde} \quad C = \frac{k_b}{k_m + k_b}$$

El término C se conoce como *constante de rigidez* de la junta o sólo **constante de junta**. Observe que C generalmente es < 1 y si k_b es pequeño, comparado con k_m, C será una fracción pequeña. Esto confirma que el perno estará sometido únicamente a una porción de la carga aplicada P.

De la misma manera,

$$P_m = \frac{k_m}{k_b + k_m} P = (1 - C)P \tag{11.13d}$$

Estas expresiones de P_b y P_m se sustituyen en las ecuaciones 11.12b y 11.12c, para obtener expresiones de las cargas del perno y del material en términos de la carga aplicada P:

* Si F_m tiene un valor negativo, sea $F_m = 0$, debido a que el material no puede soportar la fuerza de tensión: se separará.

$$F_m = F_i - (1 - C)P \tag{11.14a}$$

$$F_b = F_i + CP \tag{11.14b}$$

La ecuación 11.14*b* se resuelve para la precarga F_i necesaria para cualquier combinación de carga aplicada *P* y la carga (de prueba) máxima F_b permisible en el perno (prueba), siempre y cuando se conozca la constante *C* de la junta.

La carga P_0 requerida para separar la junta se puede obtener con la ecuación 11.14*a*, haciendo F_m igual a cero.

$$P_0 = \frac{F_i}{(1 - C)} \tag{11.14c}$$

El factor de seguridad contra la separación de la junta se obtiene a partir de

$$N_{separación} = \frac{P_0}{P} = \frac{F_i}{P(1 - C)} \tag{11.14d}$$

EJEMPLO 11-2

Sujetadores precargados en carga estática

Problema **Determine un tamaño adecuado del perno y la precarga para la junta de la figura 11-23 (repetida aquí). Calcule el factor de seguridad contra la fluencia y separación. Determine la precarga óptima, como un porcentaje de la resistencia de prueba, para maximizar los factores de seguridad.**

Se proporciona **Las dimensiones de la junta son D = 1 in y l = 2 in. La carga aplicada es P = 2000 lb.**

Suposiciones **Ambas piezas sujetadas son de acero. Se desprecian los efectos de las pestañas sobre la rigidez de la junta. Como primer intento, se aplicará una precarga del 90% de la resistencia de prueba del perno.**

Solución **Véase la figura 11-25.**

1. Como en la mayoría de los problemas de diseño, existen muchas variables desconocidas para resolver las ecuaciones necesarias en una sola pasada. Se debe intentar con valores supuestos de varios parámetros y usar iteración para llegar a una buena solución. En la realidad se realizan varias iteraciones para resolver el problema, pero sólo se presentarán dos en aras de la brevedad, de modo que los valores candidatos utilizados aquí ya fueron identificados como valores razonables.

2. El diámetro del perno es el principal valor candidato a seleccionar, junto con una serie de cuerda y una clase de perno, para definir la resistencia de prueba. Se elige un perno de acero 5/16-18 UNC-2A de la clase SAE 5.2. (Éste realmente fue nuestro tercer intento.) Para una longitud sujeta de 2 in, suponga una longitud de perno igual a 2.5 in, para permitir una protuberancia suficiente para la tuerca. La precarga se toma con un 90% de la resistencia de prueba, como ya se supuso.

3. La tabla 11-6 (p. 744) muestra que la resistencia de prueba de este perno es de 85 kpsi. El área de esfuerzo por tensión, a partir de la ecuación 11-1*a* (p. 725) es 0.052 431 in^2. La precarga es entonces

$$F_i = 0.9 S_p A_t = 0.9(85\,000)(0.052\,431) = 4\,011 \text{ lb} \tag{a}$$

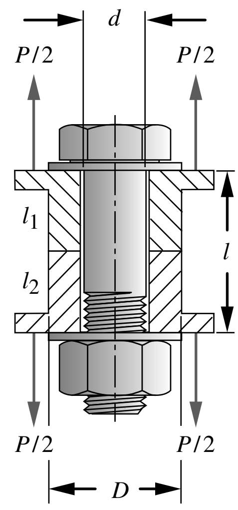


FIGURA 11-23 Repetida

Perno precargado que comprime un cilindro sobre el cual se aplican cargas externas

11

4. Determine las longitudes de cuerda l_{cuerda} y vástago l_s como se indica en la figura 11-21 (p. 745):

$$l_{cuerda} = 2d + 0.25 = 2(0.3125) + 0.25 = 0.875 \text{ in}$$
$$l_s = l_{perno} - l_{cuerda} = 2.5 - 0.875 = 1.625 \text{ in} \qquad (b)$$

con las cuales se obtiene la longitud de la cuerda l_t en la zona de sujeción:

$$l_t = l - l_s = 2.0 - 1.625 = 0.375 \text{ in} \qquad (c)$$

5. Calcule la rigidez del perno con la ecuación 11.11*a* (p. 746).

$$\frac{1}{k_b} = \frac{l_t}{A_t E} + \frac{l_s}{A_b E} = \frac{0.375}{0.05243(30E6)} + \frac{1.625(4)}{\pi(0.3125)^2(30E6)}$$
$$k_b = 1.059E6 \text{ lb/in} \qquad (d)$$

6. El cálculo de la rigidez del material que se sujeta está simplificado en este ejemplo por su diámetro relativamente pequeño. En este caso, se supone que el cilindro completo del material está comprimido por la fuerza del perno. (Examinaremos pronto el problema de la obtención del área que se sujeta en un continuo de material.) La rigidez del material, a partir de la ecuación 11.11*d*, es

$$k_m = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4}\frac{E_m}{l} = \frac{\pi\left(1.0^2 - 0.312^2\right)}{4}\frac{(30E6)}{2.0} = 1.063E7 \text{ lb/in} \qquad (e)$$

7. El factor de rigidez de la junta a partir de la ecuación 11.13*c* (p. 748) es

$$C = \frac{k_b}{k_m + k_b} = \frac{1.059E6}{1.063E7 + 1.059E6} = 0.09056 \qquad (f)$$

8. La porción de carga aplicada P que experimentan el perno y el material se determinan ahora con las ecuaciones 11.13.

$$P_b = CP = 0.090\,56(2\,000) = 181 \text{ lb}$$
$$P_m = (1 - C)P = (1 - 0.090\,56)(2\,000) = 1\,819 \text{ lb} \qquad (g)$$

9. Calcule las cargas resultantes en el perno y el material después de que se aplica la carga P.

$$F_b = F_i + P_b = 4\,011 + 181 = 4\,192 \text{ lb}$$
$$F_m = F_i - P_m = 4\,011 - 1\,819 = 2\,192 \text{ lb} \qquad (h)$$

Advierta lo poco que agrega la carga aplicada a la precarga del perno.

10. El esfuerzo de tensión máximo en el perno es

$$\sigma_b = \frac{F_b}{A_t} = \frac{4\,192}{0.052\,431} = 79\,953 \text{ psi} \qquad (i)$$

Observe que no se utiliza un factor de concentración de esfuerzos, porque se trata de carga estática.

11. Éste es un escenario de esfuerzo uniaxial, de modo que el esfuerzo principal y el esfuerzo de Von Mises son idénticos al esfuerzo de tensión aplicado. Entonces, el factor de seguridad contra la fluencia es

$$N_y = \frac{S_y}{\sigma_b} = \frac{92\,000}{79\,953} = 1.15 \qquad (j)$$

11

La resistencia a la fluencia se obtiene con las tablas 11-6 y 11-7 (p. 744).

12. La carga requerida para separar la junta y el factor de seguridad contra la separación de la junta se determinan con las ecuaciones 11.14*c* y 11.14*d*.

$$P_0 = \frac{F_i}{(1-C)} = \frac{4\,011}{(1-0.090\,56)} = 4\,410 \text{ lb} \tag{k}$$

$$N_{separación} = \frac{P_0}{P} = \frac{4\,410}{2\,000} = 2.2 \tag{l}$$

13. El factor de seguridad contra la separación es aceptable. El factor de seguridad contra la fluencia es bajo, pero así se esperaba, ya que el perno se precargó deliberadamente a un nivel cercano a la resistencia a la fluencia.

14. El modelo se resolvió para un intervalo de posibles precargas de 0 a 100 por ciento de la resistencia de prueba y se graficaron los factores de seguridad contra el porcentaje de precarga. Los resultados se muestran en la figura 11-25. El factor de seguridad de separación se eleva linealmente con el incremento de la precarga; sin embargo, es < 1 hasta que la precarga exceda el 40% de la resistencia de prueba, aproximadamente. Se necesita por lo menos esa cantidad de precarga para mantener la junta unida bajo la carga aplicada. El factor de seguridad contra la fluencia es alto con precargas pequeñas y disminuye no linealmente con el incremento de la precarga. Las dos líneas se cruzan en el punto *A* con una precarga de 65%, aproximadamente, de resistencia de prueba. Dicha precarga equilibraría los factores de seguridad contra ambos modos de falla en un valor de 1.6. No obstante, si la meta es proteger la junta contra posibles sobrecargas, entonces sería mejor una mayor precarga. En el punto *B*, el factor de seguridad contra la sobrecarga es de 2.2 y aún existe el 15% de reserva contra la fluencia durante la precarga, como se indica en las ecuaciones anteriores.

14. Entonces, el diseño recomendado es un perno 5/16-18 UNC-2A, grado 5.2, de 2.5 in de largo, precargado al 90% de la resistencia de prueba con una fuerza de precarga de

$$F_i = 0.90 S_p A_t = 0.90(85\,000)(0.052\,431) \cong 4\,011 \text{ lb} \tag{m}$$

15. Los archivos EX15-02 se encuentran en el CD-ROM.

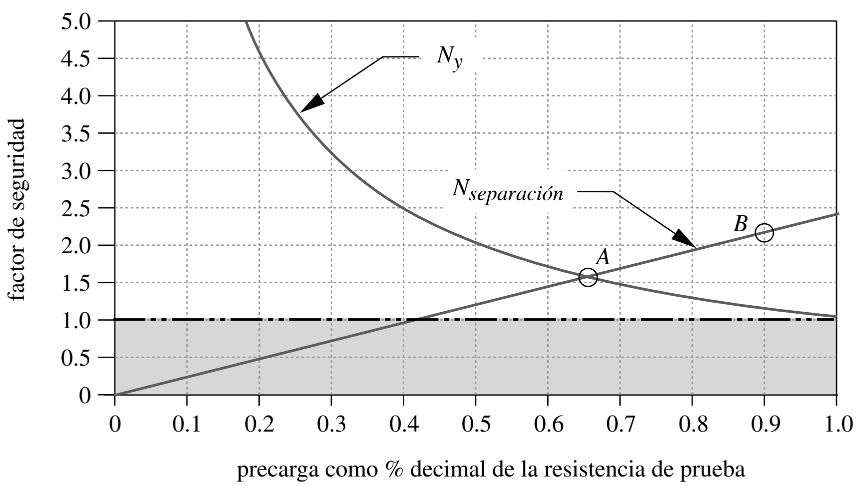


FIGURA 11-25

Factores de seguridad contra precarga para el ejemplo 11-2 de un perno cargado estáticamente

Pernos precargados bajo carga dinámica

El valor de la precarga es incluso mayor para juntas cargadas dinámicamente que para juntas cargadas estáticamente. Considere otra vez la junta de la figura 11-23, pero haciendo que la fuerza aplicada P sea función del tiempo, así como que varíe entre un valor mínimo y un valor máximo $P_{mín}$ y $P_{máx}$, ambos positivos. Una situación muy común es la de una carga variable ($P_{mín} = 0$), tal como la de un perno en un recipiente de presión que está ciclado desde cero hasta la presión máxima.

La figura 11-26 presenta el diagrama carga-deflexión de un ensamble con pernos sujeto a una carga fluctuante. Cuando la carga variable es igual a cero, el diagrama es como el de la figura 11.26*a*, es decir, con sólo la precarga estática F_i presente. Cuando la carga llega al máximo, el diagrama es como el de la figura 11.26*b*. $P_{máx}$ se divide entre el perno y el material de la misma forma que en el caso de carga estática de la figura 11-24 (p. 747). El perno está sujeto tan sólo a una porción de la carga fluctuante debido a la presencia de la precarga, *la cual causa que el material absorba la mayor cantidad de las oscilaciones de la carga*. Esto reduce drásticamente el riesgo del esfuerzo alternante de tensión en el perno, que existiría sin precarga. Las oscilaciones del esfuerzo de compresión en el material no son preocupantes en relación con la falla por fatiga, la cual siempre es consecuencia del esfuerzo de tensión.

Las fuerzas media y alternante experimentadas por el perno son

$$F_{alt} = \frac{F_b - F_i}{2}, \qquad F_{media} = \frac{F_b + F_i}{2} \tag{11.15a}$$

donde F_b se obtiene con la ecuación 11.14*b* (p. 749) con $P = P_{máx}$.

Los esfuerzos medio y alternante en el perno son

$$\sigma_a = K_f \frac{F_{alt}}{A_t}, \qquad \sigma_m = K_{fm} \frac{F_{media}}{A_t} \tag{11.15b}$$

11

donde A_t es el área de esfuerzo por tensión en el perno de la tabla 11-1 o la 11-2 (pp. 726-727), K_f es el factor de concentración de esfuerzos por fatiga del perno, el cual se calcula a partir de:*

$$K_f = 5.7 + 0.6812d \qquad d \text{ en pulgadas}$$

o bien,

$$K_f = 5.7 + 0.02682d \qquad d \text{ en mm} \tag{11.15c}$$

* La ecuación 11.15*c* se ajustó por regresión lineal a los datos de concentración de esfuerzos de la referencia [16]. El coeficiente de correlación es $r^2 = 0.91$.

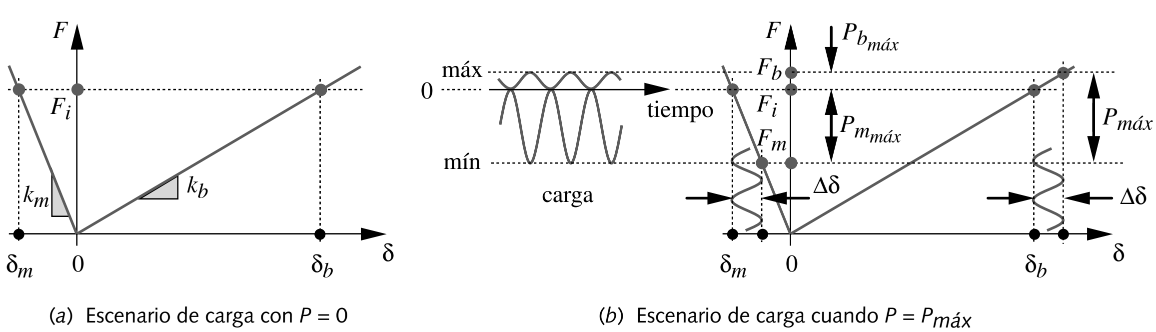


FIGURA 11-26

Efectos sobre un perno y el material de una carga variable desde cero hasta $P_{máx}$

donde d es el diámetro nominal de la cuerda. Esta relación se basa en datos de prueba a la fatiga, tanto en cuerdas cortadas como roladas que demuestran que la concentración de esfuerzos en los hilos varía con el diámetro del perno, desde 5.7 para una cuerda con diámetro de 0.25 in, hasta aproximadamente 9 para una cuerda con diámetro de 5 in.[16] K_{fm} es el factor de concentración de esfuerzos medio con la ecuación 4.17 (p. 294). Observe que K_{fm} generalmente estará cerca de 1.0 en pernos precargados.

El esfuerzo debido a la fuerza F_1 de precarga es

$$\sigma_i = K_{fm} \frac{F_i}{A_t} \tag{11.15d}$$

Peterson[6] informa que cerca del 15% de fallas en pernos ocurren en el filete debajo de la cabeza, 20% en el extremo de las cuerdas del vástago y aproximadamente el 65% en la cuerda de la cara de la tuerca. Las cuerdas roladas tienen resistencia a la fatiga significativamente más alta debido a la orientación favorable de la veta.[16][17] Los pernos de alta resistencia por lo general tienen cuerdas roladas.

Los esfuerzos calculados con las ecuaciones 11.15 necesitan compararse con un conjunto adecuado de parámetros de resistencia del material, sobre un diagrama de Goodman modificado, como se vio en la sección 4.11 (p. 290). La resistencia física se calcula con los métodos de la sección 4.6 (p. 257), mediante un factor de acabado de maquinado para cuerdas roladas o cortadas. Lo anterior se demostrará con un ejemplo. El factor de seguridad contra la fatiga se determina sin utilizar el diagrama de Goodman, empleando la ecuación 10.34b (p. 697), aplicando la notación consistente con esta sección.

$$N_f = \frac{S_e\left(S_{ut} - \sigma_i\right)}{S_e\left(\sigma_m - \sigma_i\right) + S_{ut}\sigma_a} \tag{11.16}$$

El valor de las precargas altas para reducir los efectos de cargas por fatiga debería quedar fuera de toda duda, con el análisis previo. Si no se aplicara precarga a la junta, las cargas y los esfuerzos medios y alterantes experimentados por el perno se incrementarían por el factor $1/C$, que es un número potencialmente grande, ya que C normalmente es pequeño y siempre menor que 1.

EJEMPLO 11-3

Sujetadores precargados en carga dinámica

Problema **Repita el ejemplo 11-2 con una carga variable aplicada a la junta. Determine el tamaño adecuado del perno y la precarga para la junta mostrada en la figura 11-23 (repetida). Calcule el factor de seguridad contra fatiga, fluencia y separación. Determine la precarga óptima como un porcentaje de la resistencia de prueba para maximizar los factores de seguridad contra fatiga, fluencia y separación.**

Se proporciona **Las dimensiones de la junta son $D = 1$ in y $l = 2$ in. La carga aplicada varía entre $P = 0$ y $P = 1000$ lb.**

Suposiciones **El perno tiene cuerdas roladas. Ambas piezas sujetadas son de acero. Los efectos de las pestañas sobre la rigidez de la junta se despreciarán. Como primer ensayo, se aplicará una precarga del 90% de la resistencia de prueba del perno. Use 99% de confiabilidad y una temperatura de operación de 300 °F.**

Solución **Véase las figuras 11-27 a 11-29.**

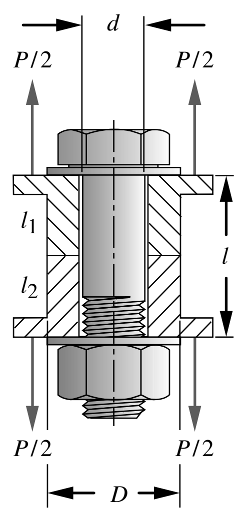


FIGURA 11-23 Repetida

Perno precargado que comprime un cilindro al cual se aplican cargas externas

1. De nuevo, se desconocen muchas variables para resolver las ecuaciones necesarias en un solo intento. Se debe intentar con valores de prueba para diversos parámetros y utilizar iteración para obtener un buen resultado. Realmente se hicieron varias iteraciones para resolver este problema, pero se presenta tan sólo una en aras de la brevedad. Los valores con los que aquí se intenta ya se reconocieron como valores razonables.
2. El principal valor intentado es el diámetro del perno, junto con la serie de la cuerda y una clase de perno para definir la resistencia de prueba. Se elige un perno de acero 5/16-18 UNC-2A clase SAE 5.2, debido a su uso exitoso en el problema de carga estática del ejemplo 11-2 (p. 749), el cual es similar. Para una longitud sujetada de 2 in, suponga una longitud del perno de 2.5 in para permitir una protuberancia suficiente para la tuerca. La precarga se toma en 90% de la resistencia de prueba, como se supuso arriba.
3. La resistencia de prueba, el área de esfuerzo a la tensión, la fuerza de precarga, la rigidez del perno, la rigidez del material y la constante de la junta son iguales a los valores obtenidos en el ejemplo 11-2, para el 90% de factor de precarga. Consulte ese ejemplo para los detalles. En resumen son:

$$S_p = 85 \text{ kpsi} \qquad A_t = 0.052\,431 \text{ in}^2 \qquad F_i = 4\,011 \text{ lb}$$
$$k_b = 1.059E6 \text{ lb/in} \qquad k_m = 1.063E7 \text{ lb/in} \qquad C = 0.090\,56 \tag{a}$$

4. Las porciones pico de la carga variable P experimentadas por el perno y el material, así como las cargas resultantes en el perno y el material después de que se aplica la carga, se obtienen del mismo modo que en el ejemplo anterior, pero la carga pico aquí es más pequeña:

$$P_b = 91 \text{ lb} \qquad P_m = 909 \text{ lb}$$
$$F_b = 4\,102 \text{ lb} \qquad F_m = 3\,102 \text{ lb} \tag{b}$$

5. Puesto que las cargas son fluctuantes, se necesitan calcular las componentes media y alternante de la fuerza que experimenta el perno. La figura 11-27 muestra el diagrama de carga-deflexión para este problema, dibujado a escala con las fuerzas aplicadas de arriba. La curva senoidal de poca profundidad, entre la línea A de la fuerza inicial y la línea B de la fuerza máxima en el perno, es la carga variable única que experimenta el perno. Las fuerzas media y alternante son, entonces,

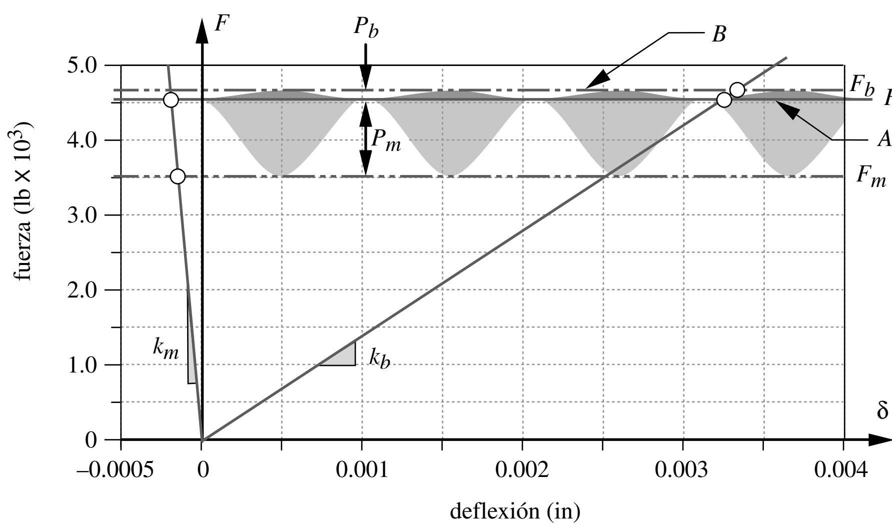


FIGURA 11-27

Fuerzas dinámicas en el perno y el material del ejemplo 11-3, trazadas a escala

$$F_{alt} = \frac{F_b - F_i}{2} = \frac{4\,102 - 4\,011}{2} = 45.3 \text{ lb}$$
$$F_{media} = \frac{F_b + F_i}{2} = \frac{4\,102 + 4\,011}{2} = 4056.2 \text{ lb} \qquad (c)$$

Observe que poca de la fuerza variable de 0-1000 lb es experimentada por el perno.

6. Los esfuerzos nominales medio y alternante en el perno son:

$$\sigma_{a_{nom}} = \frac{F_{alt}}{A_t} = \frac{45.3}{0.052\,431} = 864 \text{ psi}$$
$$\sigma_{m_{nom}} = \frac{F_{media}}{A_t} = \frac{4\,056.2}{0.052\,431} = 77\,364 \text{ psi} \qquad (d)$$

7. El factor de concentración de esfuerzo por fatiga para el diámetro de esta cuerda se determina con la ecuación 11.15*c*, mientras el factor de concentración de esfuerzos medio K_{fm} se calcula con la ecuación 4.17 (p. 294).

$$K_f = 5.7 + 0.6812d = 5.7 + 0.6812(0.3125) = 5.9$$
$$\text{si } K_f\left|\sigma_{máx_{nom}}\right| > S_y \text{ entonces:} \qquad K_{fm} = \frac{S_y - K_f\sigma_{a_{nom}}}{\left|\sigma_{m_{nom}}\right|}$$
$$K_f\left|\sigma_{máx_{nom}}\right| = K_f\left|\sigma_{a_{nom}} + \sigma_{m_{nom}}\right| = 5.9\left|864 + 77\,364\right| = 462\,548 \text{ psi}$$
$$462\,548 \text{ psi} > S_y = 92\,000 \text{ psi}$$
$$K_{fm} = \frac{S_y - K_f\sigma_{a_{nom}}}{\left|\sigma_{m_{nom}}\right|} = \frac{92\,000 - 5.9(864)}{77\,364} = 1.12 \qquad (e)$$

8. Los esfuerzos locales medio y alternante en el perno son, entonces:

$$\sigma_a = K_f\sigma_{a_{nom}} = 5.9(864) = 5\,107 \text{ psi}$$
$$\sigma_m = K_{fm}\sigma_{m_{nom}} = 1.12(77\,364) = 86\,893 \text{ psi} \qquad (f)$$

9. El esfuerzo con la precarga inicial es

$$\sigma_i = K_{fm}\frac{F_i}{A_t} = 1.12\frac{4\,011}{0.052\,431} = 85\,923 \text{ psi} \qquad (g)$$

10. Se debe obtener la resistencia física de este material. Mediante los métodos de la sección 4.6 (p. 257) se encuentra:

$$S_{e'} = 0.5S_{ut} = 0.5(120\,000) = 60\,000 \text{ psi} \qquad (h)$$

$$S_e = C_{carga}C_{tamaño}C_{sup}C_{temp}C_{conf}S_{e'}$$
$$= 0.70(0.995)(0.76)(1)(0.81)(60\,000) = 25\,726 \text{ psi} \qquad (i)$$

donde los factores de reducción de resistencia se toman de las tablas y las fórmulas de la sección 4.6 (p. 257) para, respectivamente, la carga axial, el tamaño del perno, un acabado de maquinado, temperatura ambiente y 99% de confiabilidad.

11. En la ecuación 11.16 (p. 753) se utilizan la resistencia física corregida y la resistencia última a la tensión, para obtener el factor de seguridad el factor de seguridad a partir de la línea de Goodman.

$$N_f = \frac{S_e\left(S_{ut} - \sigma_i\right)}{S_e\left(\sigma_m - \sigma_i\right) + S_{ut}\sigma_a}$$
$$= \frac{25\,837(120\,000 - 85\,923)}{25\,726(86\,893 - 85\,923) + 120\,000(5\,107)} = 1.38 \qquad (j)$$

En la figura 11-28 se muestra el diagrama de Goodman modificado para este estado de esfuerzos.

12. El esfuerzo estático del perno después de la fluencia local inicial y el factor de seguridad contra la fluencia son:

$$\sigma_s = \frac{F_{perno}}{A_t} = \frac{4\,102}{0.045\,36} = 78\,227 \text{ psi} \qquad N_y = \frac{S_y}{\sigma_b} = \frac{92\,000}{78\,227} = 1.18 \qquad (k)$$

13. La precarga requerida para obtener tales factores de seguridad es

$$F_i = 0.90 S_p A_t = 0.90(85\,000)(0.052\,431) \cong 4\,011 \text{ lb} \qquad (l)$$

14. El factor de seguridad contra la separación de la junta se determina con la ecuación 11.14*d* (p. 749).

$$N_{separación} = \frac{F_i}{P(1-C)} = \frac{4\,011}{1\,000(1 - 0.090\,56)} = 4.4 \qquad (m)$$

15. Los factores de seguridad contra la fatiga y la separación son aceptables. El factor de seguridad contra la fluencia es bajo, pero también es aceptable, ya que el perno se precarga deliberadamente a un nivel cercano a su resistencia a la fluencia.

16. El modelo se resolvió para un intervalo de precargas posibles, desde 0 hasta 100 por ciento de resistencia de prueba, y los factores de seguridad se graficaron contra el porcentaje de precarga. Los resultados se muestran en la figura 11-29. Los factores de seguridad contra la fatiga y la separación son < 1 abajo del 40% de precarga, punto donde la precarga se vuelve efectiva para mantener cerrada la junta. El factor de seguridad contra la fatiga permanece básicamente constante conforme la precarga se incrementa por arriba del umbral de 40%; no obstante, el factor de seguridad

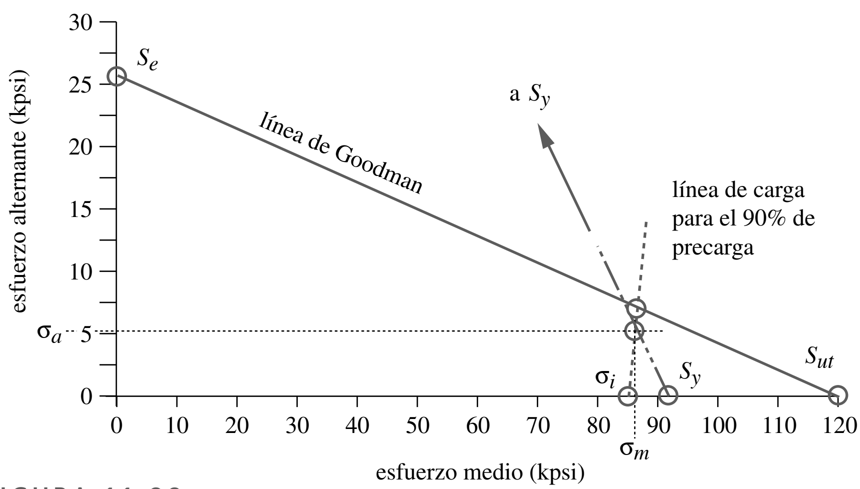


FIGURA 11-28

Diagrama de Goodman modificado del ejemplo 11-3

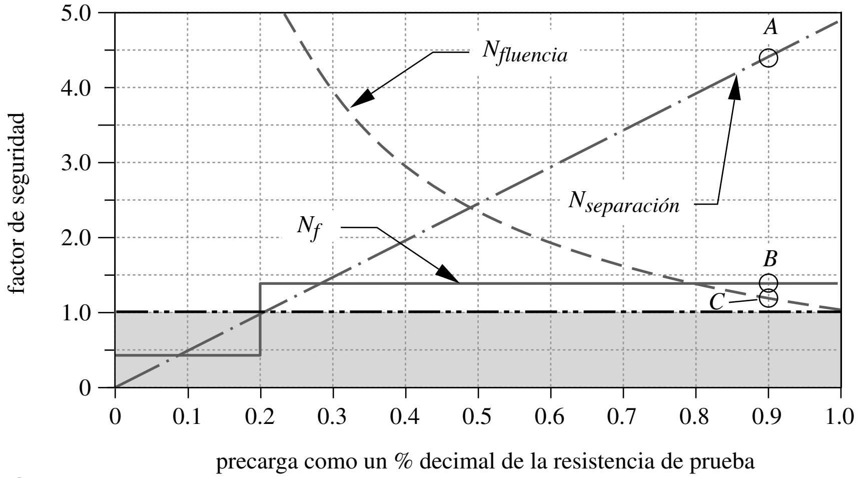


FIGURA 11-29

Factores de seguridad contra precarga para el perno cargado dinámicamente del ejemplo 11-3

contra la separación de la junta se incrementa linealmente con el aumento de la precarga. Para proteger la junta sujetada contra posibles sobrecargas, es deseable utilizar la mayor precarga con la que no cederá el perno cuando se aprieta. En este ejemplo, la precarga del 90% de la resistencia de prueba del perno da un margen de sobrecarga de $N_{separación}$ = 4.4 en *A*, con un 18% de reserva contra la fluencia durante la precarga (N_y = 1.18 en *C*), junto con un factor de seguridad contra falla por fatiga de N_f = 1.38 en *B*.

17. Entonces, el diseño recomendado es un perno 5/16-18 UNC-2A, grado 5.2, de 2.5 in de largo, precargado al 90% de la resistencia de prueba con una fuerza de 4 011 lb. Observe que este perno pequeño precargado ¡soportará media tonelada de carga variable! Los archivos EX15-03 se encuentran en el CD-ROM.

11

11.8 DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE RIGIDEZ EN LA JUNTA

En el análisis anterior, se supuso por sencillez que la sección transversal de los materiales sujetados era la de un cilindro de diámetro pequeño, como se indica en la figura 11-23 (p. 746). En la figura 11-21 (p. 745) se describe una situación más real, donde los materiales sujetados son un continuo que se extiende mucho más allá de la región de influencia del perno. De hecho, la mayoría de los ensambles tienen varios pernos distribuidos con un patrón sobre la superficie sujetada. (Cuando el patrón de perno es circular, la *circunferencia sobre la que se encuentra la línea central del perno* se conoce como **círculo de pernos**.) La pregunta es entonces ¿qué cantidad de material sujetado se debería incluir en el cálculo de la rigidez k_m del material, cuyo valor es necesario para determinar el factor de rigidez *C* de la junta?

La distribución de esfuerzos dentro del material, por debajo del perno, tiene una geometría compleja. El problema lo han estudiado muchos investigadores[7,8,9] y el cálculo exacto de la distribución del volumen bajo esfuerzo es bastante complicado, de manera que es mejor hacerlo con el FEA. El mayor esfuerzo de compresión en el material se encuentra (sin que ello sorprenda) directamente debajo del perno y decae conforme usted se aleja lateralmente de la línea central del perno (*CL*). A cierta distancia lateral de la *CL*, el esfuerzo de compresión, en el punto de contacto de la junta, tiende a cero, pero más allá de ese punto la junta suele separarse, pues ya no puede sostener el esfuerzo de tensión.

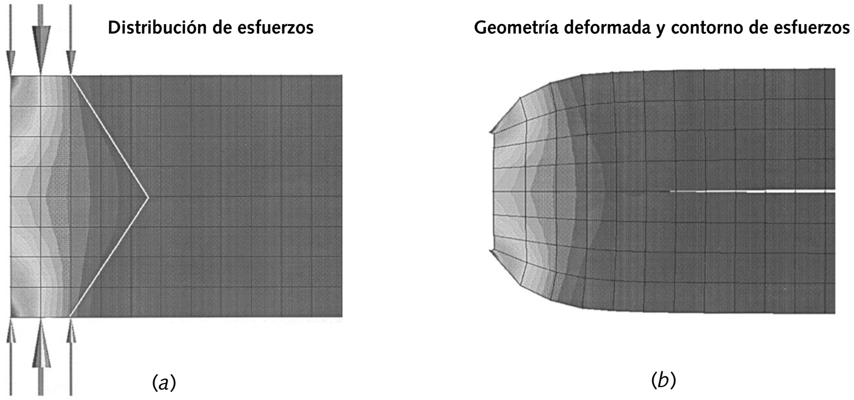


FIGURA 11-30

Análisis de elemento finito de la distribución de esfuerzos y deformación dentro de la zona de sujeción de una unión sujeta con pernos [10]

La figura 11-30 muestra los resultados de un estudio del análisis de elementos finitos (FEA) de la distribución de esfuerzos, en una junta sándwich de dos piezas, sujetadas con un perno simple precargado.[10,11] Se analiza tan sólo la mitad del sándwich debido a su asimetría. La línea central vertical del perno se encuentra a la izquierda del borde izquierdo de cada diagrama. Algunas veces, la distribución de esfuerzos alrededor del perno se modela como el perfil de un cono trucado en forma de barril,[12] como el de la figura 11-30*a*. La figura 11-30*b* presenta la geometría deformada y muy exagerada de la dimensión vertical, con la finalidad de señalar la deflexión mínima en la zona de sujeción y la separación de la junta en la mitad derecha del ensamble sujetado. Algunos estudios sugieren que un ángulo de cono $\phi = 30°$ brinda una aproximación razonable del volumen bajo esfuerzo.[12,13] La constante de resorte del material de un tornillo de máquina o un tornillo de capucha se determina de manera similar. Tales enfoques sólo ofrecen resultados aproximados y no se utilizarán aquí. Otros investigadores[13,14,15] han efectuado estudios de FEA en juntas sujetas con pernos que dan mejores estimaciones de su comportamiento. Aquí se presenta uno de ellos.

Cornwell[12] llevó a cabo un estudio extensivo de FEA sobre la rigidez de pernos y juntas de 4424 combinaciones únicas de cuatro parámetros de juntas: diámetro del perno, espesor de la junta, espesor de una placa individual y diversas combinaciones de materiales de las placas. Dicho estudio también incluyó los efectos de la deflexión de la cabeza del perno, la cual podría ser mucho mayor que la rigidez teórica del perno pronosticada con la ecuación 11.11*a*. Es posible incluir la deflexión de la cabeza mediante la siguiente ecuación de rigidez del perno, en lugar de la ecuación 11.11*a*.

$$k_{b'} = \left(1 + \frac{d}{l}\right)^{-1} k_b \quad \cong \quad \left(1 + \frac{d}{l}\right)^{-1} \frac{A_t A_b}{A_b l_t + A_t l_s} E_b \tag{11.17}$$

Cornwell ajustó ecuaciones empíricas a sus datos de FEA que, en conjunto, determinan la constante C de rigidez de la junta, en función del diámetro del perno d, la longitud l de sujeción, el espesor relativo de la placa de las dos piezas sujetas y los módulos de elasticidad E de los dos materiales sujetos. Las ecuaciones empíricas coinciden con los datos de FEA en todos los modelos, con un error promedio del 0.6%, y tienen un coeficiente de correlación con los datos de 0.9998. Dicho procedimiento elimina la necesidad de estimar la rigidez del material k_m en la zona de sujeción para determinar C, como se hizo en los dos ejemplos precedentes y en todos los demás métodos mencionados. Se emplea directamente el valor de C en las ecuaciones 11.14 para determinar las cargas en el perno y en el material, así como el factor de seguridad contra separación en la junta. Tales ecuaciones son válidas para cualquier combinación de materiales, cuyos módulos de Young se encuentran entre los del acero y el aluminio.

Cornwell define la razón de aspecto j de una junta como el diámetro d del perno entre la longitud l de sujeción,

$$j = \frac{d}{l} \tag{11.18a}$$

la razón de módulo r del perno de la placa como

$$r = \frac{E_{material}}{E_{perno}} \tag{11.18b}$$

y la razón de espesor t de la placa como

$$t = \frac{T_L}{T_L + T_H} \tag{11.18c}$$

donde T_L es el espesor de la placa con el módulo de Young más pequeño y T_H es el espesor de la placa con el módulo de Young más grande.

Juntas de dos placas del mismo material

En el estudio de Cornwell, se investigaron juntas con razones de aspecto de junta j en el intervalo de 0.1 a 2.0, así como placas con razones de módulo r del perno que van desde 0.35 para placas de aluminio y pernos de acero, hasta 1.0 para placas y pernos de acero. Se analizó el efecto de la variación en la placa de la razón de módulo r del perno sobre el factor C de la junta. Las curvas de los datos resultantes del FEA se ajustaron para obtener una expresión de C contra r en los intervalos mencionados, para el caso de materiales parecidos en la junta.

$$C_r = p_3 r^3 + p_2 r^2 + p_1 r + p_0 \tag{11.19}$$

donde los coeficientes p_i están dados en la tabla 11-8 como una función de j.

Para una junta con los mismos materiales, $C = C_r$. Para una junta con dos materiales diferentes, el factor C_r de cada material se debe calcular por separado. C_H y C_L representan los factores de junta para la misma unión fabricada totalmente con un módulo de material alto o bajo, respectivamente.

11

Tabla 11-8 Parámetros de las ecuaciones 11.19 [15]

j	p_0	p_1	p_2	p_3
0.10	0.4389	–0.9197	0.8901	–0.3187
0.20	0.6118	–1.1715	1.0875	–0.3806
0.30	0.6932	–1.2426	1.1177	–0.3845
0.40	0.7351	–1.2612	1.1111	–0.3779
0.50	0.7580	–1.2632	1.0979	–0.3708
0.60	0.7709	–1.2600	1.0851	–0.3647
0.70	0.7773	–1.2543	1.0735	–0.3595
0.80	0.7800	–1.2503	1.0672	–0.3571
0.90	0.7797	–1.2458	1.0620	–0.3552
1.00	0.7774	–1.2413	1.0577	–0.3537
1.25	0.7667	–1.2333	1.0548	–0.3535
1.50	0.7518	–1.2264	1.0554	–0.3550
1.75	0.7350	–1.2202	1.0581	–0.3574
2.00	0.7175	–1.2133	1.0604	–0.3596

Juntas con dos placas de materiales diferentes

La figura 11-31 presenta una muestra representativa de datos calculados con FEA, de la relación entre la constante C de junta y la razón de espesor t de la placa. Una familia de curvas polinomiales está ajustada a cada uno de muchos valores de razón j de aspecto. Tales curvas están definidas por las ecuaciones:

$$C_t = q_5 t^5 + q_4 t^4 + q_3 t^3 + q_2 t^2 + q_1 t + q_0 \tag{11.20a}$$

$$C_t = q_3 t^3 + q_2 t^2 + q_1 t + q_0 \tag{11.20b}$$

donde la ecuación 11.20*a* se utiliza tan sólo para el caso de razón de aspecto de la junta $j = 0.1$ y la ecuación 11.20*b* se aplica a todos los demás valores de j. En la tabla 11-9 se indican los valores de los coeficientes q_i para varias razones de aspecto de la junta.

Éstas son funciones no lineales, aunque la relación con respecto a j entre los miembros de la familia de curvas de la figura 11-31 también es bastante no lineal, como se observa en las diferentes formas de las curvas de C contra t para diferentes j. Para simplificar el uso de estos datos en el cálculo de C para diversos valores de j, Cornwell creó un factor de corrección para tomar en cuenta tanto la forma como la magnitud de la desviación del factor real de rigidez de la junta, a partir de la línea recta entre C_H y C_L en la figura 11-31. La forma del factor de corrección está dada por las ecuaciones 11.20 y la de la magnitud por la ecuación 11.21.

$$a = e^{0.0598(\ln j)^3 + 0.1385(\ln j)^2 - 0.4350(\ln j) - 2.3516} \tag{11.21}$$

Únicamente se muestran las funciones linealizadas de dos curvas ($j = 0.1$ y $j = 0.5$), para reducir el amontonamiento en la figura. El parámetro a se muestra sobre cada una de esas dos curvas; representa la desviación máxima entre la curva real y entre los extremos de la línea recta. Los extremos de la línea recta, identificados como C_H y C_L, representan el caso del módulo del material al 100% del grande y al 100% del pequeño

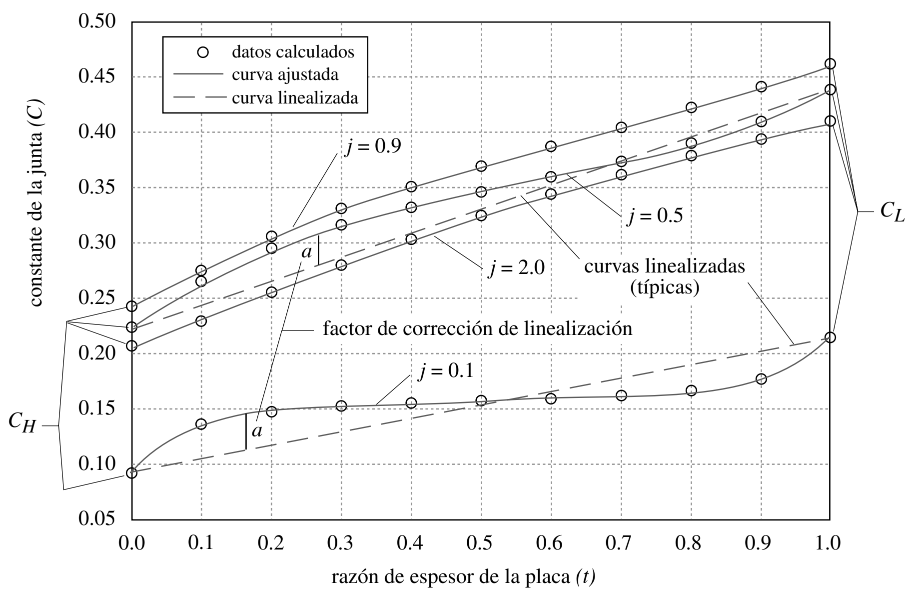


FIGURA 11-31

Familia de curvas de la constante de junta C contra la razón de espesor t de la placa y la razón j de aspecto [15]

Tabla 11-9 Parámetros de la ecuación 11.20[15]

j	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0.10	0.0079	17.040	–92.832	202.44	–209.38	82.726
0.20	0.1010	8.5465	–24.166	15.497		
0.30	0.0861	8.2344	–22.274	13.963		
0.40	0.0695	8.0297	–20.727	12.646		
0.50	0.0533	7.8676	–19.357	11.457		
0.60	0.0372	7.6705	–17.951	10.262		
0.70	0.0197	7.3030	–16.235	8.9273		
0.80	0.0029	6.9893	–14.737	7.7545		
0.90	–0.0123	6.7006	–13.363	6.6784		
1.00	–0.0265	6.4643	–12.188	5.7481		
1.25	–0.0524	5.7363	–9.3326	3.6348		
1.50	–0.0678	5.0674	–7.0322	2.0107		
1.75	–0.0763	4.5187	–5.1590	0.6861		
2.00	–0.0784	3.9617	–3.5248	–0.3956		

en la junta, respectivamente. Se necesitan tales valores para el cálculo final, ya que definen la pendiente y la intersección de cada curva linealizada. Los valores de C_H y C_L se calculan con la ecuación 11.19 usando la placa para las razones de módulo del perno, con la ecuación 11.18*b* para los módulos alto y bajo del material, respectivamente.

Una vez que se han obtenido los valores de C_H, C_L, C_t y a, se obtiene la constante C de la junta en función de tales parámetros y la razón de espesor t de la placa a partir de:

$$C = C_H + (t + aC_t)(C_L - C_H) \tag{11.22}$$

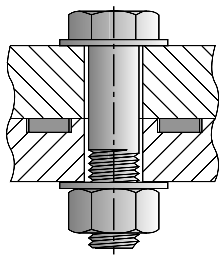
Luego se utiliza el valor de C en las ecuaciones 11.14. Al conocer C, mediante la k_b de la ecuación 11.17 se obtiene la rigidez k_m del material con la ecuación 11.13*c*.

Juntas con empaques

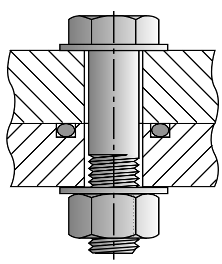
Los empaques se usan con frecuencia en juntas donde se necesitan sellos de presión. Hay diferentes tipos de empaques, los cuales se dividen en dos clases generales: **confinados** y **no confinados**. Las figuras 11-32*a* y 11-32*b* muestran dos variantes de empaques confinados, uno de los cuales es un empaque de anillo. Todos los empaques confinados permiten que las superficies duras de las partes emparejadas entren en contacto, lo cual hace que la junta se comporte como si no tuviera empaque, en lo que se refiere a su constante de resorte k_m. Se usan los procedimientos descritos para estimar k_m en los empaques confinados.

Las juntas con empaques no confinados, como la que se ilustra en la figura 11-32*c*, tienen el empaque relativamente suave, separando completamente las superficies emparejadas. Por lo tanto, el empaque contribuye a la constante de resorte de la junta. La constate de resorte k_g del empaque se combina con las constantes de resorte de las partes emparejadas de la ecuación 10.2*b* (p. 649), para obtener una constante de resorte k_m efectiva del ensamble. En la tabla 11-11 se presentan los módulos de elasticidad de varios materiales para empaques.

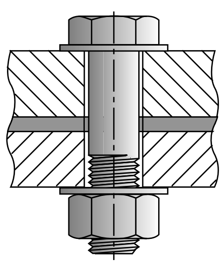
Con excepción del cobre y la combinación asbesto-cobre, para los materiales de empaque de la tabla 11-11, los módulos típicos de los empaques son tan bajos que dominan la ecuación 9.2*b* y básicamente determinan la rigidez de la junta. En esos casos no es necesario resolver la ecuación 9.2*b* y k_m se hace igual a k_g. Con un empaque de



(*a*) Empaque confinado



(*b*) Empaque de anillo



(*c*) Empaque no confinado

FIGURA 11-32
Empaques confinados y no confinados

Tabla 11-10 Módulo de Young en algunos materiales para empaque
Fuente: Referencia 12 con autorización de McGraw-Hill, Inc., Nueva York

	Módulo de elasticidad	
Material	**psi**	**MPa**
Corcho	12.5*E*3	86
Asbesto comprimido	70*E*3	480
Asbesto-cobre	13.5*E*6	93*E*3
Cobre (puro)	17.5*E*6	121*E*3
Caucho plano	10*E*3	69
Espiral enrollada	41*E*3	280
Teflón	35*E*3	240
Fibra vegetal	17*E*3	120

asbesto-cobre o cobre (o cualquier otro empaque rígido no confinado), la rigidez del empaque suele ser lo suficientemente alta como para garantizar el cálculo de k_m con la ecuación 9.2*b*. Se utiliza un área del material del empaque, de acuerdo con la zona de sujeción total en el nivel del empaque, para estimar k_g.

11

EJEMPLO 11-4

Determinación de la rigidez del empaque y la constante de la junta

Problema **Una cámara de presión está sellada con una tapa sujeta con ocho pernos precargados. Obtenga la rigidez del empaque y las constantes de la junta para dos diseños del ensamble, como se indica en la figura 11-33, uno con un empaque confinado y otro con un empaque no confinado. También determine las cargas experimentadas por los pernos y el material.**

Se proporciona **El diámetro del cilindro D_p = 4 in. El diámetro del círculo de los pernos D_{bc} = 5.5 in. El diámetro de la pestaña exterior D_f = 7.25 in. Los ocho pernos 3/8-16 UNC están equidistantes en el círculo de pernos. La pestaña sobre la cámara de acero tiene 0.75 in de grueso. El espesor de la cubierta de aluminio l_c = 1.125 in. La longitud sujeta l de la junta es de 1.875 in. El espesor del empaque t = 0.125 in. La presión en el cilindro es de 1 500 psi.**

Suposiciones **El material del empaque es caucho.**

Solución **Véase la figura 11-33.**

1. La figura 11-33 muestra los dos diseños alternativos del empaque para la junta sobre la misma vista para ahorrar espacio. Cualquiera que sea el diseño, la configuración del empaque se encuentra en ambos lados de la línea central. No deben confundirse con las diferentes representaciones de las partes superior e inferior del empaque: tan sólo una u otra se usarán en el ensamble final. Se tratará primero con la configuración del empaque confinado.

2. La fuerza sobre cada perno se determina a partir de la presión y las dimensiones del cilindro conocidas, suponiendo que todos los pernos comparten la carga por igual. La fuerza total en la tapa del extremo de la cámara es

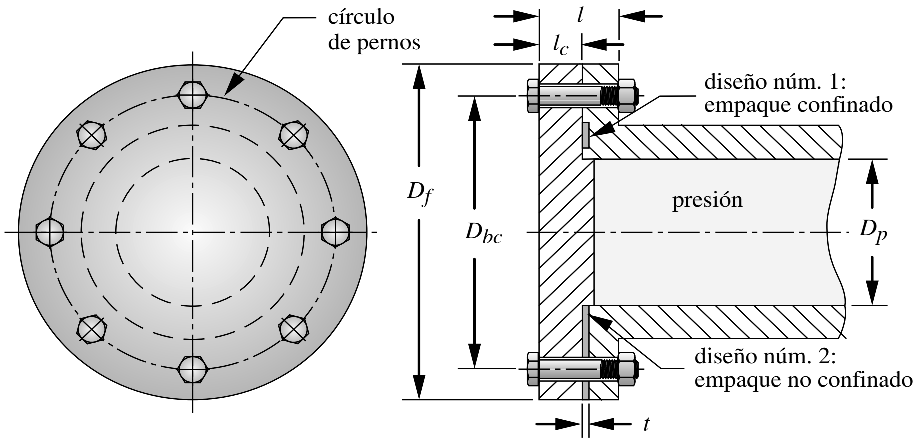


FIGURA 11-33

Placa del extremo de un recipiente de presión asegurada con pernos precargados sobre un círculo de pernos.

$$P_{total} = pA = p\frac{\pi D_p^2}{4} = 1\,500\frac{\pi(4)^2}{4} = 18\,850 \text{ lb} \qquad (a)$$

y la fuerza aplicada P sobre cada perno es

$$P = \frac{P_{total}}{N_{pernos}} = \frac{18\,850}{8} = 2\,356 \text{ lb} \qquad (b)$$

3. Se analiza primero el caso de un empaque confinado, el cual permite que las superficies del metal entren en contacto justo como si no estuviera presente el empaque. De modo que el análisis de la rigidez del material puede ignorar el empaque confinado.

4. Determine las razones pertinentes de esta junta con las ecuaciones 11.17. La razón de aspecto de la junta es:

$$j = \frac{d}{l} = \frac{0.375}{1.875} = 0.200 \qquad (c)$$

5. Aquí hay dos placas con módulos de pernos de interés, ya que se tienen materiales diferentes en la junta. Se designarán como r_H, para el material con módulo alto (la pestaña del cilindro de acero), y r_L, para el módulo bajo de la cubierta de aluminio.

$$r_H = \frac{E_{material}}{E_{perno}} = \frac{30E6}{30E6} = 1.0$$
$$r_L = \frac{E_{material}}{E_{perno}} = \frac{10.4E6}{30E6} = 0.347 \qquad (d)$$

6. La razón de espesor de la placa relaciona los espesores de los módulos bajo y alto de los materiales de la junta.

$$t = \frac{T_L}{T_L + T_H} = \frac{1.125}{1.125 + 0.750} = 0.600 \qquad (e)$$

7. Calcule los términos C_r, C_H y C_L, tanto para r_H como para r_L, mediante la ecuación 11.19 y los coeficientes p_i de la tabla 11-8. Para $j = 0.20$, son: $p_0 = 0.6118$, $p_1 = -1.1715$, $p_2 = 1.0875$ y $p_3 = -0.3806$.

$$C_L = C_r = p_3 r_L^{\,3} + p_2 r_L^{\,2} + p_1 r_L + p_0$$
$$= -0.381(0.347)^3 + 1.088(0.347)^2 - 1.172(0.347) + 0.612 = 0.321 \qquad (f)$$

Observe que $r_H = 1$, de modo que C_H es:

$$C_H = C_r = p_3 r_H^{\,3} + p_2 r_H^{\,2} + p_1 r_H + p_0$$
$$= -0.381 + 1.088 - 1.172 + 0.612 = 0.147 \qquad (g)$$

8. Puesto que en este ejemplo $j > 0.1$, se necesita utilizar la ecuación 11.20*b* para calcular C_t. Los coeficientes q_i se toman de la tabla 11-9 y para $j = 0.20$, son $q_0 = 0.101$, $q_1 = 8.547$, $q_2 = -24.166$ y $q_3 = 15.497$.

$$C_t = q_3 t^3 + q_2 t^2 + q_1 t + q_0$$
$$C_t = 15.497(0.60)^3 - 24.166(0.60)^2 + 8.547(0.60) + 0.101 = -0.124 \qquad (h)$$

9. Calcule la amplitud del factor de corrección de la estimación linealizada con la ecuación 11.21.

$$a = e^{0.0598(\ln j)^3 + 0.1385(\ln j)^2 - 0.4350(\ln j) - 2.3516} = 0.214 \qquad (i)$$

10. El factor de rigidez de la junta para el diseño del empaque confinado se calcula con la ecuación 11.22.

$$C = C_H + (t + aC_t)(C_L - C_H)$$
$$= 0.321 + [0.60 + 0.214(-0.124)](0.321 - 0.147) = 0.247 \qquad (j)$$

11. Las porciones de la carga aplicada P experimentadas por el perno y el material se determinan con las ecuaciones 11.13.

$$P_b = CP = 0.247(2\,356) \cong 581.1 \text{ lb}$$
$$P_m = (1 - C)P = (1 - 0.247)(2\,356) \cong 1\,775.1 \text{ lb} \qquad (k)$$

12. Se puede calcular la rigidez del perno k_b con la ecuación 11.17, mediante el área del vástago $= 0.110$ in^2 y el área del esfuerzo de tensión $= 0.077$ in^2 (tabla 11-1), luego estimar la rigidez del material k_{m_1} para el caso del empaque confinado con la ecuación 11.13*c*, para obtener $k_{b'}$ y C.

longitud de la cuerda: $l_{cuerda} = 2d + 0.25 = 2(0.375) + 0.25 = 1.0$ in

longitud del vástago: $l_s = l_{perno} - l_{cuerda} = 2.25 - 1.0 = 1.25$ in

longitud de la cuerda sujeta: $l_t = l - l_s = 1.875 - 1.25 = 0.625$ in

$$k_{b'} \cong \left(1 + \frac{d}{l}\right)^{-1} \frac{A_t A_b}{A_b l_t + A_t l_s} E_b$$

$$k_{b'} \cong \left(1 + \frac{0.375}{1.875}\right)^{-1} \frac{0.077(0.110)}{0.110(0.625) + 0.077(1.25)} 30E6 = 1.290E6 \text{ lb/in}$$

$$C = \frac{k_{b'}}{k_{m_1} + k_{b'}} \quad \Rightarrow \quad k_{m_1} = k_{b'} \frac{1 - C}{C} = 1.29E6\left(\frac{1 - 0.247}{0.247}\right) = 3.940E6 \text{ lb/in} \qquad (l)$$

13. Ahora se abordará el caso del empaque no confinado. La rigidez del perno no se afecta con el empaque, pero sí la rigidez del material. Se tienen dos resortes en serie, el

11

metal, cuya rigidez k_m está definida en la ecuación (l), y el empaque, cuya rigidez se calcula con la ecuación (n) de abajo, que se combinan de acuerdo con la ecuación 10.2b (p. 649). Se supone que la porción del empaque no confinado, sometida a la fuerza de sujeción, es la que se encuentra entre el diámetro exterior de la pestaña mostrada en la figura 11-33 y el diámetro interior del recipiente. Se debe restar el orificio del perno del área del empaque. El área del empaque sujetado alrededor de un perno es:

$$A_g = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\left(D_f^2 - D_p^2\right)}{N_{pernos}} - d^2\right] = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\left(7.25^2 - 4^2\right)}{8} - 0.375^2\right] = 3.479 \text{ in}^2 \qquad (m)$$

14. La rigidez de esta pieza de empaque se obtiene con la ecuación 11.11c (p. 747).

$$k_{m_2} = k_g = \frac{A_g E_g}{t} = \frac{3.479(10E3)}{0.125} \cong 2.783E5 \text{ lb/in} \qquad (n)$$

El módulo de elasticidad E_g del material del empaque se obtiene con la tabla 11-10 (p. 762).

15. La rigidez combinada de la junta con empaque (de la ecuación 10.2b, p. 649) es

$$k_m = \frac{1}{\frac{1}{k_{m_1}} + \frac{1}{k_{m_2}}} = \frac{1}{\frac{1}{3.94E6} + \frac{1}{2.783E5}} \cong 2.600E5 \text{ lb/in} \qquad (o)$$

Observe que la rigidez combinada es básicamente la misma que la del empaque blando, en vista de que domina la ecuación. Se pudo haber usado la rigidez del empaque k_g para representar la rigidez de la junta k_m con un pequeño error.

16. La constante de la junta con el empaque no confinado es ahora

$$C = \frac{k_{b'}}{k_m + k_{b'}} = \frac{1.290E6}{2.600E5 + 1.290E6} = 0.832$$

y

$$(1 - C) = 0.168 \qquad (p)$$

17. Las porciones de la carga aplicada P, experimentadas por el perno, y el material con un empaque blando no confinado en la junta, se determinan ahora con las ecuaciones 11.13 (p. 748).

$$P_b = CP = 0.832(2\,356) \cong 1961 \text{ lb}$$

$$P_m = (1 - C)P = (1 - 0.832)(2356) \cong 395 \text{ lb} \qquad (q)$$

18. Vea lo que sucede con la introducción de un empaque blando no confinado. Compare el valor de C de la ecuación (j) con la C de la ecuación (p). El perno ha pasado de experimentar tan sólo el 25% de la carga aplicada, sin empaque (o con un empaque confinado), a experimentar el 83% de la carga aplicada con un empaque suave no confinado. En efecto, los roles del perno y el material se han invertido con la introducción del empaque blando. Un empaque blando no confinado limita severamente la capacidad del perno para soportar cargas de fatiga, como lo hacía en el ejemplo anterior. Los archivos EX15-04 se encuentran en el CD-ROM.

Advierta que para obtener los beneficios de precargas altas, en términos de protección de los sujetadores contra carga de fatiga, es necesario tener una rigidez del material mayor que la rigidez del perno. Los empaques blandos no confinados reducen la rigidez

Tabla 11-11
Coeficiente de torque k_i para cuerdas estándares de UNS, con coeficientes de fricción $\mu = \mu_c = 0.15$

Tamaño del perno	K_i UNC	K_i UNF
0		0.22
1	0.22	0.22
2	0.22	0.22
3	0.22	0.22
4	0.22	0.22
5	0.22	0.22
6	0.22	0.22
8	0.22	0.22
10	0.22	0.21
12	0.22	0.22
1/4	0.22	0.21
5/16	0.22	0.21
3/8	0.22	0.21
7/16	0.21	0.21
1/2	0.21	0.21
9/16	0.21	0.21
5/8	0.21	0.21
3/4	0.21	0.21
7/8	0.21	0.21
1	0.21	0.21
1 1/8	0.21	0.21
1 1/4	0.21	0.21
1 3/8	0.21	0.21
1 1/2	0.21	0.20
1 3/4	0.21	
2	0.21	
2 1/4	0.21	
2 1/2	0.21	
2 3/4	0.21	
3	0.21	
3 1/4	0.21	
3 1/2	0.21	
3 3/4	0.21	
4	0.21	

del material tan severamente que limitan la efectividad de la precarga. Para juntas con cargas pesadas, los empaques no confinados deberían ser de un material con alta rigidez, como cobre o asbesto-cobre, o bien, sustituirse por empaques confinados.

Algunas reglas prácticas en relación con los patrones de pernos, como el usado en el ejemplo 11-4, son

1. Para una buena distribución de la fuerza, el espaciado de los pernos en un círculo o en un patrón no debería exceder aproximadamente 6 diámetros del perno entre pernos adyacentes.
2. Los pernos no deberían estar más cerca de un borde que 1.5 a 2 diámetros, aproximadamente.

11.9 CONTROL DE LA PRECARGA

Evidentemente, la precarga es un factor importante en el diseño de pernos. Por consiguiente, es necesario utilizar algún medio para controlar la precarga que se aplica a un perno. Los métodos de control más exactos requieren que ambos extremos del perno estén accesibles. Así se podría medir directamente la elongación con un micrómetro o con un calibrador de longitudes electrónico, luego de lo cual el perno se estira a una longitud consistente con la precarga deseada, de acuerdo con la ecuación 11.10*a* (p. 746). Algunas veces se usan transductores electrónicos para medir el cambio en la longitud del perno cuando éste se aprieta, por lo que sólo se necesita tener acceso al extremo de la cabeza. Estos métodos no son tan útiles en la producción masiva o en escenarios de servicio en campo, puesto que requieren tiempo, cuidado, instrumentos de precisión y personal especializado.

Un método más conveniente, aunque menos preciso, mide o controla el torque aplicado en la tuerca o en la cabeza de un tornillo con cabeza. Un torquímetro suministra, en un disco, una lectura de salida del torque aplicado. Generalmente se considera que los torquímetros incluyen un error en el valor de la precarga de hasta ±30%. Si se tiene mucho cuidado y se lubrican las cuerdas (lo cual siempre es deseable), quizás el error se reduzca a la mitad, pero todavía es muy grande. Las pistolas neumáticas de impacto se programan para un nivel de torque específico en el cual dejan de girar, brindan resultados más consistentes que el torquímetro manual y se prefieren por encima de ésta.

El torque necesario para generar cierta precarga particular se calcula con la ecuación 11.5*a* (p. 731), desarrollada para el tornillo de potencia. Se sustituye la ecuación 11.3 (p. 730) en la 10.5*a* para obtenerla en términos del ángulo de avance λ:

$$T_i = F_i \frac{d_p}{2} \frac{(\mu + \tan\lambda\cos\alpha)}{(\cos\alpha - \mu\tan\lambda)} + F_i \frac{d_c}{2} \mu_c \qquad (11.23a)$$

El diámetro de paso d_p se aproxima burdamente con el diámetro del perno d, mientras el diámetro medio del collarín d_c se aproxima con el diámetro promedio del perno d y la cabeza estándar o un tamaño de tuerca de $1.5d$,

$$T_i \cong F_i \frac{d}{2} \frac{(\mu + \tan\lambda\cos\alpha)}{(\cos\alpha - \mu\tan\lambda)} + F_i \frac{(1+1.5)d}{4} \mu_c \qquad (11.23b)$$

Factorizando la fuerza y el diámetro del perno, se obtiene

$$T_i \cong K_i F_i d \qquad (11.23c)$$

donde $$K_i \cong \left[0.50 \frac{(\mu + \tan\lambda\cos\alpha)}{(\cos\alpha - \mu\tan\lambda)} + 0.625\mu_c \right]$$

K_i se conoce como *coeficiente del torque*.

Observe que el coeficiente de fricción μ_c, entre la cabeza o la tuerca y las superficies, así como el coeficiente de fricción μ, en la cuerda, contribuyen al coeficiente del torque K_i. Si se supone un coeficiente de fricción de 0.15 en ambas ubicaciones y se calculan los coeficientes de torque K_i, de todas las cuerdas estándares UNC y UNF (con los diámetros de paso d_p correctos en vez de la aproximación de la ecuación 11.23*b*), el valor de K_i varía muy poco en el intervalo completo de los tamaños de cuerdas, como se indica en la tabla 11-11 (página opuesta). Entonces, el torque de apriete T_i necesario para obtener la fuerza F_i de precarga deseada **en cuerdas lubricadas** se aproxima (sujeto a los supuestos de fricción antes mencionados) como

$$T_i \cong 0.21 F_i d \tag{11.23d}$$

El método de giro de la tuerca

Otra técnica que se utiliza con frecuencia para controlar la precarga se conoce como método de *giro de la tuerca*. Como se conoce el avance del sujetador, el giro de un número determinado de vueltas de la tuerca estirará el perno una cantidad conocida, siempre y cuando el punto inicial sea tal que todo el avance de la tuerca contribuya al estiramiento del perno. Primero se coloca la tuerca en un punto de inicio útil, llamado *apriete a mano*, definido como el apriete obtenido con unos cuantos impactos de una pistola neumática para tuercas o, si se hace manualmente, como el apriete que una persona haría a la tuerca con una llave estándar. Luego se gira la tuerca (con una llave más grande) a través de un número adicional de vueltas, o fracciones de vuelta, calculadas para estirar el perno la cantidad deseada según la ecuación 11.10*a* (p. 746).

Sujetadores de torque limitado

La necesidad de precargas exactas en los pernos de alta resistencia motivó que los fabricantes de pernos proporcionen pernos especiales de "separación con tensión controlada", como el que se ilustra en la figura 11-34. Dichos pernos tienen una extensión con ranuras en el extremo. Tal extensión está diseñada con un área cortante calculada para fracturarse cuando se obtiene el torque adecuado. Se proporcionan también dados especiales que se sujetan a las ranuras, como se muestra en la figura 11-35, la cual también explica cómo se utiliza. Estos sujetadores se emplean con frecuencia en construcciones de acero estructural, donde la uniformidad de la precarga comparada con la de un torquímetro, o la de una pistola neumática para tuercas, es una gran ventaja, en términos de minimización de errores del operario, cuando se requiere instalar decenas de miles de pernos para garantizar que el rascacielos o el puente se sostengan.

Arandelas indicadoras de carga

Otro auxiliar para aplicar la tensión adecuada al perno requiere el uso de arandelas especiales, bajo la cabeza del perno, ya sea para controlar la carga de tensión o para indicar cuándo es la correcta. Algunas veces se emplean las arandelas Belleville de resorte debajo de las cabezas de los pernos. El resorte Belleville fue diseñado para suministrar al perno la fuerza deseada cuando se encuentra en compresión de aplanamiento (véase la sección 10.9, p. 700). El perno simplemente se aprieta hasta que se aplana totalmente el resorte Belleville.

Las arandelas indicadoras de carga (llamadas también indicadoras de tensión directa) se fabrican con protuberancias que se aplastan con las precargas deseadas, como se muestra en la figura 11-36. El perno se aprieta hasta que la altura de la arandela se reduce a la dimensión apropiada, como se indica en la figura.

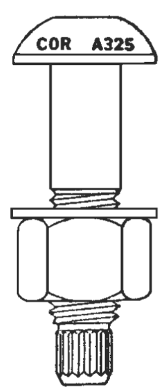
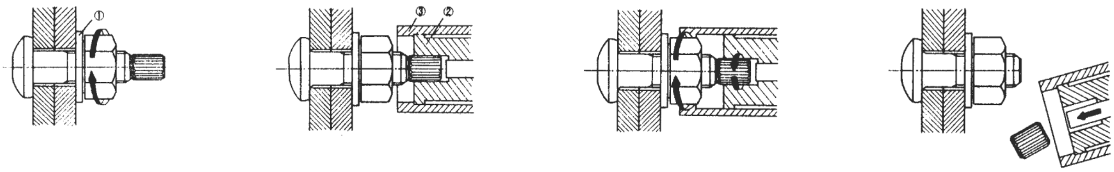


FIGURA 11-34

Perno de tensión controlada para separación
Cortesía de Cordova Bolt Inc., Buena Park, CA 90621

11



(*a*) Coloque el perno en el orificio con una arandela debajo de la tuerca y apriete la tuerca con los dedos

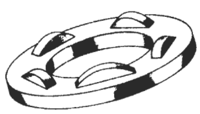
(*b*) Ajuste el dado interior en las ranuras y coloque el dado exterior en la tuerca

(*c*) Gire la llave de tubo. El dado exterior gira y aprieta la tuerca hasta que se corta la parte ranurada

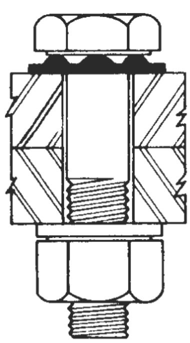
(*d*) Quite el dado de la tuerca y expulse la porción cortada del dado interior

FIGURA 11-35

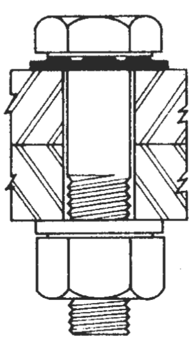
Instrucciones de uso de pernos con separación *Cortesía de Cordova Bolt Inc., Buena Park, Calif 90621*



(*a*) Arandela indicadora de carga



(*b*) Antes de apretarse



(*c*) Después de apretarse

FIGURA 11-36

Arandelas indicadoras de carga
Cortesía de Cordova Bolt Inc., Buena Park, CA 90621

Esfuerzos de torsión debidos a torques aplicados a los pernos

Cuando a la tuerca de un perno se le aplica un torque de precarga, también se aplica una carga de torsión a las cuerdas del perno. Si la fricción en las cuerdas es grande, la torsión en el perno llega a ser apreciable. Ésta es la razón principal por la que se lubrican las cuerdas antes de ensamblar los sujetadores. Si no hubiera fricción en la cuerda, la carga de torsión sobre el perno estaría cerca de cero. Un lubricante seco como polvo de grafito con bisulfuro de molibdeno funcionaría bien, como lo haría un aceite derivado del petróleo.

El esfuerzo de torsión se genera en el vástago del perno durante el apretamiento, como se definió en la ecuación 11.9 (p. 738). Este esfuerzo de torsión se combina con el esfuerzo axial de tensión del vástago, con la finalidad de crear un esfuerzo principal mayor que el esfuerzo de tensión aplicado, como se muestra en el diagrama del círculo de Mohr de la figura 11.37*a*. Si se aplica un torque invertido a la tuerca, después de que está totalmente apretada, sin aflojarla, se mitigaría la componente del esfuerzo de torsión. Incluso, cuando no se hace algo deliberado para mitigar el esfuerzo de torsión, después del apretamiento, tenderá a relajarse con el tiempo, sobre todo si hay alguna vibración. Cuando el esfuerzo de torsión se mitiga o dura mucho tiempo, el esfuerzo principal se reduce una cantidad $\Delta\sigma_1$, como se indica en la figura 11-37*b*. Éste es el otro motivo, ya mencionado, de por qué un perno que no se rompe cuando se le aplica un torque, con una precarga grande (cercana a su resistencia de prueba), probablemente no se romperá bajo las cargas aplicadas para las que fue diseñado.

EJEMPLO 11-5

Determinación del torque para generar la precarga en un perno

Problema **Determine el torque requerido para precargar el perno del ejemplo 11-3.**

Se proporciona **Un perno 5/16-18 UNC-2A, grado 5.2, de 2.5 in de largo, precargado al 90% de la resistencia de prueba con una fuerza axial de 4 011 lb.**

Suposiciones **Las cuerdas están lubricadas. Suponga un coeficiente de fricción de 0.15.**

Solución

1 El torque de apretamiento necesario se calcula con la ecuación 11.23*d*:

$$T_i \cong 0.21 F_i d = 0.21(4\ 011)(0.3125) = 263 \text{ lb - in} \qquad (a)$$

2 Los archivos EX15-05 se encuentran en el CD-ROM.

11.10 SUJETADORES EN CORTANTE

Los pernos también se utilizan para resistir cargas cortantes, como se ilustra en la figura 11-38, si bien esta aplicación es más común en el diseño estructural que en el diseño de máquinas. Las estructuras de acero en edificios y puentes con frecuencia se mantienen unidas con pernos precargados de alta resistencia. (Alternativamente, se pueden soldar o remachar para mantenerlas ensambladas.) En este caso, la precarga de tensión sirve para la creación de grandes fuerzas de fricción entre los elementos que se unen con pernos, los cuales son capaces de resistir la carga de corte, de modo que los pernos se cargan a la tensión con grandes precargas. Si la fricción en la junta no es suficiente para soportar las cargas cortantes, entonces el(los) perno(s) se expondrá(n) al cortante directo.

En el diseño de máquinas, donde las relaciones dimensionales entre las piezas, por lo general requieren tolerancias mucho menores que en el trabajo estructural, pues no se considera buena práctica usar pernos o tornillos expuestos al cortante para ubicar y sostener con precisión piezas de la máquina bajo cargas de corte. En cambio, se utiliza una combinación de pernos o tornillos y **pasadores de espiga**; los pernos o tornillos sirven para sujetar la junta comprimiéndola, mientras los pasadores de espiga de acero endurecido suministran una localización transversal precisa y resistencia al cortante. Se espera que la fricción generada en la junta por la fuerza de sujeción del perno sostenga las cargas cortantes, en combinación con los pasadores de espiga cargados con cortante directo. En efecto, la tarea se divide entre estos diferentes tipos de sujetadores. *Los pasadores de espiga soportan cargas cortantes, pero no cargas de tensión, en tanto que los pernos/tornillos soportan cargas de tensión, pero no cargas de cortante directo*.

Existen muchas razones para emplear este procedimiento, todas relacionadas con la necesidad de ubicar con precisión el posicionamiento de las piezas funcionales de la máquina (p. ej., dentro de ±0.005 in [0.13 mm] o más cerca en la mayoría de las máquinas). Desde luego, hay excepciones, como es el caso del bastidor de una máquina, el cual, a diferencia de las superficies de montaje, se fabrica con menos precisión e incluso es un ensamble impreciso de piezas soldadas.

Considere un ensamble de dos piezas cargado al cortante, como se indica en la figura 11-38. Hay un patrón de pernos múltiples sujetando ambas piezas. Los pernos y los tornillos no están fabricados con tolerancias pequeñas. Los orificios de los pernos o tornillos deben hacerse de un tamaño mayor para dar algo de tolerancia a la inserción del perno/tornillo. Los orificios roscados para tornillos de máquina tienen tolerancia radial contra el tornillo insertado, lo cual significa que no está garantizada la concentricidad de un tornillo en un orificio roscado o de un perno en un orificio con tolerancia. Son excéntricos.

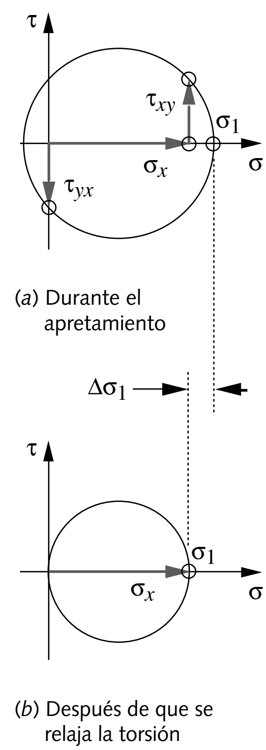


FIGURA 11-37

Círculos de Mohr para un perno precargado, tanto durante como después del apretamiento

11

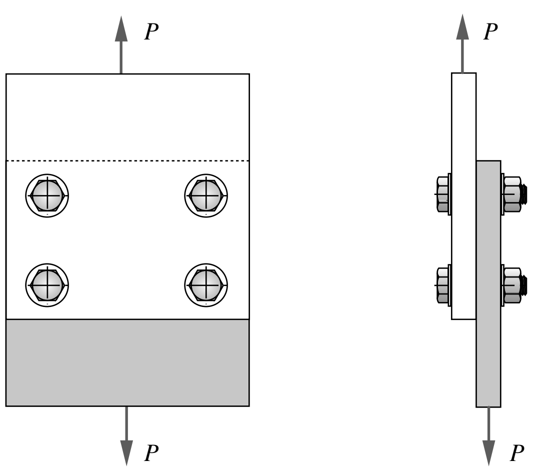


FIGURA 11-38

Junta con pernos con carga cortante

Las observaciones anteriores son válidas para cualquier perno/tornillo en un orificio. Cuando se utiliza un patrón de sujetadores como el de la figura 11-38, las tolerancias requeridas entre los pernos/tornillos y los orificios se vuelven significativamente mayores que la de un solo orificio, debido a las tolerancias en las dimensiones entre las líneas centrales del orificio en las dos piezas emparejadas. Para lograr un ensamble confiable e intercambiable, los orificios deben ser significativamente más grandes que los sujetadores removibles, con la finalidad de alojar todas las variaciones posibles dentro de las tolerancias de fabricación acostumbradas. La figura 11-39 muestra un desajuste exagerado entre un par de orificios de piezas emparejadas, e indica por qué los orificios deben tener un diámetro mayor que el de los sujetadores para permitir ensamblarlos.

Considere ahora qué pasaría si se confía en los cuatro pernos de la figura 11-38, tanto para ubicar las partes como para experimentar las cargas cortantes sin precarga de tensión. La ubicación de la posición de una pieza con la otra se ve demasiado comprometida por las tolerancias necesarias en los orificios y por las variaciones en el diámetro de los pernos comerciales. La capacidad de los cuatro pernos para compartir las cargas de cortante directo también se ve comprometida por las tolerancias. En el mejor de los casos, dos pernos tomarán probablemente toda la carga de cortante, y los otros incluso no estarán en contacto con los lados adecuados de sus orificios en ambas piezas para compartir la carga.

Entonces, ¿cuál es la solución al problema? En la figura 11-40 se presenta un diseño mejorado, el cual agrega dos pasadores de espiga de acero endurecido al patrón de cuatro pernos. Es posible agregar más pasadores de espiga; no obstante, dos es el número mínimo necesario para soportar un par en el plano y es generalmente suficiente. En este punto, se requiere un breve paréntesis acerca de la aplicación adecuada de los pasadores de espiga.

Pasadores de espiga

Los pasadores de espiga rectos estándares* se hacen con tolerancias pequeñas (por lo general de ±0.0001 de variación en el diámetro), están endurecidos y esmerilados con acabado fino, y realmente son redondos. Están disponibles en acero al bajo carbono, acero (al cromo) resistente a la corrosión, latón y aleaciones de acero endurecido a 40-48 HRC; además, se compran con la longitud requerida. Su costo es relativamente bajo. También existen pasadores de espiga cónicos. Hay otras variedades de pasadores: ranurados, moleteados y pernos de resorte enrollado, que no requieren orificios con tanta tolerancia para un ajuste a presión. Se limitará el análisis a pasadores de espiga sólidos y rectos.

11

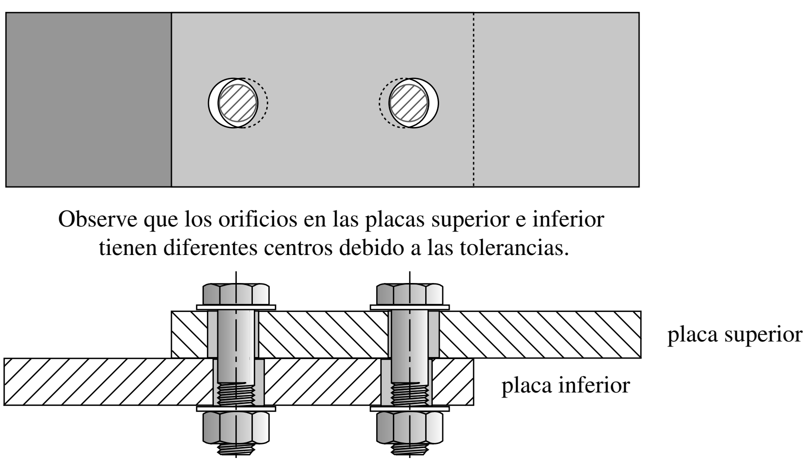


FIGURA 11-39

En los orificios de los sujetadores, se necesita tolerancia para dar cabida a las tolerancias de manufactura

* El estándar ANSI B18.8.2-1978 (R 1989), Instituto Nacional Estadounidense de Estándares, Nueva York, 1989.

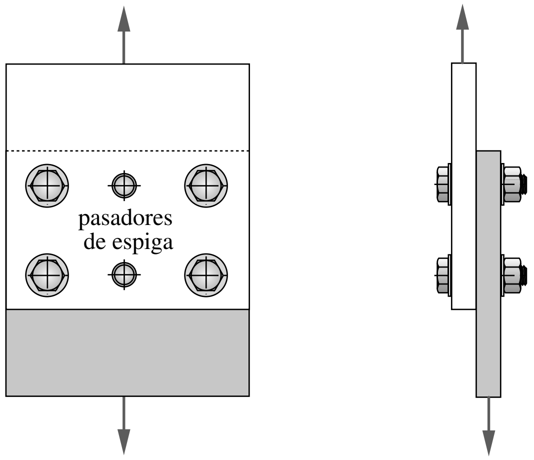


FIGURA 11-40

Junta con pernos y pasadores de espiga cargada al cortante

Los pasadores de espiga normalmente se instalan a presión en el interior de una pieza (la pieza "inferior") y con ajuste de deslizamiento estrecho en la otra (la pieza "superior"), mientras que los orificios machueleados o de tolerancia para los pernos o tornillos se maquinan por separado, antes de ensamblarse, los orificios de los pasadores de espiga no se taladran, sino hasta después de que al ensamble se le hayan colocado los pernos o tornillos, los que se alinean en la configuración adecuada. Luego, los orificios guía de las espigas, más pequeños que el diámetro del pasador de espiga, se taladran en las ubicaciones especificadas a través de ambas piezas sujetadas. En algunos casos, la pieza superior ya puede traer los orificios piloto, además de que se utilizan como plantilla para taladrar los orificios en la parte de abajo, cuando se ensamblan.

Una vez que los orificios piloto (exactamente concéntricos) se encuentran en ambas piezas, se escarian para ajustar a presión al diámetro adecuado con el pasador de espiga, mientras todavía están juntas. Luego se separan y los orificios piloto de la pieza "superior" se hacen ligeramente más grandes, para que el pasador de espiga se deslice adecuadamente. El escariador seguirá el orificio, manteniendo exactamente su posición en el centro. Después se presionan las espigas en la pieza inferior y la pieza superior se ajusta cuidadosamente en las espigas que sobresalen. Por último, se vuelven a colocar los tornillos sujetadores y se les aplica un torque para la precarga deseada.

Ahora se tiene un ensamble que se **relocaliza con precisión** cuando se desensambla y se vuelve a ensamblar y tiene **básicamente tolerancia radial cero**, entre varios pernos endurecidos, los cuales pueden, si es necesario, resistir cargas al cortante de manera compartida. Las cargas excéntricas no son un problema, ya que las dos espigas son capaces de resistir pares de fuerzas en el plano de corte. Sin las espigas (o sin la precarga de compresión suficiente para generar fricción entre las placas), los pares aplicados moverán con holgura a los pernos en las tolerancias de sus orificios, permitiendo el movimiento relativo entre la placa superior e inferior.

Centroides de grupos de sujetadores

Cuando un grupo de sujetadores se configura con un patrón geométrico, se necesita la ubicación del centroide de las áreas de los sujetadores para el análisis de fuerzas. En relación con un sistema de coordenadas conveniente, las coordenadas del centroide son

$$\tilde{x} = \frac{\sum_1^n A_i x_i}{\sum_1^n A_i}, \qquad \tilde{y} = \frac{\sum_1^n A_i y_i}{\sum_1^n A_i} \tag{11.24}$$

donde n es el número de sujetadores, i representa un sujetador específico y A_i son las áreas de la sección transversal de los sujetadores, así como x_i, y_i son las coordenadas de los sujetadores en el sistema de coordenadas seleccionado.

Determinación de las cargas de cortante en sujetadores

La figura 11-41*a* muestra una junta expuesta al cortante con una carga excéntrica aplicada. Se utilizan cuatro pernos y cuatro pasadores de espiga para conectar las dos piezas. Suponga que las cuatro espigas soportarán toda la carga de cortante y la compartirán por partes iguales. La carga excéntrica se puede sustituir por la combinación de una fuerza P que actúa a través del centroide del patrón de las espigas y un momento M con respecto al centroide, como se indica en la figura 11-41*b*. La fuerza a través del centroide generará reacciones F_1 opuestas e iguales en cada pasador. Adicionalmente, se generará una segunda fuerza F_2 en cada pasador, debida al momento M, que actúa perpendicularmente al radio existente entre el centroide y el pasador.

La magnitud de la componente de fuerza F_1 en cada pasador, debida a la fuerza P que actúa a través del centroide, es

$$\left| F_{1_i} \right| = \frac{P}{n} \tag{11.25a}$$

donde n es el número de pasadores.

Para determinar la fuerza que experimenta cada pasador por el momento M, suponga que se permite que una pieza gire lentamente alrededor del centroide con respecto a la otra pieza. El desplazamiento en cualquier orificio es proporcional a su radio desde el centroide. La deformación en el pasador es proporcional al desplazamiento. El esfuerzo es proporcional a la deformación en la región elástica, en tanto la fuerza es proporcional al esfuerzo para un área de corte constante. La magnitud de la fuerza experimentada por cualquier pasador debida al momento M es:

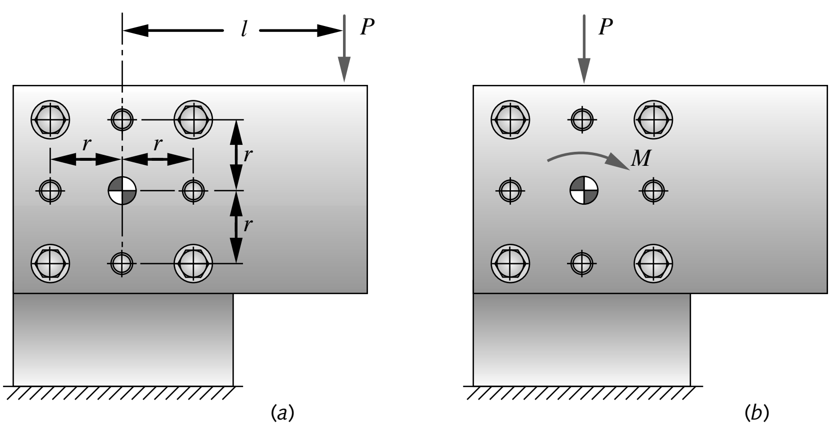


FIGURA 11-41

Junta con pernos y espigas con carga al cortante

11

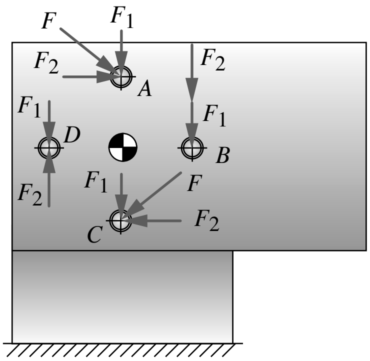


FIGURA 11-42

Fuerzas en el pasador de una junta con carga excéntrica al cortante

$$\left|F_{2_i}\right| = \frac{Mr_i}{\sum_{j=1}^{n} r_j^2} = \frac{Plr_i}{\sum_{j=1}^{n} r_j^2} \tag{11.25b}$$

Entonces, la fuerza total F_i en cada pasador es la suma vectorial de las dos componentes F_{1_i} y F_{2_i} del pasador, como se ilustra en la figura 11-42. La fuerza total es mayor en el pasador B en el caso particular mostrado.

El esfuerzo en el pasador se obtiene con la ecuación 11.8*c* para el esfuerzo cortante directo. La resistencia a la fluencia por cortante se determina a partir de la relación de la ecuación 3.9*b*, repetida aquí:

$$S_{ys} = 0.577\,S_y \tag{3.9b}$$

Las resistencias mínimas de fluencia por cortante S_{ys}, de varios materiales comunes para pasadores de espiga, se obtienen con la tabla 11-12. Los datos corresponden a pasadores de 0.5 in de diámetro y menores. Recuerde de la sección 10.3 (p. 652) que los alambres forjados de diámetro pequeño tienen alta resistencia debida al trabajo en frío. Éstas son esencialmente resistencias de prueba, como las definidas por el estándar de la ANSI.* Los pasadores hechos con este estándar tienen, por lo menos, las resistencias indicadas, cuando se cargan al cortante.

Tabla 11-12

Resistencias mínimas de pasadores de espiga en cortante doble Fuente: Drive-Lock, Inc. Sycamore, Ill.

Material	S_{ys} (kpsi)
Acero al bajo carbono	50
Aleación de acero 40-48 HRC	117
Acero resistente a la corrosión	82
Latón	40

11

EJEMPLO 11-6

Sujetadores en corte excéntrico

Problema **Determine el tamaño de los pasadores de espiga en la ménsula de la figura 11-41.**

Se proporciona **La fuerza estática $P = 1\,200$ lb se aplica en $l = 5$ in. El radio de los pasadores de espiga es $r = 1.5$ in.**

Suposiciones **Todos los pasadores comparten la carga equitativamente. Utilice una aleación de acero 40-48 HRC para el material del pasador.**

Solución **Véase las figuras 11-41 y 11-42.**

1. Calcule el momento de la fuerza aplicada.

$$M = Pl = 1\,200(5) = 6\,000 \text{ lb-in} \tag{a}$$

* Estándar de la ANSI B18.8.2-1995, Instituto Nacional Estadounidense de Estándares, Nueva York, 1995.

2. Calcule la magnitud de la fuerza en cada pasador debida a este momento.

$$F_M = \frac{M}{nr} = \frac{6\,000}{4(1.5)} = 1\,000 \ \text{lb} \tag{b}$$

3. Determine la cantidad de fuerza directa P experimentada por cada pasador.

$$F_P = \frac{P}{n} = \frac{1\,200}{4} = 300 \ \text{lb} \tag{c}$$

4. Con base en el diagrama de vectores de la figura 11-42, el pasador B es el más fuertemente cargado y su fuerza resultante es

$$F_B = F_P + F_M = 300 + 1\,000 = 1\,300 \ \text{lb} \tag{d}$$

5. Intente con un diámetro del pasador de 0.375 in y calcule el esfuerzo cortante directo en el pasador B.

$$\tau = \frac{F_B}{A_B} = \frac{1\,300(4)}{\pi(0.375)^2} = 11\,770 \ \text{psi} \tag{e}$$

6. Obtenga la resistencia a la fluencia por cortante del material de la tabla 11-12, luego calcule el factor de seguridad contra falla cortante estática.

$$N_s = \frac{S_{ys}}{\tau} = \frac{117\,000}{11\,770} = 10 \tag{f}$$

7. Los archivos EX15 -06 se encuentran en el CD-ROM.

11.11 ESTUDIO DE CASO

Diseño de los pernos de un compresor de aire

11

El diseño preliminar de este dispositivo se muestra en la figura D-1. El cilindro y la cabeza son de aluminio vaciado. La cabeza está sujeta al bloque cilindro, con varios tornillos de cabeza que se insertan en orificios roscados configurados en círculo de pernos. La presión generada en el cilindro crea una función fuerza-tiempo sobre la cabeza, como se indica en la figura D-2.

ESTUDIO DE CASO 8D

Diseño de los pernos de un compresor de aire

Problema — **Diseñe un conjunto de pernos de capucha para sujetar la cabeza del cilindro de la figura D-1, con base en las cargas definidas en el estudio de caso 8-A (apéndice D).**

Se proporciona — **El diámetro interior del compresor es de 3.125 in. La fuerza dinámica que actúa sobre la cabeza varía de 0 a 1 000 lb cada ciclo, a partir de 130 psi de presión en el cilindro. Un empaque no confinado de asbesto-cobre de 0.06 in de espesor cubre totalmente el punto de contacto cabeza-cilindro. El espesor de la cabeza en los puntos de sujeción (exclusivas con aletas de enfriamiento) es de 0.4 in.**

Suposiciones — **Vida infinita. Use tornillos de capucha de cabeza hexagonal estándar sin arandelas. La temperatura de operación es menor de 350 °F. Use 99.9% de confiabilidad.**

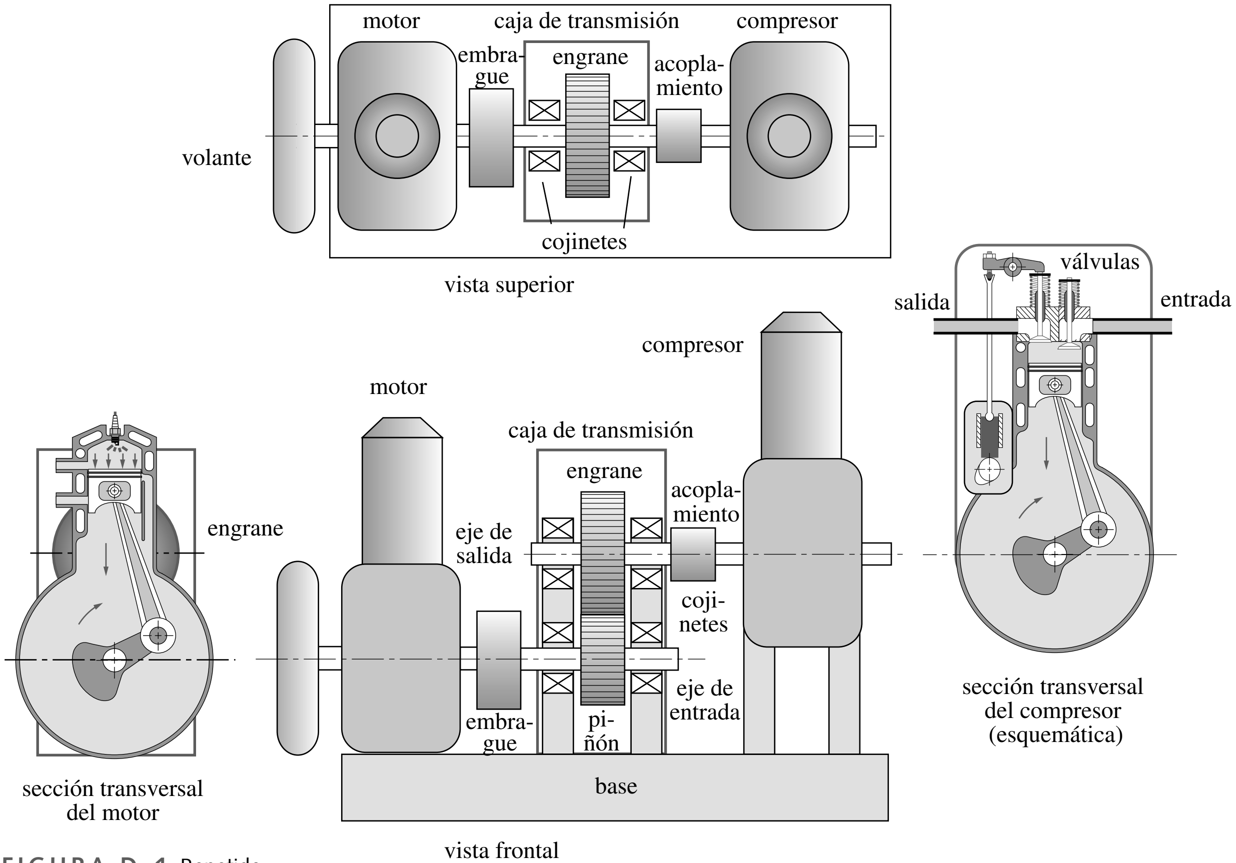


FIGURA D-1 Repetida

Diseño esquemático preliminar de un compresor portátil de aire con motor de gasolina, caja de transmisión, acoplamientos, ejes y cojinetes

11

Solución **Véase las figuras D-1 y D-2.**

1. Intente con un diámetro $d = 0.313$ in para los tornillos. Use cuerdas UNC para eliminar problemas de barrido en el cilindro de aluminio fundido. Entonces el sujetador de prueba es un tornillo con cabeza 5/16-18 UNC-2A con cuerdas roladas para resistencia contra la fatiga.

2. Elija un círculo de pernos y un diámetro exterior, con base en el diámetro interior del cilindro y la regla práctica, de *por lo menos* 1.5d a 2d de distancia entre los tornillos y el borde. Se utilizará 2d debido a la necesidad de sellar el área contra la presión del cilindro.

$$d_{bc} = 3.125 + 2(2)(0.313) = 4.375 \text{ in}$$
$$d_o = 4.125 + 2(2)(0.313) = 5.625 \text{ in} \qquad (a)$$

3. Para obtener el espaciamiento máximo recomendado de 6 diámetros de tornillo entre los pernos, se necesitan alrededor de 8 tornillos equidistantes alrededor del círculo de los pernos. Calcule el espaciamiento entre los tornillos en unidades de diámetros de tornillo.

$$\Delta b = \frac{\pi D_p}{n_b d} = \frac{\pi(4.375)}{8(0.313)} = 5.5 \text{ diámetros de perno} \qquad (b)$$

Esto es menor que los 6 diámetros de tornillo, de modo que es aceptable. Posteriormente se calculará la presión del empaque para verificar posibles fugas.

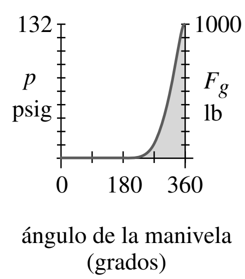


FIGURA D-2 Repetida

Presión y fuerza dentro del cilindro durante un ciclo

4. Intente con una longitud del tornillo de 1.25 in. El espesor de la cabeza de 0.40 in en los orificios del tornillo más el 0.1 in del empaque dejarán 0.75 in de penetración de la cuerda en el orificio roscado del cilindro. Lo anterior es > 2X el diámetro del tornillo (10 cuerdas), la cual es la longitud mínima recomendada para un tornillo de acero roscado en cuerdas de aluminio. Para pernos estándares estadounidenses hasta de 6 in de largo, la longitud de la cuerda es $2d + 0.25 = 0.875$ in de esta longitud del perno,[2] la cual permite la penetración deseada. La longitud de sujeción intentada para los cálculos de la rigidez es, entonces, 1.25 in, ya que está acoplado el tornillo completo.

5. Intente con un tornillo precargado SAE grado 7 con 70% de su resistencia de prueba. La tabla 11-6 (p. 744) muestra que la resistencia de prueba de este tornillo es de 105 kpsi. El área de esfuerzo por tensión de la ecuación 11-1 (p. 725) es de 0.052 431 in^2. Entonces, la precarga requerida es

$$F_i = 0.7 S_p A_t = 0.7(105\,000)(0.052\,431) = 3\,853.66 \text{ lb} \tag{c}$$

6. Encuentre la razón de aspecto de la junta y placa para el módulo del tornillo con las ecuaciones 11.18*a* y *b*:

$$\begin{aligned} j &= \frac{d}{l} = \frac{0.313}{1.25} = 0.25 \\ r &= \frac{E_{material}}{E_{perno}} = \frac{10.4E6}{30E6} = 0.347 \end{aligned} \tag{d}$$

7. Como esta junta es totalmente del mismo material (aluminio), todo lo que se necesita es la ecuación 11.19 para calcular la constante C_{ng} de la junta de metal sin el empaque. Los parámetros necesarios para la ecuación se obtienen interpolando para $j = 0.25$ en la tabla 11-8. Son: $p_0 = 0.653$, $p_1 = -1.207$, $p_2 = 1.103$ y $p_3 = -0.383$.

$$\begin{aligned} C_{ng} &= p_3 r^3 + p_2 r^2 + p_1 r + p_0 \\ &= -0.383(0.347)^3 + 1.103(0.347)^2 - 1.207(0.347) + 0.653 = 0.351 \end{aligned} \tag{e}$$

11

8. Se puede aproximar la rigidez del tornillo $k_{b'}$ con la ecuación 11.17 y, luego, estimar la rigidez k_m del material sin empaque, mediante la ecuación 11.13*c* dados $k_{b'}$ y C_{ng}.

longitud de la cuerda: $l_{cuerda} = 2d + 0.25 = 2(0.313) + 0.25 = 0.875$ in

longitud del vástago: $l_s = l_{perno} - l_{cuerda} = 1.25 - 0.875 = 0.375$ in

longitud de la cuerda sujetada: $l_t = l - l_s = 1.25 - 0.375 = 0.875$ in

$$k_{b'} \cong \left(1 + \frac{d}{l}\right)^{-1} \frac{A_t A_b}{A_b l_t + A_t l_s} E_b$$

$$k_{b'} \cong \left(1 + \frac{0.313}{1.25}\right)^{-1} \frac{0.052(0.077)}{0.077(0.875) + 0.052(0.375)} 30E6 = 1.112E6 \text{ lb/in}$$

$$C_{ng} = \frac{k_{b'}}{k_{m_1} + k_{b'}} \quad \Rightarrow \quad k_{m_1} = k_{b'} \frac{1 - C_{ng}}{C_{ng}} = 1.112E6\left(\frac{1 - 0.351}{0.351}\right) = 2.060E6 \text{ lb/in} \tag{f}$$

9. Ahora considere el empaque. Se puede suponer que el área del empaque no confinado, expuesto a la fuerza de sujeción, es la de un "perno equivalente" del área total sujetada, la cual se extiende del diámetro exterior de la cabeza del cilindro al barreno:

$$A_{total} = \frac{\pi}{4}\left(D_o^2 - D_1^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(5.625^2 - 3.125^2\right) \cong 17.18 \text{ in}^2 \tag{g}$$

Al dividir entre el número de pernos y restar el área del orificio del tornillo, resulta el área sujeta del empaque, alrededor de cualquier tornillo como:

$$A_g = \frac{A_{total}}{n_b} - \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{17.18}{8} - \frac{\pi}{4}0.313^2 = 2.071 \text{ in}^2 \qquad (h)$$

10. Entonces, la rigidez de esta pieza de empaque es

$$k_{m_2} = \frac{A_g E_g}{l_g} = \frac{2.071(13.5E6)}{0.06} \cong 4.659E8 \text{ lb/in} \qquad (i)$$

El módulo de elasticidad del material del empaque se obtiene con la tabla 11-10 (p. 762).

11. La rigidez del material y la del empaque se combinan de acuerdo con la ecuación 10.2b (p. 649). La rigidez combinada de la junta con empaque es ahora

$$k_{m_g} = \frac{1}{\frac{1}{k_{m_1}} + \frac{1}{k_{m_2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2.060E6} + \frac{1}{4.659E8}}$$

$$k_{m_g} = 2.051E6 \text{ lb/in} \qquad (j)$$

Observe que la rigidez combinada en este caso está dominada por el aluminio, debido a que el empaque de asbesto-cobre es más rígido.

12. La constante de la junta con el empaque no confinado es

$$C = \frac{k_{b'}}{k_{m_g} + k_{b'}} = \frac{1.112E6}{2.051E6 + 1.112E6} \cong 0.352$$

y $$(1 - C) = 0.648 \qquad (k)$$

13. Se supone que la carga de 1 000 lb está dividida en porciones iguales de 125 lb entre los 8 pernos. Las porciones de la carga aplicada experimentada por cada tornillo y el material (ecuación 11.13, p. 748) son:

$$P_b = CP = 0.352(125) \cong 43.95 \text{ lb}$$

$$P_m = (1 - C)P = 0.614(125) \cong 81.05 \text{ lb} \qquad (l)$$

14. Las cargas pico resultantes en el tornillo y el material son

$$F_b = F_i + P_b = 3\,853.66 + 43.95 = 3\,897.61 \text{ lb}$$

$$F_m = F_i - P_m = 3\,853.66 - 81.05 = 3\,772.61 \text{ lb} \qquad (m)$$

15. Las componente alternante y media de la fuerza sobre el tornillo son

$$F_{alt} = \frac{F_b - F_i}{2} = \frac{3\,897.61 - 3\,853.66}{2} \cong 21.98 \text{ lb}$$

$$F_{media} = \frac{F_b + F_i}{2} = \frac{3\,897.61 + 3\,853.66}{2} \cong 3\,875.63 \text{ lb} \qquad (n)$$

16. Los esfuerzos nominal medio y alternante en el tornillo son

$$\sigma_{a_{nom}} = \frac{F_{alt}}{A_t} = \frac{21.98}{0.052\,431} \cong 419.2 \text{ psi}$$

$$\sigma_{m_{nom}} = \frac{F_{media}}{A_t} = \frac{3\,875.63}{0.052\,431} \cong 73\,919 \text{ psi} \qquad (o)$$

17. El factor de concentración de esfuerzos por fatiga para la cuerda de este diámetro se determina con la ecuación 11.15*c*; y el factor de concentración de esfuerzo medio K_{fm}, con la ecuación 4.17 (p. 294).

$$K_f = 5.7 + 0.6812d = 5.7 + 0.6812(0.313) = 5.9$$

$$\text{si } K_f\left|\sigma_{máx_{nom}}\right| > S_y \text{ entonces:} \qquad K_{fm} = \frac{S_y - K_f\sigma_{a_{nom}}}{\left|\sigma_{m_{nom}}\right|}$$

$$K_f\left|\sigma_{máx_{nom}}\right| = K_f\left|\sigma_{a_{nom}} + \sigma_{m_{nom}}\right| = 5.9\left|460.2 + 73\,960\right| = 440\,039 \text{ psi}$$

$$440\,039 \text{ psi} > S_y = 115\,000 \text{ psi}$$

$$K_{fm} = \frac{S_y - K_f\sigma_{a_{nom}}}{\left|\sigma_{m_{nom}}\right|} = \frac{115\,000 - 5.9(460.2)}{73\,960} = 1.52 \qquad (p)$$

18. Los esfuerzos locales medio y alternante en el tornillo son

$$\sigma_a = K_f\frac{F_{alt}}{A_t} = 5.9\frac{21.98}{0.052\,431} \cong 2\,478 \text{ psi}$$

$$\sigma_m = K_{fm}\frac{F_{media}}{A_t} = 1.52\frac{3\,875.63}{0.052\,431} \cong 112\,522 \text{ psi} \qquad (q)$$

19. Los esfuerzos con la precarga inicial y con la fuerza máxima en el tornillo son

$$\sigma_i = K_{fm}\frac{F_i}{A_t} = 1.52\frac{3\,853.66}{0.052\,431} \cong 111\,883 \text{ psi}$$

$$\sigma_b = K_{fm}\frac{F_b}{A_t} = 1.52\frac{3\,897.61}{0.052\,431} = 113\,160 \text{ psi} \qquad (r)$$

11

20. La resistencia física de este material se obtiene mediante los métodos de la sección 4.6 (p. 257):

$$S_{e'} = 0.5S_{ut} = 0.5(133\,000) = 66\,500 \text{ psi} \qquad (s)$$

$$S_e = C_{carga}C_{tamaño}C_{sup}C_{temp}C_{conf}S_{e'}$$
$$= 0.70(.995)(0.739)(1)(0.753)(66\,500) = 25\,778 \text{ psi} \qquad (t)$$

donde los factores de reducción de resistencia se toman de las tablas y fórmulas de la sección 4.6 para, respectivamente, carga axial, tamaño del tornillo, acabado de maquinado, temperatura ambiente y confiabilidad de 99.9%.

21. La resistencia física corregida y la resistencia última a la tensión se emplean en la ecuación 11.16 (p. 753), para obtener el factor de seguridad a la fatiga con la línea de Goodman.

$$N_f = \frac{S_e(S_{ut} - \sigma_i)}{S_e(\sigma_m - \sigma_i) + S_{ut}\sigma_a}$$
$$= \frac{25\,778(133\,000 - 111\,883)}{25\,778(112\,522 - 111\,883) + 133\,000(2\,478)} \cong 1.6 \qquad (u)$$

22. El esfuerzo estático en el tornillo, después de la fluencia local inicial, y el factor de seguridad contra la fluencia son:

$$\sigma_s = \frac{F_{perno}}{A_t} = \frac{3\,897.61}{0.052\,431} = 74\,338 \text{ psi} \qquad N_y = \frac{S_y}{\sigma_b} = \frac{115\,000}{74\,338} \cong 1.5 \tag{v}$$

23. El factor de seguridad contra la separación de la junta se determina con la ecuación 11.14*d* (p. 749).

$$N_{separación} = \frac{F_i}{P(1-C)} = \frac{3\,853.66}{125(1-0.352)} \cong 47 \tag{w}$$

24. La junta se aflojará, a menos que las fuerzas de sujeción sean suficientes para crear más presión en el empaque de la que existe en el cilindro. La presión de sujeción mínima se determina a partir del área total de la junta con empaque y la fuerza de sujeción mínima F_m.

$$p_{prom} = \frac{F_m}{A_j} = \frac{4F_m}{\pi\left(D_o^2 - D_i^2\right) - n_b A_b} = \frac{4(3\,772.6)}{\pi\left(5.625^2 - 3.125^2\right) - 8(0.077)} \cong 228 \text{ psi}$$

$$N_{afloj} = \frac{p_{prom}}{p_{cil}} = \frac{228}{130} \cong 1.7 \tag{x}$$

Esta razón de la presión de sujeción contra la presión del cilindro hace que el espaciamiento entre tornillos sea aceptable.

25. El torque requerido para obtener la precarga de 3853.66 lb, obtenida en el paso 5, es:

$$T_i \cong 0.21 F_i d = 0.21(3\,853.66)(0.313) \cong 253 \text{ lb - in} \tag{y}$$

26. Este diseño utiliza ocho tornillos de cabeza con cabeza hexagonal 5/16-18 UNC-2A grado 7, de 1.25 in de largo, precargados al 70% de la resistencia de prueba y equidistantes sobre un círculo de pernos de 4.375 in de diámetro. El diseño tiene un factor de seguridad contra el aflojamiento de 1.7, un factor de seguridad a la fatiga de 1.6 y es capaz de soportar 47 veces la presión de operación antes de que la junta se separe. Estos factores de seguridad son aceptables. Los archivos CASE8D se encuentran en el CD-ROM.

11.12 RESUMEN

En este capítulo se trató sólo una pequeña muestra de los sujetadores disponibles comercialmente. Los vendedores fabrican una colección demasiado variada de sujetadores. Por lo general se encuentra el sujetador "correcto" para cualquier aplicación; de lo contrario (y la cantidad requerida es lo suficientemente grande), algún vendedor hará uno nuevo para usted. Hay muchos estándares que definen las configuraciones, los tamaños, las resistencias y las tolerancias de los sujetadores. Los sujetadores con cuerda se fabrican con uno u otro de tales estándares, lo cual facilita su intercambio. Por desgracia, las cuerdas métricas e inglesas no son intercambiables, pero ambas se utilizan ampliamente en Estados Unidos.

Los tornillos de potencia son dispositivos con cuerda que sirven básicamente para mover cargas o ubicar objetos con precisión. Tienen baja eficiencia debido a sus grandes pérdidas por fricción, a menos que se emplee la variedad de tornillo de bolas, que disminuye la fricción en forma significativa. Sin embargo, los tornillos con baja fricción pierden una de sus ventajas: el autobloqueo o la capacidad para sostener una carga en su lugar sin entrada de energía (como en un gato mecánico). Los tornillos de retorno son lo opuesto a los tornillos de autobloqueo y se usan para convertir el movimiento lineal en movimiento giratorio.

Los sujetadores con cuerda (pernos, tuercas y tornillos) son los medios normales para mantener juntas las piezas de una máquina. Estos sujetadores son capaces de so-

portar cargas muy grandes, sobre todo si están precargados. Con la precarga, los sujetadores se aprietan a un alto nivel de tensión axial, antes de que se aplique cualquier carga de trabajo. La tensión en el sujetador causa compresión en las piezas sujetadas. Dicha compresión produce varios efectos benéficos. Mantiene la junta unida apretadamente; por lo tanto, puede contener fluido a presión y resistir cargas cortantes debido a la fricción entre sus caras. Las fuerzas de compresión en el material sujetado también sirven para proteger el sujetador de las cargas variables de fatiga, al absorber la mayoría de las oscilaciones de la carga aplicada. Las grandes fuerzas de sujeción, del mismo modo, protegen contra el aflojamiento por vibración del sujetador, creando fuerzas de fricción altas en las cuerdas.

Los sujetadores con cuerda también son capaces de resistir cargas de corte y se usan extensivamente para ello en aplicaciones estructurales. En el diseño de máquinas, es más común contar con pasadores de espiga ajustados estrechamente para soportar las cargas cortantes, así como dejar que los sujetadores con cuerda suministren la tensión para mantener unida la junta. Para mayor información sobre el diverso y fascinante mundo de los sujetadores, se remite al lector a las publicaciones listadas en la bibliografía de este capítulo.

Ecuaciones importantes utilizadas en este capítulo

Para información sobre el uso adecuado de estas ecuaciones, consulte las secciones referenciadas.

Torque requerido para elevar una carga con un tornillo de potencia (sección 11.2):

$$T_u = T_{s_u} + T_c = \frac{Pd_p}{2}\frac{\left(\mu\pi d_p + L\cos\alpha\right)}{\left(\pi d_p\cos\alpha - \mu L\right)} + \mu_c P\frac{d_c}{2} \qquad (11.5a)$$

El autobloqueo en un tornillo de potencia ocurrirá si (sección 11.2):

11

$$\mu \ge \frac{L}{\pi d_p}\cos\alpha \quad \text{o bien,} \quad \mu \ge \tan\lambda\cos\alpha \qquad (11.6a)$$

Eficiencia de un tornillo de potencia (sección 11.2):

$$e = \frac{W_{sal}}{W_{ent}} = \frac{PL}{2\pi T} \qquad (11.7c)$$

Constante de resorte en un sujetador con cuerda (sección 11.7):

$$\frac{1}{k_b} = \frac{l_t}{A_t E_b} + \frac{l - l_t}{A_b E_b} = \frac{l_t}{A_t E_b} + \frac{l_s}{A_b E_b} \quad \therefore \quad k_b = \frac{A_t A_b}{A_b l_t + A_t l_s} E_b \qquad (11.11a)$$

$$k_{b'} = \left(1 + \frac{d}{l}\right)^{-1} k_b \qquad (11.17alt)$$

Constante de resorte del material sujetado si se conoce A_m (sección 11.7):

$$k_m = \frac{A_m E_m}{l} \qquad (11.11c)$$

Carga soportada por el material precargado (sección 11.7):

$$P_m = \frac{k_m}{k_b + k_m} P = (1 - C)P \qquad (11.13d)$$

Carga soportada por un perno precargado y la constante C de la junta (sección 11.7):

$$P_b = \frac{k_b}{k_m + k_b} P$$

o bien, (11.13*c*)

$$P_b = CP \qquad \text{donde} \quad C = \frac{k_b}{k_m + k_b}$$

Carga mínima en el material y la carga máxima en el perno (sección 11.7):

$$F_m = F_i - (1 - C)P \tag{11.14a}$$

$$F_b = F_i + CP \tag{11.14b}$$

Carga requerida para separar una junta precargada (sección 11.7):

$$P_0 = \frac{F_i}{(1 - C)} \tag{11.14c}$$

Cargas media y alternante experimentadas por un perno precargado (sección 11.7):

$$F_{alt} = \frac{F_b - F_i}{2}, \qquad F_{media} = \frac{F_b + F_i}{2} \tag{11.15a}$$

Esfuerzos medios y alternantes en un perno precargado (sección 11.7):

$$\sigma_a = K_f \frac{F_{alt}}{A_t}, \qquad \sigma_m = K_{fm} \frac{F_{media}}{A_t} \tag{11.15b}$$

Factor de concentración de esfuerzo por fatiga en las cuerdas:

$$K_f = 5.7 + 0.6812d \qquad d \text{ en pulgadas}$$

o bien, (11.15*c*)

$$K_f = 5.7 + 0.02682d \qquad d \text{ en mm}$$

Esfuerzo de precarga en un perno (sección 11.7):

$$\sigma_i = K_{fm} \frac{F_i}{A_t} \tag{11.15d}$$

Factor de seguridad contra la fatiga para un perno precargado (sección 11.7):

$$N_f = \frac{S_e(S_{ut} - \sigma_i)}{S_e(\sigma_m - \sigma_i) + S_{ut}\sigma_a} \tag{11.16}$$

Aproximación del torque necesario para precargar un perno (sección 11.9):

$$T_i \cong 0.21 F_i d \tag{11.23d}$$

Centroide de un conjunto de sujetadores (sección 11.10):

$$\tilde{x} = \frac{\sum_1^n A_i x_i}{\sum_1^n A_i}, \qquad \tilde{y} = \frac{\sum_1^n A_i y_i}{\sum_1^n A_i} \tag{11.24}$$

11

Fuerzas sobre sujetadores cargados excéntricamente al corte (sección 11.10):

$$\left|F_{1_i}\right| = \frac{P}{n} \tag{11.25a}$$

$$\left|F_{2_i}\right| = \frac{Mr_i}{\sum_{j=1}^{n} r_j^2} = \frac{Plr_i}{\sum_{j=1}^{n} r_j^2} \tag{11.25b}$$

11.13 REFERENCIAS

1. *Product Engineering*, vol. 41, p. 9, 13 de abr. de 1970.
2. **H.L. Horton**, ed. *Machinery's Handbook*, 21a. ed., Industrial Press, Inc.: Nueva York, p. 1256, 1974.
3. **ANSI/ASME, Standard B1.1-1989**, American National Standards Institute, Nueva York, 1989.
4. **ANSI/ASME, Standard B1.13-1983 (R1989)**, American National Standards Institute, Nueva York, 1989.
5. **T.H. Lambert**, Effects of Variations in the Screw Thread Coefficient of Friction on Clamping Force of Bolted Connections, *J. Mech Eng. Sci.*, **4**: p. 401, 1962.
6. **R.E. Peterson**, *Stress-Concentration Factors,* John Wiley & Sons: Nueva York, p. 253, 1974.
7. **H.H. Gould y B.B. Mikic**, Areas of Contact and Pressure Distribution in Bolted Joints, *Trans ASME, J.Eng. for Industry*, **94**: pp. 864-869, 1972.
8. **N. Nabil**, Determination of Joint Stiffness in Bolted Connections, *Trans ASME, J.Eng. for Industry*, **98**: pp. 858-861, 1976.
9. **Y. Ito, J. Toyoda y S. Nagata**, Interface Pressure Distribution in a Bolt-Flange Assembly, *Trans ASME, Mech. Design*, **101**: pp. 330-337, 1979.
10. **J.F. Macklin y J.B. Raymond**, *Determination of Joint Stiffness in Bolted Connections Using FEA*, Major Qualifying Project, Worcester Polytechnic Institute, Worcester, Mass., 31 de dic., 1994.
11. **H.B. Houle**, *An Axisymmetric FEA Model Using Gap Elements to Determine Joint Stiffness*, Major Qualifying Project, Worcester Polytechnic Institute, Worcester, Mass., 31 de dic., 1995.
12. **J.E. Shigley y C.H. Mischke**, *Mechanical Engineering Design*, 5a. ed. McGraw-Hill: Nueva York, p. 354, 1989.
13. **J. Wileman, M. Choudhury e I. Green**, "Computation of Member Stiffness in Bolted Connections", *Trans ASME, J.Mech. Design*, **113**: pp. 432-437, 1991.
14. **T.F. Lehnhoff, K.I. Ko y M.L. Mckay**, "Member Stiffness and Contact Pressure Distribution of Bolted Joints", *Trans ASME, J.Mech. Design*, **116**, pp. 550-557, 1994.
15. **R.E. Cornwell**, "Computation of Load Factors in Bolted Connections", *Proc. IMechE, J. Mech. Eng. Sci.,* **223c**, pp. 795-808, 2009.
16. **A.R. Kephart**, "Fatigue Acceptance Test Limit Criterion for Larger Diameter Rolled Thread Fasteners", *ASTM Workshop on Fatigue and Fracture of Fasteners*, 6 de mayo de 1997, St. Louis, MO.
17. **C. Crispell**, "New Data on Fastener Fatigue", *Machine Design*, pp. 71-74, 22 de abril de 1982.

11.14 BIBLIOGRAFÍA

American Institute of Steel Construction Handbook. AISI: Nueva York.

Helpful Hints for Fastener Design and Application, Russell, Burdsall & Ward Corp.: Mentor, Ohio, 1976.

SAE Handbook, Soc. of Automotive Engineers: Warrendale, Pa., 1982.

"Fastening and Joining Reference Issue", *Machine Design*, vol. 55, 17 de nov. de 1983.

J.H. Bickford, *An Introduction to the Design and Behavior of Bolted Joints*, 2a. ed., Marcel Dekker, Nueva York, 1990.

H.L. Horton, ed., *Machinery's Handbook*, 21a. ed., Industrial Press: Nueva York, 1974.

R.O. Parmley, ed. *Standard Handbook of Fastening and Joining*, McGraw-Hill: Nueva York, 1977.

H.A. Rothbart, ed., *Mechanical Design and Systems Handbook*, McGraw-Hill: Nueva York, secciones 20, 21, 26, 1964.

11.15 PROBLEMAS

11-1. Compare la capacidad de carga por tensión de una cuerda UNC 5/16-18 y otra cuerda UNF 5/16-24, hechas con el mismo material. ¿Cuál es más fuerte? Haga la misma comparación para las cuerdas ISO M8 × 1.25 y M8 × 1. Compare todas ellas con la resistencia de una cuerda Acme 5/16-14.

[*]11-2. Un tornillo con cuerda Acme 3/4-6 sirve para levantar una carga de 2 kN. El diámetro medio del collarín es de 4 cm. Obtenga el torque necesario para levantar y bajar la carga mediante una arandela de empuje con un cojinete de bolas. ¿Cuáles son las eficiencias? ¿Es de autobloqueo?

11-3. Un tornillo con cuerda Acme 13/8-4 se utiliza para levantar una carga de 1 ton. El diámetro medio del collarín es de 2 in. Obtenga el torque necesario para levantar y bajar la carga con una arandela de empuje con un cojinete de bolas. ¿Cuáles son las eficiencias? ¿Es de autobloqueo?

[*†]***11-4***. El enganche del remolque de la figura A-1 (apéndice A) tiene cargas aplicadas como se indica en la figura P11-1. El peso de la lengüeta de 100 kg actúa hacia abajo y la fuerza de tiro de 4 905 N actúa horizontalmente. Con las dimensiones del soporte de bola de la figura A-5 (apéndice A), dibuje un diagrama de cuerpo libre del soporte de bola y determine las cargas aplicadas a tensión y al cortante de los dos pernos que sujetan el soporte con la canaleta de la figura A-1. Dimensione y especifique los pernos y su precarga para un factor de seguridad de por lo menos 1.7.

11-5. Para el enganche del remolque del problema 1-4, determine la fuerza horizontal que resultará sobre la bola al acelerar el remolque de 2 000 kg a 60 m/s en 20 seg. Suponga aceleración constante. Dimensione y especifique los pernos y su precarga para un factor de seguridad de por lo menos 1.7.[‡]

[*]***11-6***. Para el enganche del remolque del problema 1-4, determine la fuerza horizontal que resultará de un impacto entre la bola y la lengüeta del remolque de 2 000 kg, si el enganche se flexiona 1 mm con el impacto. El peso del tractor es de 1 000 kg. La velocidad de impacto es de 0.3 m/s. Dimensione y especifique los pernos y su precarga para un factor de seguridad de por lo menos 1.7.[‡]

[*]11-7. Un perno UNC de ½ in de diámetro, clase 7 con cuerdas roladas, está precargado con el 80% de su resistencia de prueba cuando sujeta un sándwich de acero sólido de 3 in de espesor. Obtenga los factores de seguridad contra fluencia estática y separación de la junta, cuando se aplica una carga externa estática de 1 000 lb.[‡]

Tabla P11-0[†]
Matriz tema/problema

11.2 Tornillos de potencia
11-1, 11-2, 11-3, 11-37, 11-38

11.3 Esfuerzos en cuerdas
11-15, *11-16*, *11-39*, 11-47

11.6 Resistencias de pernos
11-28, 11-29, 11-40, 11-41, 11-48

11.8 Rigidez de juntas

Sólo el material
11-17, 11-18, 11-19, 11-31, 11-32, 11-33, 11-42, 11-43

Carga estática sin empaque
11-7, 11-8, *11-23*, 11-30, 11-49

Carga dinámica sin empaque
11-9, 11-10, ***11-24***, ***11-25***, ***11-27***

Empaque no confinado
11-26, 11-42, 11-43, 11-44, 11-45, 11-46

Materiales diferentes en la junta
11-42, 11-43, 11-44, 11-45, 11-46

11.9 Control de la precarga

Sólo torque
11-11, 11-12, 11-13, 11-14,

Carga estática sin empaque
11-4, ***11-5***, ***11-6***, *11-50*

Carga dinámica sin empaque
11-22, *11-51*, *11-52*

Empaque no confinado
11-20, 11-21

11.10 Sujetadores en cortante
11-34, 11-35, 11-36

[*] Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H.

[†] Los números de problema con *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador.

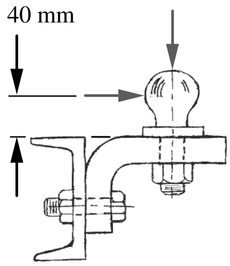


FIGURA P11-1

Problemas 11-4 a 11-6

11-8. Un perno M14 × 2, clase 8.8, con cuerdas roladas, está precargado al 75% de su resistencia de prueba, cuando está sujetando un sándwich de aluminio sólido de 3 cm de espesor. Determine los factores de seguridad contra la fluencia estática y la separación de la junta si se aplica una carga estática externa de 5 kN.‡

*11-9. Un perno UNC, de 7/16 in de diámetro, clase 7, con cuerdas roladas, está precargado al 70% de su resistencia de prueba cuando está sujetando un sándwich de aluminio sólido de 2.75 in de espesor. Determine los factores de seguridad contra la falla por fatiga, la fluencia y la separación de la junta si se aplica una carga externa variable de 1 000 lb (pico).‡

11-10. Un perno M12 × 1.25, clase 9.8, con cuerdas roladas, está precargado al 85% de su resistencia de prueba, cuando está sujetando un sándwich de aluminio de 5 cm de espesor. Determine los factores de seguridad contra la falla por fatiga fluencia y la separación de la junta, si se aplica una carga externa fluctuante de 2.5 kN (pico).‡

*11-11. Calcule el torque de apretamiento requerido para el perno del problema 11-7.

11-12. Calcule el torque de apretamiento requerido para el perno del problema 11-8.

*11.13. Calcule el torque de apretamiento requerido para el perno del problema 11-9.

11-14. Calcule el torque de apretamiento requerido para el perno del problema 11-10.

11-15. A un fabricante de automóviles le gustaría realizar un estudio de factibilidad del concepto de gatos mecánicos de tornillo impulsados por un motor eléctrico, integrados en cada extremo del vehículo para levantar automáticamente las ruedas del automóvil para servicio. Suponiendo un auto de 2 toneladas con una distribución de peso 60/40 del frente hacia atrás, diseñe un gato mecánico de tornillo con autobloqueo capaz de elevar cualquier extremo del vehículo. El cuerpo del gato estará sujeto al chasis y el tornillo se extenderá hacia abajo para tocar el suelo. Suponga una tolerancia mínima de 8 in bajo el tornillo retráctil ya instalado en la posición de arriba. Debe levantar el chasis por lo menos 8 in adicionales. Utilice cojinetes de rodamiento de empuje. Determine el tamaño mínimo del tornillo para protegerlo contra el pandeo. Calcule el torque de elevación requerido, así como la eficiencia y la potencia requeridas para levantarlo a la altura total en 45 segundos. ¿Cuál es su recomendación acerca de la factibilidad de esta idea?

11-16. Diseñe un gato manual mecánico de tornillo similar al mostrado en la figura 11-4 (p. 728) para una capacidad de elevación de 20 tons y una carrera de elevación de 10 cm por cada golpe. Suponga que el operador aplica una fuerza de 400 N en la punta del mango de la barra para girar el tornillo o la tuerca, dependiendo de su diseño. Diseñe el mango de la barra cilíndrica para que falle a la flexión con la carga de diseño, antes de que el tornillo del gato falle, de modo que no se pueda elevar una sobrecarga y el tornillo falle. Use cojinetes de rodamiento de empuje. Busque un factor de seguridad de 3 para la cuerda o contra falla como columna. Defina los supuestos.

*11-17. Determine la constante de resorte efectiva de los siguientes sándwiches de materiales bajo carga de compresión. Todos están uniformemente cargados en un área de 10 cm^2. El primero y el tercero de los materiales listados tienen 10 mm de espesor y el de en medio es de 1 mm de espesor; juntos forman un sándwich de 21 mm de espesor.

a) aluminio, asbesto-cobre, acero
b) acero, cobre, acero
c) acero, caucho, acero
d) acero, caucho, aluminio
e) acero, aluminio, acero

En cada caso determine qué material domina el cálculo.

*11-18. Calcule la constante de resorte efectiva de los siguientes sándwiches de materiales bajo carga de compresión. Todos están uniformemente cargados en un área de 1.5 in^2. El primero y el tercero de los materiales listados tienen 0.4 in de espesor y el de en medio es de 0.04 in de espesor; juntos forman un sándwich de 0.84 in de espesor.

a) aluminio, asbesto-cobre, acero
b) acero, cobre, acero

11

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problema con *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problemas en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador.

‡ En estos problemas suponga que la tuerca y la arandela, juntas, tienen un espesor igual al diámetro del perno y que los pernos existen comercialmente con incrementos de longitud de 0.25 in o de 5 mm.

c) acero, caucho, acero
d) acero, caucho, aluminio
e) acero, aluminio, acero

En cada caso, determine qué material domina el cálculo.

11-19. Un perno de acero precargado similar al de la figura 11-31 (p. 760) sujeta dos pestañas con un espesor total igual a *l*. Con los datos dados en las filas asignadas de la tabla P11-1, obtenga la constante de rigidez de la junta.‡

Tabla P11-1
Datos del problema 11-19

Fila	Cuerda del perno	Material de la pieza	*l* (mm)
a	m8 x 1	acero	30
b	m8 x 1	alum.	40
c	m14 x 2	acero	38
d	m14 x 2	alum.	45
e	m24 x 3	acero	75
f	m24 x 3	alum.	90

*11-20. La cabeza del cilindro de un compresor de aire experimenta fuerzas en un intervalo de 0 a 18.5 kN en cada ciclo. La cabeza de aluminio tiene 80 mm de grueso, el empaque no confinado de teflón es de 1 mm de espesor y el cárter es de aluminio. La longitud efectiva de sujeción del tornillo de cabeza es de 120 mm. El pistón tiene 75 mm de diámetro y el cilindro tiene 140 mm de diámetro exterior. Especifique un número adecuado, clase, precarga y círculo de pernos para los tornillos de cabeza en la cabeza del cilindro, y así obtener un factor de seguridad mínimo de 1.2 ante cualquier modo de falla posible.

11-21. La cabeza del cilindro de un motor de combustión interna experimenta fuerzas explosivas en un intervalo de 0 a 4 000 lb en cada ciclo. La cabeza de hierro colado tiene 2.5 in de espesor, el empaque no confinado de asbesto de cobre 0.125 in de espesor, y el cárter es de hierro fundido. La longitud efectiva de sujeción del tornillo de cabeza es de 3.125 in. El pistón tiene 3 in de diámetro, y el cilindro 5.5 in de diámetro exterior. Especifique un número adecuado, clase, precarga y círculo de pernos para los tornillos de cabeza en la cabeza del cilindro y así obtener un factor de seguridad mínimo de 1.2 ante cualquier modo de falla posible.

†*11-22*. La biela de acero forjado del motor de combustión interna del problema 11-21 se sujeta alrededor del cigüeñal de 38 mm de diámetro, y está sujetada con dos pernos y tuercas que mantienen juntas sus dos mitades. La carga total sobre los dos pernos varía de 0 a 8.5 kN en cada ciclo. Diseñe estos pernos para vida infinita. Especifique tamaño, clase y precarga.‡

****11-23***. (Véase también el problema 2-33 de la p. 163). La ménsula de la figura P11-2 (p. 786) está sujeta a la pared por cuatro tornillos de cabeza, equidistantes sobre un círculo de pernos de 10 cm de diámetro, y configurada como se muestra. La pared es del mismo material que el soporte. La ménsula está sometido a una fuerza estática *F*, donde *F* y los otros datos de la viga se encuentran en la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P11-1. Determine las fuerzas que actúan sobre cada uno de los 4 tornillos de capucha, debidas a esta carga, y seleccione el diámetro, la longitud y la precarga aceptables del tornillo, que darán un factor de seguridad mínimo de 2 para cualquier modo de falla posible.‡

****11-24***. (Véase también el problema 4-33 de la p. 342). La ménsula de la figura P11-2 está sujeta a la pared por cuatro tornillos de capucha, equidistantes sobre un círculo de pernos de 10 cm de diámetro y configurada como se indica. La pared es del mismo material que la ménsula, la cual está sometida a una función senoidal de fuerza-tiempo con $F_{máx} = F$ y $F_{mín} = -F$, donde *F* y los otros datos de la viga se encuentran en la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P11-1. Determine las fuerzas que actúan sobre cada uno de los 4 tornillos de cabeza, debidas a esta carga de ciclo invertido, y seleccione el diámetro, la longitud y la precarga aceptables del tornillo, que darán un factor de seguridad mínimo de 1.5 para cualquier modo de falla posible en $N = 5E8$ ciclos.‡

****11-25***. (Véase también el problema 4-34 de la p. 342). La ménsula de la figura P11-2 está sujeta a la pared por cuatro tornillos de cabeza, equidistantes sobre un círculo de pernos de 10 cm de diámetro, y configurada como se indica. La ménsula está sometida a una función senoidal de fuerza-tiempo con $F_{máx} = F$ y $F_{mín} = 0$, donde *F* y los otros datos de la viga se encuentran en la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P11-1. Determine las fuerzas que actúan sobre cada uno de los 4 tornillos de cabeza, debidas a esta carga variable, y seleccione el diámetro, la longitud y la precarga aceptables del tornillo, que darán un factor de seguridad mínimo de 1.5 para cualquier modo de falla posible en $N = 5E8$ ciclos.‡

†***11-26***. (Véase también el problema 4-42 en la p. 344). Se requiere un tanque cilíndrico de acero con extremos semiesféricos para mantener 425 kPa de aire presurizado a temperatura ambiente. La presión en un ciclo va de cero al máximo. El diámetro del tanque es de 0.5 m y su longitud es de 1 m. Los extremos semiesféricos están sujetos por varios pernos, a través de las pestañas emparejadas de cada parte del tanque. Se utiliza un empaque no confinado de asbesto comprimido de 0.5 mm de espesor entre

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problema con *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador.

‡ En estos problemas, suponga que la tuerca y la arandela, juntas, tienen un espesor igual al diámetro del perno y que los pernos existen comercialmente con incrementos de longitud de 0.25 in o 5 mm.

Tabla P11-2 Datos de los problemas 11-23 a 11-25
Utilice sólo los datos relevantes del problema específico; longitudes en mm, fuerzas en N

Fila	*l*	*a*	*t*	*h*	*F*	*OD*	*ID*	*E*
a	100	400	10	20	50	10	4	acero
b	70	200	6	80	85	12	6	acero
c	300	100	4	50	95	15	7	acero
d	800	500	6	65	250	25	15	alum.
e	85	350	5	96	900	40	30	alum.
f	50	180	4	45	950	30	25	alum.
g	160	280	5	25	850	45	40	acero
h	200	100	2	10	800	40	35	acero
i	400	150	3	50	950	45	38	acero
j	200	100	3	10	600	30	20	alum.
k	120	180	3	70	880	60	55	alum.
l	150	250	8	90	750	45	30	alum.
m	70	100	6	80	500	20	12	acero
n	85	150	7	60	820	25	15	acero

las pestañas de acero de 10 mm de espesor. Determine el número, la clase, la precarga y el tamaño de los pernos adecuados para sujetar los extremos del tanque. Especifique el círculo de pernos y el diámetro externo necesario de la pestaña para evitar el aflojamiento. Se desea un factor de seguridad mínimo de 2 contra el aflojamiento y un factor de seguridad de 1.5 contra falla del perno para vida infinita.‡

11-27. Repita el problema 11-26 con un empaque confinado de anillo.‡

11-28. Calcule la carga de prueba (carga que causa un esfuerzo de tensión igual a la resistencia de prueba) para los pernos 1/2-13 UNC de cada grado SAE listado en la tabla 11-6 (p. 744).

11-29. Calcule la carga de prueba (carga que causa un esfuerzo de tensión igual a la resistencia de prueba) para los pernos M20 × 2.50 de cada clase listada en la tabla 11-7 (p. 744).

11-30. Determine la constante de rigidez de la junta para el perno y las piezas del problema 11-7.‡

11-31. Determine la constante de rigidez de la junta para el perno y las piezas del problema 11-8.‡

11-32. Determine la constante de rigidez de la junta para el perno y las piezas del problema 11-9.‡

11-33. Determine la constante de rigidez de la junta para el perno y las piezas del problema 11-10.‡

11

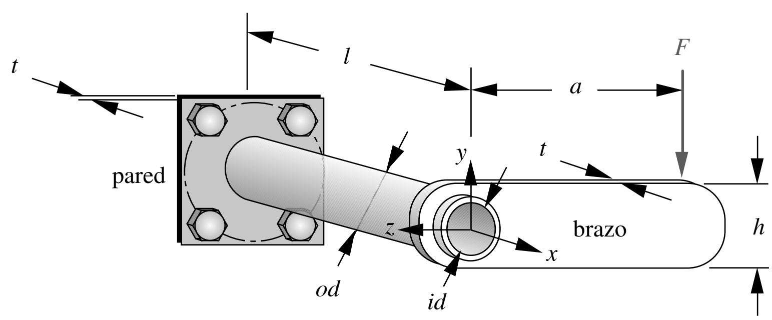


FIGURA P11-2
Problemas 11-23 a 11-25

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problema con *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador.

‡ En estos problemas suponga que la tuerca y la arandela, juntas, tienen un espesor igual al diámetro del perno y que los pernos existen comercialmente con incrementos de longitud de 0.25 in o 5 mm.

11-34. La figura P11-3 muestra una junta con pernos y pasadores de espiga cargada excéntricamente al cortante. Las cargas cortantes son experimentadas por los pasadores de espiga, cuyo número y tamaño se indican en la tabla P11-3. Aun cuando la figura muestra 5 pasadores de espiga, no es el caso de cada fila en la tabla. Para $a = 4$ in, $b = 4$ in, $l = 10$ in, $P = 2\ 500$ lb y los datos en la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P11-3 (p. 788), calcule la magnitud y la dirección de la fuerza cortante total que actúa en cada espiga.

11-35. La figura P11-3 ilustra una junta con pernos y pasadores de espiga cargada excéntricamente al cortante. Las cargas cortantes son experimentadas por los pasadores de espiga, cuyo número y tamaño se indican en la tabla P11-3. Aun cuando la figura muestra 5 pasadores de espiga, no es el caso de cada fila en la tabla. Para $a = 4$ in, $b = 4$ in, $l = 10$ in, $P = 2\ 500$ lb y los datos en la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P11-3 (p. 788), calcule el esfuerzo cortante total en cada espiga.

11-36. La figura P11-3 muestra una junta con pernos y pasadores de espiga cargada excéntricamente al cortante. Las cargas cortantes son experimentadas por los pasadores de espiga de una aleación de acero, cuyo número y tamaño se indican en la tabla P11-3. Aun cuando la figura muestra 5 pasadores de espiga, no es el caso de cada fila en la tabla. Para $a = 4$ in, $b = 4$ in, $l = 10$ in, $P = 2\ 500$ lb y los datos en la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P11-3 (p. 788), obtenga el factor de seguridad contra la fluencia por cortante para cada pasador de espiga. Consulte la tabla 11-12 (p. 773) para los datos de resistencia.

11-37. El coeficiente de fricción de una combinación de tuerca con un tornillo de potencia, lubricado con aceite y de arranque simple, es de 0.10. ¿Cuál de las cuerdas estándar estadounidense Acme, de la tabla P11-3 (p. 788) será de autobloqueo para esta combinación cuerda-tuerca? ¿Cuál es la menor y mayor probabilidad de regreso en presencia de carga dinámica?

11-38. El coeficiente de fricción de una combinación de tuerca con un tornillo de potencia, lubricado con aceite y de arranque simple, es de 0.20. ¿Cuál de las cuerdas estándar Acme, de la tabla P11-3 (p. 788) tendrá la mayor eficiencia (despreciando la fricción del collarín de empuje)?

**11-39*. Determine el número de cuerdas enroscadas requeridas para el barrido total del área de corte de las cuerdas, igual al doble del área del esfuerzo de tensión para una de las cuerdas de paso fino en el tornillo de la tabla 11-2 (p. 727).

11-40. Calcule las cargas últimas de tensión (carga que causa un esfuerzo de tensión igual a la resistencia de tensión) para pernos 1/2-13 UNC de cada grado SAE listado en la tabla 11-6 (p. 744).

*11-41. Calcule las cargas últimas de tensión (carga que causa un esfuerzo de tensión igual a la resistencia de tensión) para pernos M20 × 2.50 de cada clase SAE listada en la tabla 11-7 (p. 744).

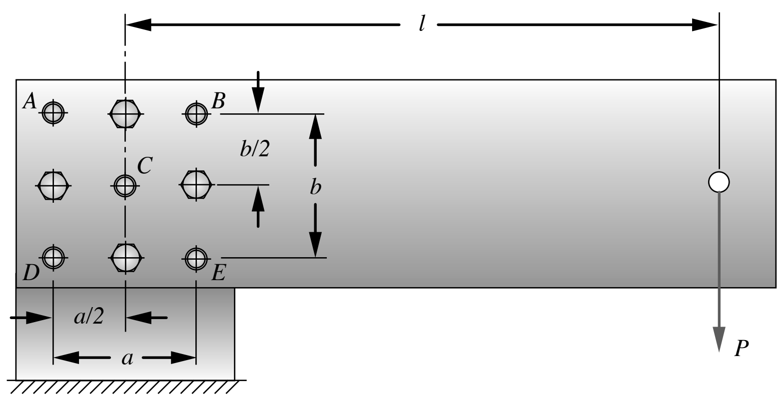


FIGURA P11-3

Problemas 11-34 a 11-36

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problema con *itálicas* son problemas de diseño. Los números de problema en **negritas** son extensiones de problemas similares de capítulos anteriores con el mismo número identificador.

11

Tabla P11-3 Datos de los problemas 11-34 a 11-36
No se muestran las espigas con diámetros iguales a cero

Fila	Número de espigas, n	d_A (in)	d_B (in)	d_C (in)	d_D (in)	d_E (in)
a	5	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
b	4	0.250	0.250	0	0.250	0.250
c	5	0.375	0.250	0.250	0.375	0.250
d	5	0.375	0.375	0.250	0.250	0.250
e	3	0.375	0.375	0	0.375	0
f	3	0.375	0	0	0.375	0.375

11-42. Una placa de aluminio de 0.75 in de espesor está sujeta con pernos y tuercas de 3/8 UNC a una pestaña de acero de 0.50 in de espesor. Determine el factor de rigidez de la junta en cada perno.

11-43. Una placa de aluminio de 16 mm de espesor está sujeta con pernos y tuercas de M14 × 2.0 a una pestaña de acero de 12 mm de espesor. Determine el factor de rigidez de la junta en cada perno.

11-44. Una placa de aluminio de 50 mm de espesor está sujeta con pernos y tuercas de M16 × 2.0 a una pestaña de acero de 30 mm de espesor. Determine el factor de rigidez de la junta en cada perno.

11-45. Una placa de hierro fundido de 1.625 in de espesor está sujeta con pernos y tuercas de 5/16-18 UNC a una pestaña de acero de 1.5 in de espesor. Determine el factor de rigidez de la junta en cada perno.

11-46. Una placa de titanio de 8 mm de espesor está sujeta con pernos y tuercas de M16 × 1.5 a una pestaña de acero inoxidable de 8 mm de espesor. Determine el factor de rigidez de la junta en cada perno.

11-47. Una tuerca de acero suave de M12 × 1.25 está ensamblada con un perno de acero endurecido. La tuerca tiene 11 mm de espesor y una resistencia a la fluencia por cortante de 120 MPa. Determine la fuerza axial que causará el barrido de la tuerca, si sus cuerdas fallan antes que el perno.

11-48. Compare las cargas de fluencia (cargas que causan un esfuerzo de tensión igual a la resistencia de fluencia) con las cargas de prueba (carga que causa un esfuerzo de tensión igual a la resistencia de prueba) en pernos de M12 × 1.25 de cada clase listada en la tabla 10-7.

11-49. Un perno de M16 × 1.50 clase 4.8, con cuerdas cortadas está precargado con el 85% de su resistencia de prueba y sujeto un sándwich de acero sólido de 20 mm de espesor. Calcule los factores de seguridad contra la fluencia estática y la separación de la junta, cuando se aplica una carga estática externa de 3 kN.

11-50. Una tapa de acero de 15 mm de espesor está sujeta a una pestaña de acero de 15 mm de espesor con 6 pernos y sus tuercas. La carga externa sobre la tapa es de 30 kN. Dimensione y especifique los pernos para un factor de seguridad de, por lo menos, 1.5, pero también especifique el torque requerido sobre cada perno para obtener la precarga si las cuerdas están lubricadas.

11-51. Repita el problema 10-50 con una carga externa total sobre los seis pernos que varía de 0 a 30 kN por ciclo. Diseñe estos pernos para vida infinita con un factor de seguridad de, por lo menos, 1.5. Especifique el tamaño, la clase, la precarga y el torque de apretamiento.

11-52. Una tapa de aluminio de 20 mm de espesor está sujeta a una pestaña de aluminio de 20 mm de espesor con 8 pernos y sus tuercas. La carga externa sobre la tapa varía de 0 a 40 kN por ciclo. Dimensione y especifique los pernos para vida infinita y un factor de seguridad de por lo menos 1.5; asimismo, especifique el torque requerido sobre cada perno para obtener la precarga si las cuerdas están lubricadas.

11

12

SOLDADURA



Para inventar, se necesita una buena imaginación y un montón de chatarra

THOMAS A. EDISON

12.0 INTRODUCCIÓN

Las soldaduras (ensambles soldados) se utilizan en muchas aplicaciones como bastidores, piezas de maquinaria, estructuras para construcción, puentes, barcos, vehículos, equipo de construcción y muchos otros sistemas. Aquí el enfoque estará en su aplicación en el diseño de máquinas, en vez de en elementos estructurales de edificios y puentes, aun cuando los principios del diseño de soldadura son similares en todas las aplicaciones en general. No se analizarán recipientes de presión soldados que se someten a temperaturas elevadas y tienen que ver con la corrosión. La ASME publica códigos detallados de tales aplicaciones. Hace medio siglo, los bastidores se hacían comúnmente de hierro gris, el cual posee un buen amortiguamiento. Ahora es común encontrar máquinas con bastidores de acero soldados. Una de las razones para el cambio es la rigidez superior del acero sobre la del hierro colado gris (30E6 psi contra 15E6 psi). Un bastidor de acero, entonces, quizá sea más ligero que una pieza de hierro fundido y tenga una rigidez equivalente, o bien, podría ser del mismo peso, pero más rígido.

A diferencia de las aplicaciones de acero estructural, como en las construcciones, las cuales tienen tolerancias relativamente amplias en sus dimensiones, los bastidores y las piezas de máquinas generalmente deben hacerse con tolerancias dimensionales ajustadas. No obstante, es difícil tener tolerancias ajustadas cuando un ensamble se mantiene unido con soldadura. Lo anterior requiere (como con las piezas fundidas) que el ensamble soldado se maquine como un montaje, una vez que se suelda en la configuración deseada sobre las superficies donde las dimensiones son críticas. Las superficies no críticas se pueden dejar tal como quedan después de soldarse.

La mayoría de los metales se sueldan, aunque algunos son más fáciles de soldar que otros. El acero al bajo carbono es uno de los más fáciles de soldar. Las aleaciones de acero al alto carbono son más difíciles de soldar; pero, si las piezas están endurecidas o roladas en frío para mejorar su resistencia antes de soldarlas, el calor suministrado por la soldadura tiende a recocerlo localmente, reduciendo así su resistencia. Por tales razones, por lo general se recomienda fabricar los ensambles soldados con acero y aleaciones de acero al bajo carbono. El aluminio se puede soldar, pero requiere atención especial para

Tabla 12-0 Variables utilizadas en este capítulo

Símbolo	Variable	Unidades ips	Unidades SI	Véase
A	razón de amplitud	ninguna	ninguna	Ec. 4.1*d*
$A_{cortante}$	área cortante de la soldadura	in^2	mm^2	Ec. 12.4
A_w	área cortante por unidad de longitud de soldadura	in	mm	Ec. 12.4
C_f	coeficiente para la ecuación de la S_{fr}	ninguna	ninguna	Tabla 12-4
Exx	resistencia última mín. a la tensión del electrodo	kpsi	—	Tabla 12-4
f_b	carga de flexión por unidad de longitud de soldadura	lb/in	N/mm	Ec. 12-4
f_n	carga normal por unidad de longitud de soldadura	lb/in	N/mm	Ec. 12-4
f_s	carga cortante por unidad de longitud de soldadura	lb/in	N/mm	Ec. 12-4
f_t	carga de torsión por unidad de longitud de soldadura	lb/in	N/mm	Ec. 12-4
F_r	carga de torsión por unidad de longitud de soldadura	lb/in	N/mm	Ec. 12-4
J_w	2o. momento polar por unidad de longitud de soldadura	in^3	mm^3	Ec. 12.4
N	número de ciclos	ninguna	ninguna	Ej. 12-2
N_f	factor de seguridad de esfuerzo por fatiga	ninguna	ninguna	Ej. 12-4
N_{fr}	factor de seguridad para un intervalo de esfuerzo por fatiga	ninguna	ninguna	Ec. 12.3
$N_{fluencia}$	factor de seguridad del esfuerzo por fluencia estática	ninguna	ninguna	Ec. 12.3
R	razón de esfuerzo	ninguna	ninguna	Ec. 4.1*d*
S_{er}	resistencia en el límite de fatiga para un intervalo de esfuerzo por tensión	psi	MPa	Tabla 12-4
S_{ers}	resistencia en el límite de fatiga para un intervalo de esfuerzo cortante	psi	MPa	Ej. 12-2
S_{fr}	resistencia a la fatiga para un intervalo de esfuerzo por tensión	psi	MPa	Ecs. 12.2
S_{frs}	resistencia a la fatiga para un intervalo de esfuerzo cortante	psi	MPa	Ej. 12-4
S_w	módulo de sección por unidad de longitud de soldadura	in^2	mm^2	Ec. 12.4
t	dimensión de la garganta de la soldadura	in	mm	Fig. 12-4
w	dimensión de la pierna de la soldadura	in	mm	Fig. 12-4
Z	módulo de sección	in^3	mm^3	Ec. 2.11*d*
$\Delta\sigma$	intervalo de esfuerzo	psi	MPa	Ec. 4.1*a*
σ_x	esfuerzo normal	psi	MPa	Ec. 2.7
$\sigma_{1,2,3}$	esfuerzos principales	psi	MPa	Ej. 12-4
σ_a	esfuerzo normal alternante	psi	MPa	Ec. 4.1*b*
σ_m	esfuerzo normal medio	psi	MPa	Ec. 4.1*c*
σ'	esfuerzo efectivo de von Mises	psi	MPa	Ej. 12-4
$\sigma_{máx}$	esfuerzo normal aplicado máximo	psi	MPa	Ec. 4.1*a*
$\sigma_{mín}$	esfuerzo normal aplicado mínimo	psi	MPa	Ec. 4.1*a*
$\Delta\tau$	intervalo de esfuerzo cortante	psi	MPa	Ej. 12-2
τ_{xy}	esfuerzo cortante	psi	MPa	Ec. 2.9
$\tau_{permisible}$	esfuerzo cortante permisible	psi	MPa	Ej. 12-1, -2

12

elegir el proceso y la técnica. Los bastidores de máquinas generalmente se hacen de acero por su resistencia y su rigidez. Su gran masa no es preocupante, ya que permanecen estáticos. Las piezas movibles de las máquinas, como los eslabones, es mejor fabricarlas de aluminio, si experimentan aceleraciones grandes. Sin embargo, muchos eslabones necesitan ser de acero, por cuestiones de resistencia, rigidez o desgaste.

La fotografía de inicio del capítulo es *Hombre que suelda con un arco de metal gaseoso*, por William M. Plate Jr., USAF (la fotografía es del dominio público)

El lector debería considerar este capítulo como una breve introducción a lo que es una tecnología realmente muy fascinante y complicada. Es un estudio modesto que no lo convertirá de ningún modo en un diseñador experto en soldadura. No obstante, le brindará el principio y lo remitirá a la literatura, así como a los códigos sobre el tema.* Varias organizaciones hacen investigación y publicaciones sobre soldadura, así como sobre sus requerimientos. Algunas son:

Asociación Estadounidense de Oficiales de Carreteras y Transporte del Estado (AASHTO) – http://www.transportation.org/

Instituto Estadounidense de la Construcción con Acero (AISC) – http://www. aisc.org/

Instituto Estadounidense del Petróleo (API) – http://www. api.org/

Sociedad Estadounidense de Ingenieros Mecánicos (ASME) – http://www. asme.org/

Sociedad Estadounidense de Soldadura (AWS) – http://www. aws.org/

Fundación de Soldadura con Arco, James F. Lincoln – http://www. jflf.org/

Consejo de Investigación de Soldadura – http://www. forengineers.org

Consulte las referencias al final de este capítulo, para conocer alguna de sus publicaciones relevantes.

12.1 PROCESOS DE SOLDADURA

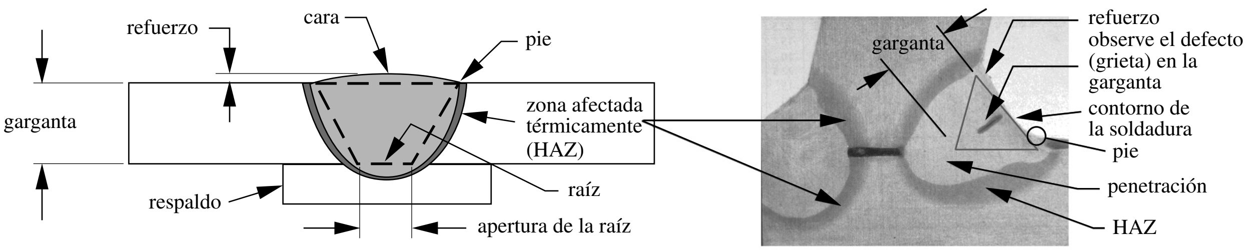
La soldadura de metales por arco eléctrico requiere la aplicación focalizada de calor suficiente para fundir el material base, mientras se agrega material de relleno compatible para unir las dos piezas. La soldadura aplicada adecuadamente puede ser tan fuerte como el material adyacente a ella, pero si no está bien aplicada dejaría el ensamble muy debilitado. Por lo general, el calor se suministra por el acercamiento o el contacto de un electrodo con la superficie, creando así un arco que salta del electrodo a la pieza de trabajo. La máquina de "soldadura de arco" brinda corriente alterna o directa con un voltaje suficiente como para crear el arco eléctrico, el cual tiene una temperatura de entre 6000 y 8000 °**F**, muy arriba del punto de fusión del acero.† El material fundido de relleno es proporcionado por el electrodo mismo o por un alambre separado que se alimenta en el arco y se consume en el proceso.

Una buena soldadura requiere la **fusión** del metal en ambos lados de la junta, con el metal de la soldadura, mientras la fusión requiere **limpieza atómica**. A estas temperaturas, el oxígeno del aire contamina rápidamente la superficie con óxido del metal. El nitrógeno del aire también influye en la calidad del soldado y suele formar burbujas en el metal fundido conforme se enfría, causando una porosidad que debilita la soldadura. La humedad del aire o sobre el metal causa fragilidad con el hidrógeno y debilita la soldadura. Para evitar la contaminación del material caliente, se suministra un flujo de material que cubre con **escoria** el charco del metal fundido conforme se enfría, o bien, se emplea un chorro de gas inerte como el argón o el helio para desplazar el aire. Si la escoria está presente, se descascara cuando se enfría la soldadura. Una buena soldadura también requiere que la masa fundida **penetre** en el metal base, haciendo al final un **metal soldado** con *una combinación del material de relleno y el material base*. Asimismo, hay una **zona afectada por calor** o **HAZ**, que se forma en los extremos de la soldadura, como se indica en la figura 12-1. Esta HAZ puede ser más débil que el material base en aceros de alta resistencia (resistencia de tensión por arriba de 50 kpsi), o más fuerte y más dura que el material base en aceros de baja resistencia, lo cual favorece la formación de grietas. La resistencia del aluminio se reduce hasta el 50% en la HAZ.

La figura 12-1 presenta la terminología clásica en soldadura. El pie se encuentra en el punto de contacto entre la soldadura y el material base en la cara de la soldadura. La raíz se encuentra en la base de la soldadura. La preparación de las piezas para soldar

* La Compañía Eléctrica Lincoln (www.lincolnelectric.com) ofrece un curso corto llamado "Blodgett's Welding Design", que es una introducción excelente a los procesos de soldadura y al diseño de ensambles soldados para cualquier ingeniero.

† La soldadura con gas de oxiacetileno generalmente no se utiliza donde se requieren soldaduras de alta resistencia. Es lenta y la flama del gas produce demasiada oxidación que contamina y debilita la soldadura. Algunas veces sirve en reparaciones de campo, pero no mucho en trabajos nuevos.



(*a*) Terminología general de soldadura

(*b*) Sección transversal de una soldadura de filete que muestra la HAZ y la falla

FIGURA 12-1

Sección transversal de soldadura y terminología *Cortesía de Lincoln Electric Company, Cleveland OH*

requiere el contorneo de los extremos, así como una apertura en la raíz para permitir que el calor y el metal de la soldadura penetren totalmente. Una apertura de raíz podría requerir del uso de una tira de respaldo para mantener el charco fundido en su lugar, hasta que se solidifica. El respaldo es del mismo o de diferente material. Si es del mismo, se suelda a la junta. Se puede dejar en el lugar o quitarlo esmerilándolo. Generalmente se recomienda esto último, si la junta está cargada dinámicamente, ya que el respaldo crea concentraciones de esfuerzos. El refuerzo es la cantidad de soldadura que sobresale por arriba de la superficie del metal base. Éste se puede dejar en su lugar tratándose de juntas cargadas estáticamente; no obstante, se debe esmerilar para remover la concentración de esfuerzos en el pie, si están cargadas dinámicamente. El material del refuerzo no se considera contribución a la resistencia de la soldadura, a pesar de estar cargado. La dimensión de la garganta, la cual sirve para determinar el área de esfuerzo, excluye el material de soldadura fuera del grosor de la pieza o el contorno de la soldadura.

Tipos de soldadura de uso común

Soldadura de arco eléctrico con electrodo revestido (SMAW), llamada también "soldadura con varilla", utiliza trozos de electrodos (varillas) que están recubiertas con fundente en el exterior. Conforme el arco funde el electrodo, el fundente licuado fluye hacia el charco para cubrirlo y protegerlo del contacto con el aire. El método se utiliza comúnmente en exteriores o para reparaciones de campo, ya que no produce gas que sea arrastrado por el viento.

12

La **soldadura de arco con núcleo de fundente (FCAW)** emplea un electrodo de alambre hueco, con el fundente atrapado en su núcleo hueco. Ello le permite formar cordones de longitudes grandes. La máquina soldadora tiene un alimentador del alambre que impulsa éste a través de la cabeza soldadora, a una rapidez controlada por el soldador, volviéndolo un proceso continuo y más eficiente. Los electrodos de alambre de FCAW están disponibles, con o sin un chorro de gas inerte. El gas inerte facilita su uso en interiores, pero con el electrodo correcto se puede usar también sin gas.

La **soldadura de arco de gas con electrodo metálico (GMAW)**, conocida también como soldadura **MIG (electrodo con gas inerte)**, emplea un electrodo de alambre sin fundente. Se dirige un gas inerte hacia la soldadura para desplazar el aire. Esto produce soldaduras más limpias debido a la ausencia de escoria y la limpieza subsiguiente, pero no se puede utilizar en exteriores si el viento sopla a más de 5 mph.

Soldadura de arco de gas con electrodo de tungsteno (GTAW), conocida también como **TIG (tungsteno con gas inerte)** o soldadura **Heliarc**, emplea un electrodo de alambre de tungsteno que no se consume. Por separado, se alimenta una varilla o alambre de metal al charco fundido. Un gas inerte como el argón se dirige hacia la soldadura para protegerla. El gas que se usó originalmente fue el helio, del cual proviene el

nombre heliarc. Este método se utiliza a menudo sobre aluminio, titanio y magnesio, así como en reparaciones finas. Brinda una soldadura limpia, aunque en exteriores tiene la misma limitación por el viento que la GMAW.

La **soldadura de arco sumergido (SAW)** usa fundente pulverizado aplicado en una cantidad tal que sepulta o "sumerge" toda la soldadura en un manto tan grueso que no se observa el arco. El operador sólo necesita protección transparente para los ojos. El fundente se alimenta al arco como un flujo de polvo mediante un tubo adyacente o concéntrico al electrodo. Después de que la soldadura se enfría, se cepilla o aspira el polvo remanente para volver a utilizarlo. La escoria fundida se descascara para poner al descubierto la soldadura. Tal proceso se limita a soldaduras sobre superficies altas y es más adecuado en la producción de soldaduras en un taller, donde el movimiento y la trayectoria del electrodo se pueden controlar automáticamente con un robot o con guías semiautomáticas. Da una buena apariencia de la soldadura libre de salpicaduras.

Las **soldaduras de resistencia** se aplican en las hojas delgadas de metal, con un proceso eléctrico similar. Los electrodos entran en contacto con el sándwich de metal y una gran corriente eléctrica pasa a través de las hojas, fusionando los dos materiales con un "punto". Si los electrodos se mueven a lo largo de las partes con la corriente, crearán una "costura" de soldadura. Se suele emplear un láser para crear el calor necesario en lugar de electrodos. En dichas soldaduras no se agrega un material de relleno. Generalmente sirven para soldar piezas automotrices, así como envolturas de hojas de metal y otras estructuras de pared delgada, aunque no se manejan en las secciones de las hojas.

¿Por qué un diseñador debe intervenir en el proceso de soldadura?

Para el ingeniero de diseño es útil contar con un conocimiento básico de estos procesos de soldadura y sus limitaciones, justo como se necesita saber cómo maquinar (o no) una pieza en un torno o en un molino. Sin embargo, la mayoría de los ingenieros de diseño no son maquinadores ni soldadores certificados. Entonces, como los ingenieros no intentan decir a los maquinadores expertos cómo elaborar una pieza, deberían dejar que las decisiones detalladas del proceso de soldadura las tomen los soldadores expertos. No obstante, deben estar familiarizados con sus limitaciones. Las tareas del ingeniero de diseño son diseñar la soldadura de acuerdo con una buena y aceptada práctica de ingeniería, dimensionar la soldadura con base en las técnicas que se explicarán aquí (y en las referencias del capítulo) de modo que se aseguren contra fallas en el uso esperado, elegir la resistencia necesaria en el material de la soldadura y especificar la información en un esquema.

12.2 JUNTAS SOLDADAS Y TIPOS DE SOLDADURA

Como se ilustra en la figura 12-2, existen cinco tipos de juntas soldadas: a tope, en T, de esquina, traslapada y de extremo. La elección del tipo de junta la determinará, en algún grado, la geometría deseada del ensamble soldado, así como cierto ensamble soldado puede tener varios tipos dentro de él.

Existen tres tipos generales de soldaduras que se utilizan con uno o más de los cinco tipos de juntas: ranuras soldadas, soldadura de filete y soldaduras de tapón/ranura, como las de la figura 12-3. Las soldaduras de ranura se dividen, a la vez, en dos categorías: de penetración total o parcial. En general, se recomienda que las soldaduras de tapón y ranura no se utilicen, pues tienden a ser más débiles que las otras. Se enfocará a los dos subtipos de soldaduras de ranura y las soldaduras de filete. Las soldaduras de ranura son adecuadas para juntas a tope, juntas en esquinas exteriores y juntas de extremos en materiales, con espesor suficiente. Las soldaduras de filete son adecuadas para juntas T, juntas traslapadas y juntas con esquinas interiores.

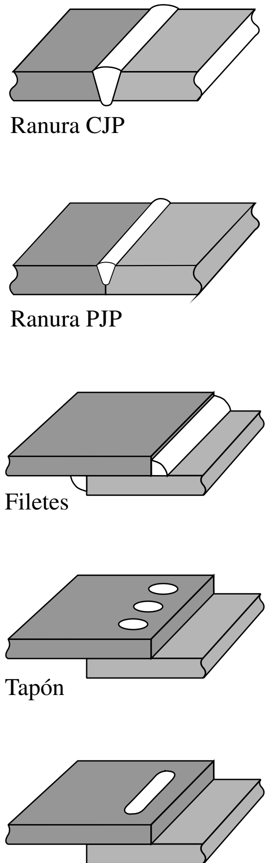


FIGURA 12-3

Tipos de soldaduras

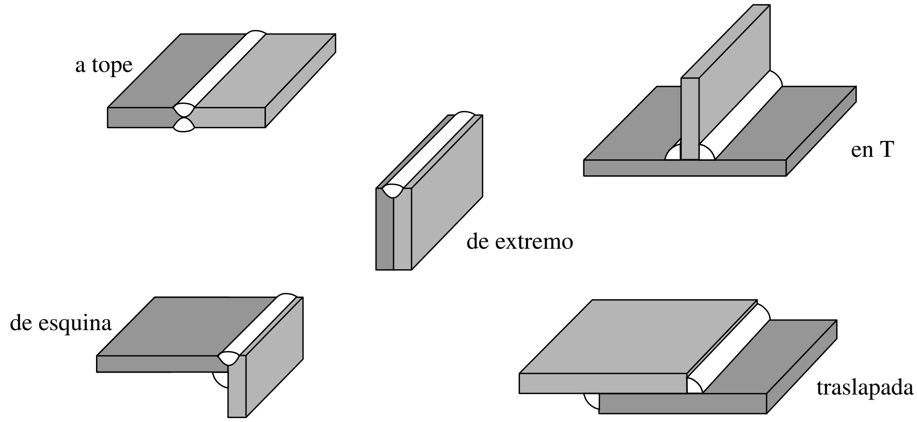


FIGURA 12-2

Tipos de juntas soldadas *Cortesía de Lincoln Electric Company, Cleveland OH*

Las **soldaduras en ranura** tienen **penetración completa en la junta (CJP)**, o bien, **penetración parcial en la junta (PJP)**, como se muestra en las figuras 12-3 y 12-4. Una soldadura de ranura CJP de tope cargada estáticamente a la tensión es tan fuerte como la más delgada de los dos materiales unidos. La resistencia de una junta PJP depende de la profundidad de su "**garganta**", como se define en la figura 12-4. Las soldaduras PJP se utilizan generalmente en ambos lados sobre secciones gruesas, donde la soldadura CJP sería más grande de lo necesario. Observe que el "**refuerzo**" del cordón que sobresale afuera de la superficie de las partes soldadas no se incluye en la medición de la garganta. En aplicaciones con carga de fatiga, a menos que el intervalo del esfuerzo sea lo suficientemente bajo, el refuerzo necesita estar al ras del material para eliminar concentraciones de esfuerzo en la superficie ondulada de la soldadura y en el pie. El área total de la garganta de la soldadura es la dimensión de la garganta multiplicada por la longitud de la soldadura. El área de fusión es el área de unión entre la soldadura y el material base, como se indica en la figura 12-4.

12

Las **soldaduras de filete** están definidas por la dimensión w de su pierna; no obstante, la resistencia de la soldadura está limitada por la dimensión de la garganta t, como se ilustra en la figura 12-4. Las soldaduras de filete normalmente se encuentran a 45°

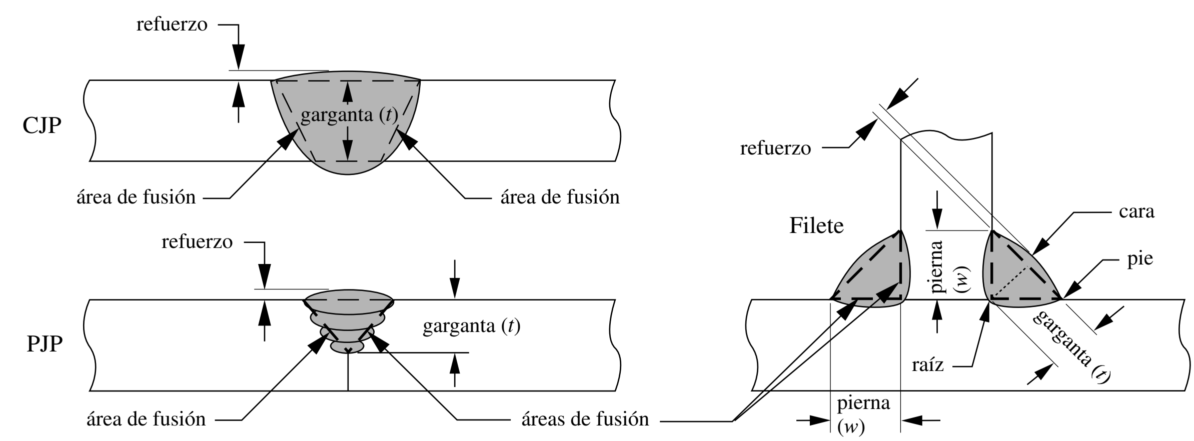


FIGURA 12-4

Dimensiones de la garganta en juntas soldadas *Cortesía de Lincoln Electric Company, Cleveland, OH*

entre las dos piezas ortogonales, pero las unen a cualquier ángulo. Si las piezas unidas son ortogonales y el filete está a 45%, entonces el ancho *t* de la garganta es 0.707 veces el ancho *w* de la pierna. Se ignora el refuerzo. El **área soldada** total es el *ancho de la garganta multiplicado por la longitud t de la soldadura,* pero el **área de fusión** que determina si la soldadura salpica el metal base es el *ancho de la pierna w multiplicado por la longitud soldada* en cada pierna, para una soldadura de filete. El esfuerzo en cada área de fusión de la pierna puede ser o no el mismo, dependiendo de la carga en la pieza.

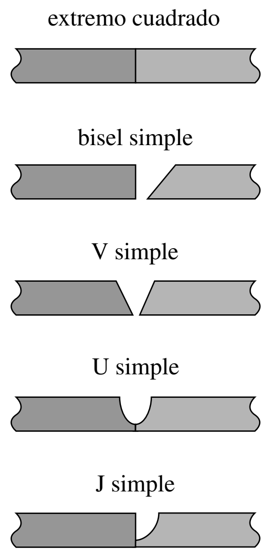


FIGURA 12-5

Preparación de la junta *Cortesía de Lincoln Electric Company, Cleveland, OH*

Preparación de la junta

Se obtendrán mejores soldaduras si la junta se prepara adecuadamente para permitir que el calor y el metal soldado alcancen todas las porciones del área de la junta y las fusionen. A menos que las secciones sean delgadas, se debería preparar la junta soldada quitando metal de uno o ambos lados de la junta. Se recomiendan varios perfiles de juntas, U, J y V, como se muestra en la figura 12-5. El detalle del perfil de las juntas J o U deja una pequeña cantidad de material base en el fondo de la ranura, con la finalidad de evitar que se salga el metal fundido de la soldadura, pero es lo suficientemente delgado como para permitir una buena penetración. Una ranura en V es más fácil de maquinar; no obstante, necesita tener espacio en el fondo para lograr buena penetración. Este espacio se cierra con una tira de respaldo de metal o cerámica, para contener el metal de la soldadura hasta que se enfríe. Si la tira de respaldo es del mismo material que las partes unidas, también se suelda a la junta. Se puede remover, pero si se deja en el lugar tiene que llenar toda la longitud de la junta. Si se permiten empalmes en la tira de respaldo y no están completamente soldados, se crearán grandes concentraciones de esfuerzos capaces de causar una falla. Del mismo modo, uno puede decidir soldar intermitentemente una juntura larga, en vez de poner una juntura continua en toda su longitud. Sin embargo, con frecuencia es mejor emplear soldadura continua, debido a que cada interrupción de la juntura de soldadura origina una concentración de esfuerzos, especialmente indeseables en cargas dinámicas, que son comunes en las piezas de máquinas. Aún más, para la misma resistencia, una juntura con sólo la mitad de longitud de una junta debe tener el doble del tamaño en la garganta, lo cual cuadruplica el área de su sección transversal. Una sección transversal más pequeña que grande requerirá menos material de soldadura y será más económica.

El diseñador necesita elegir y especificar el tamaño de la ranura que se va a maquinar en las piezas antes de soldarlas. Los tamaños recomendados, con base en el espesor de la pieza, se obtienen en manuales de soldadura y de especificaciones, como las referencias [1 – 4]. Es muy recomendable que se utilicen tales manuales y códigos cuando se diseñan soldaduras. Si uno está diseñando edificios o puentes, entonces se habrán de aplicar los códigos de la AISC y AWS, los cuales contienen reglas muy específicas y procedimientos que se deben seguir cuando se diseñan estructuras, cuyas fallas pondrían en riesgo la vida de seres humanos. Por lo general, el diseñador de máquinas no requiere seguir esos códigos, pero de cualquier modo sería aconsejable hacerlo para garantizar buenos resultados.

12

Especificación de la soldadura

Las soldaduras y la preparación de la junta se especifican sobre un diagrama, mediante una forma estándar de símbolos de soldadura, como se indica en la figura 12-6*a*. Como mínimo, tiene una línea de referencia y una flecha. La cola también es opcional en el lado contrario de la flecha. La flecha apunta hacia la junta y el símbolo de soldadura define el tipo de soldadura (filete, CJP, PJP, etcétera). Los símbolos de soldadura arriba de la línea se refieren al lado opuesto de la flecha; los de abajo de la línea, al lado de la flecha. La flecha apunta hacia arriba o hacia abajo. Los símbolos siempre se leen de derecha a izquierda, sin importar en cuál extremo se encuentre la flecha. La figura 12-6*b* muestra algunos de los símbolos de soldadura posibles. Consulte el AWS A2.4[3] para más detalles.

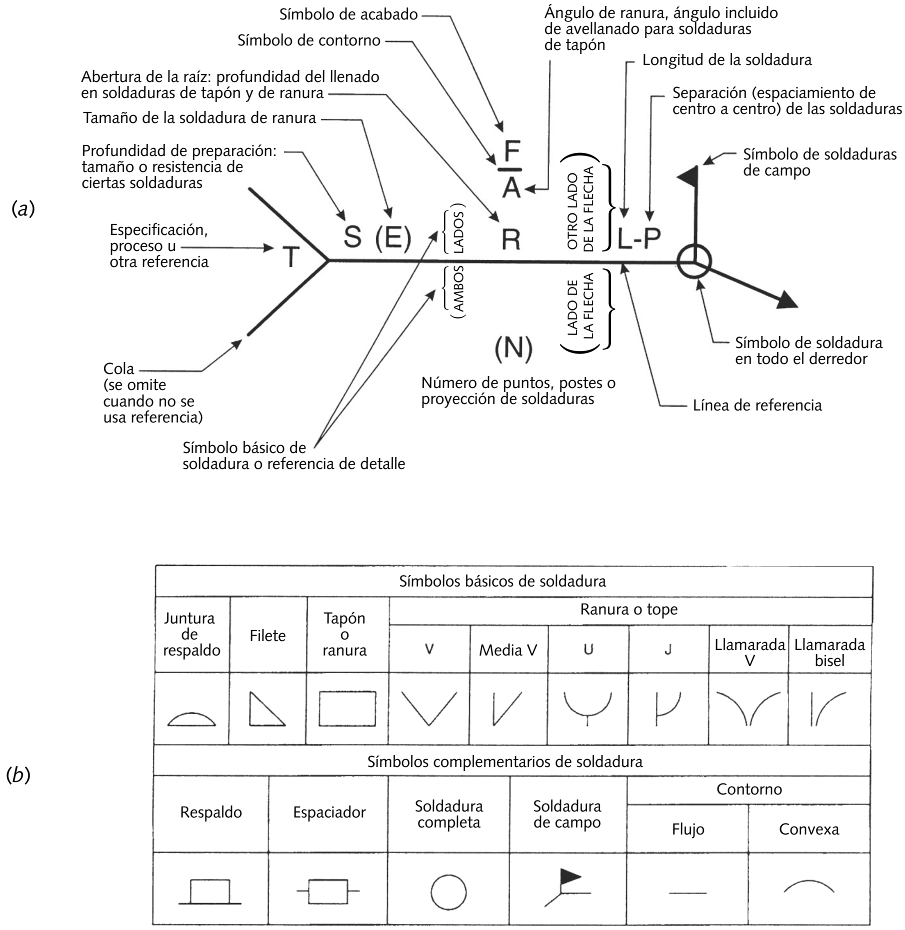


FIGURA 12-6

Símbolos de la AWS para soldadura[3]

12

12.3 PRINCIPIOS DE DISEÑO DE SOLDADURA

Es tan importante poner atención tanto en la geometría de la soldadura como en sus tamaños, si uno quiere que el diseño resulte exitoso. También es muy importante configurar las soldaduras de modo que haya una trayectoria de carga sensible y segura, con la finalidad de ubicar los puntos de reacción de las cargas aplicadas. El concepto de "flujo de fuerza" introducido en el capítulo 2 se aplica aquí. Se han desarrollado las siguientes reglas por expertos en diseño de soldaduras durante muchos años y en la referencia [1] se encuentran más detalle sobre ellas.

1. Proporcione una ruta para que las fuerzas aplicadas entren a la(s) sección(es) del ensamble soldado que sea(n) paralela(s) a la fuerza aplicada.
2. Las fuerzas seguirán las rutas más rígidas de la estructura, de modo que es mejor tener una rigidez relativamente uniforme y distribuir de manera equitativa las cargas de reacción en la soldadura.
3. No existen elementos secundarios en las soldaduras. Se trata en esencia de una pieza. No obstante, las soldaduras pueden ser primarias o secundarias. Una soldadura **primaria** transporta directamente la carga completa y su falla provoca que el ensamble

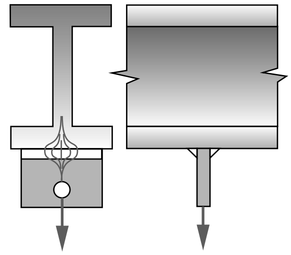
soldado falle. Las soldaduras **secundarias** sólo mantienen las partes juntas y experimentan pequeñas fuerzas sobre ellas.

4. Si es posible, no someta las soldaduras a flexión. Si existen momentos de flexión, intente ubicar las soldaduras cerca de posiciones con momento bajo o igual a cero, o bien, configure las soldaduras para manejar cortante o tensión/compresión axiales.
5. Donde sea posible, no aplique cargas de tensión a través del espesor transversal del material base (es decir, "a través de la veta"). Los metales forjados tienen la veta en dirección del rolado y son ligeramente más débiles a través de la veta que a lo largo de la misma. (Véase la sección 10.3, p. 652 para el estudio de las vetas en los metales.) Las soldaduras cargadas a la tensión en la sección transversal (figura 12-10) pueden generar "microcanales de goteo" del material debajo de la soldadura. Son preferibles las cargas de corte aplicadas a través de la superficie de una soldadura.
6. Donde el tamaño de la sección cambia a través de una junta, se estrecha el material alrededor de ésta para mejorar el flujo de fuerza y reducir la concentración de esfuerzos.

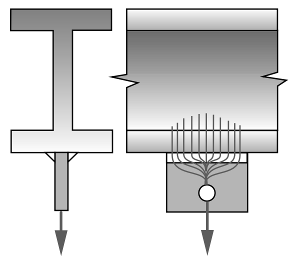
La figura 12-7 muestra diseños alternos de un gancho soldado a una viga. En el inciso *a* se muestra una configuración inferior, en la cual el gancho está girado 90°, de modo que la carga es soportada por la pestaña de la viga. Como la trayectoria más rígida soporta la mayoría de la carga, la pequeña longitud de soldadura que abarca la membrana central manejará la mayoría de la fuerza. Si la longitud completa de la soldadura se dimensiona para tener niveles aceptables de esfuerzo, puede fallar, porque la distribución no uniforme de esfuerzos, a través de la pestaña, sobrecarga la sección central de la soldadura. La flexibilidad de la pestaña cerca de sus extremos reduce su capacidad para transmitir carga a la membrana central. Observe las flechas de flujo de la carga de cada diseño. El inciso *b* muestra una configuración aceptable donde la carga del gancho se transfiere directamente hacia la membrana de la viga en I, a través de la soldadura.

La figura 12-8 muestra un ensamble similar que utiliza una viga de sección rectangular. En el inciso *a* (figura 12-8), la solución que funcionó en la figura 12-7 es ahora una solución inferior, porque la carga aplicada en el centro de la superficie inferior de la sección debe viajar a través de ella para alcanzar el lado de la membrana que soporta las fuerzas en la viga. Esta soldadura experimenta flexión. En el inciso *b* se presenta una mejor configuración, donde se rediseñó el gancho para soldarlo directamente en los lados de las membranas, exponer la soldadura al corte y soportar las fuerzas en las secciones paralelas a la carga, las cuales son más fuertes a la flexión que la sección de la membrana. Observe las flechas del flujo de fuerzas de cada diseño.

La figura 12-9 ilustra partes soldadas de diferente ancho o diferente espesor. El código D1.1 AWS de soldadura exige un estrechamiento de, por lo menos, 2.5:1 ($\leq 22°$) en todo este tipo de uniones, de un extremo a otro de las juntas a tope de tamaño no uniforme, cuando están cíclicamente cargadas.



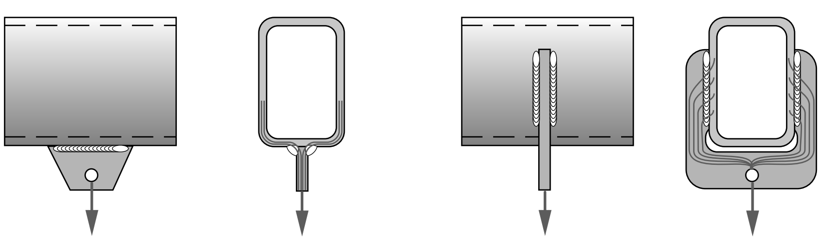
(*a*) Diseño deficiente: carga soportada por la pestaña hacia la membrana y el centro de la soldadura soporta el esfuerzo de la carga



(*b*) Diseño aceptable: la carga es soportada directamente por la membrana y toda la soldadura comparte la carga

FIGURA 12-7

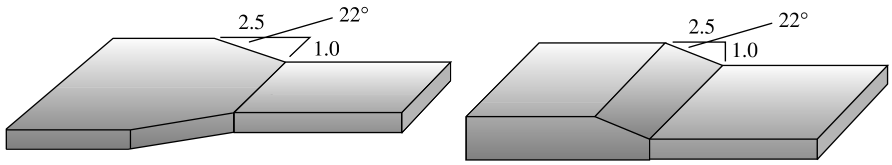
Ejemplos aceptable y deficiente de juntas soldadas *Cortesía de Lincoln Electric Company, Cleveland OH*



(*a*) Diseño deficiente: carga soportada por la parte inferior hacia los lados de las membranas (*b*) Diseño aceptable: carga soportada directamente por los lados de las membranas

FIGURA 12-8

Ejemplos aceptable y deficiente de juntas soldadas *Cortesía de Lincoln Electric Company, Cleveland OH*



(*a*) Dimensión estrechada a lo ancho (*b*) Dimensión con espesor estrechado

FIGURA 12-9

Las juntas disparejas se deben estrechar *Cortesía de Lincoln Electric Company, Cleveland OH*

12.4 CARGA ESTÁTICA EN SOLDADURAS

Comparado con el cálculo de esfuerzos en piezas de máquinas con geometría compleja, el cálculo de esfuerzos en soldaduras es bastante sencillo. Si se evitan soldaduras cargadas a la flexión, por lo general las cargas serán de tensión/compresión directa o de corte directo. En cualquier caso, la ecuación de esfuerzo es simple. Para tensión o compresión axial, el esfuerzo normal se definió en la ecuación 2.7 (p. 82) como:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \tag{2.7}$$

El cortante directo, que es común en soldaduras, se definió en la ecuación 2.9 (p. 83) como:

$$\tau_{xy} = \frac{P}{A_{corte}} \tag{2.9}$$

En ambos casos, P es la carga aplicada y A o $A_{cortante}$ es el área de la soldadura. Para una junta a tope con soldadura con CJP a la tensión o compresión, el área de la garganta de la soldadura es igual a la sección transversal de la pieza más pequeña de la junta. Para una soldadura con PJP a la tensión o compresión o una soldadura de filete a la tensión, compresión o cortante, el área es simplemente la dimensión t de la garganta multiplicada por la longitud de la soldadura. La figura 12-4 define el tamaño de la garganta para varias soldaduras. Observe que si una junta T soldada en filete está sometida a una carga de tensión o de corte, la soldadura experimentará un esfuerzo de corte y también puede tener un esfuerzo de tensión. Las áreas de fusión, entre la soldadura y el metal base, tienen uno o ambos tipos de esfuerzos aplicados, dependiendo de la carga.

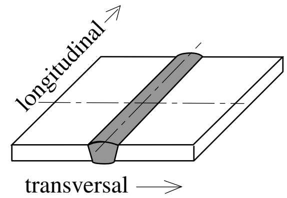
12

12.5 RESISTENCIA ESTÁTICA DE SOLDADURAS

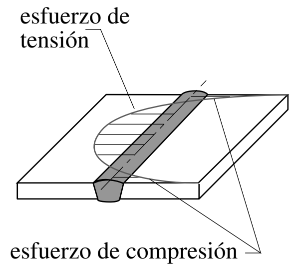
En el capítulo 3 se estudiaron a profundidad las teorías de falla estática; se concluyó que la falla estática se debe al esfuerzo cortante y que la teoría de la energía de distorsión define mejor el nivel seguro de esfuerzo para un material dúctil, usando un factor de seguridad deseado. Los metales empleados en soldadura y los materiales de relleno son dúctiles, de modo que esta teoría es aplicable. No obstante, durante el último medio siglo, en la industria de la soldadura pruebas exhaustivas realizadas en ensambles soldados han generado buenos datos sobre resistencias permisibles en soldaduras y ensambles soldados. El número de pieza de un electrodo tiene una E, seguida de cuatro o cinco dígitos, de los cuales los dos o tres primeros definen su resistencia última mínima a la tensión en kpsi, en tanto que el resto indican la posición en la que se pueden utilizar y su recubrimiento. Su resistencia generalmente se refiere como Exx. Por ejemplo, un electrodo $E70$ tiene una S_{ut} mínima igual a 70 kpsi; y un $E110$, una S_{ut} mínima igual a 110 kpsi.* Observe que una muestra determinada puede exceder realmente el valor establecido.

* La resistencia a la fluencia del material de acero del electrodo usualmente se toma como el 75% de la S_{ut}

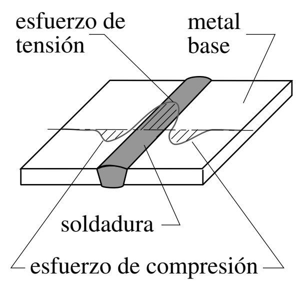
Se recomienda que la resistencia del electrodo seleccionado sea aproximadamente parecida a la del metal base que se va a soldar, lo cual es un requerimiento para soldaduras con CJP cargadas a la tensión. En algunos casos, se utilizan metales **disparejos a la baja** (*metal de soldadura más débil que el metal base*), sobre todo si se sueldan aceros de alta resistencia o se necesita mejor resistencia al agrietamiento. Por lo general, no se recomiendan metales **disparejos al alta** (*metal de soldadura más fuerte que el metal base*).



(*a*) Placas con soldadura con CJP a tope



(*b*) Esfuerzo residual transversal



(*c*) Esfuerzo residual longitudinal

FIGURA 12-10

Esfuerzos residuales en soldaduras

Esfuerzos residuales en soldaduras

Las soldaduras siempre tienen grandes esfuerzos de tensión residuales. Lo anterior se debe a que el metal de la soldadura se expande aproximadamente seis veces su elongación por fluencia cuando se funde. Cuando se enfría, se encoge en la misma proporción. Los metales que no son sólidos tienen 600% de elongación por fluencia, lo cual significa que el material de soldadura cede a la tensión conforme se encoge, ya que el metal base sólido adyacente a la soldadura no puede moverse junto con él. Existe un esfuerzo equilibrante de compresión formado en el metal base adyacente y la distribución del esfuerzo residual luce como la figura 12-10 cuando se enfría. Con un metal de soldadura disparejo a la baja (es decir, más débil) se reducirá el esfuerzo residual debido a su menor resistencia a la fluencia. No se recomienda usar un metal de soldadura excesivamente disparejo al alta en ningún caso, pues esto favorecería un diseño no conservador.

Dirección de la carga

La dirección de la carga aplicada contra el eje de la soldadura produce un gran efecto sobre la resistencia en soldaduras de filete. Las pruebas demuestran que las soldaduras de filete cargadas de manera transversal (perpendicular) al eje mayor de la soldadura, tienen una resistencia 50% mayor que la misma soldadura cargada a lo largo (longitudinalmente) del eje de la soldadura (véase la figura 12-10*a*). Esto se debe, en parte, a que la garganta efectiva de un filete cargado transversalmente, entre dos partes ortogonales, tiene 67.5° en vez de los 45° cuando se carga longitudinalmente. El plano de 67.5° tiene 30% más de área cortante. Sin embargo, el código AWS D1.1 especifica que el área efectiva de la garganta, definida por la distancia más corta de la raíz a la cara de soldadura, se debe utilizar para cualquier dirección de la carga aplicada.[9] No obstante, las soldaduras longitudinales tienen la ventaja de permitir más deformación antes de ceder, de lo que permiten las soldaduras transversales.[9] No obstante, las soldaduras se diseñan contra la falla por ruptura en lugar de falla por fluencia porque, aun cuando son dúctiles, el volumen de soldadura es muy pequeño, comparado con la parte completa, y la magnitud de la deformación de la soldadura, entre la fluencia y la fractura, es demasiado pequeña para dar una advertencia de falla incipiente.

Esfuerzo cortante permisible, en soldaduras de filete y con PJP cargadas estáticamente

Para carga estática, la AWS[3] recomienda que los esfuerzos cortantes en una soldadura de filete o en soldaduras con PJP se limiten al 30% de la resistencia a la tensión del electrodo, *Exx*.

$$\tau_{permisible} = 0.30Exx \tag{12.1}$$

Este valor tiene un factor de seguridad intrínseco **mínimo** contra la **fractura,** en un intervalo que va de 2.21 a 4.06, para varias cargas en soldaduras que utilizan electrodos con resistencias de *E*60xx a E110xx en pruebas exhaustivas.* La tabla 12-1 presenta mayor detalle de estos factores de seguridad. Tales factores de seguridad y la ecuación 12.1 se basan en pruebas exhaustivas realizadas en ensambles soldados por la AISC[6] y suponen que la resistencia del material de la soldadura está emparejada aproximadamente con la del metal base, en cada caso.† La ecuación 12.1 está incluida en el código de soldadura estructural AWS D1.1.[3] **El factor nominal de seguridad de la ecuación 12.1 generalmente se toma como 2.5, el cual está dentro del intervalo de valores del factor de seguridad de soldadura longitudinal de la tabla 12-1.**

* Observe que los electrodos *E*60XX se consideran básicamente obsoletos y el electrodo de menor resistencia de uso común ahora es el E70XX.

† La ecuación 12.1 fue verificada con modelos de FEA exhaustivos que muestran buena correlación con dicha estimación.[8]

12

Tabla 12-1 Factores de seguridad contra falla estática cuando se utiliza la ecuación 12.1[6]

Como los reportó la Testing Engineers, Inc., 1968

Metal base	Clase del electrodo	Factores de seguridad cuando se aplica un esfuerzo en el área de la garganta igual a 0.3 de la resistencia a la tensión del electrodo			
		Soldaduras longitudinales		Soldaduras transversales	
		Promedio	Mínimo	Promedio	Mínimo
A36	E60xx	2.88	2.67	—	—
A441	E70xx	2.95	2.67	4.62	4.06
A514	E110xx	2.41	2.21	3.48	3.30

Tabla 12-2

Tamaños mínimos de soldadura en filetes*

Espesor del metal base (T)	Tamaño mínimo de la soldadura
tamaño en pulgadas	
T ≤ 1/4	1/8
1/4 < T ≤ 1/2	3/16
1/2 < T ≤ 3/4	1/4
3/4 < T	5/16
tamaños en mm	
T ≤ 6	3
6 < T ≤ 12	5
12 < T ≤ 20	6
20 < T	8

* Fuente: tabla 5.8 AWS D1.1

La ecuación 12.1 es un tanto inusual, porque compara el esfuerzo cortante aplicado con la resistencia última a la tensión como un valor de referencia. También proporciona un factor de seguridad de 3.33 (el recíproco de 0.30) en vez del 2.5 establecido. Esta anomalía se explica por la mezcla, en la ecuación, del esfuerzo cortante y la resistencia a la tensión. La ecuación B.5*b* (apéndice B) da una razón aproximada entre la resistencia última al cortante y la resistencia última a la tensión, en metales dúctiles de 0.75 a 0.8. Al multiplicar 0.75 por 3.33 resulta 2.5 como factor contra la rotura por cortante. Sin embargo, es más conveniente utilizar la resistencia establecida mínima a la tensión del electrodo, así como ajustar el factor en la ecuación de 1 / 2.5 a 1 / 3.33 = 0.30.

El código de soldadura estructural AWS D1.1 define tamaños mínimos de soldaduras, con base en el espesor del material que se esté soldando. Algunos de tales datos se presentan en la tabla 12.2. El tamaño mínimo de soldadura es para garantizar que se aplica suficiente calor para lograr una buena fusión.

EJEMPLO 12-1

Diseño de una soldadura de filete cargada estáticamente

Problema **Una sección T de acero ASTM 36 rolado en caliente en ambas piernas de 0.5 in de espesor por 4 in de ancho, como se muestra en la figura 12-11, se va a soldar en filete en ambos lados. Determine el tamaño *t* requerido de la garganta de la soldadura.**

Se proporciona **La T está cargada estáticamente a la tensión en el centro de la membrana, con *P* = 16 800 lb aplicada en el orificio de 1 in de diámetro. En la tabla 12-3 se muestran las resistencias de los aceros ASTM.**

Suposiciones **Se utiliza un electrodo de material con resistencia semejante y las soldaduras corren a todo el ancho de las piezas. La soldadura está cargada directamente y fallará al cortante a lo largo de un plano de 45° en la garganta.**

Solución

1. La tabla 12-3 proporciona la resistencia a la tensión de este material como 58-80 kpsi. Seleccione un electrodo con aproximadamente la misma resistencia, como el promedio de la resistencia del material. Los electrodos tienen incrementos de 10 kpsi y el más cercano disponible es un *E*70 con 70 kpsi de resistencia a la tensión. (Los electrodos *E*60xx actualmente se consideran obsoletos.)

2. Determine la resistencia permisible con base en el 30% del valor *Exx* de este electrodo, mediante la ecuación 12.1.

Tabla 12-3

Resistencias mínimas de algunos aceros estructurales ASTM

Número ASTM	S_y kpsi (MPa)	S_{ut} kpsi (MPa)
A36	36 (250)	58-80 (400-500)
A572 Gr42	42 (290)	60 (415)
A572 Gr50	50 (345)	65 (450)
A514	100 (690)	120 (828)

12

$$\tau_{permisible} = 0.30Exx = 0.30(70) = 21 \text{ kpsi} \qquad (a)$$

3. Calcule el área cortante necesaria en la garganta para limitar el esfuerzo a este valor.

$$\tau_{xy} = \tau_{permisible} = 21 \text{ kpsi} = \frac{P}{A_{cortante}} = \frac{16\,800}{A_{cortante}}$$

$$A_{cortante} = \frac{16\,800}{21\,000} = 0.8 \text{ in}^2 \qquad (b)$$

4. Determine la dimensión de la garganta de las dos soldaduras de filete de longitud completa (una sobre cada lado de la junta), que proporcionará el área requerida.

$$A_{cortante} = 2Lt = 2(4)t = 0.8 \text{ in}^2$$
$$t = 0.1 \text{ in} \qquad (c)$$

5. Convierta esta dimensión t de la garganta al ancho de pierna w, suponiendo un filete de pierna igual en la junta T de 90°.

$$w = \frac{t}{\cos(45°)} = \frac{0.1}{0.707} = 0.141 \text{ in} \qquad (d)$$

6. Verifique lo anterior contra el tamaño mínimo recomendado de soldadura para este espesor de la pieza. La tabla 12-2 indica que una parte de 0.5 in de espesor necesita, por lo menos, una soldadura con un ancho de pierna igual a 3/16 in, de modo que se incrementa el ancho de pierna de la soldadura a 0.187 in.

7. Ahora verifique si la pieza fallará en el metal base fundido. Existen dos áreas de interés: las áreas entre las soldaduras y la base, identificadas como áreas 'A′, las cuales están en tensión, y las áreas entre las soldaduras y la membrana, identificadas como áreas 'B′, las cuales están sometidas a cortante. Puesto que ambas tienen la misma área total y la resistencia al cortante del metal base es aproximadamente la mitad de su resistencia a la tensión, sólo se necesita verificar las áreas al cortante 'B′ contra falla. La resistencia mínima a la fluencia por tensión del material en la tabla 12-3 es de 36 kpsi.

$$\tau_{xy} = \frac{P}{A_{fusión}} = \frac{P}{2Lw} = \frac{16\,800}{2(4)(0.187)} = 11\,230 \text{ psi}$$

$$N_{fluencia} = \frac{S_{s_y}}{\tau_{xy}} = \frac{36\,000(0.577)}{11\,230} = \frac{20\,772}{11\,230} = 1.85 \qquad (e)$$

Esto es aceptable, sobre todo porque la resistencia a la fluencia es un valor mínimo garantizado.

8. Verifique la resistencia de la parte contra falla por tensión, a través de la sección en la línea central del orificio de 1 in de diámetro.

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{16\,800}{3(0.5)} = 11\,200 \text{ psi}$$

$$N_{fluencia} = \frac{S_y}{\sigma_x} = \frac{36\,000}{11\,200} = 3.2 \qquad (f)$$

La pieza es segura contra la fluencia por tensión en el orificio y contra falla en la soldadura, lo cual limita el diseño. Para completar el diseño, se necesita revisar la falla por barrido y por contacto en el orificio; además, diseñar pernos precargados para sujetar la base de la T. Dichas tareas se dejan al lector.

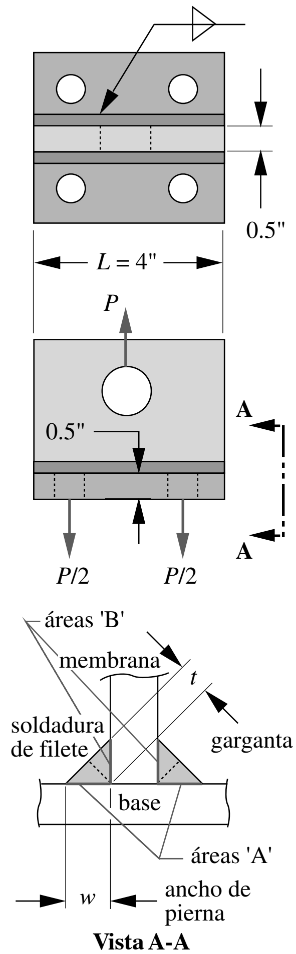


FIGURA 12-11
Ejemplos 12-1 y 12-2

12

12.6 CARGA DINÁMICA EN SOLDADURAS

Como se describió en el capítulo 4, las piezas cargadas dinámicamente fallan a niveles de esfuerzo mucho menores que las piezas cargadas estáticamente. En ese capítulo se aprendió acerca de esfuerzos de ciclo invertido, repetidos y variables (véase la figura 4-6); también se aprendió que la presencia de la componente de esfuerzo medio, junto con la componente de esfuerzo alternante, empeoran la situación, por lo que se requiere un análisis de la línea de Goodman, Gerber o Soderberg (figuras 4-42, 4-43 y 4-44). Las componentes de esfuerzo medio y alternante σ_m y σ_a, el intervalo de esfuerzo $\Delta\sigma$, la razón de esfuerzo R y la razón de amplitud A, se definieron en las ecuaciones 4.1*a* a 4.1*d*, que aquí se repiten por conveniencia.

$$\Delta\sigma = \sigma_{máx} - \sigma_{mín} \tag{4.1a}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} \tag{4.1b}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{máx} + \sigma_{mín}}{2} \tag{4.1c}$$

$$R = \frac{\sigma_{mín}}{\sigma_{máx}} \qquad\qquad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \tag{4.1d}$$

Efecto del esfuerzo medio sobre la resistencia a la fatiga en un ensamble soldado

Los ensambles soldados cargados dinámicamente se comportan de un modo sorprendentemente diferente al de las partes no soldadas, en los cuales el esfuerzo medio es irrelevante para la falla a la fatiga potencial.* La figura 12-12 muestra datos de prueba a la fatiga tanto de muestras no soldadas como soldadas. Las muestras no soldadas eran barras de acero roladas en caliente, de sección transversal rectangular, cargadas a la tensión/compresión axiales. Las muestras soldadas eran piezas cortadas de la misma barra, que después se unieron transversalmente con soldaduras con CJP a tope, usando la misma geometría integral, el mismo material y el mismo acabado de las no soldadas. Las muestras se probaron con carga axial a razones de esfuerzo R de 1/4 (variable), 0 (repetido) y -1 (ciclo invertido). Las primeras dos tienen esfuerzo medio diferente de cero y la última el esfuerzo medio igual a cero. Observe que los esfuerzos medios diferentes de cero reducen la resistencia de las piezas no soldadas, como se observa en la figura 4-16. No obstante, los datos de las piezas soldadas no muestran una diferencia significativa entre los datos de ciclo invertido y los datos con el esfuerzo medio incluido. El intervalo de esfuerzo (ecuación 4.1*a*) es por sí solo el factor determinante en la falla de ensambles soldados cargados dinámicamente, lo cual vuelve más sencillo el cálculo, en los ensambles soldados cargados dinámicamente, que el cálculo en piezas de máquinas no soldadas. Aquí no es necesario el análisis de la línea de Goodman. En cambio, el **intervalo de esfuerzo** que un ensamble soldado experimenta en un ciclo, se compara con la resistencia a la fatiga S_{fr}, obtenida de datos de prueba, en un intervalo de esfuerzo aceptable.†

¿Son necesarios los factores de corrección para la resistencia a la fatiga de ensambles soldados?

Recuerde del capítulo 4 que la resistencia a la fatiga S_f, de una pieza de acero, nunca es mayor del 50% de su resistencia última a la tensión S_{ut}; por el contrario, generalmente es mucho menor debido a factores como su acabado superficial, tamaño, tipo de carga y otros (ecuación 4.6, p. 260). Los datos que proporcionan el límite de fatiga, sin corregir de resistencia $S_{e'} = 0.5_{ut}$, vienen de la prueba de muestras de vigas giratorias con diámetro pequeño y superficies pulidas, los cuales se reportan como valores promedio. Por lo tanto, el valor $S_{e'}$ sin corregir se debe reducir por los factores mencionados para tomar en cuenta las diferencias de tamaño, acabado superficial, etcétera, entre la muestra de prueba y la pieza, así como por un factor de confiabilidad estadístico para obtener la resistencia física corregida $S_{e'}$.

---

* La especificación AISC 2005[2] establecida en la p. 16.1-400:

Programas de pruebas exhaustivos utilizando muestras de tamaño completo, corroborados por cálculos teóricos de esfuerzo, han confirmado las siguientes conclusiones generales…:

(1) El intervalo de esfuerzo y la severidad de la muesca son las variables dominantes de esfuerzo para detalles y vigas soldadas.

(2) Otras variables, como el esfuerzo mínimo, el esfuerzo medio y los esfuerzos máximos, no son significativos para efectos de diseño.

(3) Los aceros estructurales, con puntos de fluencia entre 36 y 100 kpsi (250 a 690 MPa), no presentan diferencias significativas en sus resistencias de fatiga para detalles soldados fabricados de la misma forma.

† La propagación de la grieta por fatiga y la vida de fatiga de la mayoría de los ensambles soldados es proporcional a la tercera potencia del intervalo de esfuerzo.[10]

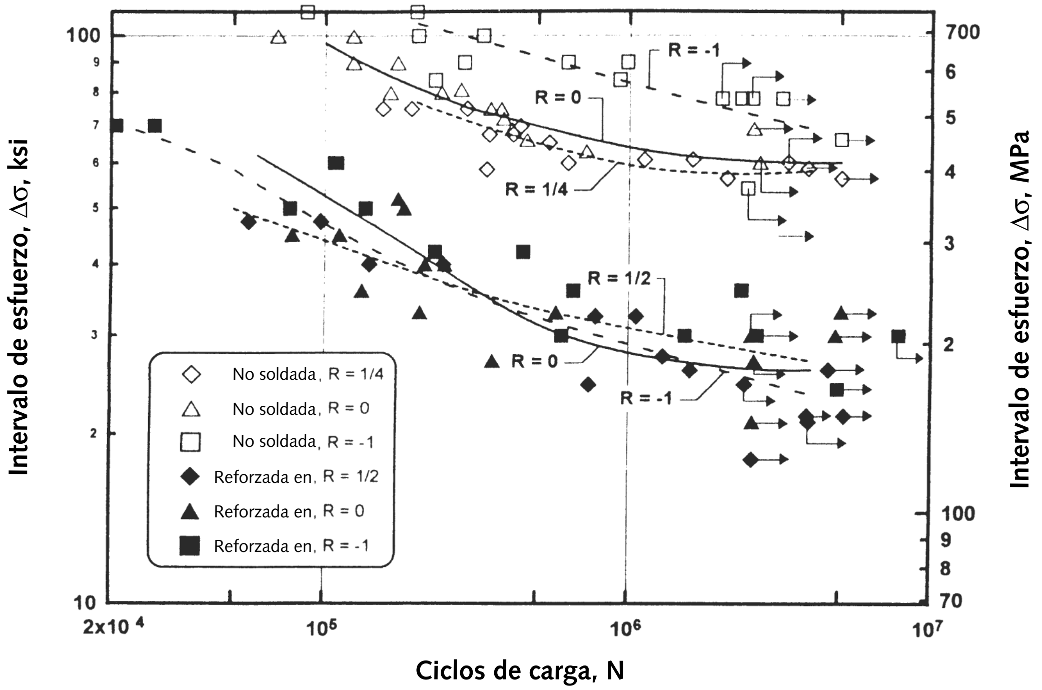


FIGURA 12-12

Datos de resistencia a la fatiga en partes no soldadas y soldadas con varias razones de esfuerzo *Adaptada de [4]*

Los datos de resistencia límite a la fatiga y de fatiga para ensambles soldados no se obtienen a partir de muestras de laboratorio pulidas, sino de ensambles soldados reales, con una amplia gama de configuraciones. Estas muestras de prueba también son grandes (piense en la dimensión de piezas de edificios y puentes) y están hechas de acero rolado en caliente con superficies rectificadas, esfuerzos residuales provenientes del proceso de rolado, y soldaduras reales con concentraciones de esfuerzos y esfuerzos residuales de tensión. **Entonces, no se deben utilizar factores para estos datos de prueba a la fatiga ni reducirlos para que coincidan con las piezas, con base en el tamaño, el acabado superficial, etcétera, ya que las piezas son similares a las muestras de pruebas en tales aspectos**.

12

Efecto de la configuración del ensamble soldado sobre la resistencia a la fatiga

La resistencia a la fatiga de un ensamble soldado también varía de acuerdo con la presencia, o ausencia, de discontinuidades en la geometría del ensamble y las junturas de soldadura, las cuales crean concentraciones de esfuerzos,* de modo que las muestras de prueba se hicieron deliberadamente con concentraciones de esfuerzos en forma de soldaduras discontinuas y adición de refuerzos, así como todas las variedades de juntas soldadas y soldaduras mencionadas. La AISC definió y probó muchas configuraciones diferentes de soldaduras; además, con base en la resistencia a la fatiga del metal base, las agrupó en ocho categorías identificadas como **A**, **B**, **B′**, **C**, **D**, **E**, **E′** y **F**, en orden decreciente de resistencia para carga dinámica. La categoría **A** es la de mayor resistencia y la **E′** la de menor resistencia a la fatiga. Observe que **F** es la resistencia al cortante del metal soldado, mientras las otras son para la resistencia a la tensión del área de fusión entre el material base y el soldado. En la referencia [2] están publicados diagramas de tales configuraciones, así como las letras correspondientes a categorías y resistencias a la fatiga para varios números de ciclos para cada categoría. La gráfica es demasiado grande como para reproducirla aquí en su totalidad; no obstante, en la figura 12-13 se muestran unos cuantos ejemplos seleccionados.

* De acuerdo con Barsom y Rolfe.[10]

Uno de los detalles más delicados de la soldadura de filete es la terminación orientada de forma perpendicular (transversal) al campo del esfuerzo cíclico aplicado. En este caso, el agrietamiento por fatiga inicia a partir del pie de la soldadura de filete y se propaga a través del metal base adyacente. De hecho, la mayoría de las fallas por fatiga relacionadas con soldadura comienza en la superficie, por lo general en el pie de la soldadura.

Observe que varios ejemplos de este capítulo tienen soldaduras de filete cargadas de esta manera.

La figura 12-13*a* muestra una parte de la categoría **A**. Observe que no tiene soldaduras. Ésta es la categoría más fuerte y es, en efecto, una referencia contra la cual se comparan las otras categorías. La relativamente baja resistencia a la fatiga de esta muestra (24 kpsi), comparada con una viga giratoria de muestra del mismo material (aproximadamente 30 kpsi), tiene que hacerlo con un tamaño más grande, superficie rectificada, esfuerzos residuales del proceso de rolado en caliente y cortante con flama de sus extremos. La figura 12-13*b* presenta soldaduras sin interrupción que corren por la longitud completa o ancho de la pieza, que corresponde a la categoría **B**. La figura 12-13*c* es similar a la 12-13*b*, pero tiene refuerzos agregados. En la dirección del esfuerzo, los refuerzos son cortos (justo del espesor del elemento reforzado), pero algo de esfuerzo fluye del miembro principal hacia el refuerzo, creando así una concentración de esfuerzos; por lo tanto, la categoría del esfuerzo se reduce a la categoría **C**. La figura 12-13*d* puede ser cualquiera de tres categorías, dependiendo del material base y de si

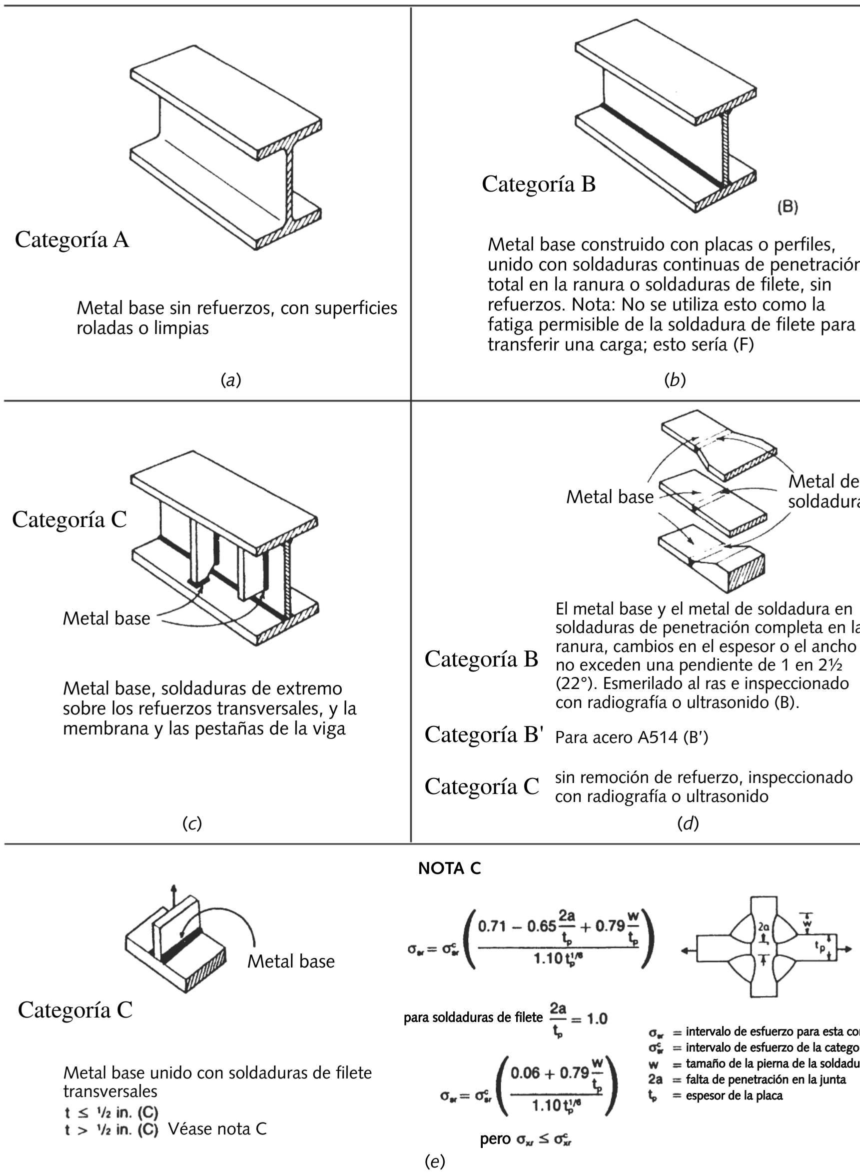


FIGURA 12-13

Categorías de resistencia del AISC para piezas soldadas sometidas a carga de fatiga *Extraído de* [2]

el refuerzo de la soldadura está esmerilado al ras. La figura 12-13*e* tiene una geometría muy diferente de la 12-13*c*, pero también es categoría **C**, considerando la **nota C** que se aplica, si el tamaño de la membrana es mayor que 0.5 in. La **nota C** también se muestra en la figura 12-13*e*. Observe el nivel de detalle en estos tipos de muestra de prueba; hay muchos más en la especificación del AISC.* El metal de la soldadura siempre es aproximadamente la categoría **F**, excepto en el caso de una soldadura con CJP transversal, la cual sería una categoría **B** o **C**, dependiendo de la eliminación del refuerzo.

En la década de 1960 se realizaron pruebas exhaustivas de ensambles soldados encargadas por el Highway Research Board.[11] En los laboratorios de dos universidades diferentes se realizaron pruebas por separado de 374 vigas de 10 pies de extensión y profundidades de cerca de 15 pulgadas, con varios detalles soldados. Los resultados de ambos laboratorios implican una correlación estadística estrecha. La figura 12-14*a* muestra datos de prueba de vigas de la categoría A y la figura 12-14*b* presenta los datos de una vigas de la categoría E. Los tres conjuntos de datos en cada gráfica corresponden a cargas de diferentes valores de esfuerzo mínimo, aunque con el mismo intervalo de esfuerzo. Todos los grupos, en conjunto, muestran que el único parámetro de esfuerzo con efecto era el intervalo de esfuerzo. Los esfuerzos máximo, medio y mínimo no fueron factores en las fallas.

Las líneas de regresión se ajustaron a los datos sobre ejes log-log. Las ecuaciones se muestran sobre las gráficas. Una tiene una pendiente de 3.372 y la otra una pendiente de 2.877. Las líneas arriba y abajo de la línea media representan desviaciones estándar de ±2, las cuales incluyen el 95% de la población. La línea inferior de la banda se interpreta como la línea de resistencia a la fatiga. A partir de los datos, se desarrollaron relaciones exponenciales de resistencia a la fatiga para ensambles soldados, en función del número de ciclos, que se muestran más adelante. La pendiente promedio de todos los datos de las categorías **A** a **E′** se redondeó a 1/3 en la ecuación de diseño 12.2*a*.

La figura 12-14*c* muestra los diagramas *S-N* de cada una de las categorías AISC de ensambles soldados, con base en los datos de prueba. **Éstos son diferentes de los diagramas *S-N* del capítulo 4 en que la ordenada muestra el intervalo de esfuerzo** $\Delta\sigma$ (identificado como *intervalo de resistencia a la fatiga* S_{fr}), **en vez del esfuerzo alternante** σ_a (denotado como *resistencia a la fatiga* S_f). **También difieren en que no muestran valores promedio de resistencia a la fatiga y, en cambio, utilizan valores que son dos desviaciones estándar por debajo del promedio.** Mientras que no son valores realmente mínimos, están cerca del mínimo porque el 95% de la población estará dentro de, más o menos, las dos desviaciones estándar del promedio, lo cual significa que sólo el 2.5% se encuentra debajo de dichos valores. **De modo que no es necesario aplicar factores de confiabilidad para reducirlos más, a menos que uno quiera tener más del 95% de nivel de confianza en los datos;** pero, entonces, se usa la tabla 12-4.

Todas las categorías, con excepción de **F**, tienen la misma pendiente de 1/3 y su intersección disminuye con cada letra de categoría más alta. La categoría **F** que es para el metal de soldadura, en vez del metal base cercano a la soldadura, tiene una pendiente poco pronunciada de 1/6 y la intersección baja. Observe que las rodillas donde inicia la vida infinita también varían con la categoría: de 2E6 a más de 1E7 ciclos. Estas curvas son lineales en una gráfica log-log hasta llegar a la rodilla, de modo que se podrían ajustar a ellas ecuaciones exponenciales. Para todas las categorías, excepto **F**, el intervalo permisible de esfuerzo a la fatiga S_{fr} es

$$S_{fr} = C_{conf}\left(\frac{C_f}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \geq S_{er} \tag{12.2a}$$

donde N es el número requerido de ciclos de esfuerzo. C_F y S_{er} (*el intervalo de esfuerzo de la resistencia en el límite de fatiga*) se muestran en las tablas 12-15*a* y *b* para unidades estadounidenses y del SI, respectivamente. Estos valores son para aceros rolados en caliente con resistencias de fluencia por tensión de 36 a 110 kpsi.

Tabla 12-4
Factores de confiabilidad contra $S_d = 0.08\ \mu$ al 95%

% de confiabilidad	C_{conf}
50	1.152
90	1.033
95	1.000
99	0.938
99.9	0.868
99.99	0.809
99.999	0.759

Tabla 12-5a[2]
Coeficiente estadounidense C_f y S_{er} de la ecuación 12.2

Categoría del AISC	C_f ips	S_{er} kpsi
A	250 E08	24.0
B	120 E08	16.0
B'	61 E08	12.0
C	44 E08	10.0
D	22 E08	10.0
E	11 E08	4.5
E'	3.9 E08	2.6
F	150 E10	8.0

Tabla 12-5b[2]
Coeficiente C_f y S_{er} de la ecuación 12.2 (unidades del SI)

Categoría del AISC	C_f SI	S_{er} MPa
A	170 E10	165
B	83 E09	110
B'	42 E09	82
C	30 E09	69
D	15 E09	48
E	7.6 E09	31
E'	2.7 E09	18
F	10 E12	55

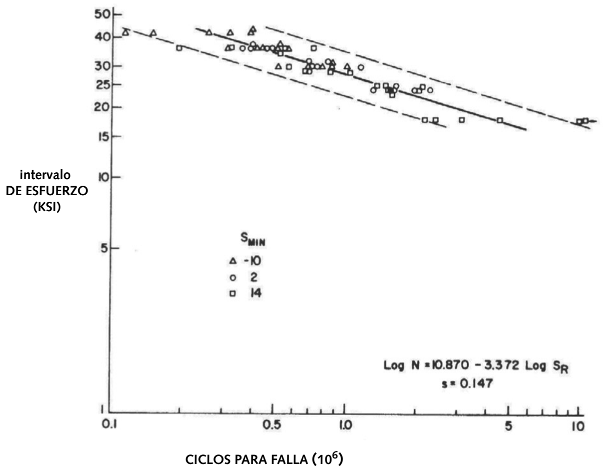
* La *especificación AISC de construcciones de acero estructural* se descarga gratis de www.aisc.org

Para la categoría **F**, la cual es para el esfuerzo cortante en el metal de la soldadura, se convierte en

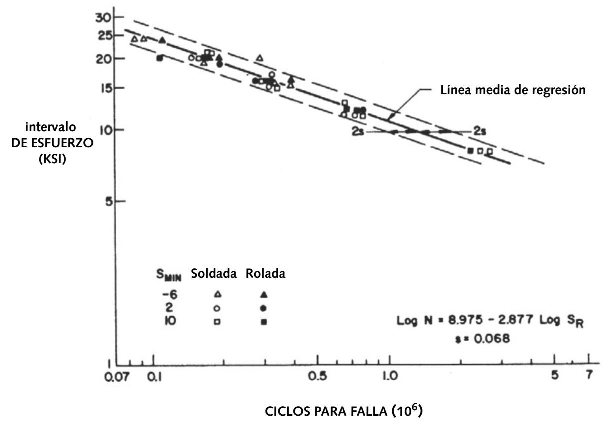
$$S_{frs} = C_{conf}\left(\frac{C_f}{N}\right)^{\frac{1}{6}} \geq S_{ers} \tag{12.2b}$$

y C_F y S_{ers} de la categoría **F** también se presentan en las tablas 12-5*a* y *b*. C_{conf} está dado en la tabla 12-4.*

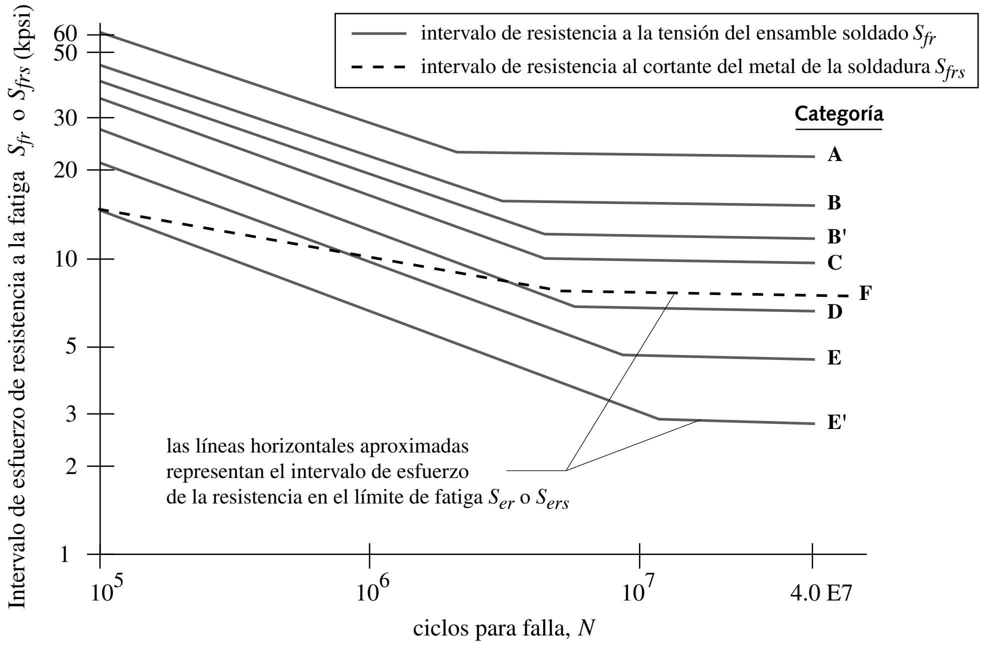
* El Welding Research Council[2] recomienda que el exponente de la ecuación 12.2*b* sea 1/5 en vez de 1/6.



(*a*) Datos experimentales de la categoría A[11]



(*b*) Datos experimentales de la categoría E [11]



(*c*) Líneas de regresión ajustadas a los datos experimentales de resistencia a la fatiga de todas las categorías

FIGURA 12-14

Datos experimentales de resistencia a la fatiga para piezas soldadas,[11] en las categorías del AISC,[2] y para metal de soldadura[3]

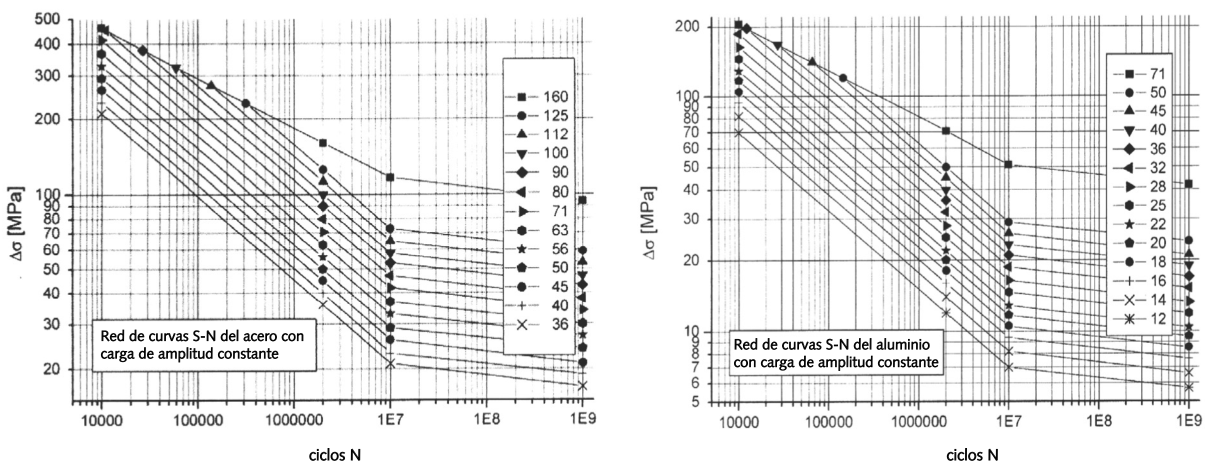
Los valores en las tablas 12-5 se pueden reducir con un factor de tres para emplearlo en aluminio. Para utilizar estos datos de resistencia, se calcula el intervalo de esfuerzo aplicado $\Delta\sigma$ o bien, $\Delta\tau$ y se determina el factor de seguridad para el área de fusión en tensión o al cortante para el metal de la soldadura, respectivamente, como:

$$N_{fr} = \frac{S_{fr}}{\Delta\sigma} \quad \text{o bien,} \quad N_{frs} = \frac{S_{frs}}{\Delta\tau} \tag{12.3}$$

¿Existe un límite de resistencia a la fatiga para las soldaduras?

Hasta hace poco se suponía que una vez que se alcanzaba la rodilla de la curva, en la figura 12-4*c*, la curva permanecía horizontal para ciclos infinitos en el caso del acero y otros cuantos materiales como el titanio. Ello permitía usar ese valor como un límite de resistencia a la fatiga para vida infinita, como se hizo en el capítulo 4 para piezas no soldadas. Investigaciones más recientes[12] indican que la resistencia a la fatiga de soldaduras continúa declinando más allá de la rodilla.

La figura 12-15 muestra curvas de fatiga para un intervalo de esfuerzo, tanto del acero como del aluminio de la referencia 12. Los datos son resultado de pruebas exhaustivas realizadas por el Welding Research Council (WRC), sobre ensambles soldados con varias geometrías. El WRC definió categorías similares a las de la AISC, presentadas en la figura 12-13, salvo que el WRC tiene mucho más categorías que se denotan con números en vez de letras. Véase la referencia 12 para sus definiciones. Los números asignados a los símbolos en la figura 12-15 se refieren a la resistencia de ese número de categoría de soldadura del WRC, tomada a 2 millones de ciclos. La rodilla del acero y el aluminio en tensión se tomó en 1E7 ciclos, pero los datos de fatiga por cortante (no mostrados) tienen la rodilla en 1E8 ciclos. Estas figuras muestran la resistencia a la fatiga en un intervalo de esfuerzo por tensión, para los ensambles soldados de acero y aluminio que declinan con ciclos de esfuerzo más allá de la rodilla de la curva, pero con una pendiente mucho menor. El exponente de la ecuación de la curva se vuelve 1/22 más allá de la rodilla.[12] La figura 12-14 también refleja este hecho, pero mostrando esas líneas con una pequeña pendiente negativa más allá de la rodilla. También se evita llamar resistencia límite de fatiga al valor en la rodilla, en cambio se denominará S_{ers} como a resistencia en el límite de fatiga.



(*a*) Curvas del intervalo de esfuerzo en ensambles soldados de acero

(*b*) Curvas de intervalo de esfuerzo de ensambles soldados de aluminio

FIGURA 12-15

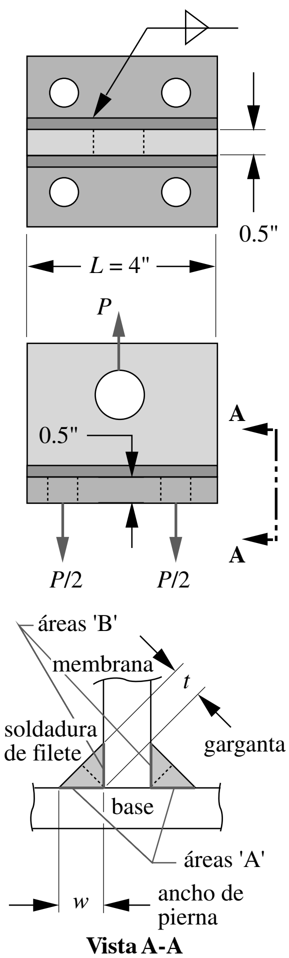
Datos experimentales de resistencia a la fatiga para un intervalo de esfuerzo de tensión en piezas soldadas de varias categorías, según el Welding Research Council[12]

¿Falla por fatiga en carga de compresión?

Otra diferencia entre piezas no soldadas y soldadas sometidas a fatiga tiene que ver con el esfuerzo residual de tensión en las soldaduras. Recuerde que en el capítulo 4 se estableció que las fallas por fatiga se deben exclusivamente al esfuerzo de tensión oscilante. Las oscilaciones del esfuerzo de compresión pueden ignorarse sin problema. De hecho, en el capítulo anterior se vio cómo utilizar los esfuerzos residuales de compresión en la zona sujetada de pernos cargados para "ocultar" parcialmente los esfuerzos oscilantes de tensión, aplicados en el perno cargado a la tensión. Se consideró como un amigo al esfuerzo de compresión en las partes **no soldadas**, cargadas dinámicamente. Sin embargo, cuando se incorporan soldaduras en una pieza, esto ya no es válido. **El esfuerzo oscilante de compresión también suele causar grietas por fatiga**. ¿Cómo ocurre lo anterior?

La respuesta es **el esfuerzo residual de tensión**. Como ya se describió y se esquematizó en la figura 12-10, *una soldadura siempre tendrá esfuerzos residuales de tensión en el punto de fluencia del material*. Considere dos casos diferentes de carga sobre una parte soldada, cuya resistencia a la fluencia es de 50 kpsi. En el primer caso, se aplica, en la región de la soldadura, un esfuerzo oscilante de tensión que varía entre 0 y 10 kpsi. En el primer ciclo, el esfuerzo en el área de la soldadura rebasará la resistencia contra la fluencia. El material cederá localmente, mitigando algo del esfuerzo residual, en aproximadamente 10 kpsi. Cuando la carga regresa a cero, sólo tiene ahí 40 kpsi de esfuerzo residual. Los ciclos sucesivos oscilarán entre 40 y 50 kpsi de esfuerzo de tensión en ese punto, con un intervalo de esfuerzo de 10 kpsi.

Ahora se toma una muestra nueva con los mismos 50 kpsi de esfuerzos residuales en la soldadura y, luego, se modifica la carga aplicada a una compresión oscilante de cero a 10 kpsi negativos. El esfuerzo local en la soldadura va ahora de 50 a 40 kpsi de esfuerzo de tensión en cada ciclo. Como la fase de la oscilación del esfuerzo no importa, la oscilación del esfuerzo de tensión es la misma en ambos casos. Los esfuerzos aplicados de compresión cargan esa ubicación con un esfuerzo de tensión variable; después, se pueden desarrollar grietas en la soldadura. Tales grietas sólo crecen en la zona del esfuerzo residual de tensión, pero no se propagan hacia el metal base, aunque debilitan la soldadura y podrían causar una falla ahí. En el capítulo 4 se advirtió contra el esfuerzo residual por tensión permisible en piezas cargadas por fatiga. Por desgracia, la naturaleza de las soldaduras garantiza altos esfuerzos residuales de tensión. Este esfuerzo residual se logra reducir con granallado, como se vio en la sección 4.8, aunque el granallado es menos efectivo en soldaduras.



Repetida

FIGURA 12-11
Ejemplos 12-1 y 12-2

12

EJEMPLO 12-2

Diseño de una soldadura de filete cargada dinámicamente

Problema **La sección T soldada de la figura 12-11 se carga dinámicamente con esfuerzos repetidos, que van de cero a un máximo. Determine la mayor carga de tensión repetida que soporten con seguridad las soldaduras para vida infinita, con un factor de seguridad contra la fatiga N_{frs} = 1.5.**

Se proporciona **La T es de 0.5 in de espesor por 4 in de ancho; es de acero ASTM A36 rolado en caliente en ambas piernas; tiene soldaduras de filete de longitud completa de 3/16 in en ambos lados. Lo anterior coincide con el tamaño mínimo de soldadura especificado en la tabla 12-2.**

Suposiciones **Se utiliza una resistencia similar en el material del electrodo. El esfuerzo cortante en la garganta de la soldadura determina el diseño (véase el ejemplo 12-1). La carga está distribuida uniformemente a lo largo de la longitud de la soldadura.**

Solución

1. El esfuerzo repetido va de cero al valor máximo de cada ciclo. Adaptando la ecuación 4.1*a,* el intervalo $\Delta\tau$ del esfuerzo cortante es

$$\Delta\tau = \tau_{máx} - \tau_{mín} = \tau_{máx} \qquad (a)$$

2. La geometría de este ensamble soldado es similar a la de la figura 12-13*e*. La **nota C**, en la figura 12-13*e*, indica que esta pieza es una categoría **C**, con base en su espesor. Sin embargo, en tal diseño las soldaduras soportan la carga directamente. En ese caso, se debe utilizar la resistencia a la fatiga para la categoría **F**, del metal de soldadura mismo, en el área de la garganta de la soldadura. En la tabla 12-5, la resistencia en el límite de fatiga S_{ers} para el intervalo de esfuerzo por tensión, de la categoría **F** y vida infinita, es de 8000 psi.
3. Calcule un intervalo permisible de esfuerzo cortante, con base en la S_{ers} y el factor de seguridad deseado.

$$\tau_{permisible} = \frac{S_{ers}}{N_{frs}} = \frac{8000}{1.5} = 5333 \text{ psi} \qquad (b)$$

4. Como está diseñada, la pieza tiene dos soldaduras de filete de 4 in de largo y 3/16 in de pierna. Se requiere el área de la garganta para este cálculo, la cual tiene 0.707 de ancho, como la pierna. La carga para crear el esfuerzo cortante permisible con la ecuación 2.9 es, entonces,

$$P_{\text{máx}} = \tau_{permisible} A_{cortante} = 5333(2)(4)(0.187)(0.707) = 5641 \text{ lb} \qquad (c)$$

5. Verifique que el área de fusión de la soldadura, con el metal base, sea segura. El punto de falla más probable es en el pie de la soldadura. Aquí se utiliza el área de la pierna de la soldadura, en vez del área de la garganta.

$$\sigma_{pie} = \frac{P_{\text{máx}}}{A_{fusión}} = \frac{5641}{2(4)(0.187)} = 3\,770 \text{ psi} \qquad (d)$$

   La categoría *C* de soldadura tiene un $S_{er} = 10$ kpsi en la tabla 12-5*a*, lo cual da un factor de seguridad de 10 000/3770 = 2.65. La garganta de la soldadura limita el diseño, como suele ocurrir en soldaduras de filete.
6. Todavía se debe verificar que esta carga repetida no hará fallar la parte estáticamente, o a la fatiga, en ubicaciones alejadas de las soldaduras. Por ejemplo, se debería efectuar un análisis de la línea de Goodman (capítulo 4), para esta carga repetida aplicada en el área más pequeña en tensión, a través de la línea central del orificio de 1 in de diámetro, así como para barrido en las áreas cortantes del mismo orificio. Los sujetadores para fijar la base necesitan verificarse para la fatiga con la precarga aplicada (capítulo 11). Dichas tareas se dejan al lector.

12.7 CONSIDERAR LA SOLDADURA COMO UNA LÍNEA

Generalmente el diseñador intenta determinar el tamaño necesario de la soldadura (sección transversal y longitud) para soportar las cargas aplicadas. Un procedimiento consiste en suponer el tamaño de la soldadura y calcular el factor de seguridad, así como, si es inadecuado, cambiar el supuesto del tamaño de la soldadura, recalcular e iterar este proceso, hasta quedar satisfecho con el resultado. Un procedimiento más directo y algo más simple, como lo definió Blodgett,[1] es tratar a la soldadura como una línea. En lugar de esfuerzo, este cálculo nos brinda un número de carga/longitud (lb/in o N/m), el cual se convierte fácilmente al área de la sección transversal requerida de la soldadura, con el esfuerzo permisible de la soldadura de la ecuación 12.1 para cargas estáticas, o bien, las ecuaciones 12.2, para cargas dinámicas. En esencia, el área de la soldadura y la carga están normalizadas por una unidad de longitud de la garganta de la soldadura. En la tabla 12-6 se muestran los factores permisibles de carga unitaria, que relacionan el ancho *w* de la pierna de la soldadura de filete con la resistencia del electrodo para cargas estáticas. Éstos se calculan como 0.707(0.30)*Exx*[5] de modo que son para esquinas de 90°.

Tabla 12-6[5]
Fuerza unitaria estática permisible en soldaduras de filete, en función de la longitud *w* de la pierna de la soldadura.

Número de electrodo	Fuerza unitaria permisible lb/in
E60	12 730 *w*
E70	14 850 *w*
E80	16 970 *w*
E90	19 090 *w*
E100	21 210 *w*
E110	23 330 *w*
E120	25 450 *w*

La carga en una ubicación dada de la soldadura es típicamente una combinación de tensión o compresión directas, corte directo, flexión y torsión. Los esfuerzos asociados con

cada una de estas condiciones de carga se definieron en capítulos anteriores. Las ecuaciones de esfuerzo se pueden convertir a f_x = *carga* por *longitud t* de la garganta de la soldadura como sigue:

$$
\begin{aligned}
&\text{tensión o compresión directa} \qquad && f_n = \frac{P}{A_w} \\
&\text{cortante directo} && f_s = \frac{V}{A_w} \\
&\text{flexión} && f_b = \frac{M}{S_w} \\
&\text{torsión} && f_t = \frac{Tc}{J_w}
\end{aligned}
\tag{12.4}
$$

Las unidades de A_w son *área*/*longitud* = longitud. S_w es el **módulo de sección** *Z*/*longitud* = *longitud*^{2} y J_w es **el momento polar de inercia de área** *J*/*longitud* = *longitud*^{3}. Lo anterior hace a f_x = *carga* por *longitud* de la garganta de la soldadura en todos los casos.

La figura 12-16 muestra nueve configuraciones de ensambles soldados, así como las ecuaciones para calcular los factores A_w, S_w, y J_w. Su aplicación se mostrará con un ejemplo.

EJEMPLO 12-3

Diseño de un ensamble soldado cargado estáticamente

Problema **El ensamble soldado de la figura 12-17 tiene soldaduras de filete a todo alrededor, entre la tubería y las placas de los extremos. Determine el tamaño de la soldadura necesario para soportar una carga estática *P* = 2700 lb.**

Se proporciona **El material es acero estructural ASTM 36 y se utiliza un electrodo de soldadura E70xx. La tubería número 40 tiene 4.5 in de diámetro exterior por 0.24 in de espesor. La dimensión *a* = 15 in y *r* = 10 in.**

12

Suposiciones **La soldadura toma la carga directamente. El esfuerzo en la soldadura limitará el diseño, ya que las áreas de fusión de las soldaduras de filete son más grandes que las áreas de sus gargantas. Ignore el peso del brazo y la tubería.**

Solución **Véase la figura 12-17 (dorso de la siguiente página).**

1. La carga descentrada pone a la sección de la tubería y de la soldadura en una combinación de flexión, torsión y cortante directo, en la raíz de la viga en voladizo, donde el momento y el torque son máximos. Se supone que la torsión y el cortante directo están uniformemente distribuidos a lo largo de la soldadura. La ubicación del mayor esfuerzo está en la parte superior de la tubería en el pie de la soldadura (identificado como *A*), donde el esfuerzo de flexión provoca la máxima tensión. Primero se necesitan calcular las cargas unitarias sobre la soldadura, debidas a cada modo de carga; luego, obtener la suma vectorial.

2. Éste es el caso 9 de la figura 12-16, el cual muestra el factor de la componente de cortante directo $A_w = \pi d$. Úselo para obtener la carga unitaria f_s en el punto *A* debido a cortante directo.

$$f_s = \frac{P}{A_w} = \frac{P}{\pi d} = \frac{2700}{4.5\pi} = 191.0 \text{ lb/in} \tag{a}$$

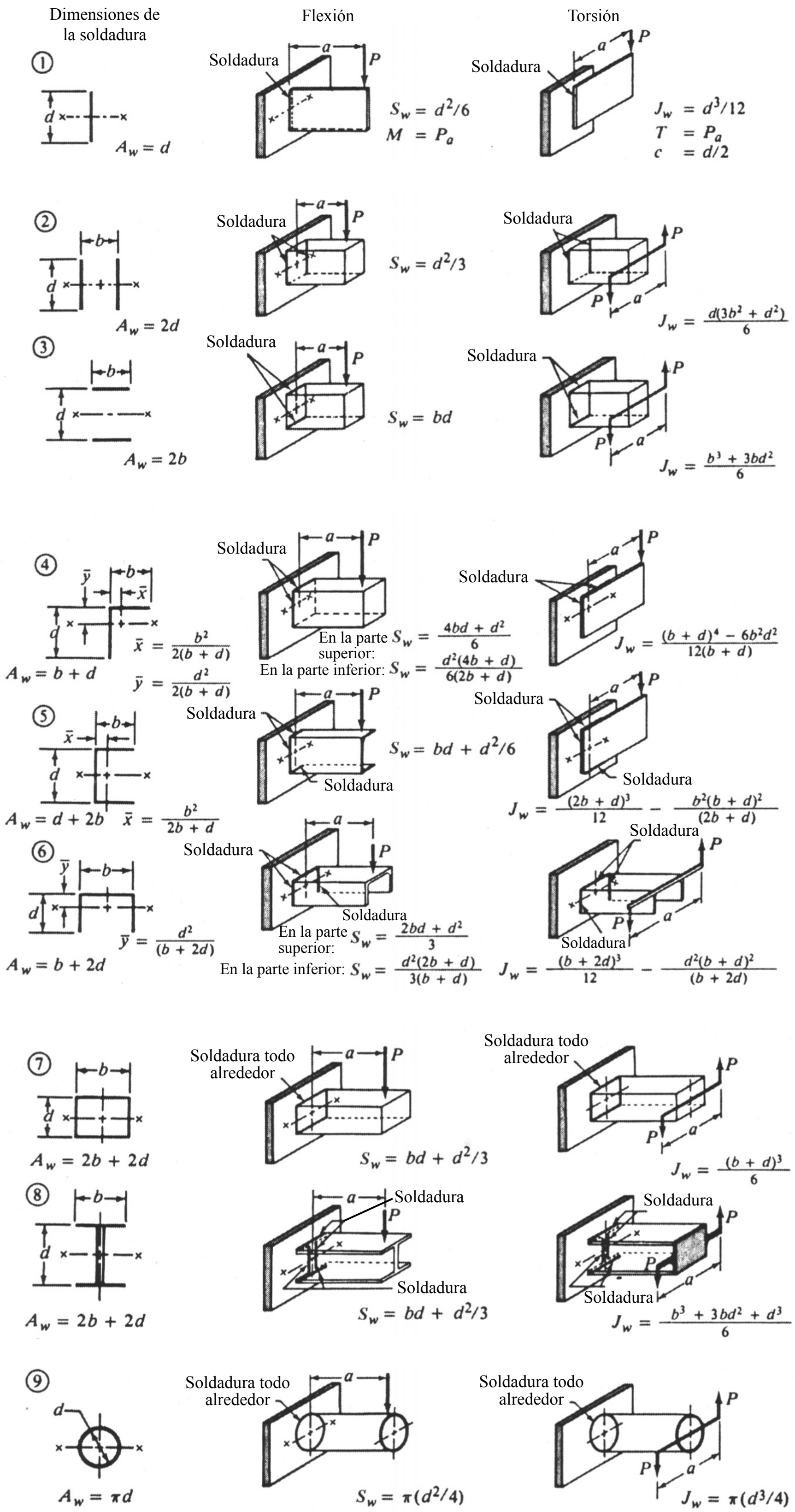


FIGURA 12-16

Factores geométricos para analizar la soldadura como una línea (reimpreso de [7])

12

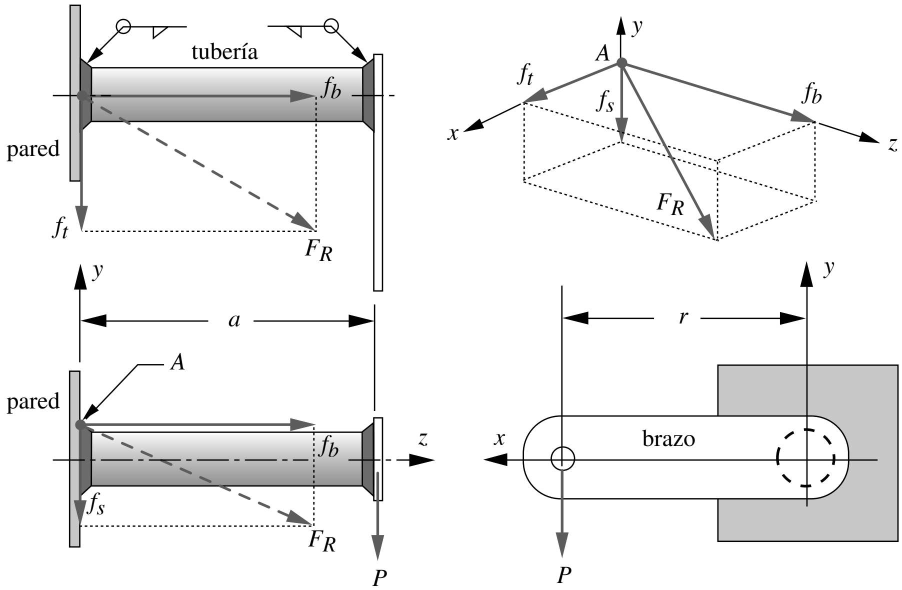


FIGURA 12-17

Ejemplos 12-3 y 12-4

3. Obtenga la carga unitaria f_b en el punto A, debida al momento de flexión mediante la S_w del caso 9.

$$f_b = \frac{M}{S_w} = \frac{Pa}{\pi d^2/4} = \frac{2700(15)}{\pi\left(4.5^2/4\right)} = 2546.5 \text{ lb/in} \tag{b}$$

4. Determine la carga unitaria f_t en el punto A, debida al momento de torsión, mediante el J_w del caso 9.

$$f_t = \frac{Tc}{J_w} = \frac{Pr\,d/2}{\pi d^3/4} = \frac{2700(10)(4.5/2)}{\pi\left(4.5^3/4\right)} = 848.8 \text{ lb/in} \tag{c}$$

5. Calcule la magnitud de la fuerza resultante en el punto A (la carga máxima en la soldadura).

$$\left|F_R\right| = \sqrt{f_s^2 + f_b^2 + f_t^2} = 2691 \text{ lb/in} \tag{d}$$

6. Ésta es la carga por pulgada de soldadura. El área de la garganta de una pulgada lineal de soldadura es igual a la dimensión de la garganta, de modo que si se hace el esfuerzo en la garganta, igual al valor permisible de la ecuación 12.1, se emplea esta carga unitaria y se calcula el área necesaria para alcanzar ese esfuerzo permisible, se definirá la dimensión requerida de la garganta. A partir de la ecuación 12.1, un electrodo E70 tiene un esfuerzo permisible de 0.30(70 000) = 21 000 psi.

$$t = \frac{\left|F_R\right|}{\tau_{permisible}} = \frac{2691 \text{ lb/in}}{21\,000 \text{ lb/in}^2} = 0.128 \text{ in}^2\text{/in} \tag{e}$$

7. Ésta es la dimensión de la garganta, pero las soldaduras de filete se especifican por la dimensión de su pierna. Suponiendo una pierna de filete igual en una junta de 90°, la dimensión de la pierna será:

$$w = 1.414t = 1.414(0.128) = 0.181 \text{ in} \tag{f}$$

8. Especifique una soldadura de filete de 3/16”, lo cual satisface el tamaño mínimo especificado en la tabla 12-2 y tiene un factor de seguridad de aproximadamente 2.5, con base en la ecuación 12.1.

9. La soldadura entre la tubería y el brazo está sometida a un nivel de esfuerzo menor que en *A*, debido a que el momento de flexión es cero en el extremo del voladizo. Sólo experimenta cortante directo y cortante por torsión, lo cual representa el 32% del esfuerzo en *A*. Se utiliza aquí una soldadura de 3/16", también por consistencia de fabricación. Asimismo, éste es el espesor mínimo para dicha pared.

EJEMPLO 12-4

Diseño de un ensamble soldado cargado dinámicamente

Problema **El ensamble soldado de la figura 12-17 tiene soldaduras de filete alrededor de la tubería en las placas de cada extremo. Determine el tamaño de soldadura necesario para soportar una carga dinámica que varía entre $F_{mín} = -80$ lb y $F_{máx} = 600$ lb, para vida infinita con un factor de seguridad contra la fatiga $N_{fr} = 1.5$.**

Se proporciona **El material es acero estructural ASTM A36 y se maneja un electrodo de soldadura E70xx. La tubería del número 80 tiene 4.5 in de diámetro exterior por 0.337 in de grueso (3.83 in de diámetro interior). La dimensión $a = 15$ in y $r = 10$ in.**

Suposiciones **El ensamble soldado es de categoría C, aunque la soldadura podría limitarlo a categoría F.**

Solución **Véase la figura 12-17.**

1. Se ha demostrado que la falla debida a la carga dinámica, en los ensambles soldados, tan sólo depende del intervalo de esfuerzo o de la oscilación entre los valores mínimos y máximos de esfuerzo experimentados durante un ciclo.[2] El intervalo de fuerza es $F_{máx} - F_{mín} = 600 - (-80) = 680$ lb.

2. Éste es el caso 9 de la figura 12-16, el cual muestra el factor de la componente de cortante directo $A_w = \pi d$. Utilícelo para obtener la carga unitaria f_s en el punto *A*, debido al cortante directo.

$$f_s = \frac{P}{A_w} = \frac{P}{\pi d} = \frac{680}{4.5\pi} = 48.1 \text{ lb/in} \qquad (a)$$

3. Determine la carga unitaria f_b, en el punto *A*, debida al momento de flexión mediante el S_w del caso 9.

$$f_b = \frac{M}{S_w} = \frac{Pa}{\pi d^2/4} = \frac{680(15)}{\pi\left(4.5^2/4\right)} = 641.3 \text{ lb/in} \qquad (b)$$

4. Obtenga la carga unitaria f_t, en el punto *A*, debida al momento de torsión mediante el J_w del caso 9.

$$f_t = \frac{Tc}{J_w} = \frac{Pr\,d/2}{\pi d^3/4} = \frac{680(10)(4.5/2)}{\pi\left(4.5^3/4\right)} = 213.8 \text{ lb/in} \qquad (c)$$

5. Calcule la magnitud de la fuerza unitaria resultante en el punto *A*.

$$|F_R| = \sqrt{f_s^2 + f_b^2 + f_t^2} = 678 \text{ lb/in} \qquad (d)$$

Ésta es la carga por pulgada de la longitud de la soldadura.

6. En la tabla 12.2*a*, la junta de categoría **F** tiene una resistencia en el límite de fatiga al cortante S_{ers}, en el intervalo de esfuerzo, = 8000 psi. Aplique el factor de seguridad a esta resistencia para obtener el esfuerzo permisible.

$$\tau_{permisible} = \frac{S_{ers}}{N_{fr}} = \frac{8000}{1.5} = 5333 \text{ psi} \qquad (e)$$

7. El área de la garganta de una pulgada lineal de la longitud de la soldadura es igual a la dimensión de la garganta. De modo que si se hace el esfuerzo en la garganta, igual al valor permisible de la ecuación (*e*), se emplea esta carga unitaria y se calcula el área necesaria para alcanzar ese esfuerzo permisible, se definirá la dimensión requerida de la garganta.

$$t = \frac{|F_R|}{\tau_{permisible}} = \frac{678 \text{ lb/in}}{5333 \text{ lb/in}^2} = 0.127 \text{ in}^2\text{/in} \qquad (f)$$

8. Ésta es la dimensión de la garganta (in), pero las soldaduras de filete se especifican por la dimensión de su pierna. Suponiendo un filete de 45°, la dimensión de la pierna será:

$$w = 1.414t = 1.414(0.127) = 0.180 \text{ in} \qquad (g)$$

9. Especifique una soldadura de filete de 3/16” (0.187”) para obtener el factor de seguridad especificado de 1.5. Lo anterior satisface el tamaño mínimo especificado de la soldadura en la tabla 12-2.

10. La soldadura entre la tubería y el brazo está sujeta a un nivel de esfuerzo menor que el de la soldadura en *A,* debido a que el momento de flexión es cero en el extremo del voladizo. Sólo experimenta cortante directo y cortante por torsión, que es el 32% del esfuerzo en *A*. La tabla 12-2 presenta una soldadura de 3/16” para el espesor de esta pared –el mismo tamaño que en *A*, lo cual facilita la manufactura.

11. También se necesita verificar que el esfuerzo en el área de fusión, entre la soldadura y la tubería, no provoque una falla. Recuerde que sólo el intervalo del esfuerzo es de preocupación en los ensambles soldados, lo cual se debe al intervalo de la fuerza de oscilación, que aquí, de acuerdo con el paso 1, es de 680 lb. Determine el intervalo de esfuerzo normal por flexión y el intervalo de esfuerzo cortante por torsión en el punto *A,* mediante las ecuaciones 2.11*b* (p. 86) y 2.23*b* (p. 108), respectivamente.

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(Pa)c}{I} = \frac{680(15)(2.25)}{\pi\left(4.5^4 - 3.83^4\right)/64} = 2388 \text{ psi} \qquad (h)$$

$$\tau_{xz} = \frac{Tr}{J} = \frac{(Pr)c}{J} = \frac{680(10)(2.25)}{\pi\left(4.5^4 - 3.83^4\right)/32} = 796 \text{ psi} \qquad (i)$$

12. Calcule el esfuerzo máximo cortante, los esfuerzos principales y el esfuerzo de Von Mises que resultan de esta combinación de esfuerzos, empleando las ecuaciones 2.6 (p. 75) y 3.7*c* (p. 179).

$$\tau_{máx} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{2388 - 0}{2}\right)^2 + 796^2} = 1435 \text{ psi}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \tau_{máx} = \frac{2388}{2} + 1435 = 2629 \text{ psi}$$

$$\sigma_2 = 0 \qquad (j)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \tau_{máx} = \frac{2388}{2} - 1435 = -241 \text{ psi}$$

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2} = \sqrt{2629^2 - 2629(-24) + (-24)^2} = 2757 \text{ psi} \qquad (k)$$

13. Suponga que este ensamble soldado es AISC categoría **C**. La tabla 12-5*a* presenta la resistencia a la fatiga para vida infinita en un ensamble de categoría **C,** como 10 000 psi. Entonces, el factor de seguridad es:

$$N_f = \frac{S_f}{\sigma'} = \frac{10000}{2757} = 3.62 \qquad (l)$$

El material de la soldadura limita este diseño.

12.8 PATRONES DE SOLDADURAS CARGADAS EXCÉNTRICAMENTE

Los ensambles soldados se utilizan a menudo para soportar descentrados o cargas excéntricas, como en los ejemplos 12-3 y 12-4. Hay muchas otras configuraciones comunes, como las de la figura 12-16. Algunas de ellas (figura 12-18) requieren que se obtenga el centroide del patrón de soldadura. El procedimiento es el mismo que se describió en la sección 11-10 y el ejemplo 11-6, donde se usó un patrón de pernos y espigas para soportar una carga excéntrica, además de que se necesitaba su centroide. La configuración de la figura 12-18 está definida por la parte 5 de la figura 12-16. La ecuación para la ubicación del centroide del patrón de soldadura está definida ahí, así como las expresiones de las cargas unitarias debidas al cortante directo, y las cargas de flexión o torsión que dependen de la localización de la fuerza aplicada, ya sea que se encuentre dentro o fuera del plano. Esta aplicación se muestra con un ejemplo.

EJEMPLO 12-5

Diseño de un ensamble soldado cargado excéntricamente

Problema **El ensamble soldado de la figura 12-18 tiene soldaduras de filete en tres lados de la junta. Determine el tamaño necesario de la soldadura para soportar una carga estática de P = 4000 lb. Verifique también la falla por fluencia en la viga.**

Se proporciona **El material es acero estructural ASTM A36 y se emplea un electrodo de soldadura E70xx. Las placas son de 1/2” de espesor. Las dimensiones son $a = 12''$, $b = 3''$ y $d = 6''$.**

Suposiciones **Considere la soldadura como una línea. El patrón de soldadura es como el de la parte 5 de la figura 12-16. La soldadura limita el diseño como categoría F.**

Solución **Véase la figura 12-18.**

1. Determine el centroide del patrón de soldadura con la ecuación proporcionada en la figura 12-16.

$$\bar{x} = \frac{b^2}{2b+d} = \frac{3^2}{2(3)+6} = \frac{9}{12} = 0.75 \text{ in} \qquad (a)$$

2. Calcule el radio del centroide a la carga aplicada.

$$r = a + b - \bar{x} = 12 + 3 - 0.75 = 14.25 \text{ in} \qquad (b)$$

3. La junta soldada está cargada al cortante directo y también tiene un momento de torsión, con respecto a su centroide. Obtenga la carga unitaria en la soldadura debida al cortante directo.

$$f_s = \frac{P}{A_w} = \frac{P}{2b+d} = \frac{4000}{6+2(3)} = 333.3 \text{ lb/in} \qquad (c)$$

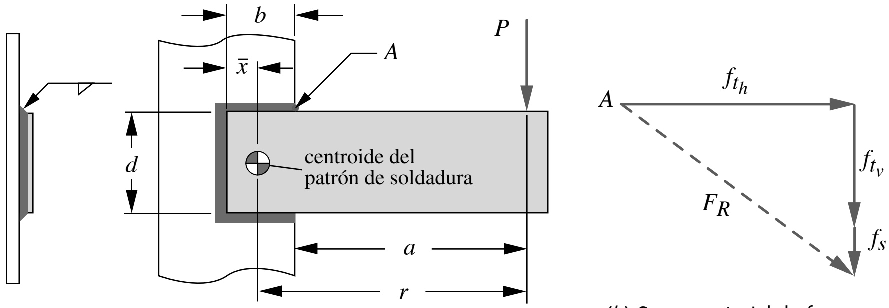
4. Por lo que a la soldadura se refiere, el momento de torsión actúa alrededor del centroide, el cual se encuentra a un radio r a partir de la carga P aplicada.

$$T = Pr = 4000(14.25) = 57\,000 \text{ lb - in} \qquad (d)$$

5. El factor geométrico de torsión de esta soldadura, contra el centroide de la figura 12-16, es:

$$J_w = \frac{(2b+d)^3}{12} - \frac{b^2(b+d)^2}{2b+d} = \frac{(12)^3}{12} - \frac{9(9)^2}{12} = 83.25 \text{ in}^3 \qquad (e)$$

12



(a) Geometría de la soldadura

(b) Suma vectorial de fuerzas unitarias en el punto A

FIGURA 12-18

Ejemplo 12-5

6. El mayor esfuerzo en la soldadura, debido al momento de torsión, ocurrirá en el punto más alejado del centroide, identificado como A en la figura 12-18. Será más sencillo si se calculan las componentes horizontal y vertical en el punto A y, luego, se resuelven en combinación con la componente vertical de cortante directo, en una fuerza unitaria resultante. Para la componente horizontal, el radio a partir del centroide es $d/2$. Para la componente vertical, el radio a partir del centroide es $r - a$.

$$f_{t_h} = \frac{T\,d/2}{J_w} = \frac{57\,000\,(6/2)}{83.25} = 2054.1 \text{ lb/in}$$

$$f_{t_v} = \frac{T(r-a)}{J_w} = \frac{57\,000\,(14.25-12)}{83.25} = 1540.5 \text{ lb/in} \tag{f}$$

$$F_R = \sqrt{f_{t_h}^2 + \left(f_{t_v} + f_s\right)^2} = \sqrt{2054.1^2 + (1540.5 + 333.3)^2} = 2780 \text{ lb/in}$$

7. El área unitaria de la garganta es, entonces,

$$t = \frac{|F_R|}{\tau_{permisible}} = \frac{2780 \text{ lb/in}}{0.30(70\,000) \text{ lb/in}^2} = 0.132 \text{ in}^2\text{/in} \tag{g}$$

usando la S_{ut} de un electrodo $E70$ y la ecuación 12.1 para $\tau_{permisible}$. La dimensión de la pierna es

$$w = 1.414t = 1.414(0.132) = 0.187 \text{ in} \tag{h}$$

8. El tamaño mínimo de soldadura recomendado para una placa de 1/2” in es de 3/16”, lo cual está de acuerdo con este número. Utilice una soldadura de filete de 3/16”.

12.9 CONSIDERACIONES DE DISEÑO PARA ENSAMBLES SOLDADOS EN MÁQUINAS

Los ensambles soldados son una elección práctica para subensambles con perfiles raros, que ubican y soportan piezas de máquinas. Sin embargo, podrían ser una elección costosa si no se diseñan adecuadamente. Una fracción significativa de su costo son los accesorios y el montaje de las piezas para mantenerlas en posición mientras se sueldan. En algunos casos, quizá sea menos costoso maquinar una parte compleja a partir de un bloque de acero con máquinas modernas de control numérico (CNC), las cuales trabajan rápidamente formas complejas definidas con sistemas CAD de modelado en tres dimensiones, así como a un costo relativamente bajo y también operan sin mayor atención, una vez que son programadas, fabricando así las piezas mientras uno duerme. La información de la herramienta CNC generada a partir de un modelo de CAD se puede enviar, por medios electrónicos, directamente al centro de maquinado y la pieza se fabrica en uno o más montajes con

escasa intervención del operador. Los ensambles soldados, por otro lado, con frecuencia son muy laboriosos. Es importante solicitar presupuestos del maquinado directo de piezas, a partir de la materia prima y del diseño inicial de los ensambles soldados.

Dicho esto, ¿qué se puede hacer en el diseño para reducir el costo de un ensamble soldado? Es posible diseñar el ensamble para que sea total o parcialmente "autofijado". Reducirá su costo el grado en que las piezas individuales, que se van a soldar, se diseñan para mantenerse juntas fácilmente con la orientación y la alineación correctas al soldarse, a diferencia del requerimiento de accesorios externos que se deben hacer para sujetarlas. Evidentemente, minimizar y reducir el número y el tamaño de soldaduras también reducirá el costo.

Sea cuidadoso acerca del uso de ensambles soldados con piezas sometidas a cargas dinámicas. Intente colocar las soldaduras en ubicaciones con los esfuerzos más bajos siempre que sea posible. El esfuerzo residual de tensión en todas las soldaduras es un peligro cuando se aplican esfuerzos oscilantes en esas regiones. Si esa situación no se puede evitar en el diseño, entonces se deben eliminar los refuerzos de soldadura y los respaldos, así como rectificar las superficies soldadas para reducir la concentración de esfuerzos en el pie y en la superficie soldada. El granallado de las soldaduras reducirá los esfuerzos residuales de tensión y mejorará la resistencia a la fatiga, aunque ello suele agregar un costo significativo. En estos casos, las piezas maquinadas a partir de bloques sólidos con frecuencia son menos costosas que un ensamble soldado y deberían analizarse como una alternativa. Si se producen grandes cantidades, el forjado brindará piezas con mejor resistencia contra la fatiga; sin embargo, el alto costo de la herramienta elimina esta opción para lotes pequeños, que son típicos en piezas maquinadas a la medida.

Si un ensamble soldado requiere maquinado después de soldarse, tal vez será necesario eliminar el esfuerzo del ensamble térmicamente antes de maquinarlo. Así se eliminan los esfuerzos residuales generalmente y se mejora la vida de la pieza. De otra manera, la pieza probablemente se distorsionará cuando el metal eliminado con el maquinado libere localmente los esfuerzos residuales donde se aplica el maquinado.

12.10 RESUMEN

Esta breve introducción al diseño de ensambles soldados quizá surge por las preguntas en la mente del diseñador y en la medida en que brinda respuestas. La soldadura es un tema complejo, que se basa en un cúmulo de investigaciones y datos experimentales. Tuvo un avance importantísimo a partir de su aplicación en la construcción de barcos, durante la Segunda Guerra Mundial. Algunos de los problemas encontrados en aquella época se describieron en los capítulos 3 y 4. Si el lector necesita diseñar ensambles soldados, se le invita encarecidamente a profundizar en el tema más allá de lo que se hace aquí. Consulte las referencias anotadas.

Uno de los resultados más interesantes de pruebas exhaustivas de fatiga, en ensambles soldados, es la independencia entre la falla y la presencia de esfuerzos medios, lo cual es un asunto muy serio en las fallas por fatiga en piezas no soldadas. Esto simplifica la tarea del diseñador de soldaduras, ya que elimina la necesidad del análisis de la línea de Goodman. El tratamiento de la soldadura como una línea simplifica enormemente la determinación del tamaño adecuado de la soldadura en varias situaciones de carga.

La existencia de códigos de diseño simplifica y complica, a la vez, la tarea del diseñador. La facilita al suministrar reglas y lineamientos de diseño. Pero también complica la situación pues esas reglas están lejos de ser fáciles, por lo que requiere mucho trabajo entenderlas cabalmente y utilizarlas de forma adecuada. La AISC proporciona lineamientos de diseño y datos de esfuerzos de falla, con base en experimentos exhaustivos, que se deberían manejar en el diseño de ensambles soldados. Un diseñador serio necesita estudiar las especificaciones, así como los códigos de la AISC y la AWS.

Los ensambles soldados funcionan mejor cuando se fabrican con acero al bajo carbono rolado en caliente y se cargan estáticamente, lo cual es típico en bastidores y estructuras de máquinas. Las piezas sometidas a esfuerzos altos o cargadas dinámicamente no son buenos candidatos para el diseño de ensambles soldados. Por ejemplo, no se encuentran cigüeñales y bielas soldadas en motores de combustión interna. Esas piezas tan cargadas, expuestas a esfuerzos dinámicos, generalmente son forjadas en caliente.

Ecuaciones importantes utilizadas en este capítulo

Esfuerzo cortante permisible en ensambles soldados cargados estáticamente (sección 12.5):

$$\tau_{permisible} = 0.30 Exx \tag{12.1}$$

Resistencia de fatiga por tensión en un intervalo de esfuerzo - Cat. A-E (sección 12.6):

$$S_{fr} = C_{confiab}\left(\frac{C_f}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \geq S_{er} \tag{12.2a}$$

Resistencia de fatiga al cortante en un intervalo de esfuerzo - Cat. F (sección 12.6):

$$S_{frs} = C_{confiab}\left(\frac{C_f}{N}\right)^{\frac{1}{6}} \geq S_{ers} \tag{12.2b}$$

Véase la tabla 12-5 para los valores de C_f, S_{er} y S_{ers}.

Factor de seguridad contra la fatiga en ensambles soldados

$$N_{fr} = \frac{S_{fr}}{\Delta\sigma} \quad \text{o bien,} \quad N_{frs} = \frac{S_{frs}}{\Delta\tau} \tag{12.3}$$

12.11 REFERENCIAS

1. **O. Blodgett**, *Design of weldments*, J. F. Lincoln Foundation, Cleveland, OH, 1963.
2. **ANSI/AISC 360-05**, *Specification for Structural Steel Buildings*, p. 16-1-400. American Institute of Steel Construction, 9 de marzo de 2005.
3. **American Welding Society**, Miami, FL.
4. **SAE Fatigue Design Handbook AE-22** 3a. ed., p. 95, Society of Automotive Engineers, Warrandale, PA, 1997.
5. **O. Blodgett**, "Stress Allowables Affect Welding Design", J.F. Lincoln Foundation, Cleveland, OH, 1998.
6. **T.R. Higgins y F.R. Preece**, "Proposed Working Stresses for Fillet Welds in Building Construction", *AISC Engineering Journal*, vol. 6, núm. 1, pp. 16-20, 1969.
7. **R.L. Mott**, *Machine Elements in Mechanical Design*, 4a. ed., p. 786, Prentice-Hall, Upper Saddle Brook, NJ, 2004.
8. **M.A. Weaver**, "Determination of Weld Loads and Throat Requirements Using Finite Element Analysis with Shell Element Models – A Comparison with Classical Analyisis", *Welding Research Supplement*, pp. 1s-11s, 1999.
9. **D.K. Miller**, "Consider Direction of Loading When Sizing Fillet Welds", *Welding Innovation,* vol. XV, núm. 2, 1998.

Tabla P12-0†
Matriz de tema/problema

12.5 Resistencia estática de soldaduras
12-1, 12-2, *12-3*

12.6 Resistencia dinámica de soldaduras
12-5, *12-7*, *12-9*

12.7 Soldadura como una línea
12-6, *12-7*, *12-8*, *12-9*

12.8 Patrones de soldadura cargada excéntricamente
12-4, *12-5*

10. **J.M. Barsom y S.T. Rolfe**, *Fracture and Fatigue Control in Structures*, 3a. ed., pp. 238, 269, Prentice-Hall, Upper Saddle Brook, NJ, 1999.

11. **J.W. Fisher y otros**, *Effect of Weldments on the Fatigue Strength of Steel Beams*, National Cooperative Highway Research Program Report 102, Highway Research Board, National Research Council, 1970.

12. *Recommendations for Fatigue Design of Welded Joints and Componentes*, WRC Bulletin 520, The Welding Research Council Inc., 2009.

12.12 PROBLEMAS

*12-1. Se realizó una soldadura a tope (CJP) en una junta de penetración total de arco hundido, entre dos secciones de una placa de acero A36 rolado en caliente. La placa tiene 10 in de ancho por media pulgada de espesor. Se utiliza un electrodo E70. ¿Qué carga de tensión puede soportar el ensamble a través de la soldadura, sin ceder en el metal base o en la soldadura?

12-2. La placa del problema 12-1 tiene soldaduras de penetración parcial en la junta, aplicadas en cada lado. Cada garganta de la soldadura tiene 1/4 de in. ¿Cuál es la carga máxima permisible de tensión a través de la soldadura?

*†*12-3.* Una ménsula *T*, similar al de la figura 12-11, es de acero A572 grado 42, tiene 1/2 in de espesor y está soldado con una soldadura de filete de 3/16 in, a lo largo de ambas esquinas interiores, usando un electrodo E70. El soporte estará sometido a una carga de tensión de 20 kip sobre la pierna de la *T*. Determine la longitud *L* mínima requerida de la ménsula, considerando soldaduras de longitud completa.

12-4. La figura P12-1 ilustra una barra soldada a una base con soldaduras de filete de 3/16 in sobre tres lados, con un electrodo E70. El material es acero A572 grado 50 rolado en caliente. ¿Cuál es su recomendación de carga estática *P* máxima que se logre aplicar con seguridad?

*12-5. La figura P12-1 presenta una barra soldada a una base con soldaduras de filete de 3/16 in sobre tres lados, con un electrodo E70. El material es acero A572 grado 50 rolado en caliente. ¿Cuál es su recomendación de carga dinámica máxima repetida, de cero a $P_{máx}$, que se logre aplicar para 10E8 ciclos con un factor de seguridad de 1.6?

*†*12-6.* La figura P12-2 muestra una ménsula soldada a una pared con una soldadura de filete, con un electrodo E70. Para la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P12-1, determine el tamaño necesario de la soldadura de filete entre el tubo y la pared para una carga estática *F* y $h = 1.2OD$, $a = 2OD$ y $l = 2.5OD$. El material de la tubería y de la pared es acero A36.

*†*12-7.* La figura P12-2 ilustra un soporte soldado a una pared con una soldadura de filete, usando un electrodo E70. Para la(s) fila(s) asignada(s) en la tabla P12-1, determine el tamaño necesario de la soldadura de filete, entre el tubo y la pared, para una carga dinámica que varía de $-0.1F$ a $0.2F$. El material de la tubería y de la pared es acero A36, $h = 1.2OD$, $a = 2OD$ y $l = 2.5OD$. Emplee un factor de seguridad de 1.5.

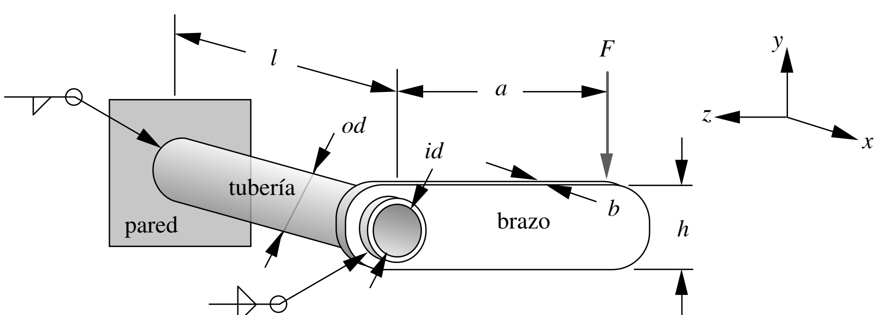


FIGURA P12-2
Problemas 12-6 a 12-7

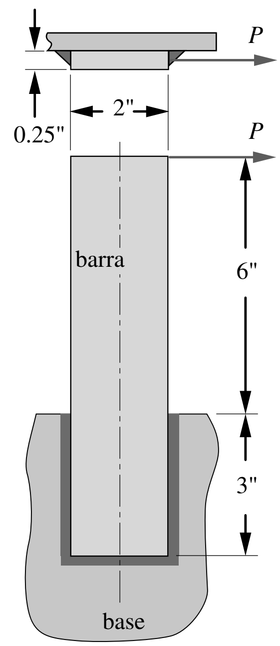


FIGURA P12-1
Problemas 12-4 y 12-5

Tabla P12-1
Datos de los problemas 12-6 a 12-7
Longitudes en pulgadas, fuerzas en kip.

Fila	*F*	*OD*	*ID*	*b*
a	2.5	3.500	3.068	1/2
b	3.8	4.500	4.026	1/2
c	4.8	5.563	5.047	1/2
d	8.0	6.625	6.065	1/2
e	9.0	8.625	7.981	3/4
f	11.0	10.750	10.020	3/4

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

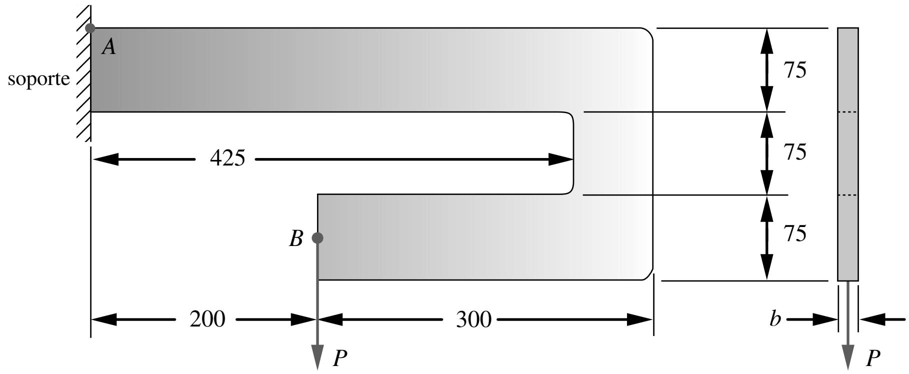


FIGURA P12-3

Problemas 12-8 y 12-9

†*12-8*. La figura P12-3 muestra una ménsula maquinado, de acero A572 grado 50 rolado en caliente con 12 mm de espesor. Está soldado a un soporte con una soldadura de filete a todo su alrededor, con un electrodo E80. Determine el tamaño necesario de la soldadura de filete entre la ménsula y el soporte para una carga estática de $P = 12$ kN.

*†*12-9*. La figura P12-3 ilustra una ménsula maquinada, de acero A572 grado 50 rolado en caliente con 12 mm de espesor. Está soldado a un soporte con una soldadura de filete a todo su alrededor, con un electrodo E90. Calcule el tamaño necesario de la soldadura de filete entre la ménsula y el soporte para una carga dinámica que varía de 0 a +3kN, con un factor de seguridad de 1.8.

12-10. Dos tirantes de acero A572 grado 42, con 8 mm de espesor por 50 mm de ancho, están soldados con soldaduras de filete en una junta traslapada mediante un electrodo E70. La carga de tensión de 45 kN sobre los tirantes es ortogonal (transversal) a las soldaduras. ¿Cuál es el tamaño de soldadura que recomienda para las dos soldaduras de longitud completa?

12-11. Dos tirantes de acero A572 grado 42, con 8 mm de espesor por 50 mm de ancho, están soldados con soldaduras de filete en una junta traslapada mediante un electrodo E70. Determine el tamaño necesario de la soldadura de filete, para una carga dinámica que varía de 0 a +12kN, con un factor de seguridad de 1.5, para vida infinita de las dos soldaduras de longitud completa.

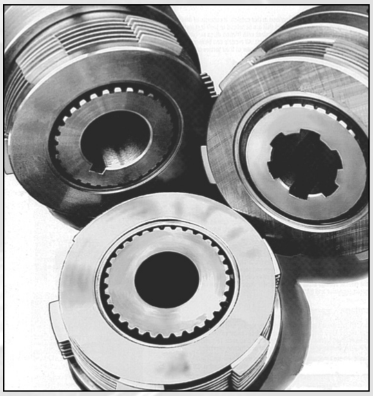
12-12. Dos tirantes de aluminio con 12 mm de espesor por 50 mm de ancho están soldados con soldaduras de filete en una junta traslapada, mediante un electrodo de aluminio. Calcule el tamaño necesario de la soldadura de filete para una carga dinámica que varía de 0 a +5kN, con un factor de seguridad de 2.0, para vida infinita de las dos soldaduras de longitud completa.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problemas en *itálicas* son problemas de diseño.

13

EMBRAGUES Y FRENOS



Un gran libro es una gran molestia.

Callimachas, 260 ac

13.0 INTRODUCCIÓN

Los embragues y los frenos básicamente son el mismo dispositivo. Ambos brindan una conexión, entre dos elementos, ya sea de fricción, magnética, hidráulica o mecánica. Si los elementos conectados pueden girar, entonces se llama embrague. Si uno de los elementos gira y el otro está fijo, entonces se trata de un freno. Por lo tanto, un embrague proporciona una conexión, que puede ser temporal, entre dos ejes giratorios; por ejemplo, el cigüeñal de un motor automotriz y el eje de entrada de su transmisión. Un freno ofrece una conexión, que puede ser temporal, entre un elemento giratorio y una estructura plana sin rotación; por ejemplo, la rueda de un automóvil y su chasis. Se puede usar el mismo dispositivo como embrague o freno fijando el elemento de salida a un eje giratorio, o bien, fijándolo a una estructura.

Los frenos y los embragues se utilizan exhaustivamente en maquinaria de producción de todos los tipos, no sólo en aplicaciones vehiculares, donde se necesita detener el movimiento y permitir, al mismo tiempo, que el motor de combustión interna continúe girando (marcha en vacío) cuando el vehículo está detenido. Los embragues también permiten el arranque con una carga inercial grande, suministrada por un motor eléctrico más pequeño de lo que se requeriría si estuviera conectado de manera directa. Los embragues se emplean comúnmente para mantener un torque constante sobre un eje y someter a tensión membranas o filamentos. Un embrague también sirve como un dispositivo de desconexión de emergencia, cuya finalidad es desacoplar el eje del motor, en caso de bloqueo de una máquina. En dichos casos, también se debe incorporar un freno para detener rápidamente el eje (y la máquina) en una emergencia. Para minimizar los daños, muchos fabricantes en Estados Unidos exigen que su maquinaria de producción se detenga en una o menos revoluciones del eje impulsor principal, si uno de sus trabajadores acciona la "palanca de pánico", que normalmente abarca la longitud de la máquina. Ésta puede ser una especificación difícil de lograr en máquinas grandes (10 a 100 pies de largo), impulsadas por motores eléctricos de muchos caballos de potencia.

Tabla 13-0 Variables utilizadas en este capítulo

Símbolo	Variable	unidades ips	unidades SI	Véase
a	longitud	in	m	Secc. 13.6
b	longitud	in	m	Secc. 13.6
c	longitud	in	m	Secc. 13.6
d	diámetro	in	m	varias
F	fuerza	lb	N	varias
F_a	fuerza aplicada	lb	N	Secc. 13.6
F_f	fuerza de fricción	lb	N	Secc. 13.6
F_n	fuerza normal	lb	N	Secc. 13.6
R_x	fuerza de reacción	lb	N	Secc. 13.6
R_y	fuerza de reacción	lb	N	Secc. 13.6
K	constante arbitraria	ninguna	ninguna	varias
l	longitud	in	m	varias
M	momento	lb-in	N-m	varias
N	número de superficies de fricción	ninguna	ninguna	Ec. 13.2
P	potencia	hp	Watts	Ej. 13-1
p	presión	psi	N/m^2	Secc. 13.4
$p_{máx}$	presión máxima	psi	N/m^2	Secc. 13.4
r	radio	in	m	varias
r_i	radio interior del recubrimiento del disco	in	m	varias
r_o	radio exterior del recubrimiento del disco	in	m	varias
T	torque	lb-in	N-m	varias
V	velocidad lineal	in/seg	m/seg	Ec. 13.4
W	razón de desgaste	psi-in/seg	Pa-m/seg	Eq. 13.4
w	ancho	in	m	varias
θ	posición angular	rad (grado)	rad (grado)	Secc. 13.6
μ	coeficiente de fricción	ninguna	ninguna	Ec. 13.2
ω	velocidad angular	rad/seg	rad/seg	Ej. 13-1

13

Para dichas modalidades, los fabricantes ofrecen combinaciones embrague-freno en el mismo paquete. Cuando se aplica la potencia, se libera el freno y se conecta el embrague, además de que se logra un sistema de falla controlada para evitar daños a la maquinaria. Los frenos de falla controlada siempre están activados (normalmente con resortes internos), a menos que se aplique la potencia para liberarlos. Por consiguiente, son “seguros contra falla”, ya que detienen la carga si la potencia falla. Los frenos de aire en camiones pesados y vagones de ferrocarril son de este tipo. La presión del aire libera el freno, el cual está normalmente activado. Si los frenos del vagón de ferrocarril o camión se aflojan y se corta la unión de la manguera de aire del motor o del carro, los frenos se activan de manera automática.

En este capítulo se describirán varios tipos de embragues y frenos disponibles comercialmente y sus aplicaciones típicas; también se analizarán la teoría y el diseño de algunos tipos específicos de embragues y frenos. La tabla 13-0 lista las variables que se usan en este capítulo, y señala la ecuación o sección donde se utilizan.

La fotografía de inicio de capítulo es cortesía de Logan Clutch Corporation, Cleveland, Ohio.

13.1 TIPOS DE FRENOS Y EMBRAGUES

Los frenos y los embragues se pueden clasificar de diferentes formas, ya sea por la *manera de funcionar*, la *manera en que transfieren la energía* entre sus elementos o la *naturaleza de su instalación*. La figura 13-1 muestra un diagrama de flujo que ilustra tales características. La manera de funcionar puede ser **mecánica**, como al oprimir el pedal del embrague de un automóvil; **neumática o hidráulica**, donde la presión de un fluido impulsa un pistón que activa o desactiva un dispositivo, como en los frenos de un automóvil; **eléctrica**, que se usa generalmente para excitar una bobina magnética; o bien, **automática**, como en un freno antimovimiento que se activa por el movimiento relativo entre los elementos.

EMBRAGUES DE CONTACTO POSITIVO Las maneras de transferir energía pueden ser de **contacto mecánico positivo** como en un embrague dentado, el cual se activa por interferencia mecánica (figura 13-2). La naturaleza de su contacto es interferencia mecánica, que se obtiene con mordazas dentadas de perfiles cuadrados o de sierra, o bien, con dientes de perfiles diversos. Estos dispositivos no son útiles para frenos (excepto como dispositivos de sujeción), debido a que no pueden disipar cantidades grandes de energía, como en el caso de un freno de fricción, mientras como embragues sólo se activan a velocidades relativamente bajas (aproximadamente 60 rpm como máximo para embragues

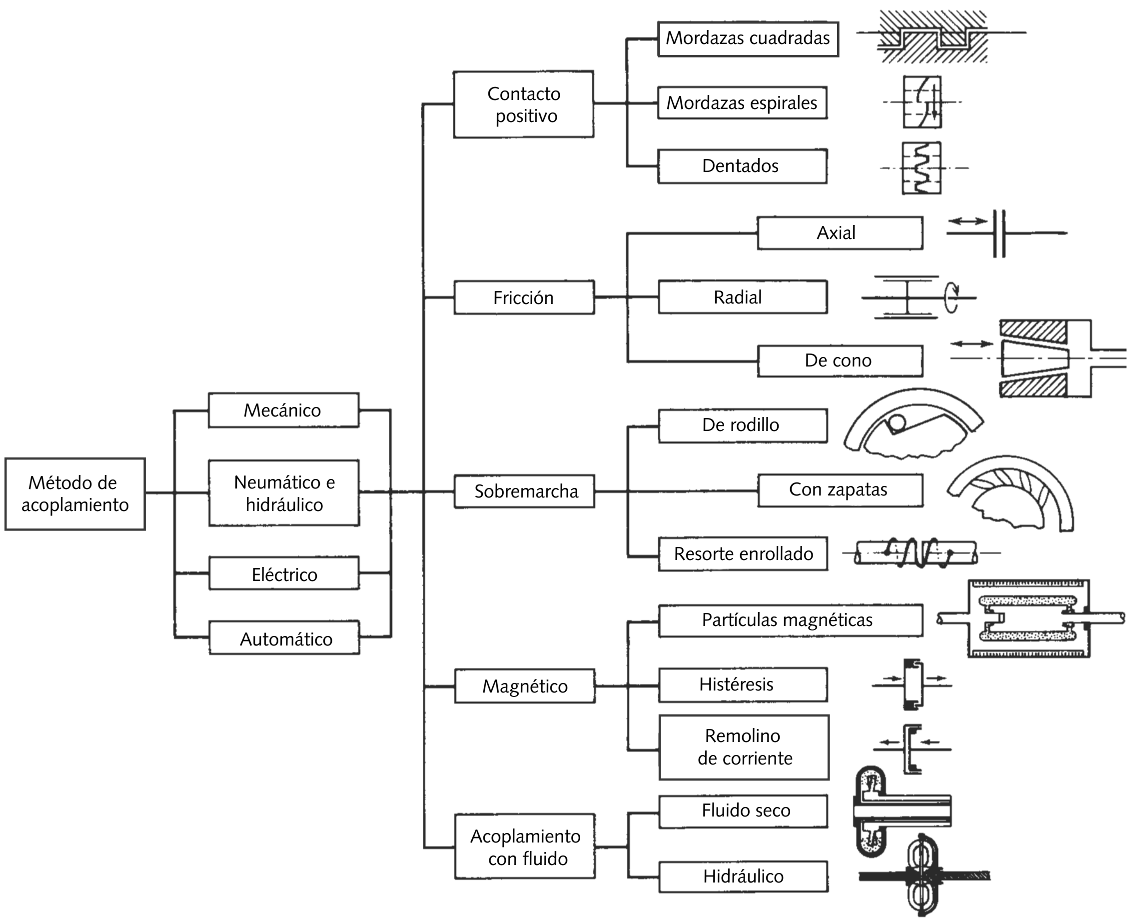


FIGURA 13-1

Clasificación de embragues y frenos *Fuente:* Z. Hinhede, *Machine Design Fundamentals: A Practical Approach*, Prentice-Hall, 1983, con autorización

13

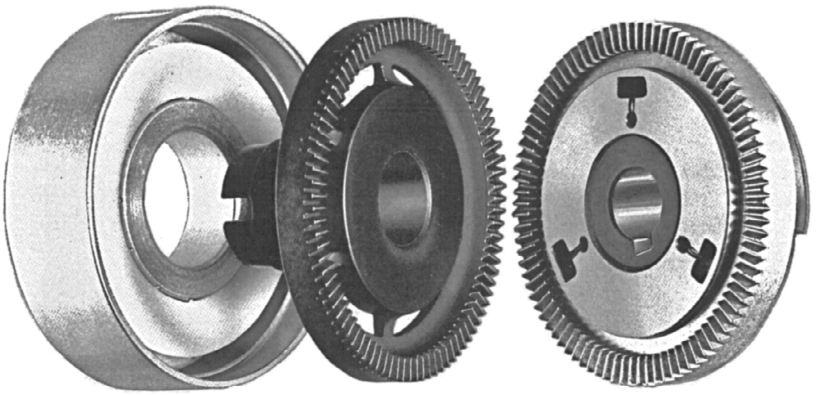


FIGURA 13-2

Embrague de contacto positivo *Cortesía de American Precision Industries, Deltran Division, Amherst, N. Y. 14228*

de mordazas y 300 rpm como máximo para embragues dentados). Su ventaja es el engranado positivo; una vez acoplados, son capaces de transmitir grandes torques sin deslizamiento. Algunas veces se combinan con embragues de fricción, los cuales arrastran los dos elementos hasta aproximadamente la misma velocidad, antes de que se engranen las mordazas o los dientes. Éste es el principio del **embrague sincronizador** de una transmisión automotriz manual.*

Embragues y frenos de fricción Son los tipos más comúnmente usados. Se presionan juntas dos o más superficies con una fuerza normal para crear un torque por la fricción. Las superficies de fricción deben ser planas y perpendiculares al eje de giro, como las mostradas en la figura 13-3, en cuyo caso la fuerza normal es axial (frenos o embragues de disco) o pueden ser cilíndricas, con la fuerza normal en dirección radial (frenos o embragues de tambor), como se indica en las figuras 13-9 y 13-10 (pp. 835 y 837), o cónicas (frenos o embragues cónicos). Los embragues cónicos tienden a agarrar o negarse a liberarse, ahora ya no se usan mucho en Estados Unidos, aunque son populares en Europa.[1]

* En general, las transmisiones automotrices normalmente usan engranes helicoidales, para funcionar de forma silenciosa, como se vio en el capítulo 9. Los engranes helicoidales de las transmisiones manuales no se pueden acoplar y desacoplar fácilmente de sus ubicaciones, debido al ángulo de la hélice. De modo que todos permanecen engranados de forma permanente, y son embragados/desembragados del eje de transmisión para aplicar una razón de engrane determinada. Cada engrane tiene un embrague sincronizador conectado a su eje. Este embrague consiste realmente en superficies de fricción cónicas que arrastran los dos elementos (el engrane y el eje), hasta una velocidad relativa cercana a cero, antes de que se acoplen los dientes de contacto positivo de su compañero. La palanca de cambios movida por el conductor desplaza estos sincronizadores de embragues hacia adentro y hacia afuera del engranaje, en vez de mover los engranes alrededor de la transmisión.

13

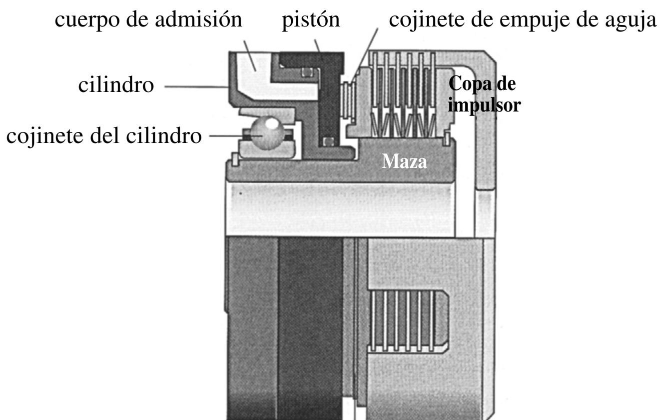


FIGURA 13-3

Embrague de discos múltiples accionado por la presión de un fluido *Cortesía de Logan Clutch Corporation, Cleveland Ohio*

Generalmente, por lo menos una de las superficies de fricción es metálica (hierro fundido o acero); la otra suele ser de un material de alta fricción y se conoce como recubrimiento. Si tan sólo existen dos elementos, habrá una o dos superficies de fricción para transmitir el torque. Una configuración cilíndrica (frenos o embragues de tambor) tiene una superficie de fricción, así como una configuración axial (frenos o embragues de disco) tienen una o dos superficies de fricción, dependiendo de si el disco está emparedado o no entre dos superficies del otro elemento. Para las mayores capacidades de torque, los frenos y embragues de disco se fabrican a menudo con varios discos para incrementar el número de superficies de fricción (véase la figura 13-3). La capacidad de un embrague o freno para disipar el calor generado por la fricción se puede volver el factor limitante de su capacidad. Los embragues de discos múltiples son más difíciles de enfriar, de modo que resultan más adecuados para aplicaciones con cargas altas, pero baja velocidad. Para cargas dinámicas de alta velocidad, se recomiendan menos superficies de fricción.[1]

Los embragues de fricción se operan en seco o con humedad; estos últimos funcionan en un baño de aceite. Mientras que el aceite reduce drásticamente el coeficiente de fricción, incrementa de manera significativa la transferencia de calor. Los coeficientes de fricción de las combinaciones de materiales de embragues/frenos suelen encontrar en el intervalo de 0.05 para el aceite, a 0.60 para los secos. Los embragues húmedos tienen con frecuencia varios discos para compensar el coeficiente de fricción más bajo. Las transmisiones automáticas de automóviles y camiones tienen muchos embragues y frenos que operan en un aceite, que circula fuera de la transmisión para efectos de enfriamiento. Las transmisiones manuales en vehículos todo terreno, como motocicletas, utilizan embragues húmedos de discos múltiples rellenos de aceite, con sellos, para proteger las superficies en fricción del polvo, el agua y la suciedad. Las transmisiones manuales de automóviles y camiones generalmente usan embragues secos, de un solo disco.

EMBRAGUES DE SOBREMARCHA También llamados embragues de una sola vía, operan automáticamente con base en la velocidad relativa de los dos elementos. Actúan sobre la circunferencia y permiten rotación relativa sólo en una dirección. Si la rotación intenta invertirse, la geometría interna del mecanismo del embrague apresa el eje y lo bloquea. Estos *embragues de bloqueo del retorno* se utilizan en un montacargas, con la finalidad de evitar que la carga caiga si se interrumpe la potencia del eje, por ejemplo. Tales embragues también se usan como mecanismos de indización. El eje de entrada puede oscilar hacia atrás y hacia delante; no obstante, la salida gira intermitentemente sólo en una dirección. Otra aplicación común de un embrague de sobremarcha es el cubo trasero de una bicicleta, que permite el libre rodamiento, cuando la velocidad de la rueda excede la de la rueda dentada impulsora.

Se usan varios mecanismos diferentes en embragues unidireccionales. La figura 13-4*a ilustra* un **embrague de zapata**, el cual tiene una carrera interior y una carrera exterior como un cojinete de bolas. Sin embargo, en vez de bolas, el espacio entre las carreras está lleno de *zapatas de retención* de forma irregular, las cuales permiten el movimiento en una dirección, pero se traban y bloquean las carreras en la otra, transmitiendo así un torque unidireccional. Se obtiene un resultado similar con bolas o rodillos atrapados en cámaras de forma cónica entre las carreras; por consiguiente, se conoce como **embrague de rodillos**. La figura 13-4*b* presenta otro tipo de embrague unidireccional o de rueda libre, llamado **embrague de resorte**, que emplea un resorte enrollado apretadamente alrededor del eje. El giro en una dirección enrolla al resorte apretadamente en el eje y transmite el torque. El giro en sentido contrario desenrolla ligeramente el resorte y le permite deslizarse.

EMBRAGUES CENTRÍFUGOS Se activan automáticamente cuando la velocidad del eje excede cierta magnitud. Los elementos de fricción son impulsados radialmente hacia afuera, contra el interior de un tambor cilíndrico, para activar el embrague. Algunas veces, los embragues centrífugos se utilizan para acoplar un motor de combustión interna con la transmisión. El motor puede funcionar en neutral (punto muerto) desacoplado de las ruedas y, cuando el acelerador se abre, el incremento de la velocidad activa automáticamente el embrague. Dichos embragues son comunes en los *go karts*. Se usan en las sierras de cadena con el mismo propósito, pero también sirven para eliminar sobrecargas que se deslizan para permitir que el motor continúe funcionando si la cadena se atasca en la madera.

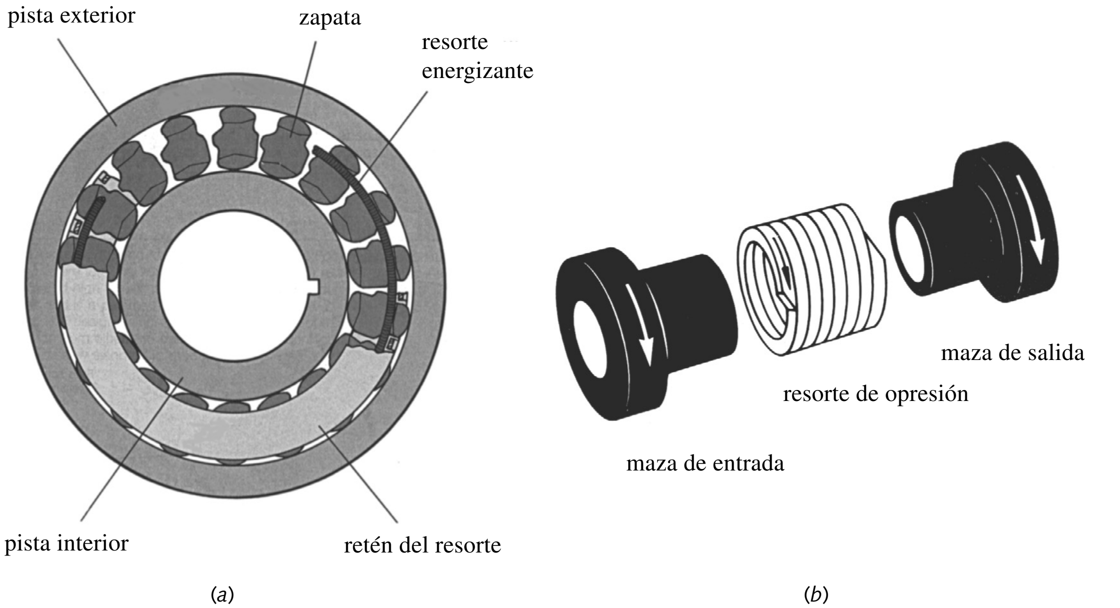


FIGURA 13-4

Embragues de rueda libre: *a*) Embrague de retención; *b*) Embrague de resorte enrollado *Cortesía de Warner Electric, South Beloit, Ill. 61080*

EMBRAGUES Y FRENOS MAGNÉTICOS Son de diferentes tipos. Los **embragues de fricción** se operan por lo general magnéticamente, como se indica en la figura 13-5*a*. Tienen muchas ventajas, como tiempos de respuesta rápidos y fáciles de controlar, así como arranque y detención suaves; están disponibles con motor prendido o apagado (falla controlada). Ambas versiones de embragues y frenos se suministran también como módulos de embrague-freno combinados.

Los **embragues y frenos de partículas magnéticas** (no se muestran) no tienen fricción de contacto directo entre el disco del embrague y la carcasa, ni fricción por desgaste del material. El espacio entre las superficies está lleno con un polvo ferroso fino. Cuando se energiza la bobina, las partículas de polvo forman cadenas a lo largo de líneas de flujo del campo magnético y acoplan el disco sin deslizamiento en la carcasa. El torque se controla mediante la variación de la corriente hacia la bobina y el dispositivo se deslizará cuando el torque aplicado exceda el valor de la corriente de la bobina, lo cual proporciona una tensión constante.

Los **embragues y frenos de histéresis magnética** (figura 13-5*b*) no tienen contacto mecánico entre los elementos giratorios; por lo tanto, su fricción es igual a cero cuando se desactivan. El rotor, llamado también taza de arrastre, se impulsa (o frena) a lo largo del campo magnético creado por el campo de la bobina (o un imán permanente). Estos dispositivos sirven para controlar el torque sobre los ejes en aplicaciones como tejedoras, donde se debe aplicar una fuerza constante a una membrana o un filamento del material conforme se enrolla. El torque en un embrague de histéresis se controla independientemente de la velocidad. Se trata de dispositivos extremadamente suaves, silenciosos y de larga vida, ya que no tienen contacto mecánico en el interior del embrague, salvo en sus cojinetes.

Los **embragues de remolino de corriente** (no se muestran) son similares en su construcción a los dispositivos de histéresis, en que no tienen contacto mecánico entre el rotor y el polo. La bobina crea un remolino de corrientes, que acoplan magnéticamente el embrague. Siempre hay algún tipo de deslizamiento en dicho embrague, ya que debe haber movimiento relativo entre el rotor y el polo para generar el remolino de corrientes

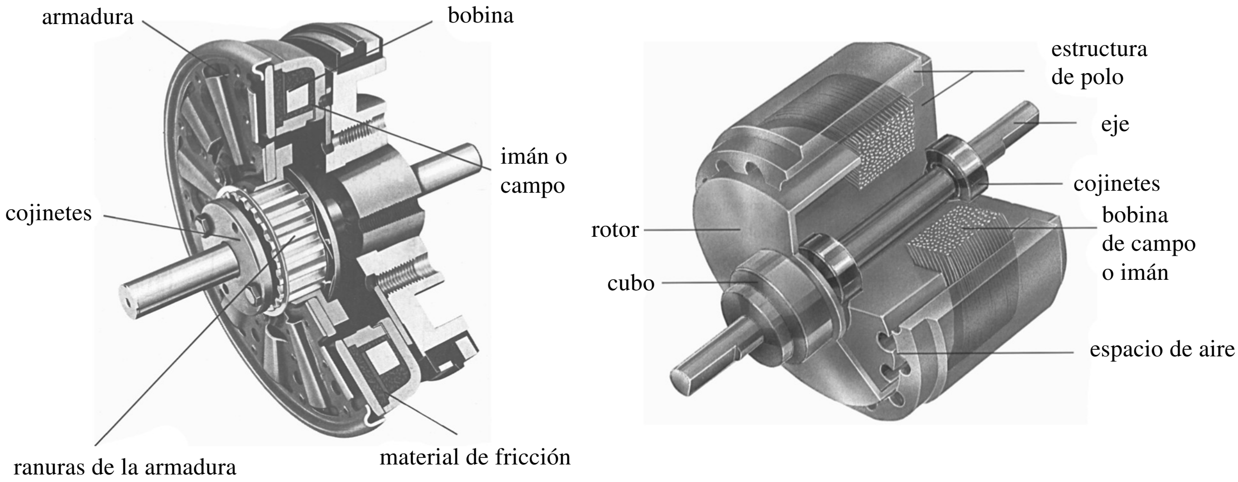


FIGURA 13-5

Embragues magnéticos: *a*) Embrague de fricción operado magnéticamente; *b*) Embrague de histéresis *Fuente: a) Cortesía de Warner Electric, South Beloit, Ill. 61080, b) Cortesía de Magtrol, Buffalo, N.Y. 14224*

que suministran la fuerza de acoplamiento, de modo que un freno de remolino-corriente no puede mantener una carga constante, tan sólo la reduce de una velocidad a otra. No obstante, tienen ventajas similares a los dispositivos de histéresis y se utilizan en aplicaciones parecidas, tales como devanadoras de bobinas o filamentos, etcétera.

Acoplamientos de fluido Transmiten torque a través de un fluido, generalmente un aceite. Un impulsor con un conjunto de aspas gira con el eje de entrada e imparte un momento angular al aceite que lo rodea. Una turbina (o rodete) con aspas similares se coloca en el eje de salida y gira por el impulso del aceite que se mueve sobre ella. El principio de operación es similar a colocar frente a frente dos ventiladores eléctricos y hacer funcionar sólo uno, cuyo flujo de aire causará que las aspas transmitan potencia a las aspas de enfrente, sin que haya contacto mecánico. Es mucho más eficiente usar aceite incompresible en un espacio confinado que los dos ventiladores en un espacio abierto, sobre todo cuando las aspas del propulsor y de la turbina tienen el perfil optimizado para bombear el aceite. Un acoplamiento por fluido ofrece arranques demasiado suaves y absorbe choques, pues el fluido simplemente se corta cuando hay una velocidad diferencial; luego, acelera (o desacelera) de forma gradual la turbina de salida para intentar igualar la velocidad del impulsor. Siempre habrá un poco de deslizamiento, lo cual significa que la turbina nunca alcanzará el 100% de la velocidad del propulsor (0% de deslizamiento); sin embargo, éste puede operar con 100% de deslizamiento cuando la turbina se atasca. Entonces, toda la energía de entrada se convertirá en calor que corta el aceite. La transferencia de calor es un punto importante cuando se diseñan acoplamientos con fluido. En los casos no confinados, a menudo se instalan aletas para mejorar la transferencia térmica. Un acoplamiento por fluido transmite el torque de entrada al eje de salida, a cualquier velocidad, incluso en modo de atascamiento, de manera que nunca estará totalmente desacoplado como en un embrague de fricción. Se tiene que detener la salida para mantenerla estacionaria cuando el eje de entrada esté girando.* El intervalo de potencia de un acoplamiento con fluido varía de acuerdo con la quinta potencia de su diámetro. Un incremento del 15% de su diámetro duplica su capacidad de potencia. Si se usa como freno, un acoplamiento con fluido sólo dará un arrastre para disminuir la velocidad de un dispositivo, como en un dinamómetro, aunque no mantiene una carga estacionaria.

* Ésta es la causa por la que usted debe mantener el pie en el freno cuando se detiene frente a un semáforo, en un automóvil con transmisión automática, si el motor está funcionando y la transmisión está en "Drive". El acoplamiento con fluido, entre el motor y la transmisión, siempre está transmitiendo torque y el vehículo se moverá lentamente hacia delante en neutral (punto muerto), a menos que se apliquen los frenos.

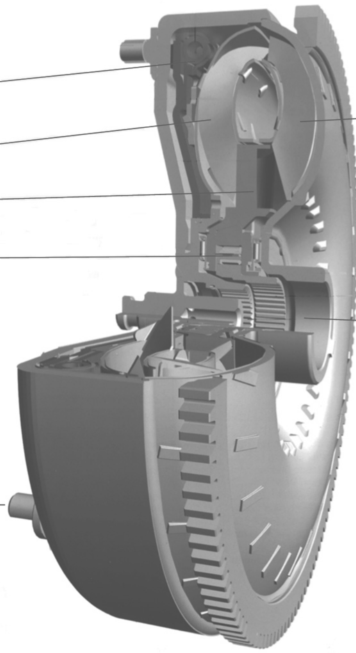


FIGURA 13-6

Convertidor de torque *Cortesía de Mannesmann Sachs AG, Schweinfurt, Germany*

Si un tercer elemento, estacionario, con un conjunto de aspas curvas, llamado **reactor** o **estator**, se coloca entre el propulsor y la turbina se transmite al fluido un momento angular adicional; por ende, el dispositivo recibe el nombre de **convertidor de torque**, como se indica en la figura 13-6. Los convertidores de torque se utilizan en los vehículos para acoplar el motor a una transmisión automática. El motor puede estar en neutral con el vehículo detenido (turbina atascada, 100% de deslizamiento). En modo de atascamiento, las aspas del propulsor y del reactor multiplican el torque en aproximadamente 2:1, del cual se dispone para acelerar el vehículo cuando se liberan los frenos y se incrementa la velocidad del motor. Conforme aumenta la velocidad del vehículo (y consiguiente la de la turbina), la turbina se aproximará a la velocidad del propulsor y la multiplicación del torque disminuirá a básicamente cero, con un bajo porcentaje de deslizamiento. Si por un momento se necesita más torque (como en un rebase), el deslizamiento entre el propulsor y la turbina se incrementará automáticamente cuando se aumenta la velocidad del motor, con la finalidad de suministrar más torque y potencia para acelerar el vehículo.

13.2 SELECCIÓN Y ESPECIFICACIÓN DE EMBRAGUES Y FRENOS

Los fabricantes de embragues y frenos especializados, como los descritos anteriormente ofrecen información exhaustiva sobre las capacidades de torque y potencia para sus modelos en catálogos, muchos de los cuales incluyen tanta información como un libro de texto. También definen procedimientos de selección y especificación, basados generalmente en el torque y la potencia esperados de la aplicación, más factores de servicio sugeridos que intentan tomar en cuenta cargas, instalación o factores ambientales diferentes de aquellos con que se probaron los productos. Por ejemplo, la capacidad nominal estándar de un fabricante, para un modelo de embrague, podría basarse en un impulsor suave como un motor eléctrico. Si la aplicación particular utiliza un motor de combustión interna de la misma potencia, habrá cargas de impulso, por lo que se necesitará elegir un embrague o freno de mayor capacidad que la dictada por la potencia media.

Lo anterior se conoce algunas veces como *desclasificación* del embrague (o freno), lo cual significa que su capacidad real en las condiciones solicitadas se considera menor que la capacidad señalada del dispositivo seleccionado.

FACTORES DE SERVICIO De acuerdo con muchos fabricantes de embragues, una causa común de problemas en los embragues es la falla del diseñador para aplicar adecuadamente los factores de servicio para tomar en cuenta las condiciones específicas de la aplicación.[1] Ello quizá se deba, en parte, a la confusión generada por la falta de estandarización en las definiciones de los factores de servicio. Un fabricante puede recomendar un factor de servicio de 1.5 para cierta condición, mientras otro recomienda 3.0 para la misma condición. Ambos factores son correctos para su diseño particular del embrague porque, en un caso, el fabricante ya podría tener un factor de seguridad intrínseco, en tanto que, en el otro, lo está incluyendo en el factor de servicio. El diseñador experimentado debería aplicar cuidadosamente los procedimientos de selección recomendados por cada fabricante para sus productos, tomando en cuenta que, por lo general, se basan en programas de pruebas exhaustivos (y costosos), así como en experiencias de servicio de campo con ese producto específico.

Un embrague ligeramente pequeño para la carga aplicada se deslizará y se sobrecalentará. Un embrague demasiado grande para la carga también es perjudicial, ya que agrega inercia innecesaria y puede sobrecargar el motor que debe acelerarlo. La mayoría de los fabricantes de piezas de máquinas son generosos en la provisión de servicios de ingeniería, para ayudar a dimensionar y especificar sus productos adecuadamente con cualquier aplicación. La preocupación fundamental del diseñador de máquinas se convierte entonces en la definición precisa de la carga y las condiciones ambientales que el dispositivo debe satisfacer, lo que podría requerir cálculos extensos y tediosos de cuestiones como los momentos de inercia de todos los elementos del tren impulsor accionado por el embrague o el freno. Los métodos de análisis de carga del capítulo 1 son aplicables a esta tarea.

UBICACIÓN DEL EMBRAGUE Cuando una máquina tiene ejes, tanto de alta como de baja velocidad (como siempre que se utiliza un reductor de velocidad, como en los estudios de caso 7 y 8), la pregunta que surge inmediatamente es si ¿se debería colocar el embrague sobre el lado de baja o de alta velocidad en el reductor de engranes? Algunas veces, la respuesta debe ver con la función. Por ejemplo, haría poco sentido colocar el embrague de un automóvil en el eje de salida de la transmisión, en vez del lado de la entrada, puesto que en este ejemplo la finalidad principal del embrague es interrumpir la conexión entre el motor y la transmisión; por lo tanto, debe ir en el lado de alta velocidad. En otros casos, no es la función la que determina la ubicación del embrague; por ejemplo, en el estudio de caso 8, donde el acoplamiento sobre cualquier eje se puede sustituir por un embrague, si se deseara desacoplar el compresor del motor. (Véase la figura D-1 en el apéndice D.) La elección es menos clara en tales situaciones, y hay dos escuelas de pensamiento en competencia.

El torque (y cualquier carga de choque) es más grande en el eje de baja velocidad que en el eje de alta velocidad por la razón de engrane. La potencia es, en esencia, la misma en ambas ubicaciones (despreciando las pérdidas en el tren de engranes), pero la energía cinética en el eje de alta velocidad es más grande por el cuadrado de la razón de engrane. Un embrague en el lado de baja velocidad debe ser más grande (por ende, más costoso) para manejar un torque mayor. Sin embargo, un embrague más pequeño y menos costoso sobre el lado de alta velocidad tiene que disipar una energía cinética mayor en esa ubicación; por lo tanto, se sobrecalienta más fácilmente. Algunos fabricantes recomiendan utilizar siempre el lado de alta velocidad para la ubicación del embrague, si la función lo permite, en vista del ahorro inicial. Otros fabricantes de embragues sugieren que el mayor costo inicial del embrague más grande de baja velocidad se compensaría, a largo plazo, por el menor costo de mantenimiento. El equilibrio de la opinión de los expertos parece inclinarse hacia la ubicación de alta velocidad, con la advertencia de que se deberían evaluar individualmente los pormenores de cada situación.[1].

13.3 MATERIALES PARA EMBRAGUES Y FRENOS

Los materiales para las piezas estructurales de embragues y frenos —como los discos o tambores— generalmente están hechos de hierro o acero fundido. Las superficies de fricción normalmente están recubiertas con un material que tiene un buen coeficiente de fricción, así como suficiente resistencia a la compresión y resistencia a la temperatura para la aplicación. La fibra de asbesto alguna vez fue el ingrediente más común en los recubrimientos de embragues o frenos, pero en muchas aplicaciones ya no se usan debido al riesgo que representa como cancerígeno. Los forros son de materiales moldeados, tejidos, sinterizados o sólidos. Los recubrimientos moldeados, por lo general, llevan resinas de polímeros para unir una variedad de rellenos de materiales en polvo o fibrosos. Algunas veces se agregan pedazos de latón o de zinc, con la finalidad de mejorar la conducción del calor y la resistencia al desgaste, así como para reducir la estriación de tambores y discos. Los materiales tejidos utilizan a menudo fibras de asbesto. Los metales sinterizados proporcionan mayores resistencias a la temperatura y a la compresión que los materiales moldeados o tejidos. Materiales como corcho, madera y hierro fundido, también se emplean en ocasiones como recubrimientos. La tabla 13-1 muestra algunas propiedades de fricción, térmicas y mecánicas de unos cuantos materiales de recubrimiento para fricción.

13.4 EMBRAGUES DE DISCO

El embrague de disco más sencillo consiste en dos discos, uno forrado con un material de alta fricción, presionados axialmente con una fuerza normal para generar la fuerza de fricción necesaria que transmita torque, como se indica en la figura 13-7. La fuerza normal se suministra mecánica, neumática, hidráulica o electromagnéticamente y, por lo general, es bastante grande. La presión entre las superficies del embrague se aproxima a una distribución uniforme si los discos son lo suficientemente flexibles. En tales casos, el desgaste será mayor en los diámetros más grandes, porque el desgaste es proporcional al producto de la presión por la velocidad (pV), en tanto que la velocidad aumenta linealmente con el radio. Sin embargo, como los discos se desgastan sobre todo hacia el exterior, la pérdida de material cambiará la distribución de la presión a un modo no uniforme y el embrague se aproximará a una condición de desgaste uniforme de pV = constante. Por consiguiente, las dos condiciones extremas son **presión uniforme** y **desgaste uniforme**. Un embrague flexible puede estar más cerca de la condición de presión uniforme cuando está nuevo, aunque tiende hacia una condición de desgaste uniforme con el uso. Un embrague rígido se aproximará más rápidamente a la condición de desgaste uniforme con el uso. Los cálculos para cada una de estas condiciones son diferentes y la suposición de desgaste uniforme da una clasificación nominal más conservadora del embrague, de modo que algunos diseñadores lo prefieren.

13

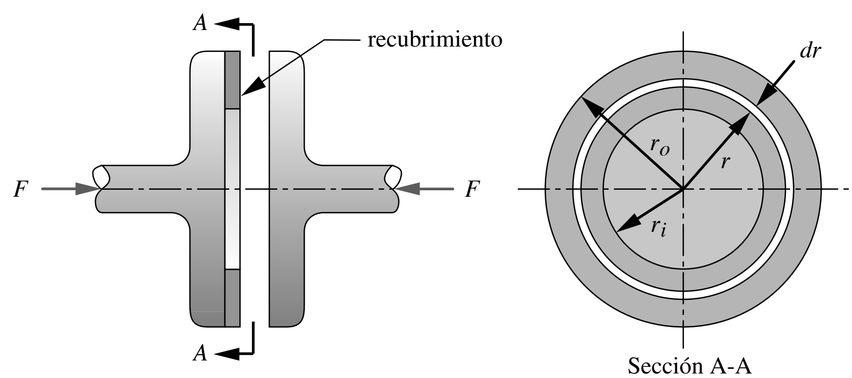


FIGURA 13-7

Embrague axial de disco con una superficie

Tabla 13-1 Propiedades de materiales comunes para forro de embragues y frenos

Material de fricción contra acero o hierro fundido	Coeficiente de fricción dinámica		Presión máxima		Temperatura máxima	
	seco	en aceite	psi	kPa	°F	°C
Moldeado	0.25–0.45	0.06–0.09	150–300	1 030–2 070	400–500	204–260
Tejido	0.25–0.45	0.08–0.10	50–100	345–690	400–500	204–260
Metal sinterizado	0.15–0.45	0.05–0.08	150–300	1 030–2 070	450–1 250	232–677
Hierro fundido o acero duro	0.15–0.25	0.03–0.06	100–250	690–720	500	260

Presión uniforme

Sobre la cara del embrague, considere un anillo de área diferencial, de ancho igual a *dr*, como se ilustra en la figura 13-7. La fuerza diferencial que actúa sobre este anillo es

$$dF = p\theta r\, dr \tag{13.1a}$$

donde r es el radio, θ es el ángulo del anillo en radianes y p es la presión uniforme sobre la cara del embrague. Para un embrague de circunferencia completa, como el de la figura 13-7, $\theta = 2\pi$. La fuerza axial F total sobre el embrague se obtiene integrando esta expresión, entre los límites r_i y r_o.

$$F = \int_{r_i}^{r_o} p\theta r\, dr = \frac{p\theta}{2}\left(r_o^2 - r_i^2\right) \tag{13.1b}$$

El torque de fricción sobre el anillo del elemento diferencial es

$$dT = p\theta\mu r^2\, dr \tag{13.2a}$$

donde μ es el coeficiente de fricción. El torque total para un embrague de un disco es

$$T = \int_{r_i}^{r_o} p\theta\mu r^2\, dr = \frac{p\theta\mu}{3}\left(r_o^3 - r_i^3\right) \tag{13.2b}$$

Para un embrague de discos múltiples con N caras en fricción:

$$T = \frac{p\theta\mu}{3}\left(r_o^3 - r_i^3\right)N \tag{13.2c}$$

Las ecuaciones 13.1*b* y 13.2*c* se combinan para obtener una expresión del torque como función de la fuerza axial.

$$T = N\mu F\,\frac{2}{3}\,\frac{\left(r_o^3 - r_i^3\right)}{\left(r_o^2 - r_i^2\right)} \tag{13.3}$$

Desgaste uniforme

Se supone que la tasa W de desgaste constante es proporcional al producto de la presión p por la velocidad V.

$$W = pV = \text{constante} \tag{13.4a}$$

Y la velocidad en cualquier punto sobre la cara del embrague es

$$V = r\omega \tag{13.4b}$$

Al combinar estas ecuaciones, y suponer una velocidad angular constante ω,

$$pr = \text{constante} = K \tag{13.4c}$$

La presión más grande $p_{máx}$ debe ocurrir en el radio r_i más pequeño.

$$K = p_{máx} r_i \tag{13.4d}$$

Combinando las ecuaciones 13.4*c* y 13.4*d*, se obtiene una expresión para la presión en función del radio *r:*

$$p = p_{máx} \frac{r_i}{r} \tag{13.4e}$$

donde la presión máxima permisible $p_{máx}$ variará con el uso del material del recubrimiento. La tabla 13-1 muestra los valores recomendados de $p_{máx}$ y los coeficientes de fricción en varios materiales para forro de embragues/frenos.

La fuerza axial *F* se determina integrando la ecuación 13.1*a*, para la fuerza diferencial sobre el anillo diferencial de la figura 13-7, con la ecuación 13.4*e* y sustituyendo *p*.

$$F = \int_{r_i}^{r_o} p\theta r\,dr = \int_{r_i}^{r_o} \theta\left(p_{máx} \frac{r_i}{r}\right) r\,dr = r_i \theta p_{máx}\left(r_o - r_i\right) \tag{13.5a}$$

El torque se obtiene integrando la ecuación 13.2*a* con la misma sustitución:

$$T = \int_{r_i}^{r_o} p\theta\mu r^2\,dr = \frac{\theta}{2}\mu r_i p_{máx}\left(r_o^2 - r_i^2\right) \tag{13.5b}$$

Se combinan las ecuaciones 13.2*a* y *b* para una expresión que relaciona el torque con la fuerza axial para el caso de desgaste uniforme:

13

$$T = N\mu F \frac{\left(r_o + r_i\right)}{2} \tag{13.6}$$

donde *N* es el número de superficies de fricción en el embrague.

A partir de las ecuaciones 13.5*a* y 13.5*b*, se demuestra que el torque máximo para cualquier radio exterior r_o se obtiene cuando el radio interior es:

$$r_i = \sqrt{1/3}\, r_o = 0.577 r_o \tag{13.7}$$

Observe que la suposición de desgaste uniforme ofrece una menor capacidad de torque para el embrague, que la suposición de presión uniforme. El mayor desgaste inicial en los radios más grandes cambia el centro de presión radialmente hacia adentro, dando como resultado un brazo más pequeño de momento para la fuerza de fricción resultante. Los embragues se suelen diseñar con base en el desgaste uniforme. Tienen mayor capacidad cuando son nuevos, pero terminan cerca de la capacidad de diseño pronosticada después de que se utilizan.

EJEMPLO 13-1

Diseño de un embrague de disco

Problema **Determine un tamaño adecuado y la fuerza requerida para un embrague axial de disco.**

Se proporciona **El embrague debe transmitir 7.5 hp a 1 725 rpm, con un factor de servicio de 2.**

Suposiciones **Utilice el modelo de desgaste uniforme. Suponga un solo disco seco con recubrimiento moldeado.**

Solución

1. El factor de servicio de 2 requiere una reclasificación del embrague por ese factor, de manera que se diseñará para 15 hp en vez de 7.5. Determine el torque requerido para esa potencia en un diseño de rpm.

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{15 \text{ hp}\left(6\,600 \ \dfrac{\text{in - lb/seg}}{\text{hp}}\right)}{1725 \text{ rpm}\left(\dfrac{2\pi}{60} \ \dfrac{\text{rad/seg}}{\text{rpm}}\right)} = 548.05 \text{ lb - in} \tag{a}$$

2. Obtenga de la tabla 13-1 el coeficiente de fricción y la presión máxima recomendada para un material moldeado seco. Use el promedio de los rangos de valores mostrados: $p_{máx} = 225$ psi y $\mu = 0.35$.

3. Sustituya la ecuación 13.7 que relaciona r_i con r_o para torque máximo en la ecuación 13.5*b*:

$$T = \pi\mu r_i p_{máx}\left(r_o^2 - r_i^2\right) = \pi\mu\left(0.577 r_o\right)p_{máx}\left(r_o^2 - \frac{1}{3}r_o^2\right) = 0.3849 r_o^3 \pi\mu p_{máx}$$

$$r_o = \left(\frac{T}{0.3849\pi\mu p_{máx}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{548.05}{0.3849\pi(0.35)(225)}\right)^{\frac{1}{3}} = 1.79 \text{ in} \tag{b}$$

4. A partir de la ecuación 13.7,

$$r_i = 0.577 r_o = 0.577(1.79) = 1.03 \text{ in} \tag{c}$$

5. La fuerza axial necesaria (a partir de la ecuación 13.5*a*) es:

$$F = 2\pi r_i p_{máx}\left(r_o - r_i\right) = 2\pi(1.034)(225)(1.792 - 1.034) = 1\,108 \text{ lb} \tag{d}$$

6. Entonces, la especificación del embrague es un solo disco con 3.6 in de diámetro exterior y 2 in de diámetro interior, recubrimiento moldeado con $\mu_{seco} \geq 0.35$, y una fuerza aplicada $\geq$ 1 108 lb.

7. Los archivos EX17-01 se encuentran en el CD-ROM.

13.5 FRENOS DE DISCO

Las ecuaciones de los embragues de disco también se aplican para los frenos de disco. Sin embargo, los frenos de disco rara vez se fabrican con los recubrimientos, cubriendo la totalidad de la circunferencia de la cara, porque se sobrecalentarían. Se debe utilizar el valor adecuado de θ para el ángulo de inclusión de las almohadillas del freno en las

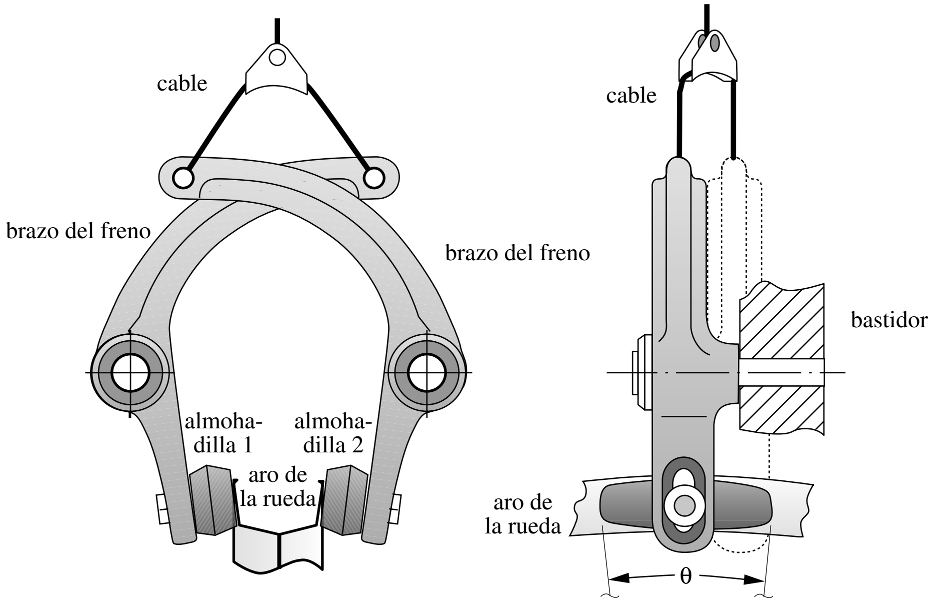


FIGURA 13-8

Frenos de disco de una bicicleta

ecuaciones 13-1 a 13-5, con la finalidad de calcular la fuerza y el torque en un freno de disco. Observe que el valor de N será de, por lo menos, 2 para el freno de disco, ya que tiene las almohadillas colocadas por pares en lugares opuestos, como se indica en la figura 13-8. Aunque los embragues a menudo se utilizan con ciclos de trabajo ligero (el tiempo de acoplamiento es una pequeña fracción del tiempo total), con frecuencia deben absorber grandes cantidades de energía en aplicaciones repetidas. Los frenos de disco de mordaza, como los de los automóviles, llevan almohadillas de fricción aplicadas tan sólo en una pequeña porción de la circunferencia del disco, dejando el resto del disco expuesto para fines de enfriamiento. Algunas veces, el disco se ventila con el aire a través de pasadizos internos para facilitar el enfriamiento. La mordaza generalmente se monta a horcajadas en el disco y tiene dos almohadillas, donde cada una fricciona un lado del disco. Esto elimina la fuerza axial y reduce las cargas axiales sobre los cojinetes. En una bicicleta, el freno común de mordaza (figura 13-8) es otro ejemplo donde el aro de la rueda es el disco y la mordaza se presiona contra una sola porción pequeña de la circunferencia. Los frenos de disco ahora se usan comúnmente en automóviles, sobre todo en las ruedas delanteras, las cuales proporcionan más de la mitad de la fuerza de frenado. Algunas ventajas de los frenos de disco sobre los de tambor son su facilidad para controlarse y su linealidad (el torque de frenado es directamente proporcional a la fuerza aplicada axial).

13.6 FRENOS DE TAMBOR

Los frenos (o embragues) de tambor aplican el material de fricción a la circunferencia de un cilindro, ya sea externa o internamente —o de ambos modos. Tales dispositivos se usan con más frecuencia como frenos que como embragues. La parte donde el material de fricción está remachado o pegado con algún adhesivo se llama zapata del freno, mientras la parte contra la cual se frota, se conoce como tambor del freno. La zapata se fuerza contra el tambor para generar el torque de fricción. La configuración más simple de un freno de tambor es el **freno de banda**, en el cual se enrolla una zapata flexible alrededor de la mayoría de la circunferencia exterior del tambor y se presiona contra él. Alternativamente, se puede(n) pivotar una(s) zapata(s) forrada(s) relativamente rígida(s), contra

la circunferencia interior o exterior (o ambas) del tambor. Si la zapata tan sólo hace contacto con una porción angular pequeña del tambor, se trata de un **freno de zapata corta**; de otra manera, es un **freno de zapata larga**. La geometría de contacto de la zapata corta contra la larga requiere un tratamiento analítico diferente en cada caso. Se examinaran los casos de frenos de tambor con zapatas externas cortas y largas, con la finalidad de ilustrar sus diferencias y características, contrastándolas básicamente con los frenos de disco. Los principios son los mismos para frenos con zapata interna.

Frenos de tambor con zapata externa

La figura 13-9*a* muestra un esquema de un freno de tambor con zapata corta externa. Si el ángulo θ subtendido por el arco de contacto entre la zapata y el tambor es pequeño (< 45°, aproximadamente), entonces se considera que la fuerza distribuida entre la zapata y el tambor es uniforme, por lo que se puede reemplazar por una fuerza concentrada F_n en el centro del área de contacto, como se observa en la figura 13-9*b*. Para cualquier presión máxima $p_{máx}$ permisible del recubrimiento (tabla 13-1, p. 831), la fuerza F_n se estima como

$$F_n = p_{máx} r\theta w \tag{13.8}$$

donde w es el ancho de la zapata del freno en la dirección z y θ es el ángulo subtendido en radianes. La fuerza de fricción F_f es

$$F_f = \mu F_n \tag{13.9}$$

donde μ es el coeficiente de fricción del material del recubrimiento de los frenos (tabla 13-1).

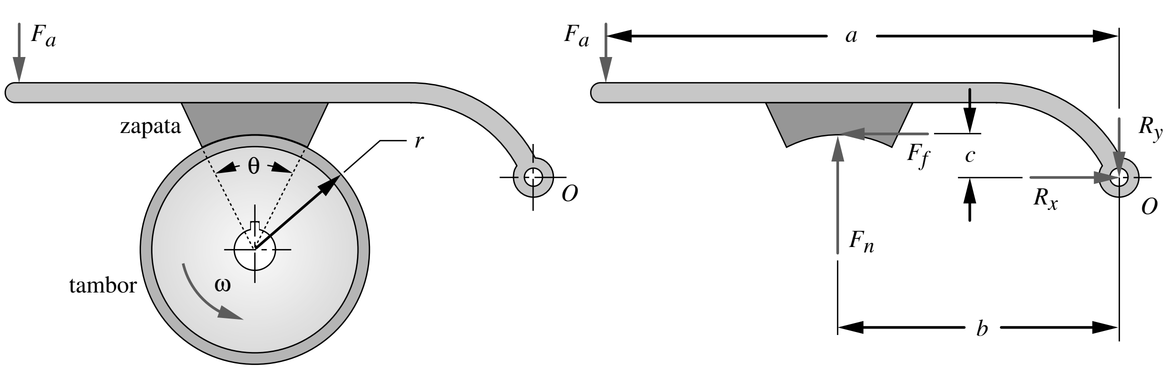
Entonces, el torque sobre el tambor del freno es

$$T = F_f r = \mu F_n r \tag{13.10}$$

Sumando los momentos en relación con el punto O en el diagrama de cuerpo libre de la figura 13-9*b* y sustituyendo la ecuación 13.9,

$$\sum M = 0 = aF_a - bF_n + cF_f \tag{13.11a}$$

$$F_a = \frac{bF_n - cF_f}{a} = \frac{bF_n - \mu cF_n}{a} = F_n \frac{b - \mu c}{a} \tag{13.11b}$$



(*a*) Montaje del freno (*b*) Diagrama de cuerpo libre

FIGURA 13-9

Geometría y fuerzas de un freno de tambor con zapata externa corta

Las fuerzas de reacción en el pivote se calculan sumando las fuerzas.

$$R_x = -F_f$$
$$R_y = F_a - F_n \tag{13.12}$$

Autoenergizar Advierta en la figura 13-9*b* que con la dirección mostrada del giro del tambor, el momento de fricción cF_f se suma al momento aplicado aF_a. Esto se conoce como **autoenergizar**. Una vez que se aplica una fuerza F_a, la fricción generada en la zapata actúa para incrementar el torque de frenado. Sin embargo, si se invierte el giro del tambor del freno mostrado en la figura 13-9*a*, el signo del término del momento de fricción cF_f de la ecuación 13.11*a* se vuelve negativo; por ende, el freno es **no autoenergizante**.

Esta característica de ser autoenergizante en los frenos de tambor es una ventaja potencial, ya que reduce la fuerza aplicada requerida comparada con un freno de disco de la misma capacidad. Los frenos de tambor suelen tener dos zapatas, una de las cuales se puede hacer autoenergizante en cada dirección o ambas en una dirección. Esta última configuración se utiliza comúnmente en frenos de automóviles para ayudar a detener el movimiento hacia delante, a expensas de la detención del movimiento hacia atrás, que por lo general es de baja velocidad.

Autobloqueo Observe en la ecuación 13-11 que si el freno es autoenergizante y el producto $\mu c \geq b$, la fuerza F_a necesaria para aplicar el freno se vuelve cero o negativa. Entonces se dice que el freno es de **autobloqueo**. Si la zapata toca el tambor, se trabará y se bloqueará. Usualmente ésta no es una condición deseable, excepto en las llamadas aplicaciones de *alto en reversa*, como se describió anteriormente en los embragues de sobremarcha. De hecho, un freno de autobloqueo puede funcionar como un embrague de sobremarcha para detener una carga que vaya hacia atrás y evitar que se regrese si falla la potencia. Estos frenos se utilizan algunas veces en los montacargas con ese propósito.

EJEMPLO 13-2

Diseño de un freno de tambor con zapata corta

13

Problema **Para la configuración de freno de tambor mostrada en la figura 13-9, determine la razón *c* / *r* que proporcionará una razón autoenergizante F_n / F_a igual a 2. También obtenga la razón *c* / *r* que causará autobloqueo.**

Se proporciona **Las dimensiones son *a* = *b* = 6, *r* = 5.**

Suposiciones **Coeficiente de fricción μ = 0.35.**

Solución* **Véase la figura 13-9.**

1. Reagrupe la ecuación 13.11 para formar la razón deseada.

$$\frac{F_n}{F_a} = \frac{a}{b - \mu c} \tag{a}$$

2. Sustituya la razón autoenergizante deseada y las dimensiones dadas, luego despeje para *c*.

$$\frac{F_n}{F_a} = 2 = \frac{6}{6 - 0.35c}$$
$$c = \frac{-3}{-0.35} = 8.571 \tag{b}$$

* Los archivos EX17-02 se encuentran en el CD-ROM

3. Forme la razón c/r para una razón autoenergizante de 2 con la geometría de los frenos indicada.

$$\frac{c}{r} = \frac{8.571}{5} = 1.71 \qquad (c)$$

4. Para que inicie el autobloqueo, F_a se vuelve cero haciendo que $F_n/F_a = \infty$ y $F_a/F_n = 0$. Se necesita la segunda de estas razones para evitar la división entre cero. Reagrupe la ecuación 13.11 para formar la razón deseada y resolverla para c.

$$\frac{F_a}{F_n} = \frac{b - \mu c}{a} = \frac{6 - 0.35c}{6} = 0$$

$$c = 17.143 \qquad (d)$$

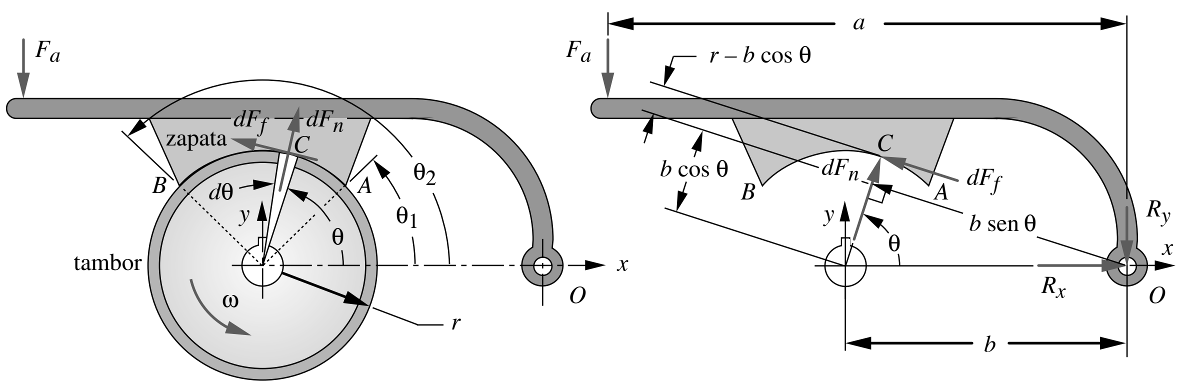
5. Forme la razón c/r para autobloqueo con la geometría del freno indicada.

$$\frac{c}{r} = \frac{17.143}{5} = 3.43 \qquad (e)$$

6. Observe que estas razones son específicas para las dimensiones del freno. La longitud a se igualó con b en este ejemplo para eliminar el efecto de la razón a/b del brazo de la palanca, la cual reduce más la fuerza aplicada F_a requerida para cualquier fuerza normal F_n.

Frenos de tambor externos con zapata larga

Si el ángulo de contacto θ, entre la zapata y el tambor de la figura 13-9, excede aproximadamente 45°, entonces la suposición de la distribución uniforme de presión en la superficie de la zapata es errónea. La mayoría de los frenos de tambor tienen ángulos de contacto de 90° o mayores, de modo que se necesita un análisis más preciso que la suposición de la zapata corta. Como la zapata real de un freno no es infinitamente rígida, sus deflexiones afectan la distribución de la presión. Un análisis que considera los efectos de la deflexión resulta muy complicado y realmente no se justifica aquí. Conforme la zapata se desgasta, se pivota alrededor del punto O en la figura 13-10 y el punto B se aleja del punto A, debido a su mayor distancia de O. La presión en cualquier punto sobre la zapata también varía en proporción a su distancia de O. Suponga que el tambor gira



(a) Ensamble del freno (b) Diagrama de cuerpo libre y dimensiones

FIGURA 13-10

Geometría y fuerzas en un freno de tambor externo con zapata larga

a velocidad constante y que el desgaste es proporcional al trabajo realizado por la fricción, es decir, al producto pV. Entonces, en cualquier punto arbitrario sobre la zapata, como el C de la figura 13-10, la presión normal p es proporcional a su distancia del punto O.

$$p \propto b \operatorname{sen}\theta \propto \operatorname{sen}\theta \tag{13.13a}$$

Como la distancia b es constante, la presión normal en cualquier punto es justamente proporcional al sen θ. Si se denota por K la constante de proporcionalidad,

$$p = K \operatorname{sen}\theta \tag{13.13b}$$

Si la presión máxima permisible para el material del recubrimiento es $p_{máx}$ (tabla 13-1, p. 831), la constante K se define como

$$K = \frac{p}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \tag{13.13c}$$

donde $\theta_{máx}$ es más pequeña que θ_2 y que 90°. Así,

$$p = \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \operatorname{sen}\theta \tag{13.13d}$$

La ecuación 13.13*d* define la presión normal en cualquier punto sobre la zapata y varía conforme lo hace sen θ, ya que $p_{máx}$ y θ_2 son constantes para cualquier freno específico. Por lo tanto, la fuerza de fricción es pequeña con θ pequeña, es óptima en $\theta = 90°$ y disminuye en ángulos mayores de 90°. Se gana poco utilizando $\theta_1 < 10°$, o bien, $\theta_2 > 120°$.

Para obtener la fuerza total en la zapata, la función de la presión se debe integrar para el rango angular de la zapata. Considere el elemento diferencial $d\theta$ de la figura 13-9. Sobre él actúan dos fuerzas diferenciales, dF_n y dF_f. Éstas tienen sus respectivos brazos de momento, con respecto al punto O iguales a b senθ y $r - b$ cosθ, como se indica en la figura 13-10*b*. Integrando para obtener sus momentos con respecto a O para la superficie total, para el momento debido a la fuerza normal, da como resultado:

$$M_{F_n} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} pwr\, d\theta\, b \operatorname{sen}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} wrb\, p \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} wrb \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$M_{F_n} = wrb \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \left[\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{4}(\operatorname{sen}2\theta_2 - \operatorname{sen}2\theta_1) \right] \tag{13.14a}$$

donde w es el ancho del tambor en la dirección z y las otras variables son como las definidas en la figura 13-10. Para el momento debido a la fuerza de fricción:

$$M_{F_f} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu pwr\, d\theta\, (r - b\cos\theta)$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu wr \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \operatorname{sen}\theta (r - b\cos\theta)\, d\theta$$

$$M_{F_f} = \mu wr \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \left[-r(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) - \frac{b}{2}(\operatorname{sen}^2\theta_2 - \operatorname{sen}^2\theta_1) \right] \tag{13.14b}$$

13

Sumando los momentos en relación con el punto *O*,

$$F_a = \frac{M_{F_n} \mp M_{F_f}}{a} \tag{13.14c}$$

donde el signo de arriba es para un freno autoenergizante y el de abajo para un freno autodesenergizante. El autobloqueo únicamente ocurre si el freno es autoenergizante y $M_{F_f} > M_{F_n}$.

El torque para el freno se calcula integrando la expresión del producto de la fuerza de fricción F_f por el radio del tambor *r*.

$$T = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu p w r \, d\theta \, r$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu w r^2 \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$T = \mu w r^2 \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right) \tag{13.15}$$

Las fuerzas de reacción R_x y R_y se determinan sumando las fuerzas en las direcciones *x* y *y* (véase la figura 13-10*b*):

$$R_x = \int \cos\theta \, dF_n + \int \operatorname{sen}\theta \, dF_f$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} wrp \cos\theta \, d\theta + \mu \int_{\theta_1}^{\theta_2} wrp \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} wr \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta + \mu \int_{\theta_1}^{\theta_2} wr \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta$$

$$R_x = wr \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \left\{ \begin{array}{l} -\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_2}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{2} \right) \\ + \mu \left[\dfrac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) - \dfrac{1}{4}\left(\operatorname{sen}2\theta_2 - \operatorname{sen}2\theta_1\right) \right] \end{array} \right\} \tag{13.16a}$$

$$R_y = \int \cos\theta \, dF_f + \int \operatorname{sen}\theta \, dF_n - F_a$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu wr \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu wr \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta - F_a$$

$$R_y = wr \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}} \left\{ \begin{array}{l} -\mu \left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_2}{2} - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{2} \right) \\ + \left[\dfrac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) - \dfrac{1}{4}\left(\operatorname{sen}2\theta_2 - \operatorname{sen}2\theta_1\right) \right] \end{array} \right\} - F_a \tag{13.16b}$$

EJEMPLO 13-3

Diseño de un freno de tambor con zapata larga

Problema **Para la configuración del freno de tambor mostrada en la figura 13-10, determine el torque de fricción T, la fuerza aplicada F_a, y las fuerzas de reacción R_x, R_y.**

Se proporciona **Las dimensiones son a = 180 mm, b = 90 mm, r = 100 mm, w = 30 mm. $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 120°$, $\theta_{máx} = 90°$.**

Suposiciones **El coeficiente de fricción $\mu = 0.35$, la presión máxima del recubrimiento $p_{máx}$ = 1.5 MPa y el freno es autoenergizante.**

Solución **Véase la figura 13-10.**

1. Convierta los ángulos θ_1 y θ_2 a radianes: $\theta_1 = 0.524$ rad, $\theta_2 = 2.094$ rad.

2. Calcule el momento M_{F_n} con respecto a O debido a la fuerza normal, mediante la ecuación 13.14*a*.

$$M_{F_n} = wrb\frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}}\left[\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{4}(\operatorname{sen}2\theta_2-\operatorname{sen}2\theta_1)\right]$$

$$= 30(100)(90)\frac{1.5}{\operatorname{sen}(1.57)}\left[\frac{1}{2}(2.094-0.524) - \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}\{2(2.094)\}-\operatorname{sen}\{2(0.524)\}\right)\right]$$

$$= 493 \text{ N - m} \qquad (a)$$

3. Determine el momento M_{F_f} con respecto a O debido a la fuerza de fricción, con la ecuación 13.14*b*.

$$M_{F_f} = \mu wr\frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}}\left[-r(\cos\theta_2-\cos\theta_1)-\frac{b}{2}(\operatorname{sen}^2\theta_2-\operatorname{sen}^2\theta_1)\right]$$

$$= 0.35(30)(100)\frac{1.5}{\operatorname{sen}(1.57)}\left[-100\left(\cos\{2.094\}-\cos\{0.524\}\right) - \frac{90}{2}\left(\operatorname{sen}^2\{2.094\}-\operatorname{sen}^2\{0.524\}\right)\right]$$

$$= 180 \text{ N - m} \qquad (b)$$

4. Obtenga la fuerza aplicada con la ecuación 13.14*c*.

$$F_a = \frac{M_{F_n} \mp M_{F_f}}{a} = \frac{497-181}{0.180} = 1\,743 \text{ N} \qquad (c)$$

5. Calcule el torque de fricción con la ecuación 13.15.

$$T_f = \mu wr^2\frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

$$= 0.35(30)(100)^2\frac{1.5}{\operatorname{sen}(1.57)}\left(\cos\{2.094\}-\cos\{0.524\}\right)$$

$$= 215 \text{ N - m} \qquad (d)$$

6. Las fuerzas de reacción se obtienen con las ecuaciones 13.16.

$$R_x = wr\frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}}\left\{-\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta_2}{2}-\frac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{2}\right) +\mu\left[\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{4}(\operatorname{sen}2\theta_2-\operatorname{sen}2\theta_1)\right]\right\}$$

$$= 30(100)\frac{1.5}{\operatorname{sen}(1.57)}\left\{\left(\frac{\operatorname{sen}^2\{2.094\}}{2}-\frac{\operatorname{sen}^2\{0.524\}}{2}\right) -0.35\left[\frac{1}{2}(2.094-0.524) -\frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}\{2(2.094)\}-\operatorname{sen}\{2(0.524)\}\right)\right]\right\}$$

$$= 794\text{ N} \qquad (e)$$

$$R_y = -F_a + wr\frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}}\left\{-\mu\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta_2}{2}-\frac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{2}\right) +\left[\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)-\frac{1}{4}(\operatorname{sen}2\theta_2-\operatorname{sen}2\theta_1)\right]\right\}$$

$$= -2\,013 + 30(100)\frac{1.5}{\operatorname{sen}(1.57)}\left\{-0.35\left(\frac{\operatorname{sen}^2\{2.094\}}{2}-\frac{\operatorname{sen}^2\{0.524\}}{2}\right) +\left[\frac{1}{2}(2.094-0.524) -\frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}\{2(2.094)\}-\operatorname{sen}\{2(0.524)\}\right)\right]\right\}$$

$$R_y = 4\,134\text{ N} \qquad (f)$$

7. Los archivos EX17-03 se encuentran en el CD-ROM.

Frenos de tambor con zapata interna larga

La mayoría de los frenos de tambor (y prácticamente todos los automotrices) llevan zapatas internas que se expanden contra el interior del tambor. Por lo general, se utilizan dos zapatas, que se pivotan contra los extremos de un tornillo ajustado y forzado contra el tambor por los dos extremos de un cilindro hidráulico de doble actuación. Unos resortes ligeros mantienen las zapatas contra los pistones del cilindro de las ruedas y jalan las zapatas para alejarlas del tambor cuando no están activadas. Generalmente, una zapata es autoenergizante en la dirección de avance, mientras la otra es autoenergizante en la dirección de reversa del giro del tambor. Las ruedas del automóvil sujetan directamente al tambor del freno. El análisis de un freno de zapata interna es el mismo que el de la zapata externa.

13.7 RESUMEN

Los embragues y los frenos se utilizan ampliamente en todas las clases de maquinaria. Todos los vehículos requieren frenos para detener su movimiento, tal como lo hacen muchas máquinas estacionarias. Los embragues son necesarios para interrumpir el flujo de potencia de un generador de movimiento (motor eléctrico, motor de combustión interna, etcétera) a la carga, de modo que la carga se pueda detener (con un freno) y el generador

de movimiento continúe funcionando. Un embrague y un freno son, en esencia, el mismo dispositivo; la diferencia principal es que ambos lados de un embrague (entrada y salida) son capaces de girar, en tanto el lado de salida de un freno está fijo a algún "plano estructural" sin giro, el cual puede tener en sí mismo otro movimiento, como en el caso de un chasis automotriz.

Se fabrican muchos estilos diferentes de embragues/frenos; no obstante, los tipos más comunes utilizan fricción de contacto entre dos o más superficies, para acoplar los lados de entrada y salida. Las superficies de fricción se mueven hacia adentro y hacia afuera del engranaje de varios modos, como el mecánico, electromagnético, neumático, hidráulico o una combinación de ellos. Otros tipos incluyen magnetismo (partículas magnéticas, histéresis y remolinos de corriente), algunos de los cuales no tienen contacto mecánico (por consiguiente, su arrastre es cero) cuando están desactivados y acoplamientos con fluido, que se utilizan comúnmente para acoplar motores de vehículos a sus transmisiones automáticas.

Con excepción de aplicaciones especializadas de alto volumen, como el diseño de vehículos, un diseñador de máquinas rara vez diseña un embrague o un freno desde el principio. En el diseño típico de aplicaciones de máquinas, por lo general uno selecciona un montaje de embrague o freno de entre los que están disponibles comercialmente. El problema de diseño se reduce entonces a uno de definición adecuada del torque, la velocidad y el requerimiento de potencia, así como de la naturaleza de la carga, ya sea suave o de choque, continua o intermitente, etcétera. La inercia de los elementos giratorios, que van a ser acelerados por el embrague o desacelerados por el freno, suele tener un efecto significativo en el tamaño requerido del dispositivo y debe calcularse de forma cuidadosa. Una razón de engrane presente en el sistema causa que la inercia reflejada o efectiva varíe con el cuadrado de la razón de engrane; dicho efecto se tiene que considerar cuidadosamente cuando se calcula la inercia. (Consulte el capítulo 1 o cualquier texto de dinámica de maquinaria.)

Los catálogos de los fabricantes de embragues/frenos contienen datos exhaustivos de ingeniería, que clasifican cada dispositivo según su torque y capacidad de potencia; también sugieren factores empíricos de desclasificación en situaciones de cargas de choque, ciclos de trabajo pesado, etcétera. Una vez que la carga está bien definida, se especifica el dispositivo adecuado con los datos de clasificación de los fabricantes modificados por los factores de servicio sugeridos. El trabajo (nada trivial) del diseñador se convierte entonces en la definición de la carga adecuada para la aplicación, seguida por el manejo adecuado de los datos de clasificación de los fabricantes. Generalmente se brinda asistencia de ingeniería por parte del fabricante para esta última tarea; sin embargo, el resultado sólo será tan adecuado para los requisitos de diseño como la precisión del análisis de carga lo permita. En este capítulo se describen brevemente las configuraciones mecánicas de varios diseños de embragues. Los catálogos de los fabricantes y los ingenieros de aplicaciones cuentan con información más detallada acerca de las capacidades y las limitaciones de varios tipos de embragues/frenos.

Los embragues y frenos de fricción comerciales se elaboran con más frecuencia en configuraciones de uno o múltiples discos. Los frenos para vehículos se producen comúnmente en configuraciones de disco o de tambor. Las configuraciones de disco proporcionan un torque de fricción que es linealmente proporcional a la fuerza aplicada, lo cual suele ser una ventaja desde el punto de vista de control. En ocasiones, las configuraciones de tambor se diseñan para que sean autoenergizantes, lo que significa que una vez que el freno o embrague se conectan inicialmente, la fuerza de fricción tiende a incrementar la fuerza normal, aumentando no linealmente el torque de fricción en un modo de retroalimentación positiva. Lo anterior es una ventaja cuando se frenan grandes cargas, ya que disminuye la fuerza aplicada requerida, aunque hace más difícil el control del torque de freno. En este capítulo se analizaron tanto los dispositivos de fricción de disco como los dispositivos de fricción de tambor.

Los embragues y frenos son esencialmente dispositivos de transferencia de energía o de disipación de energía; como tales, generan bastante calor durante su operación. Se deben diseñar para absorber y transferir este calor sin que se dañen ellos mismos ni su entorno. Con frecuencia, la capacidad para transferir calor de un dispositivo, en vez de su capacidad mecánica de transmisión de torque, limita su funcionamiento. El diseño térmico de los embragues y los frenos es una consideración muy importante, pero va más allá del alcance de este texto, además de que el espacio no permite su análisis. Sin embargo, el diseñador necesita estar consciente del aspecto de la transferencia de calor en el diseño de embragues/frenos, y tomarlo en cuenta. Consulte cualquier texto sobre transferencia de calor para los antecedentes teóricos y las referencias mencionadas en la bibliografía del capítulo, así como los catálogos de otros fabricantes para buscar información más específica.

Los embragues de fricción se operan en seco o en húmedo (con aceite, casi siempre). Evidentemente la fricción en seco es más efectiva, ya que el coeficiente de fricción se reduce drásticamente con la lubricación. Sin embargo, el funcionamiento en aceite mejora bastante la situación de transferencia de calor, sobre todo cuando el aceite circula y/o se enfría. Se necesitan más superficies de fricción (p. ej. discos múltiples), con la finalidad de alcanzar la misma capacidad de torque en húmedo, de la que se obtendría con un disco seco único, pero el resultado suele ser positivo debido a la mejora del enfriamiento. Las transmisiones automáticas de los vehículos modernos usan muchos embragues y frenos internos para interconectar o detener varios elementos de sus trenes de engranes epicíclicos (planetarios), así como para cambiar las razones de engranes. Éstos son embragues de discos múltiples o frenos de banda, que funcionan inmersos en el aceite de la transmisión que circula de forma continua a través de un intercambiador de calor en el radiador de enfriamiento del automóvil.

Ecuaciones importantes utilizadas en este capítulo

Torque en un embrague de disco con presión uniforme (sección 13.4):

$$T = N\mu F \frac{2}{3}\frac{\left(r_o^3 - r_i^3\right)}{\left(r_o^2 - r_i^2\right)} \tag{13.3}$$

Torque en un embrague de disco con desgaste uniforme (sección 13.4):

$$T = N\mu F \frac{\left(r_o + r_i\right)}{2} \tag{13.6}$$

Fuerzas y torque en un freno de tambor con zapata corta (sección 13.6):

$$F_n = p_{máx} r\theta w \tag{13.8}$$

$$F_a = \frac{bF_n - cF_f}{a} = \frac{bF_n - \mu c F_n}{a} = F_n \frac{b - \mu c}{a} \tag{13.11b}$$

$$T = F_f r = \mu F_n r \tag{13.10}$$

Fuerzas y torque en un freno de tambor con zapata larga (sección 13.6):

$$M_{F_n} = wrb \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}}\left[\frac{1}{2}\left(\theta_2 - \theta_1\right) - \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}2\theta_2 - \operatorname{sen}2\theta_1\right)\right] \tag{13.14a}$$

$$M_{F_f} = \mu w r \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}}\left[-r\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right) - \frac{b}{2}\left(\operatorname{sen}^2\theta_2 - \operatorname{sen}^2\theta_1\right)\right] \quad (13.14b)$$

$$F_a = \frac{M_{F_n} \mp M_{F_f}}{a} \quad (13.14c)$$

$$T = \mu w r^2 \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right) \quad (13.15)$$

$$R_x = w r \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}}\left\{ -\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta_2}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{2}\right) + \mu\left[\frac{1}{2}\left(\theta_2 - \theta_1\right) - \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}2\theta_2 - \operatorname{sen}2\theta_1\right)\right]\right\} \quad (13.16a)$$

$$R_y = w r \frac{p_{máx}}{\operatorname{sen}\theta_{máx}}\left\{ -\mu\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta_2}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{2}\right) + \left[\frac{1}{2}\left(\theta_2 - \theta_1\right) - \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}2\theta_2 - \operatorname{sen}2\theta_1\right)\right]\right\} - F_a \quad (13.16b)$$

13.8 REFERENCIAS

1. **J. Proctor**, "Selecting Clutches for Mechanical Drives", *Product Engineering*, pp. 43-58, 19 de junio 19 de 1961.

13.9 BIBLIOGRAFÍA

Mechanical Drives Reference Issue. Penton Publishing: Cleveland, Ohio.

Deltran, *Electromagnetic Clutches and Brakes*, American Precision Industries: Buffalo, N.Y., 716-631-9800.

Logan, *Multiple Disk Clutches and Brakes*. Logan Clutch Co.: Cleveland, Ohio, 216-431-4040.

Magtrol, *Histeresis Brakes and Clutches*, Magtrol: Buffalo, N.Y., 800-828-7844.

MCC, *Catalog 18e*. Machine Components Corporation: Planview, N.Y. 516-694-7222.

MTL, *Eddy Current Clutch Design*. Magnetic Technologies Ltd.: Oxford, Mass., 508-987-3303.

W.C. Orthwein, *Clutches and Brakes: Design and Selection*. Marcel Dekker: Nueva York, 1986.

Placid, *Magnetic Particle Clutches and Brakes*. Placid Industries Inc.: Lake Placid, N.Y., 518-523-2422.

Warner, *Clutches, Brakes, and Controls: Master Catalog*. Warner Electric: South Beloit, Ill., 815-389-2582.

13.10 PROBLEMAS

*13-1. Calcule el torque que un embrague de disco seco de 2 superficies puede transmitir, si los diámetros interior y exterior del forro son de 120 mm y 70 mm, respectivamente, y la fuerza axial aplicada es de 10 kN. Suponga desgaste uniforme y $\mu = 0.4$. ¿Es aceptable la presión sobre el recubrimiento? ¿Qué material(es) sería(n) aceptable(s) para el recubrimiento?

13-2. Repita el problema 13-1 suponiendo que la presión es uniforme.

**13-3.* Diseñe un embrague de disco de una superficie para transmitir 100 N-m de torque a 750 rpm, usando un recubrimiento moldeado con presión máxima de 1 MPa y $\mu = 0.25$. Suponga desgaste uniforme. Calcule los diámetros exterior e interior requeridos si $r_i = 0.577r_o$. ¿Cuál es la potencia transmitida?

†*13-4.* Repita el problema 13-3 suponiendo que la presión es uniforme.

*13.5. ¿Cuántas superficies se necesitan en un embrague de disco húmedo para transmitir 120 N-m de torque a 1 000 rpm, usando un recubrimiento sinterizado con una presión máxima de 1.8 MPa y $\mu = 0.06$? Suponga desgaste uniforme. Calcule los diámetros exterior e interior requeridos, si $r_i = 0.577r_o$. ¿Cuántos discos se necesitan? ¿Cuál es la potencia transmitida?

13-6. Repita el problema 13-5 suponiendo que la presión es uniforme.

*13-7. La figura P13-1 muestra un freno de tambor simple de zapata corta. Determine su capacidad de torque y la fuerza aplicada requerida para $a = 100$, $b = 70$, $e = 20$, $r = 30$, $w = 50$ mm y $\theta = 35°$. ¿Qué valor de c causará autobloqueo? Suponga $p_{máx} = 1.3$ MPa y $\mu = 0.3$.

13-8. Repita el problema 13-7 con el tambor girando en el sentido de las manecillas del reloj.

13-9. La figura P13-1 ilustra un freno de tambor simple de zapata corta. Obtenga su capacidad de torque y la fuerza aplicada requerida para $a = 8$, $b = 6$, $e = 4$, $r = 5$, $w = 1.5$ in y $\theta = 30°$. ¿Qué valor de c causará autobloqueo? Suponga $p_{máx} = 250$ psi y $\mu = 0.35$.

13-10. Repita el problema 13-9 con el tambor girando en el sentido de las manecillas del reloj.

*13-11. La figura P13-2 muestra un freno de tambor con doble zapata corta. Obtenga su capacidad de torque y la fuerza aplicada requerida para $a = 90$, $b = 80$, $e = 30$, $r = 40$, $w = 60$ mm y $\theta = 25°$. ¿Qué valor de c hará que se autobloquee? Suponga $p_{máx} = 1.5$ MPa y $\mu = 0.25$. Sugerencia: Calcule por separado los efectos de cada zapata y superpóngalas.

13-12. La figura P13-2 muestra un freno de tambor con doble zapata corta. Determine su capacidad de torque y la fuerza aplicada requerida para $a = 12$, $b = 8$, $e = 3$, $r = 6$ in y $\theta = 25°$. ¿Qué valor de c hará que se autobloquee? Suponga $p_{máx} = 200$ psi,

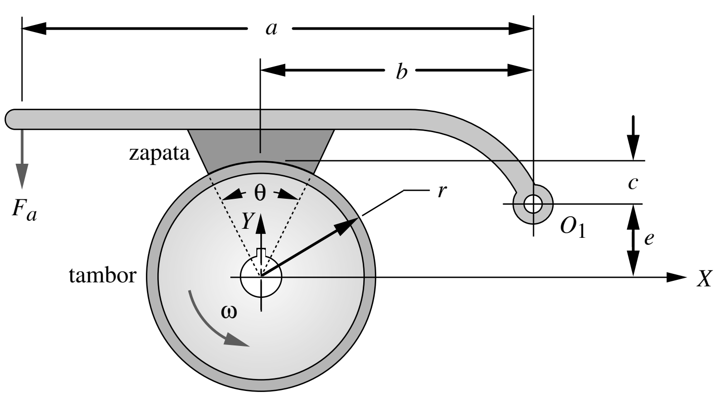


FIGURA P13-1

Geometría de un freno de tambor con zapata externa corta

Tabla P13-0†
Matriz tema/problema

13.4 Embragues de disco
13-1, 13-2, *13-3*, *13-4*, 13-5, 13-6, *13-27*, *13-28*

13.5 Frenos de disco
13-29, 13-30, *13-31*, *13-32*, *13-33*, *13-34*

13.6 Frenos de tambor

Zapata corta
13-7, 13-8, 13-9, 13-10, 13-11, 13-12, 13-21, 13-22

Zapata larga
13-13, 13-14, 13-15, 13-16, 13-17, 13-18, 13-19, 13-20, 13-23, 13-24, 13-25, 13-26

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problema en *itálicas* son problemas de diseño.

13

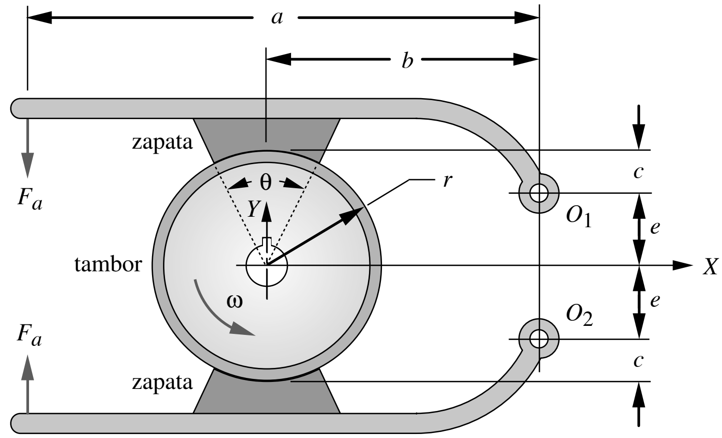


FIGURA P13-2

Geometría de un freno de tambor externo con doble zapata corta

ancho = 2 in y $\mu = 0.28$. Sugerencia: Calcule por separado los efectos de cada zapata y superpóngalas.

*13-13. La figura P13-3 muestra un freno de tambor simple de zapata larga. Determine su capacidad de torque y la fuerza aplicada requerida para $a_X = 100$, $b_X = 70$, $b_Y = 20$, $r = 30$, $w = 50$ mm, y $\theta_1 = 25°$, $\theta_2 = 125°$. Suponga $p_{máx} = 1.3$ MPa y $\mu = 0.3$.

13-14. La figura P13-3 muestra un freno de tambor simple de zapata larga. Determine su capacidad de torque y la fuerza aplicada requerida para $a_X = 8$, $b_X = 6$, $b_Y = 4$, $r = 5$, $w = 1.5$ in y $\theta_1 = 35°$, $\theta_2 = 155°$. Suponga $p_{máx} = 250$ psi y $\mu = 0.35$.

*13-15. La figura P13-4 presenta un freno de tambor con zapata doble larga. Obtenga su capacidad de torque y la fuerza aplicada requerida para $a_X = 90$, $b_X = 80$, $b_Y = 30$, $r = 40$, $w = 30$ mm y $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 160°$. Suponga $p_{máx} = 1.5$ MPa y $\mu = 0.25$. Sugerencia: Calcule por separado los efectos de cada zapata y superpóngalas.

13-16. La figura P13-4 ilustra un freno de tambor con zapata doble larga. Determine su capacidad de torque y la fuerza aplicada requerida para $a_X = 12$, $b_X = 8$, $b_Y = 3$, $r = 6$, $w = 2$ in, y $\theta_1 = 25°$, $\theta_2 = 145°$. Suponga $p_{máx} = 200$ psi y $\mu = 0.28$. Sugerencia: Calcule por separado los efectos de cada zapata y superpóngalas.

13

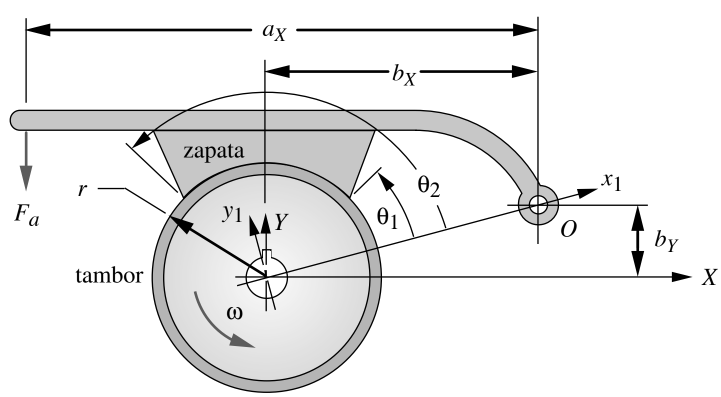


FIGURA P13-3

Geometría de un freno de tambor externo con zapata corta

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

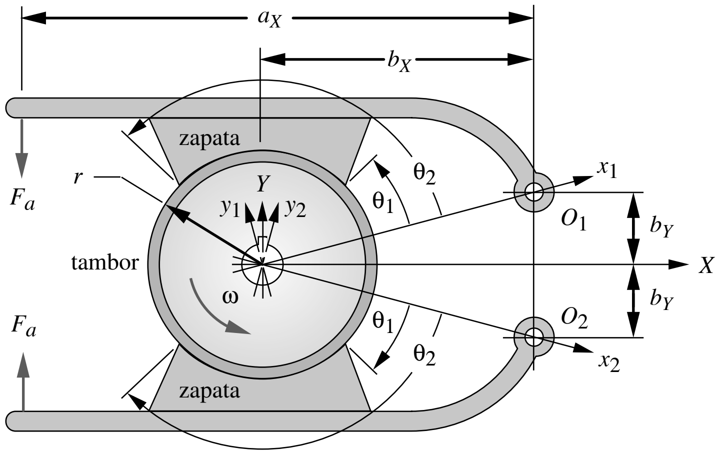


FIGURA P13-4

Geometría de un freno de tambor externo con zapata doble larga

*13-17. Se considera que una aproximación de zapata corta es válida para las zapatas de freno con un ángulo de inclusión de hasta 45°. Para el freno mostrado en la figura P13-3, calcule su capacidad de torque y la fuerza requerida, tanto por el método de zapata corta como por el método de zapata larga, luego compare los resultados para los siguientes datos: $a_X = 90$, $b_X = 80$, $b_Y = 30$, $r = 40$, $w = 30$ mm. Suponga $p_{máx} = 1.5$ MPa y $\mu = 0.25$. Observe que $\theta = \theta_2 - \theta_1$ para la aproximación de zapata corta.

(a) $\theta_1 = 75°$, $\theta_2 = 105°$.
(b) $\theta_1 = 70°$, $\theta_2 = 110°$.
(c) $\theta_1 = 65°$, $\theta_2 = 115°$.

*13-18. Repita el problema 13-17 para el diseño del freno mostrado en la figura P13-4.

13-19. Se considera que una aproximación de zapata corta es válida para las zapatas de freno con un ángulo de inclusión de hasta 45°. Para el freno mostrado en la figura P13-3, calcule su capacidad de torque y la fuerza requerida, tanto por el método de zapata corta como por el método de zapata larga, luego compare los resultados para los siguientes datos: $a_X = 8$, $b_X = 6$, $b_Y = 4$, $r = 5$, $w = 2$ in. Suponga $p_{máx} = 250$ psi y $\mu = 0.35$. Observe que $\theta = \theta_2 - \theta_1$ para la aproximación de zapata corta.

(a) $\theta_1 = 75°$, $\theta_2 = 105°$.
(b) $\theta_1 = 70°$, $\theta_2 = 110°$.
(c) $\theta_1 = 65°$, $\theta_2 = 115°$.

13-20. Repita el problema 13-19 para el diseño del freno mostrado en la figura P13-4.

*13-21. Determine las fuerzas de reacción en el pivote del brazo en el sistema global *XY* para el freno del problema 13-11.

13-22. Calcule las fuerzas de reacción en el pivote del brazo en el sistema global *XY* para el freno del problema 13-12.

*13-23. Determine las fuerzas de reacción en el pivote del brazo en el sistema global *XY* para el freno del problema 13-13.

13-24. Calcule las fuerzas de reacción en el pivote del brazo en el sistema global *XY* para el freno del problema 13-14.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

*13-25. Determine las fuerzas de reacción en el pivote del brazo en el sistema global *XY* para el freno del problema 13-15.

13-26. Calcule las fuerzas de reacción en el pivote del brazo en el sistema global *XY* para el freno del problema 13-16.

†*13-27.* Se necesita un embrague para un motor eléctrico que transmite 20 kW a 1 100 rpm. El embrague se sujetará directamente al alojamiento del plato del motor y tendrá el mismo diámetro de alojamiento que el motor, el cual es de 125 mm. La tolerancia radial mínima entre el diámetro externo del alojamiento y el diámetro externo del disco del embrague es de 5 mm. El eje de salida del embrague tiene el mismo diámetro que el eje del motor, el cual es de 15 mm. Diseñe un embrague de discos múltiples para esta aplicación. Defina las suposiciones y las opciones de diseño. Especifique el material del embrague, el radio exterior del disco, el radio interior del disco y la fuerza aplicada requerida.

13-28. Se necesita un embrague para un motor eléctrico que transmite 25 hp a 800 rpm. El embrague se sujetará directamente al alojamiento del plato del motor y tendrá el mismo diámetro de alojamiento que el motor, el cual es de 5.5 in. La tolerancia radial mínima entre el diámetro exterior del alojamiento y el diámetro exterior del disco del embrague es de 0.25 in. El eje de salida del embrague tiene el mismo diámetro que el eje del motor, el cual es de 0.625 in. Diseñe un embrague de discos múltiples para esta aplicación. Defina las suposiciones y las opciones de diseño. Especifique el material del embrague, el radio exterior del disco, el radio interior del disco y la fuerza aplicada requerida.

*13-29. Determine el torque que puede transmitir la mordaza de un freno de disco de dos almohadillas, con un ángulo de la almohadilla de 60 grados, si el diámetro exterior y el interior del recubrimiento son de 160 mm y 90 mm, respectivamente, mientras la fuerza axial aplicada es de 3 kN. Suponga desgaste uniforme y $\mu = 0.35$. ¿Es aceptable la presión sobre el recubrimiento? ¿Qué materiales serían aceptables para el recubrimiento?

13-30. Repita el problema 13-29 suponiendo presión uniforme.

**13-31.* Diseñe un freno de disco de dos almohadillas, para suministrar una fuerza de frenado de 240 N en la periferia de una rueda de 750 mm de diámetro que gira a 670 rpm. Use una razón de radio interior a radio exterior de 0.577. Suponga desgaste uniforme. Defina las suposiciones y las opciones de diseño. Especifique el material del freno, radio exterior de la almohadilla, radio interior de la almohadilla, ángulo de la almohadilla y la fuerza aplicada requerida.

13-32. Repita el problema 13-31 suponiendo presión uniforme.

13-33. Un auto de carreras solar ultraligero pesa 500 lb, incluyendo al conductor. En el frente tiene dos ruedas de bicicleta de 20 in de diámetro, que tendrán frenos de disco con dos almohadillas en la mordaza para cada rueda. Los frenos deben ser capaces de detener totalmente el vehículo en una distancia de 150 pies, a partir de una velocidad de 45 mph. Despreciando las fuerzas de resistencia aerodinámica y de rodamiento, diseñe los frenos de disco con dos almohadillas en la mordaza. Utilice una razón de radio interior a radio exterior de 0.577. Suponga desgaste uniforme. Defina las suposiciones y las opciones de diseño. Especifique el material del freno, el radio exterior de la almohadilla, el radio interior de la almohadilla, el ángulo de la almohadilla y la fuerza aplicada requerida.

13-34. Repita el problema 13-33 suponiendo presión uniforme.

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

† Los números de problema en *itálicas* son problemas de diseño.

Apéndice A

INTRODUCCIÓN AL DISEÑO

El aprendizaje sin meditación es tiempo perdido;
la meditación sin aprendizaje es peligrosa.

CONFUCIO, SIGLO 6 A.C.

A.1 DISEÑO

¿Qué es el diseño? El papel tapiz se diseña. Quizás el lector conozca a alguien que use ropa de "diseñador". Los automóviles "se diseñan" en cuanto a su apariencia exterior. Evidentemente el término *diseño* tiene una amplia gama de significados. En los ejemplos anteriores, el diseño se refiere en lo fundamental a la apariencia estética del objeto. En el caso del automóvil, todos sus otros aspectos también implican diseño. Muy probablemente ingenieros **—**no artistas**—** deben diseñar sus piezas internas (motor, frenos, suspensión…), aun cuando el ingeniero tiene que hacer gala de cierto arte cuando diseña maquinaria.

El término *diseño* viene del latín ***designare***, que significa "designar o delimitar". El diccionario Webster ofrece varias definiciones de la palabra **diseño**, de las cuales las más aplicables son "esbozar, trazar o planear como acción o trabajo […] para concebir, inventar, idear". En este caso, se muestra más interés en el diseño en ingeniería que en el diseño artístico. El **diseño en ingeniería** se define como "el proceso de aplicación de varias técnicas y principios científicos, con la finalidad de definir un dispositivo, un proceso o un sistema, con el detalle suficiente que permita su realización".

Diseño de máquinas

El libro trata un aspecto del diseño en ingeniería: el **diseño de máquinas**, el cual implica la creación de máquinas que funcionen con seguridad y confiabilidad, así como en forma óptima. Una **máquina** se define de diversas maneras. El diccionario Random House[1] lista doce definiciones, entre las cuales se encuentran las siguientes dos:

Máquina

1. Aparato que consiste en unidades interrelacionadas, o bien,
2. Dispositivo que modifica la fuerza o el movimiento.

A las **piezas interrelacionadas** mencionadas en la definición, algunas veces, también se les conoce como **elementos de la máquina** en este contexto. La noción de **trabajo útil** es fundamental para el funcionamiento de una máquina, ya que casi siempre involucra una transferencia de energía. La mención de **fuerzas** y **movimiento** también resulta fundamental en nuestro estudio para la conversión de una forma de energía en otra, pues las máquinas **crean movimiento** y **desarrollan fuerzas**. Es tarea del ingeniero definir y calcular tales movimientos, fuerzas y cambios de energía para determinar los tamaños, las formas y los materiales necesarios en cada una de las piezas interrelacionadas de la máquina. Ésta es la esencia del **diseño de máquinas**.

Mientras que necesariamente las piezas de una máquina se diseñan una a la vez, es muy importante reconocer que el funcionamiento y el desempeño de cada una (y por ende su diseño) dependen de muchas otras piezas interrelacionadas dentro de la misma máquina. De esta manera, aquí se va a intentar "diseñar la máquina completa", en vez de simplemente diseñar los elementos en forma individual, aislados entre sí. Para hacerlo, se deben utilizar un conjunto de conocimientos de ingeniería estudiados en cursos anteriores; por ejemplo, estática, dinámica, mecánica de materiales (análisis de esfuerzos) y propiedades de los materiales.

El objetivo final del diseño de máquinas consiste en obtener las dimensiones y la forma de las piezas (los elementos de máquina), así como en seleccionar los materiales y procesos de manufactura adecuados, de modo que la máquina resultante ejecute sin falla la función esperada. Lo anterior requiere que el ingeniero calcule y pronostique la manera y las condiciones de falla para cada elemento y, luego, lo diseñe para prevenir dicha falla. Esto a la vez, requiere que para cada pieza se realice un **análisis de esfuerzo y deflexión**. Puesto que los esfuerzos son una función de las cargas aplicadas e inerciales, así como de la geometría de la pieza, se debe llevar a cabo un análisis de fuerzas, momentos, torques y dinámica del sistema, antes de que los esfuerzos y las deflexiones estén totalmente calculados.

Si la "máquina" en cuestión no cuenta con piezas móviles, entonces la tarea del diseño se vuelve mucho más sencilla, ya que tan sólo se requiere un análisis de fuerzas estáticas. Sin embargo, cuando la máquina no tiene partes móviles, no tiene mucho de máquina (ni satisface la definición anterior); se trata más bien de una **estructura**. También es necesario que las estructuras se diseñen contra fallas; de hecho, las estructuras externas grandes (puentes y edificios, entre otros) también están sujetas a cargas dinámicas por efectos del viento, los terremotos, el tránsito y demás inconvenientes, por lo que también habrán de diseñarse considerando tales condiciones. La dinámica estructural es un tema interesante, pero no se verá en este libro. El estudio se concentrará en los problemas asociados con las máquinas con movimiento. Si los movimientos de la máquina son muy lentos y las aceleraciones son insignificantes, entonces será suficiente un análisis de fuerzas estáticas. No obstante, si la máquina tiene aceleraciones significativas en su interior, entonces se requerirá un análisis de fuerzas dinámicas, y las piezas que se aceleran se vuelven "víctimas de su propia masa".

En una estructura estática, como el piso de un edificio diseñado para soportar un peso determinado, el factor de seguridad de la estructura se incrementaría al agregar material —distribuido adecuadamente— a sus piezas estructurales. Aunque será más pesada (tendrá más peso "muerto"), si está diseñada de forma apropiada cargaría más peso "vivo" (carga útil) que antes, incluso sin falla. En una máquina dinámica, agregar peso (masa) a las piezas móviles puede tener el efecto contrario, lo que reduciría el factor de seguridad de la máquina, su rapidez permitida, o bien, su capacidad de carga útil. Sucede así porque algunas de las cargas que crean los esfuerzos en las piezas móviles se originan

La fotografía capitular es cortesía de Boeing Airplane Co. Inc., Seattle, Wash.

en las fuerzas inerciales que predice la **segunda ley de Newton**, $F = ma$. Puesto que las aceleraciones de las piezas móviles de la máquina dependen de su diseño cinemático y de su rapidez, el incremento de la masa en las piezas móviles aumentará las cargas inerciales en esas mismas piezas, a menos que sus aceleraciones cinemáticas se reduzcan por una operación más lenta. Aun cuando la masa agregada llega a aumentar la resistencia de la pieza, el beneficio se reduciría o cancelaría debido al incremento resultante en las fuerzas inerciales.

Iteración

Por lo tanto, hay que enfrentar un dilema en las fases iniciales del diseño de máquinas. Generalmente, antes de llegar a la etapa en la que hay que dimensionar las piezas, ya se definieron los movimientos cinemáticos de la máquina. A menudo también se conocen las fuerzas externas sobre la máquina debidas al "mundo exterior". Observe que, en algunos casos, las cargas externas sobre la máquina serán muy difíciles de predecir; por ejemplo, las cargas sobre un automóvil en movimiento. No es posible que el diseñador prediga con exactitud las cargas ambientales a las que el usuario someterá la máquina (baches y vueltas forzadas, entre otros). En tales casos, el análisis estático con datos empíricos, reunidos a partir de la prueba real, brindarían alguna información para los propósitos del diseño.

Lo que falta por definir son las fuerzas inerciales debidas a las aceleraciones cinemáticas conocidas que actúan sobre las masas, hasta ahora indefinidas, de las piezas que se mueven. El dilema se resuelve únicamente por **iteración**, lo cual significa *repetir* o *regresar a una fase anterior*. Se debe suponer alguna configuración de prueba en cada pieza, con el uso de las propiedades de la masa (masa, localización del *CG* y los momentos de inercia de la masa) en esa configuración, para hacer un análisis de fuerzas dinámicas, así como para determinar las fuerzas, los momentos y los torques que actúan sobre la pieza; luego se debe usar la geometría de la sección transversal del diseño de prueba para calcular los esfuerzos resultantes. En general, la determinación precisa de todas las cargas sobre una máquina es la tarea más difícil en el proceso de diseño. Una vez que se conocen las cargas, es posible calcular los esfuerzos.

La mayoría de las veces se verá que el diseño de la primera prueba falla debido a que los materiales no pueden mantener los niveles de esfuerzo presentes. Entonces se deben rediseñar las piezas (iterar), para lo cual hay que cambiar formas, dimensiones, materiales, procesos de manufactura u otros factores, con la finalidad de obtener un diseño aceptable. En general, no es posible lograr un resultado exitoso sin hacer varias iteraciones durante el proceso de diseño. Observe también que un cambio en la masa de una pieza afectará, asimismo, las fuerzas aplicadas en las piezas conectadas a ella, por lo que será necesario rediseñarlas también. De esto se trata en realidad el diseño de las **piezas interrelacionadas**.

A.2 EL PROCESO DE DISEÑO*

En esencia, el proceso de diseño es un ejercicio de creatividad aplicada. Se han definido varios "procesos de diseño" para ayudar a organizar la solución a un "problema mal estructurado", como aquel donde la definición del problema es vaga y para el cual hay muchas soluciones posibles. Algunas de tales definiciones del proceso de diseño contienen sólo unos cuantos pasos, en tanto que otras consideran una lista de 25 pasos. En la tabla A-1 se muestra una versión de un proceso de diseño integrado por diez pasos. El paso inicial, **identificación de la necesidad**, normalmente consiste en un planteamiento del problema vago y escueto. El desarrollo de la información de **investigación preliminar** (paso 2) se requiere para definir y entender por completo el problema, después de lo cual es posible redefinir la **meta** (paso 3), de un modo más realista y razonable que en el planteamiento original del problema.

* Adaptado de Norton, *Diseño de maquinaria*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2004, con autorización de la editorial.

Tabla A-1 El proceso de diseño

1	Identificación de la necesidad
2	Investigación preliminar
3	Planteamiento de la meta
4	Especificaciones de funcionamiento
5	Síntesis
6	Análisis
7	Selección de la solución
8	Diseño detallado
9	Prototipos y pruebas
10	Producción

El paso 4 requiere la creación de un conjunto detallado de **especificaciones de funcionamiento**, las cuales delimitan el problema y determinan su alcance. El paso 5 de **síntesis** es donde se trata de encontrar tantos enfoques de diseño alternativos como sea posible, por lo general sin que importe (en esta etapa) su valor o su calidad. Algunas veces esto también se denomina el paso de **ideación e invención —**aquí se genera el mayor número viable de soluciones creativas.

En el paso 6, se **analizan** las posibles soluciones del paso anterior y se aceptan, se rechazan o se modifican. La mayoría de las soluciones viables se **seleccionan** en el paso 7. Una vez que se elige un diseño aceptable; además, se puede realizar el **diseño detallado** (paso 8), en el cual se atan todos los cabos sueltos, se completan los dibujos de ingeniería, se identifica a los vendedores y se definen las especificaciones de manufactura, etcétera. La construcción real del trabajo de diseño se realiza primero como un **prototipo** en el paso 9 y, al final, su **producción** se realiza de forma masiva en el paso 10. Una descripción más completa del proceso de diseño se encuentra en la referencia 2; diversas referencias sobre los temas de creatividad y diseño se incluyen en la bibliografía al final de este apéndice.

La descripción anterior daría la falsa impresión de que dicho proceso se puede realizar de manera lineal, tal como se lista. Por el contrario, **se requiere la iteración durante todo el proceso**, hay que regresar desde cualquier paso hasta cualquier otro paso previo, con todas las combinaciones posibles, y hacerlo con frecuencia. Se descubrirá invariablemente que las mejores ideas generadas en el paso 5, cuando se analizan, tienen defectos. Por lo tanto, es necesario por lo menos un regreso al paso de ideación para obtener más soluciones. Quizá se requiera regresar a la fase de investigación preliminar para recabar más información. Tal vez sea necesario revisar las especificaciones de funcionamiento, si se detecta que no son realistas. En otras palabras, cualquier cosa es "juego limpio" en el proceso de diseño, incluso, de requerirse, la redefinición del problema. No es posible diseñar de manera lineal. Se trata de dar tres pasos hacia adelante y dos (o más) hacia atrás, hasta que el lector finalmente encuentre la solución que funciona.

En teoría, en un problema de diseño determinado se podría continuar la iteración de manera indefinida, creando pequeñas mejoras continuamente. Sin embargo, es inevitable que la ganancia obtenida en el funcionamiento o las reducciones en el costo tenderán a cero con el paso del tiempo. En algún momento, se debe lograr un diseño lo "suficientemente bueno" y aceptarlo. Con frecuencia, alguien más (quizás el jefe) tomará el diseño y, pasando por encima de nuestras protestas, dirá que todavía no es "perfecto". Las máquinas que tienen mucho tiempo y han sido mejoradas por muchos diseñadores llegan a un nivel de "perfección" que hace difícil mejorarlas. Un buen ejemplo de ello

es la bicicleta ordinaria. Aunque los inventores continúan intentando mejorar esta máquina, el diseño básico se ha conservado bastante estático después de más de un siglo de desarrollo.

En el diseño de máquinas, los primeros pasos del proceso suelen implicar la **síntesis de tipo** de las configuraciones cinemáticas adecuadas, que pueden brindar los movimientos necesarios. La síntesis de tipo requiere la selección del *mejor tipo de mecanismo adecuado al problema*. Se trata de una tarea algo difícil para el estudiante, puesto que se necesita alguna experiencia y cierto conocimiento de los diferentes tipos de mecanismos existentes, que serían factibles desde un punto de vista de la funcionalidad y la manufactura. Suponga, por ejemplo, que la tarea consiste en diseñar un dispositivo para verificar la rapidez constante del movimiento en línea recta de una pieza sobre una banda transportadora, que se une a una segunda pieza conforme ésta pasa, lo cual debe hacerse en forma repetida y con buena precisión; además, también tiene que ser barato y confiable. Se podría ignorar que esto se realiza con cualquiera de los siguientes dispositivos:

- un eslabón de línea recta
- una leva y un seguidor
- un cilindro de aire
- un cilindro hidráulico
- un robot
- un solenoide

Aunque sea posible, quizá cada una de tales soluciones no sean las óptimas o incluso no sean prácticas. Cada una tiene puntos favorables y puntos desfavorables. El eslabón de línea recta es grande y puede tener aceleraciones indeseables, mientras que la leva con el seguidor es precisa y repetitiva, aunque costosa. El cilindro de aire es barato, pero ruidoso y poco confiable. El cilindro hidráulico y el robot son más costosos. El solenoide es barato, a pesar de que implica cargas y velocidades de alto impacto. De esta manera, la selección del tipo de dispositivo podría ejercer una influencia significativa en la calidad del diseño. Una selección deficiente en la etapa de síntesis de tipo llega a generar grandes problemas posteriormente. Quizá después de estar terminado el diseño se deba cambiar, lo cual generará un gran costo. El diseño es esencialmente un ejercicio de compensaciones. Por lo general, no hay una solución absoluta para un problema real de diseño de ingeniería.

Una vez que se define el tipo de mecanismo requerido, debe analizarse y sintetizarse su cinemática detallada. Deben calcularse los movimientos de todas las piezas móviles y sus derivadas de tiempo, a través de la aceleración, para determinar las fuerzas dinámicas sobre el sistema. (Para más información al respecto, véase la referencia 2 del diseño de máquinas.)

A

En el contexto del diseño de máquinas que trata este libro, no se aplicará todo el proceso de diseño que se muestra en la tabla A-1. En cambio, se propondrán ejemplos, problemas y estudios de caso que ya definieron los pasos 1 a 4. La síntesis de tipo y el análisis cinemático ya estarán hechos o, por lo menos, definidos, mientras que los problemas estarán estructurados a ese nivel. Las tareas restantes requerirán en buena medida los pasos 5 a 8, con especial énfasis en la **síntesis** (paso 5) y el **análisis** (paso 6).

Como los dos lados de una moneda, la síntesis y el análisis son las "dos caras" del diseño de máquinas. **Síntesis** significa *poner junto* y **análisis**, *descomponer, separar, reducir a sus partes componentes*. Por lo tanto, son opuestos, aunque simbióticos. No se podrá desmontar "nada" que no esté armado, de modo que primero se debe sintetizar algo para analizarlo. Cuando se analiza, probablemente se encontrarán carencias que

requieran mayor síntesis y luego más análisis *hasta la saciedad*, para concluir la iteración para mejorar la solución. El lector necesitará mucho trabajo sobre la comprensión de la estática, dinámica y mecánica de materiales para ello.

A.3 PLANTEAMIENTO Y CÁLCULO DEL PROBLEMA

Resulta extremadamente importante para los ingenieros desarrollar hábitos de cálculo óptimos y cuidadosos. La solución de problemas complicados requiere de un enfoque organizado. Los problemas de diseño demandan también la conservación de un buen registro y buenos hábitos de documentación para registrar las diversas suposiciones y las decisiones de diseño tomadas a lo largo del camino, de modo que la evolución del pensamiento del diseñador se pueda reconstruir más adelante si se necesita un rediseño.

En la tabla A-2 se muestra un procedimiento recomendable para el diseñador, el cual lista un conjunto de subtareas adecuadas para la mayoría de los problemas de diseño de máquinas. Tales pasos deben documentarse en cada problema de manera clara y sencilla, de preferencia en un cuaderno para llevar un orden cronológico.*

Etapa de definición

En el cuaderno de diseño, primero **defina el problema** con un enunciado claro y conciso. Las "**especificaciones**" de una tarea determinada deben estar claramente listadas e ir seguidas por un registro de los **supuestos** hechos por el diseñador acerca del problema. Los supuestos incrementan la información conocida para agregar restricciones al problema. Por ejemplo, uno supondría que los efectos de la fricción son insignificantes en un caso particular o que el peso de la pieza se puede ignorar, porque resultará pequeño en comparación con las cargas dinámicas o aplicadas esperadas.

Etapa de diseño preliminar

Una vez que se definen las restricciones generales, se deben tomar algunas **decisiones de diseño preliminar** para continuar. Las razones y justificaciones de tales decisiones habrán de documentarse. Por ejemplo, es posible decidir intentar una sección transversal sólida rectangular para conectar un eslabón y elegir el aluminio como material de prueba. Por otro lado, a partir de la comprensión del problema, se identifica que dicho eslabón estaría sometido a fuertes aceleraciones durante tiempos variables con millones de repeticiones, pero una decisión de diseño más adecuada sería utilizar una sección hueca o en forma de viga I para reducir su masa y, también, seleccionar acero, por su vida infinita a la fatiga. Así, las decisiones de diseño pueden tener repercusiones significativas sobre los resultados, por lo que a menudo tendrán que modificarse o desecharse conforme se itere a través del proceso de diseño. Se ha observado con frecuencia que el 90% de las características del diseño se determinan durante el primer 10% del tiempo total del proyecto, en el cual se toman tales decisiones de diseño preliminares. Si se trata de decisiones deficientes, quizá no se salve un mal diseño con modificaciones posteriores sino, más bien, con un nuevo comienzo. El concepto de diseño preliminar en esta fase debería documentarse con claridad usando **dibujos de diseño**, esbozados y etiquetados para que los entienda cualquier otro ingeniero, o incluso uno mismo, después de que haya pasado algún tiempo.

* Si como resultado del diseño existe la posibilidad de utilizar una solución patentada, entonces el cuaderno de notas debería estar permanentemente encuadernado (no como hojas sueltas), en tanto que sus páginas deben numerarse de manera consecutiva, actualizarse y ser vigiladas por alguien que entienda el contenido técnico.

Tabla A-2 Planteamiento y cálculo del problema

1	Definición del problema	Etapa de definición
2	Establecimiento de las especificaciones	
3	Hacer supuestos adecuados	
4	Decisiones preliminares de diseño	Etapa de diseño preliminar
5	Diseño de esbozos	
6	Modelos matemáticos	Etapa de diseño detallado
7	Análisis del diseño	
8	Evaluación	
9	Documentar resultados	Etapa de documentación

Etapa de diseño detallado

Si se establece una directriz de diseño tentativa, se podrían crear uno o más **modelos** (matemáticos) **de ingeniería** del elemento o del sistema para analizarlo. En general, dichos modelos incluyen un modelo de carga consistente en diagramas de cuerpo libre, el cual muestra todas las fuerzas, los momentos y los torques que actúan sobre el elemento o el sistema, así como las ecuaciones adecuadas para su cálculo. Los modelos de estados de esfuerzo y deflexión esperados en los puntos de fallas probables se determinan después con las ecuaciones de esfuerzo y deflexión apropiadas.

Luego, se realiza el **análisis del diseño** con el uso de estos modelos, y se determinan la seguridad o la falla probables del diseño. Los resultados se **evalúan** junto con las propiedades de los **materiales de ingeniería** seleccionados, además de que se toma una decisión en el sentido de si procede continuar con este diseño, o bien, iterar para obtener una mejor solución regresando a una fase anterior del proceso.

Etapa de documentación

Una vez que la iteración suficiente en este proceso brinda resultados satisfactorios, se debería concluir de manera detallada con la **documentación** del diseño del elemento, o sistema, mediante dibujos de ingeniería, especificaciones de materiales y manufactura, entre otros. Si el enfoque resulta adecuado, una gran parte de la tarea de documentación se puede llevar a cabo en forma simultánea en etapas anteriores, llevando simplemente con claridad y precisión los registros de todos los supuestos, los cálculos y las decisiones de diseño a lo largo del proceso.

A.4 EL MODELO DE INGENIERÍA

El éxito de cualquier diseño depende significativamente de la validez, así como de lo adecuado de los modelos de ingeniería usados para predecir y analizar su comportamiento, antes de construir cualquier herramienta. La creación de un modelo útil de un diseño de ingeniería es quizá la cuestión más difícil y desafiante de todo el proceso. Su éxito depende en gran medida de la experiencia y habilidad. Lo más importante es una comprensión rigurosa de los principios y fundamentos de ingeniería. El modelo de ingeniería descrito es un tanto amorfo y tal vez consista en bosquejos de la configuración

geométrica y ecuaciones que describen su comportamiento. Se trata de un modelo matemático que describe el comportamiento físico del sistema. Tal modelo de ingeniería invariablemente requiere computadoras para resolverse. El manejo de herramientas computacionales para analizar modelos de ingeniería se estudia en la siguiente sección. Usualmente, más tarde, en el proceso surge un modelo físico o un prototipo, por lo que es necesario demostrar la validez del modelo de ingeniería con experimentos.

Estimación y análisis de primer orden

No debe exagerarse el valor de hacer modelos de ingeniería con sus diseños preliminares. A menudo, al comienzo de un diseño, el problema está definido tan vaga y deficientemente, que resulta difícil desarrollar un modelo comprensible y minucioso en forma de ecuaciones que describa por completo al sistema. El estudiante de ingeniería está acostumbrado a enfrentar problemas totalmente estructurados, de forma tal como "Dados *A*, *B* y *C*, obtenga *D*". Si uno puede encontrar las ecuaciones (el modelo) adecuada(o)s para resolver el problema, es muy sencillo encontrar la respuesta (la cual incluso sería igual a aquella del final del libro).

En la vida real, los problemas de diseño en ingeniería no son de este tipo. Carecen totalmente de **estructura**, por lo que antes de resolverlos el lector debe estructurarlos. Tampoco existe el "final del libro" para verificar la respuesta.* Tal situación pone muy nerviosos a la mayoría de estudiantes e ingenieros novatos, quienes enfrentan el "síndrome de la página en blanco" y no saben ni por dónde empezar. Una estrategia útil consiste en reconocer que

1. El lector debe empezar en algún lado.
2. Dondequiera que inicie, tal vez no sea el "mejor" lugar para hacerlo.
3. La magia de la iteración le permitirá regresar, mejorar su diseño y, a final de cuentas, lograr el éxito.

Con dicha estrategia en mente, el lector es libre para realizar alguna configuración de diseño inicial, suponer las restricciones que considere apropiadas y hacer un "análisis de primer orden" que sea tan sólo una estimación del comportamiento del sistema. Los resultados le permitirán identificar la forma de mejorar el diseño. Recuerde que es mejor obtener una respuesta aproximada, pero rápida, la cual le indique lo que funciona o no del diseño, que perder más tiempo para conseguir el mismo resultado, pero con más decimales. Con cada iteración exitosa mejorarán la comprensión del problema, la exactitud de sus supuestos, la complejidad de su modelo y la calidad de sus decisiones de su diseño. A final de cuentas, el lector será capaz de refinar su modelo para incluir todos los factores pertinentes (o identificarlos como irrelevantes) y obtener un análisis de un orden superior que le dé más confianza.

Los dibujos de ingeniería

Con frecuencia, un bosquejo del concepto es el punto inicial de un diseño. Éste puede ser un dibujo manual, pero siempre a una escala razonable, que muestre proporciones geométricas realistas. Dicho bosquejo cumple con el objetivo fundamental de comunicar el concepto a otros ingenieros o incluso al mismo lector. Una cosa es tener en mente un concepto vago y otra muy diferente plasmarlo en un dibujo, el cual como mínimo debería contar con tres o más vistas ortográficas, alineadas de acuerdo con una convención adecuada, pero también habrá de incluir una vista isométrica o trimétrica. La figura A-1 muestra el dibujo a mano de un diseño sencillo del montaje de un remolque para tractor.

* Un estudiante comentó una vez que "la vida es un problema non". Este autor (algo lento) tuvo que pedir una explicación al respecto; ésta fue la que le dieron: "La respuesta no se encuentra al final del libro."

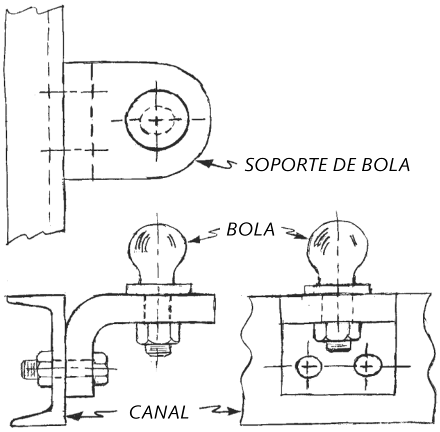


FIGURA A-1

Dibujo a mano del montaje de un remolque para tractor

Mientras esté incompleto, en cuanto al detalle necesario para la manufactura, el dibujo de ingeniería debería contener información suficiente para permitir el desarrollo de un modelo de ingeniería para análisis y diseño. Esto debe incluir, si bien aproximadamente, información fundamental de las dimensiones, los supuestos sobre el material y cualquier otro dato vinculado con el funcionamiento que sea necesario para mayor análisis. El dibujo de ingeniería contiene algunas especificaciones y supuestos adoptados, aun de manera implícita, al inicio del proceso de diseño.

A.5 INGENIERÍA Y DISEÑO ASISTIDOS POR COMPUTADORA

La computadora ha generado una verdadera revolución en el análisis y el diseño de ingeniería. Los problemas cuyos métodos de solución se conocen literalmente desde hace siglos, pero que hace sólo una generación eran prácticamente irresolubles debido a su alta exigencia en cuanto a cálculo, ahora se resuelven en minutos usando microcomputadoras poco costosas. En el pasado se desarrollaron tediosos métodos de solución gráfica, para solventar la carencia del poder de cálculo disponible sólo en las reglas de cálculo. Algunos de tales métodos de solución gráfica todavía tienen valor simplemente porque muestran los resultados de una forma comprensible. Sin embargo, uno ya no puede “hacer ingeniería” sin utilizar la más reciente y poderosa herramienta: la computadora.

Diseño asistido por computadora (CAD)

Conforme el diseño progresa, los dibujos manuales rudimentarios que se hacían en tiempos recientes son sustituidos por dibujos formales realizados con equipo de dibujo convencional o, como sucede ahora cada vez más frecuentemente con diseño asistido por computadora o software de dibujo. Si de por sí la diferencia entre ambos términos (ambos usan el acrónimo CAD) nunca fue clara (cuyo debate no se verá aquí), esa diferencia se desvanece aún más conforme se dispone de software de CAD más avanzado. Los sistemas de CAD originales, de hace una generación, eran en esencia herramientas de dibujo que permitían la creación por computadora de dibujos con muchas vistas, similares a los realizados a mano sobre un restirador en siglos pasados. Los datos almacenados en los primeros sistemas de CAD eran, estrictamente hablando, representaciones bidimensionales de proyecciones de la geometría tridimensional verdadera de una pieza.

A

En la base de datos se definían sólo los bordes de las piezas. Esto se denomina **modelo forma de alambre**. Algunos paquetes de CAD en 3-D manejan también representaciones de forma de alambre.

Las versiones actuales de la mayoría de los paquetes de software de CAD permiten (y algunas veces exigen) que la geometría de las piezas se codifique en una base de datos en 3-D como **modelos sólidos**. En éstos se definen los bordes y las caras. A partir de dicha información tridimensional, se generan de manera automática, si se desea, las vistas convencionales en 2-D. La ventaja principal de la creación de una base de datos con la geometría de un modelo sólido en 3-D, para cualquier diseño, es que se calcula rápidamente la información de las propiedades de su masa. (Esto no es posible en un modelo forma de alambre en 2-D o en 3-D.) Al diseñar la pieza de una máquina, por ejemplo, se necesita determinar la ubicación de su centro de gravedad (CG), su masa, el momento de inercia de su masa y las geometrías de la sección transversal en varias posiciones. La obtención de dicha información en un modelo bidimensional se hace sin el paquete de CAD, pues resulta tedioso y, cuando la geometría es compleja, sólo es aproximado. No obstante, si la pieza se diseña en un sistema de CAD de modelado sólido, como *ProEngineer*,[7] *Unigraphics*[4] o alguno de los muchos otros, es posible calcular las propiedades de la masa de las geometrías más complicadas.

Por lo general, los sistemas de modelado sólido ofrecen una interfase con uno o más programas de análisis de elementos finitos (FEA) y permiten transferir directamente la geometría del modelo al paquete FEA para el análisis de esfuerzo, vibración y transferencia de calor. Algunos sistemas de CAD incluyen una función de generación de mallas, la cual crea automáticamente la malla del FEA antes de enviar los datos al software de FEA. Dicha combinación de herramientas brinda un medio extremadamente poderoso para obtener diseños de gran calidad, donde los esfuerzos son conocidos con mucha mayor exactitud de lo que sería posible con técnicas de análisis convencionales cuando la geometría es compleja.

Si bien es altamente probable que los estudiantes que lean este libro utilicen herramientas de CAD con métodos de análisis de elementos finitos o de elementos de frontera (BEA) en su vida profesional, es necesario que entiendan a conciencia los fundamentos del análisis de esfuerzos aplicado. Ése es el propósito del presente texto. Las técnicas de FEA se estudiarán en el capítulo 2 y el apéndice C, pero no se profundizará en ellas. En cambio, se enfatizará en las técnicas clásicas de análisis de esfuerzos, para preparar los cimientos de una comprensión rigurosa de los fundamentos y su aplicación en el diseño de máquinas.

Los métodos de FEA y BEA se están convirtiendo rápidamente en los favoritos para la solución de problemas complicados de análisis de esfuerzos. Sin embargo, hay cierto riesgo al usarlos sin un entendimiento sólido de la tecnología que hay atrás de ellos. Tales métodos siempre darán *algunos* resultados. Por desgracia, dichos resultados pueden ser incorrectos si el problema no fue bien planteado y bien articulado con las condiciones adecuadas aplicadas al contorno. Para tener éxito en cualquier diseño es extremadamente importante ser capaz de reconocer resultados incorrectos de una solución asistida por computadora. El apéndice C ofrece una breve introducción al FEA. El estudiante debería tomar cursos de FEA y BEA para familiarizarse con dichas herramientas.

La figura A-2 ilustra un modelo sólido del soporte de la bola de la figura A-1 realizado en un paquete de software de CAD. La vista isométrica sombreada en la esquina superior derecha indica que el volumen sólido de la pieza está definido. Las otras tres vistas muestran proyecciones ortogonales de la pieza. La figura A-3 presenta los datos de las propiedades de la masa que se calculan con el software. La figura A-4 muestra una interpretación de forma de alambre de la misma pieza, generada a partir de la base de datos de la geometría sólida. La versión forma de alambre se usa sobre todo para acelerar el tiempo de dibujo en pantalla, cuando se trabaja sobre el modelo. Hay mucho menos información de cálculo para la pantalla de forma de alambre que para la interpretación sólida de la figura A-2.

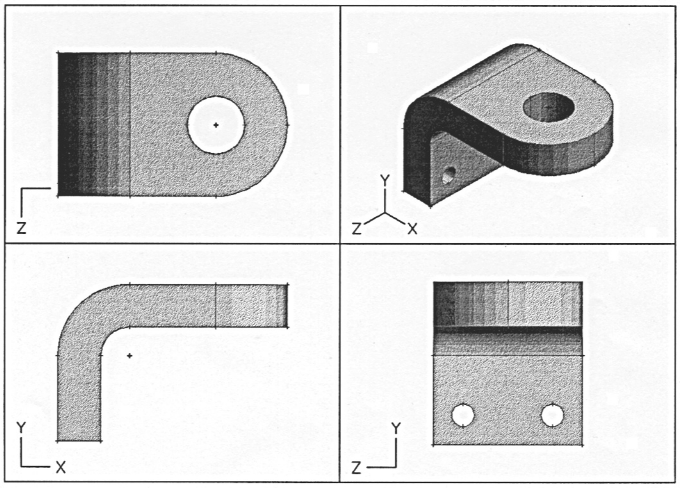


FIGURA A-2

Un modelo sólido de CAD del soporte de una bola para el montaje en el remolque del tractor de la figura A-1

La figura A-5 muestra un dibujo con muchas vistas ortogonales del soporte de la bola completamente dimensionada, que fue generada con un paquete de software de CAD. Otra gran ventaja de crear el modelo sólido de una pieza es que la información dimensional y de trayectoria de la herramienta, requerida para su manufactura, se puede generar en el sistema CAD y enviarse en línea por una red a una máquina controlada por computadora en el área de manufactura. Dicha característica permite la producción de piezas sin necesidad de dibujos en papel como los de la figura A-5. La figura A-6 muestra la misma pieza después de que se le aplicó, usando software de CAD, una malla de elemento finito antes de enviarlo al software de FEA para el análisis de esfuerzo.

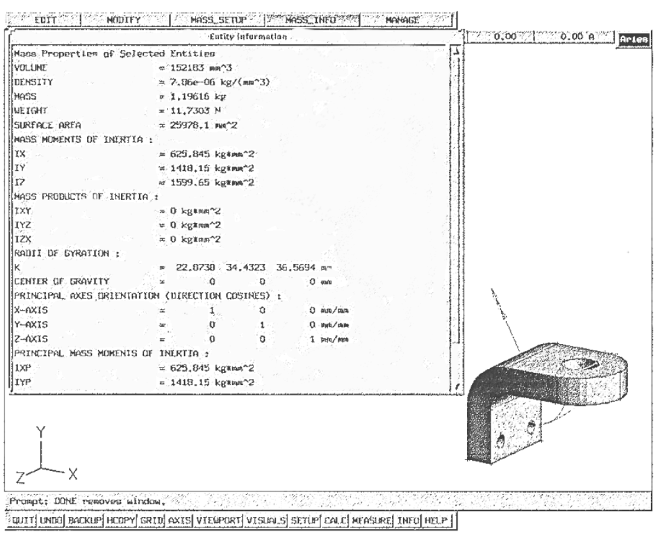


FIGURA A-3

Propiedades de la masa del soporte de la bola calculadas con el sistema CAD a partir de un modelo sólido

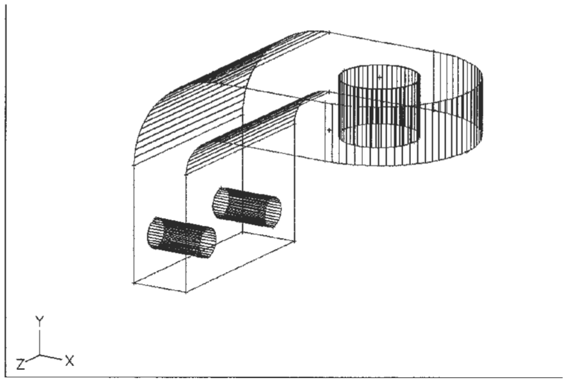


FIGURA A-4

La representación de forma de alambre del soporte de la bola generado a partir de su modelo sólido en el sistema CAD

Ingeniería asistida por computadora (CAE)

En general, las técnicas de CAD mencionadas anteriormente son un subconjunto de un tema más general de ingeniería asistida por computadora (CAE), lo cual implica que se debe tratar con algo más que la geometría de las piezas. Sin embargo, las diferencias entre CAD y CAE se continúan desdibujando conforme se dispone de paquetes de software más avanzados. De hecho, la descripción de uso de un sistema CAD de modelado sólido junto con un paquete FEA, como se describió en la sección previa, es un ejemplo de CAE. Cuando se incluye algún análisis de fuerzas, esfuerzos, deflexiones u otros aspectos del comportamiento físico del diseño

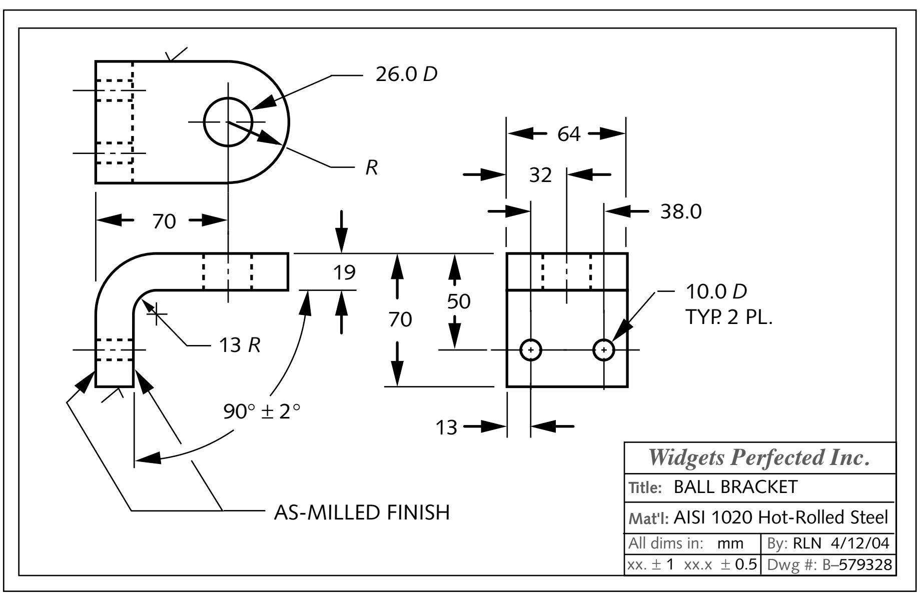


FIGURA A-5

Dibujo ortogonal de tres vistas, dimensionadas, realizado con un paquete de dibujo de CAD en dos dimensiones

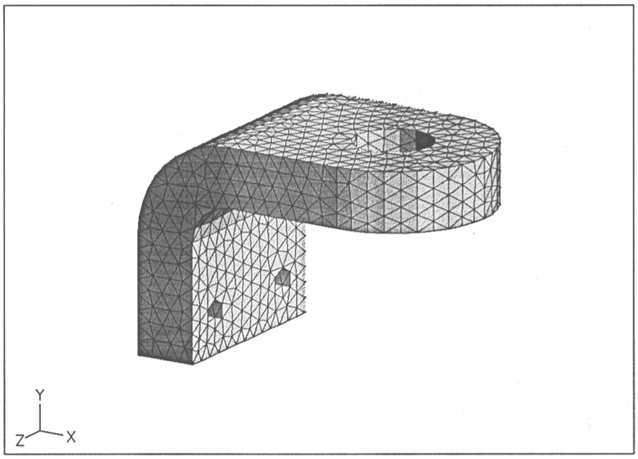


FIGURA A-6

Una malla de FEA aplicada al modelo sólido del soporte de una bola en el sistema de CAD

con o sin los aspectos de geometría sólida, el proceso se denomina CAE. Muchos paquetes de software comercial ofrecen una o más funciones de CAE. Los paquetes de software FEA y BEA mencionados se encuentran en esta categoría. Véase el apéndice C para información adicional del FEA. Se pueden hacer simulaciones de fuerzas dinámicas en mecanismos con paquetes como *ADAMS*[5] y *Working Model*.[6] Algunos paquetes de software como *ProEngineer*,[7] *Solidworks*,[12] *Unigraphics*[4] y otros combinan aspectos del sistema de CAD con capacidades de análisis general. Tales programas, basados en restricciones, permiten que las restricciones se apliquen al diseño que puede controlar la pieza geométrica conforme cambian los parámetros de diseño.

Otras clases de herramientas de CAE son los solucionadores de ecuaciones como *MATLAB*[11], *Mathcad*,[9] y *TK Solver*[8], así como hojas de cálculo como *Excel*.[10] Tales herramientas son de objetivo general y permiten cualquier combinación de ecuaciones codificadas de manera conveniente y, luego, manipulan el conjunto de ecuaciones (p. ej., el modelo de ingeniería) con diferentes datos de prueba y despliegan adecuadamente los resultados de manera tabular y gráfica. Los solucionadores de ecuaciones son invaluables en los problemas de diseño de máquinas para resolver ecuaciones de fuerza, esfuerzo y deflexión, pues permiten que rápidamente se hagan cálculos del tipo "que tal si". Los efectos de los cambios dimensionales o del material sobre los esfuerzos y las deflexiones de la pieza se pueden ver de inmediato. En ausencia de un verdadero sistema de modelado sólido, es posible usar un solucionador de ecuaciones para aproximar las propiedades de la masa de la pieza cuando se aplica la iteración a las propiedades de la geometría y los materiales en los diseños de la pieza prueba. Así se mejora rápidamente la iteración para obtener una solución aceptable.

El CD-ROM incluido contiene un gran número de modelos con varios solucionadores de ecuaciones, los cuales incluyen los ejemplos y los estudios de caso presentados en el libro. Además, en archivos PDF, una introducción al uso de TK *Solver* y *Mathcad*, junto con ejemplos de su uso. Asimismo, se incluyen algunos programas de cómputo escritos por el usuario tales como MOHR, CONTACT, ASDEQ, FOURBAR, FIVEBAR, SIXBAR, SLIDER, DYNACAM y MATRIX, que ayudan al cálculo de cargas y esfuerzos dinámicos cuando se resuelven los problemas de contorno abierto del diseño asignado.

Sin embargo, se debe estar consciente de que tales herramientas computacionales son sólo eso, herramientas, y no sustituyen el cerebro humano. Sin una comprensión cabal de los fundamentos de ingeniería por parte del usuario, la computadora no dará buenos resultados. Si entra basura, sale basura. *Caveat Lector*.

Exactitud de las computadoras

Las computadoras y las calculadoras ofrecen muy fácilmente respuestas numéricas con muchas cifras significativas. Antes de anotar todos esos números, el lector debe estar seguro de verificar la exactitud de los supuestos y los datos iniciales. Si, por ejemplo, las cargas aplicadas se obtuvieron con sólo dos cifras significativas, será incorrecto y engañoso expresar los esfuerzos calculados con más cifras significativas de las que tienen sus datos de entrada. Sin embargo, es válido y adecuado efectuar todos los cálculos intermedios con la mayor precisión posible con el uso de sus herramientas computacionales. Esto disminuye los errores por redondeo en los cálculos. Pero, cuando se hace, hay que redondear los resultados a un nivel consistente con los datos conocidos o supuestos.

A.6 EL REPORTE DE INGENIERÍA*

La comunicación de ideas y resultados es un aspecto muy importante en la ingeniería. Muchos se imaginan en la actividad profesional pasando la mayoría de su tiempo en la ejecución de cálculos de naturaleza similares a aquellos que resuelven como estudiantes de ingeniería. Por fortuna, es raro que eso suceda, ya que si así fuera sería muy aburrido. En realidad, los ingenieros dedican la mayoría de su tiempo a la comunicación con otros, ya sea verbal o por escrito. De la misma manera, redactan propuestas e informes técnicos, llevan a cabo presentaciones e interactúan con personal de apoyo. Cuando se realiza un diseño, por lo general es necesario presentar los resultados a un cliente, a colegas o al jefe. La forma usual de presentación es un reporte técnico formal. Además de una descripción escrita del diseño, tales informes habitualmente contienen dibujos o bosquejos de ingeniería, como se describió anteriormente, así como tablas y gráficas de datos calculados a partir del modelo de ingeniería.

Por lo tanto, es muy importante que el estudiante de ingeniería desarrolle habilidades de comunicación. *Quizás el lector sea la persona más inteligente del mundo, pero nadie lo sabrá si no es capaz de comunicar sus ideas de manera clara y concisa*. De hecho, si no puede explicar lo que haya hecho es que tal vez aún no lo entiende. Para darle alguna experiencia en tal destreza, las tareas del proyecto de diseño del apéndice D fueron previstas para escribirse en informes o reportes técnicos formales. Encontrará mayor información acerca de la escritura de reportes de ingeniería en las publicaciones sugeridas en la bibliografía.

A.7 FACTORES DE SEGURIDAD Y CÓDIGOS DE DISEÑO

La calidad de un diseño se mide de diferentes maneras, pues siempre es necesario calcular uno o más factores de seguridad para estimar la probabilidad de falla. Puede haber códigos de diseño legales, o generalmente aceptados, que también se deban tener presentes.

* Extracto de Norton, *Diseño de Maquinaria*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2004, con autorización del editor.

Factor de seguridad*

El factor de seguridad, o coeficiente de seguridad, se puede expresar de muchas formas. Por lo común, se trata de una razón de dos cantidades con las mismas unidades, tales como resistencia/esfuerzo, carga crítica/carga aplicada, carga de falla/sobrecarga esperada en servicio, ciclos máximos/ciclos aplicados, o velocidad segura máxima/velocidad de operación. Un factor de seguridad no tiene unidades.

La manera de expresar un factor de seguridad se determina con base en la naturaleza de la carga sobre la pieza. Considere, por ejemplo, la carga sobre la pared cilíndrica de un contenedor de agua que nunca estará "lleno más allá de su capacidad", con un líquido de densidad conocida dentro de un intervalo de temperatura también conocido. Puesto que dicha carga es totalmente predecible en el tiempo, una comparación de la resistencia del material con el esfuerzo en la pared del tanque lleno sería un factor de seguridad adecuado. Hay que observar en este ejemplo que se debe considerar la posibilidad de que, con el tiempo, la pared se oxide y con ello reduzca su espesor. (Véase un análisis de esfuerzos en paredes cilíndricas en la sección 2.17 y un estudio sobre la corrosión en la sección 5.6.)

Si el depósito de agua cilíndrico se encuentra sobre pilares como columnas, entonces el factor de seguridad adecuado para las columnas sería la razón de la carga crítica de pandeo de la columna sobre la carga aplicada con el depósito lleno de agua. (Véase la sección 2.16 para un análisis del pandeo de columnas.)

Si una pieza está sujeta a una carga que varía cíclicamente con el tiempo, puede experimentar falla por fatiga. Para algunos tipos de cargas de fatiga, la resistencia de un material se expresa como el número máximo de ciclos del esfuerzo total inversos a un nivel de esfuerzo determinado. En dichos casos, resulta adecuado expresar el factor de seguridad como una razón del número máximo de ciclos a los que se espera que el material falle entre el número de ciclos aplicados a la pieza durante su vida de servicio esperada. (Véase el capítulo 4 para un estudio de fenómenos de fatiga-falla y varios enfoques para el cálculo de factores de seguridad en esas condiciones.)

El factor de seguridad de una pieza, como una polea giratoria o un volante, se expresa frecuentemente como una razón de su velocidad máxima segura entre la velocidad máxima esperada durante su servicio. En general, si los esfuerzos en las piezas son funciones lineales de las cargas aplicadas durante el servicio, y tales cargas son predecibles, entonces el factor de seguridad, expresado como resistencia/esfuerzo o la carga de falla/carga aplicada, dará el mismo resultado. No todas las situaciones se ajustan a dicho criterio; algunas requieren una razón no lineal. Un ejemplo es una columna, porque sus esfuerzos son funciones no lineales de la carga (véase la sección 2-16). Por lo tanto, la carga (falla) crítica de una columna en particular se debe calcular por comparación con la carga aplicada.

Surge otra complicación cuando las magnitudes de las cargas aplicadas esperadas no se pueden predecir con exactitud. Lo anterior es verídico en casi cualquier aplicación donde el uso (y, por lo tanto, la carga) de la pieza o el dispositivo está controlado por seres humanos. Por ejemplo, no hay modo de prevenir que alguien intente levantar un camión de 10 toneladas con un gato diseñado para levantar un automóvil de 2 toneladas. Cuando falla el gato, podría culparse al fabricante (y al diseñador), aun cuando quizá la falla se deba más a la "tuerca detrás del manejo del gato". En situaciones en las cuales el usuario somete el dispositivo a condiciones de sobrecarga, uno asume que tiene que considerarse la sobrecarga para calcular el factor de seguridad, con base en una razón de la carga que causa la falla entre la sobrecarga supuesta para el servicio. En tales situaciones, quizá también sean necesarios anuncios de advertencia contra el uso inapropiado.

Puesto que posiblemente haya más de un modo de fallas potenciales para cualquier elemento de la máquina, también es posible encontrar más de un valor del factor de seguridad N. El valor más pequeño de N para cualquier pieza es de gran importancia,

* También se llama *coeficiente de seguridad*. En este texto se usan ambos términos de forma indistinta.

ya que predice el modo de falla más probable. Cuando N se reduce a 1, el esfuerzo en la pieza es igual a la resistencia del material (o la carga aplicada es igual a la carga a la que falla) y ocurre la falla. Por lo tanto, siempre es deseable que N sea mayor que 1.

Elección de un factor de seguridad

Con frecuencia la selección de un coeficiente de seguridad es confusa para el diseñador novato. El factor de seguridad se puede visualizar como la medida de la incertidumbre del diseñador en los datos usados en los modelos analíticos, la teoría de fallas y las propiedades del material, por lo que tendría que seleccionarse en forma adecuada. Qué tan grande debe ser N, depende de muchas cuestiones, incluyendo nuestro nivel de confianza en el modelo con que se basan los cálculos, nuestro conocimiento del intervalo de posibles condiciones de carga durante el servicio, así como nuestra confianza en la información disponible acerca de resistencia del material. Si se hacen pruebas exhaustivas sobre prototipos físicos de nuestro diseño, para probar la validez de nuestro modelo de ingeniería y del diseño, y se generan datos de prueba de las resistencias del material específico entonces se podría utilizar un coeficiente de seguridad menor. Si el modelo no fue exhaustivamente probado o la información de las propiedades del material no es confiable, se requiere una N mayor. En ausencia de normas de diseño que especifiquen N para casos particulares, la elección del factor de seguridad implica el juicio de ingeniería. Un enfoque razonable consiste en determinar las cargas más grandes esperadas durante el servicio (que incluye posibles sobrecargas) y las resistencias mínimas esperadas del material, así como en establecer los factores de seguridad con base en tales datos. En consecuencia, el coeficiente de seguridad se convierte en una medida razonable de la incertidumbre.

Si el lector acostumbra volar, quizá no le dé mucha confianza saber que los coeficientes de seguridad para aviones comerciales están en el intervalo de 1.2 a 1.5. Las aeronaves militares pueden tener $N < 1.1$, pero su tripulación utiliza paracaídas (por eso los pilotos de prueba merecen ganar salarios altos). Los misiles tienen $N = 1$, aunque no llevan tripulación, pero de cualquier forma no se espera que regresen. Los factores de seguridad pequeños en las aeronaves son necesarios para reducir el peso y se justifican por un modelado analítico avanzado (que por lo general incluye el FEA), pruebas de los materiales reales que se usan, pruebas exhaustivas de los diseños de prototipos e inspecciones rigurosas durante el servicio para detectar fallas incipientes en el equipo. La fotografía con la que inicia este apéndice muestra una plataforma de prueba elaborada por la Boeing Aircraft Co., la cual sirve para probar mecánicamente el armazón del prototipo a escala natural o producir el avión, aplicando fuerzas dinámicas y se miden sus efectos.

Quizá resulte difícil predecir las clases de cargas que un montaje experimentará en servicio, sobre todo cuando dichas cargas están bajo el control del usuario final, o de la madre naturaleza. Por ejemplo, ¿qué cargas experimentarán la rueda y la estructura de una bicicleta? Ello depende en gran medida de la edad, el peso y la temeridad del ciclista, además de si la usa en una carretera o a campo traviesa. El mismo problema de incertidumbre de carga existe en todos los equipos de transporte: barcos, aeronaves y automóviles, entre otros. Los fabricantes de tales dispositivos se comprometen a efectuar programas de prueba exhaustivos que midan las cargas en servicios típicos. Véase las figuras 1-16 (p. 36) y 4-7 (p. 245) con ejemplos de datos de carga en servicio.

En el diseño de máquinas es posible definir lineamientos para la selección del coeficiente de seguridad, lo cual se hace con base en la calidad y lo adecuado de los datos disponibles acerca de las propiedades del material, las condiciones ambientales esperadas comparadas con aquéllas bajo las cuales se obtuvieron los datos de prueba del material y la exactitud de los modelos de análisis de carga —y esfuerzo— desarrollados para el análisis. La tabla A-3 muestra un conjunto de factores para materiales dúctiles, los que es posible seleccionar en cada una de las tres categorías listadas, según el conocimiento

Tabla A-3 Factores para determinar el coeficiente de seguridad en materiales dúctiles

Información	Calidad de la información	Factor
		F1
Datos de las propiedades del material obtenidos con pruebas	Se utilizó material real para la prueba	1.3
	Están disponibles los datos de prueba del material representativo	2
	Están disponibles los datos de prueba del material aceptablemente representativo	3
	Están disponibles los datos de prueba del material poco representativo	5+
		F2
Condiciones ambientales donde se utilizará	Son idénticas a las condiciones de las pruebas del material	1.3
	Condiciones de temperatura ambiente	2
	Ambiente moderadamente exigente	3
	Ambiente extremadamente exigente	5+
		F3
Modelos analíticos de carga y esfuerzo	Los modelos se han probado con experimentos	1.3
	Los modelos representan exactamente el sistema	2
	Los modelos representan aproximadamente el sistema	3
	Los modelos son aproximaciones burdas del sistema	5+

del diseñador o la evaluación de la calidad de información utilizada. Luego, el coeficiente integral de seguridad se toma como el mayor de los tres factores elegidos. Dada la incertidumbre implicada, un coeficiente de seguridad no debería tener más de un decimal de aproximación.

$$N_{dúctil} \cong MÁX(F1, F2, F3) \tag{A.1a}$$

La ductilidad o la fragilidad de un material también son puntos a considerar. Los materiales frágiles se diseñan contra la resistencia máxima, es decir, la falla significa fractura. Los materiales dúctiles bajo cargas estáticas se diseñan contra la resistencia a la rotura, por lo que se espera que proporcionen alguna advertencia visible de falla antes de la fractura, a menos que unas grietas indiquen la posibilidad de una falla por fractura mecánica (véase las secciones 3-6 y 4-5). Por tales motivos, el coeficiente de seguridad para materiales quebradizos se considera el doble del que se usaría para un material dúctil en la misma situación:

$$N_{frágil} \cong 2 * MÁX(F1, F2, F3) \tag{A.1b}$$

Dicho método para determinar el factor de seguridad es sólo un lineamiento para tener un punto de partida y, evidentemente, está sujeto al juicio del diseñador que selecciona los factores de cada categoría. El diseñador tiene la responsabilidad final para garantizar que el diseño sea seguro. Un coeficiente de seguridad mayor que cualquiera de los mostrados en la tabla A-3 puede ser adecuado en algunas circunstancias.

Normas de diseño y seguridad

Muchas sociedades de ingeniería y agencias gubernamentales han desarrollado normas en áreas específicas del diseño de ingeniería. La mayoría son únicamente recomendaciones, pero algunas tienen la fuerza de la ley. La ASME brinda recomendaciones para que ciertos coeficientes de seguridad se usen en aplicaciones específicas como calderas de vapor y recipientes de presión. Las normas de construcción están legisladas en la

mayoría de los estados y las ciudades de Estados Unidos y, por lo general, se utilizan en estructuras de acceso público o en sus componentes, como elevadores o escaleras mecánicas. Algunas veces los coeficientes de seguridad se determinan con el empleo de tales normas y pueden ser bastante grandes. (El código para escaleras mecánicas en un estado requiere un coeficiente de seguridad igual a 14.) Definitivamente, cuando interviene la seguridad humana se justifican los valores altos del factor de seguridad *N*. Sin embargo, tienen un castigo en el peso y en el costo, en virtud de que a menudo las piezas son más pesadas para alcanzar los valores altos de *N*. El ingeniero de diseño siempre debe estar consciente de esos códigos y esas normas, así como apegarse a ellos donde sean aplicables.

La siguiente lista presenta sociedades de ingeniería, así como organizaciones gubernamentales, industriales e internacionales que publican normas y códigos de interés potencial para los ingenieros mecánicos. Los domicilios y los datos de sus publicaciones se pueden obtener en cualquier librería técnica o en Internet.

American Gear Manufacturers Association (AGMA) http://www.agma.org/

American Institute of Steel Construction (AISC) http://www.aisc.org/

American Iron and Steel Institute (AISI) http://www.steel.org/

American National Standards Institute (ANSI) http://www.ansi.org/

American Society for Metals (ASM International) http://www.asm-intl.org/

American Society of Mechanical Engineers (ASME) http://www.asme.org/

American Society of Testing and Materials (ASTM) http://www.astm.org/

American Welding Society (AWS) http://www.aws.org/

Anti-Friction Bearing Manufacturers Association (AFMBA)

International Standards Organization (ISO) http://www.iso.ch/iso/en

National Institute for Standards and Technology (NIST)* http://www.nist.gov/

Society of Automotive Engineers (SAE) http://www.sae.org/

Society of Plastics Engineers (SPE) http://www.4spe.org/

Underwriters Laboratories (UL) http://www.ul.com/

A.8 CONSIDERACIONES ESTADÍSTICAS

A

Como en cualquiera otra área o disciplina, nada es absoluto en ingeniería. Las resistencias de los materiales variarán de un ejemplo a otro. El tamaño real de la "misma" pieza fabricada masivamente variará debido a las tolerancias de manufactura. Como resultado, se habrían de tomar en cuenta las distribuciones estadísticas de dichas propiedades en los cálculos. Los datos publicados de las resistencias de materiales pueden estar definidos como valores mínimos o valores promedio de pruebas realizadas sobre muchos especímenes. Si se trata de un promedio, hay 50% de probabilidades de que una muestra de ese material seleccionada al azar sea más débil o más fuerte que el valor promedio publicado. Para protegerse contra fallas, se podría reducir el valor de la resistencia del material que empleará en los cálculos a un nivel incluya un porcentaje mayor de la población. Para hacerlo, se requiere algún conocimiento de los fenómenos estadísticos y de su cálculo. Todos los ingenieros deben tener este conocimiento e incluir un curso de estadística en su currículum. Algunos de los aspectos fundamentales de la estadística se exponen en el apéndice B.

Formalmente, la National Bureau of Standards (NBS)

A.9 UNIDADES*

En ingeniería se emplean varios sistemas de unidades diferentes. Los más comunes en Estados Unidos son el ***sistema pie-libra-segundo*** (***fps***), el ***sistema pulgada-libra-segundo*** (***ips***) y el ***sistema internacional*** (***SI***). El sistema métrico ***centímetro, gramo, segundo*** (***cgs***) se usa con más frecuencia en Estados Unidos, sobre todo en compañías internacionales; por ejemplo, en la industria automotriz. Todos los sistemas se crearon a partir de la elección de tres cantidades en la expresión general de la segunda ley de Newton,

$$F = \frac{mL}{t^2} \tag{A.2a}$$

donde F es la fuerza, m es la masa, L es la longitud y t es el tiempo. Pueden elegirse las unidades para cualesquiera tres de estas variables y después la otra se deduce en función de las unidades seleccionadas. Las tres unidades elegidas se conocen como *unidades fundamentales* (o *básicas*), mientras la restante es una *unidad derivada*.

La mayoría de los errores en la conversión de cálculos, entre uno u otro de los sistemas usuales en Estados Unidos y el SI, se deben al hecho de que este último utiliza un conjunto diferente de unidades básicas que los sistemas estadounidenses, los cuales eligen la ***fuerza***, la *longitud* y el *tiempo* como unidades fundamentales. La masa es entonces una unidad derivada de los sistemas estadounidenses, que se designan como *sistemas gravitacionales* pues el valor de la masa depende de la constante gravitacional local. En el **SI** se adoptan la ***masa***, la *longitud* y el *tiempo* como unidades básicas, en tanto que la unidad de fuerza es una unidad derivada. Por lo tanto, el SI se denomina *sistema absoluto*, ya que la masa es fundamental y su valor no depende de la gravedad local.

El sistema estadounidense ***pie-libra-segundo*** (***fps***) requiere que todas las longitudes se midan en pies (*ft*), las fuerzas en libras (lb) y el tiempo en segundos (*seg*). En consecuencia, la masa se deriva de la ley de Newton como

$$m = \frac{Ft^2}{L} \tag{A.2b}$$

y sus unidades son libras segundos al cuadrado sobre **pie** (lb-seg^2/ft) = **slugs**.

El sistema estadounidense ***pulgada-libra-segundo*** (***ips***) requiere que todas las longitudes se midan en pulgadas (*in*), las fuerzas en libras (lb) y el tiempo en segundos (seg). Entonces, la masa se deriva de la ley de Newton, ecuación A.2*b*, pero las unidades son ahora libras segundos al cuadrado sobre **pulgada** (lb-s^2/in) = **blobs**†

¡Esta unidad de masa no es el slug! ¡Un "blob" tiene un valor de 12 slugs!

El peso se define como la fuerza ejercida por la gravedad sobre un objeto. Probablemente el error más común que cometen los estudiantes en la aplicación de las unidades es mezclar los dos sistemas (el *fps* y el *ips*) cuando convierten unidades de peso (las libras fuerza) a unidades de masa. Observe que la constante de aceleración gravitacional (g o g_c) en la Tierra, a nivel del mar, vale aproximadamente 32.17 **pies** por segundo al cuadrado, lo cual equivale a 386 pulgadas por segundo al cuadrado. La relación entre masa y peso es:

masa = peso / aceleración gravitacional

$$m = \frac{W}{g_c} \tag{A.3}$$

* Extracto de Norton, *Diseño de Maquinaria*, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, con autorización del editor.

† Es lamentable que la unidad de masa en el sistema inglés en la forma *ips* nunca haya recibido un nombre oficial, como en el caso del *slug* aplicado a la unidad de masa del sistema inglés en la forma *fps*. El autor se atreve a sugerir que la unidad de masa en el sistema tipo *ips* se denomine *blob* (bl), para distinguirla más claramente de la unidad *slug* (sl) y ayudar así al estudiante a evitar algunos de los errores frecuentes en el uso de unidades que se mencionan a continuación. Doce *slugs* = 1 *blob*. El nombre *blob*, que es casi igual de burdo que el *slug*, es fácil de recordar, implica la idea de masa y tiene una abreviatura conveniente (bl), que es un anagrama de la abreviatura de la libra (lb). Además, si el lector ha visto a alguna babosa arrastrarse en un jardín, o sobre una planta, sabe que parecería ser una especie de "*pequeña gota*".

Debe ser claro que si se miden todas las longitudes en **pulgadas**, y luego se utiliza $g = g_c = 32.17$ **pies**/seg^2 para calcular la masa, se comete un error con un *factor de* 12 en los resultados. Se trata de un error considerable, lo bastante grande para que se estrelle el avión que se diseñó. Aún peor es el error del estudiante que siempre omite convertir peso a masa *en todos sus cálculos*. Habrá cometido un error de 32 o 386, ¡lo cual es suficiente para que se hunda la embarcación diseñada!*

La ecuación de la segunda ley de Newton requiere el valor de la masa para determinar las fuerzas debidas a aceleraciones:

$$F = ma \tag{A.4a}$$

En esta ecuación, las unidades de masa son *g*, *kg*, *slugs* o *blobs* dependiendo del sistema de unidades utilizado. Por lo tanto, en el sistema inglés el peso W (lb$_f$) tiene que dividirse entre la aceleración debida a la gravedad *g*, como se indica en la ecuación A.3, para obtener la masa adecuada para la ecuación A.4*a*.

Para aumentar la confusión está el uso común de la unidad ***libras masa*** (lb$_m$). Dicha unidad se utiliza con frecuencia en dinámica de fluidos y termodinámica; proviene del uso de una forma ligeramente distinta de la ecuación de Newton:

$$F = \frac{ma}{g_c} \tag{A.4b}$$

donde m = masa en lb$_m$, a = aceleración y g_c = la constante gravitacional. En la Tierra, el valor de la **masa** de un objeto medida en ***libras masa*** (lb$_m$) es *numéricamente igual* a su **peso** en ***libras fuerza*** (lb$_f$). Sin embargo, el estudiante *debe recordar dividir* el valor de m en lb$_m$ entre g_c cuando use esta forma de la ecuación de Newton. Por consiguiente, las lb$_m$ se dividen entre 32.17 o entre 386 cuando se calcula una fuerza dinámica. El resultado será el mismo que cuando la masa se expresa en slugs o blobs en la ecuación de la forma $F = ma$. Recuerde que en la Tierra, en números redondos y al nivel del mar,

$$1 \text{ lb}_m = 1 \text{ lb}_f \qquad 1 \text{ slug} = 32.17 \text{ lb}_f \qquad 1 \text{ blob} = 386 \text{ lb}_f$$

El ***sistema internacional (SI)*** requiere que las longitudes se midan en metros (m), la masa en kilogramos (kg) y el tiempo en segundos (seg). Este sistema algunas veces se denomina sistema *mks*. La fuerza se obtiene de la ley de Newton y las unidades son:

$$\text{kg m/seg}^2 = \text{newtons}$$

En el *SI* hay distintos nombres para la masa y la fuerza, los cuales alivian un poco la confusión.† Cuando se convierte entre el *SI* y el sistema estadounidense, se debe tener cuidado con el hecho de que la masa se convierta de kilogramos (kg), ya sea a slugs (sl) o a blobs (bl), y la fuerza, de newtons (N) a libras (lb). La constante gravitacional (g_c) en el *SI* es de aproximadamente 9.8 m/seg^2.

El sistema *cgs* requiere que las longitudes se midan en centímetros (cm), la masa en gramos (g) y el tiempo en segundos (seg). La fuerza se mide en dinas. El *SI* es el que se prefiere generalmente por encima del sistema *cgs*.

Los sistemas de unidades usados en este libro son el sistema estadounidense *ips* y el *SI*. La mayoría de los diseños de máquinas en Estados Unidos se realizan mediante el sistema *ips*; sin embargo, el *sistema internacional* se vuelve cada vez más común.† La tabla A-4 muestra algunas variables utilizadas en este libro y sus unidades. La tabla A-5 muestra varios factores de conversión entre las unidades más comúnmente utilizadas. El estudiante siempre debe tener la precaución de verificar las unidades en cualquier ecuación escrita para la solución de un problema, ya sea en la escuela o en el ejercicio profesional.

* Una sonda espacial de 125 millones de dólares se perdió porque la NASA falló al convertir datos que se habían proporcionado en unidades *ips* por su contratista, la Lockheed Aerospace, a unidades métricas, que usaban los programas de las computadoras de la Agencia para controlar la nave espacial. Se suponía que debía orbitar Marte, pero en vez de eso se quemó en la atmósfera marciana o se estrelló en el planeta rojo debido a este error en unidades. *Fuente*: *The Boston Globe, 1 de octubre de 1999, p. 1.*

† Un recurso valioso de información sobre el uso adecuado de unidades del SI se encuentra en el sitio de la U.S. Government NIST en http://physics.nist.gov/cuu/Units/units.html

Otro excelente recurso acerca del uso adecuado de las unidades métricas en el diseño de máquinas se encuentra en el folleto *Metric is Simple*, publicado y distribuido por la compañía de sujetadores Bossard International Inc, 235 Heritage Avenue, Portsmouth, NH 03801 http://www.bossard.com/

Tabla A-4 Variables y unidades
Unidades básicas en negritas; abreviaturas entre paréntesis

Variable	Símbolo	unidad ips	unidad fps	unidad del SI
Fuerza	F	**libras (lb)**	**libras (lb)**	newtons (N)
Longitud	l	**pulgadas (in)**	**pies (ft)**	**metros (m)**
Tiempo	t	**segundos (seg)**	**segundos (seg)**	**segundos (seg)**
Masa	m	lb-seg^2/in (bl)	lb-seg^2/ft (sl)	**kilogramos (kg)**
Peso	W	libras (lb)	libras (lb)	newtons (N)
Presión	p	psi	psf	N/m^2 = Pa
Velocidad	v	in/seg	ft/seg	m/seg
Aceleración	a	in/seg^2	ft/seg^2	m/seg^2
Esfuerzo	σ, τ	psi	psf	N/m^2 = Pa
Ángulo	θ	Grados	Grados	Grados
Velocidad angular	ω	radianes/seg	radianes/seg	radianes/seg
Aceleración angular	α	radianes/seg^2	radianes/seg^2	radianes/seg^2
Torque	T	lb-in	lb-ft	N-m
Momento de inercia de la masa	I	lb-in-seg^2	lb-ft-seg^2	kg-m^2
Momento de inercia del área	I	in^4	ft^4	m^4
Energía	E	in-lb	ft-lb	joules = N-m
Potencia	P	in-lb/seg	ft-lb/seg	N-m/seg = watt
Volumen	V	in^3	ft^3	m^3
Peso específico	ν	lb/in^3	lb/ft^3	N/m^3
Densidad de masa	ρ	lb/in^3	sl/ft^3	kg/m^3

Si una ecuación se plantea adecuadamente, se deberían cancelar todas las unidades a uno y otro lados del signo igual. Si no es así, entonces el estudiante puede estar *absolutamente seguro* de que es ***incorrecta***. Por desgracia, el balance en las unidades de una ecuación no garantiza que sea correcta, ya que puede tener otros errores. Siempre compruebe dos veces sus resultados; podría salvar una vida.

A

EJEMPLO A-1

Conversión de unidades

Problema **Se conoce el peso en lb_f de un automóvil. Conviértalo a unidades de masa en los sistemas *SI*, *cgs*, *fps* e *ips*. También conviértalo a lb_m.**

Se proporciona **El peso = 4 500 lb_f.**

Suposiciones **El automóvil se encuentra en la tierra al nivel del mar.**

Tabla A-5 Factores de conversión de las unidades seleccionadas

Estos (y otros) factores de conversión se encuentran en los archivos UNITMAST y STUDENT

Multiplique esto	por	esto	para obtener	esto
aceleración				
in/seg^2	x	0.0254	=	m/seg^2
ft/seg^2	x	12	=	in/seg^2
ángulos				
radián	x	57.2958	=	grado
área				
in^2	x	645.16	=	mm^2
ft^2	x	144	=	in^2
momento de inercia del área				
in^4	x	416 231	=	mm^4
in^4	x	4.162*E*–07	=	m^4
m^4	x	1.0*E*+12	=	mm^4
m^4	x	1.0*E*+08	=	cm^4
ft^4	x	20 736	=	in^4
densidad				
lb/in^3	x	27.6805	=	g/cc
lb/in^3	x	1 728	=	lb/ft^3
g/cc	x	0.001	=	g/mm^3
kg/m^3	x	1.0E–06	=	g/mm^3
fuerza				
lb	x	4.448	=	N
N	x	1.0*E*+05	=	dina
ton (corta)	x	2 000	=	lb
longitud				
in	x	25.4	=	mm
ft	x	12	=	in
masa				
blob	x	386	=	lb
slug	x	32.17	=	lb
blob	x	12	=	slug
kg	x	2.205	=	lb
kg	x	9.8083	=	N
kg	x	1 000	=	g
momento de inercia de la masa				
lb-in-seg^2	x	0.1138	=	N-m-seg^2
momentos y energía				
in-lb	x	0.1138	=	N-m
ft-lb	x	12	=	in-lb
N-m	x	8.7873	=	in-lb
N-m	x	0.7323	=	ft-lb
potencia				
hp	x	550	=	ft-lb/seg
hp	x	33 000	=	ft-lb/min
hp	x	6 600	=	in-lb/seg
hp	x	745.7	=	watts
N-m/seg	x	8.7873	=	in-lb/seg
presión y esfuerzo				
psi	x	6 894.8	=	Pa
psi	x	6.895*E*-3	=	MPa
psi	x	144	=	psf
kpsi	x	1 000	=	psi
N/m^2	x	1	=	Pa
N/mm^2	x	1	=	MPa
constante de resorte				
lb/in	x	175.126	=	N/m
lb/ft	x	0.08333	=	lb/in
intensidad de esfuerzo				
MPa-m$^{0.5}$	x	0.909	=	kpsi-in$^{0.5}$
velocidad				
in/seg	x	0.0254	=	m/seg
ft/seg	x	12	=	in/seg
rad/seg	x	9.5493	=	rpm
volumen				
in^3	x	16 387.2	=	mm^3
ft^3	x	1 728	=	in^3
cm^3	x	0.061023	=	in^3
m^3	x	1.0*E*+9	=	mm^3

Solución

1. La ecuación A.4*a* (p. 868) es válida para los cuatro primeros sistemas listados.

   Para el sistema *fps*:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{4\,500 \text{ lb}_\text{f}}{32.17 \text{ ft/seg}^2} = 139.9 \; \frac{\text{lb}_\text{f} - \text{seg}^2}{\text{ft}} = 139.9 \text{ slugs} \qquad (a)$$

Para el sistema *ips*:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{4\,500 \text{ lb}_\text{f}}{386 \text{ in/seg}^2} = 11.66 \; \frac{\text{lb}_\text{f} - \text{seg}^2}{\text{in}} = 11.66 \text{ blobs} \qquad (b)$$

Para el sistema *SI*:

$$W = 4\,500 \text{ lb} \; \frac{4.448 \text{ N}}{\text{lb}} = 20\,016 \text{ N}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{20\,016 \text{ N}}{9.81 \text{ m/seg}^2} = 2\,040 \; \frac{\text{N} - \text{seg}^2}{\text{m}} = 2\,040 \text{ kg} \qquad (c)$$

Para el sistema *cgs*:

$$W = 4\,500 \text{ lb} \; \frac{4.448E5 \text{ dinas}}{\text{lb}} = 2.002E9 \text{ dinas}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{2.002E9 \text{ dinas}}{981 \text{ cm/seg}^2} = 2.04E6 \; \frac{\text{dinas} - \text{seg}^2}{\text{cm}} = 2.04E6 \text{ g} \qquad (d)$$

2. Para la masa expresada en lb_m, se debe usar la ecuación A.4*b* (p. 868).

$$m = W\frac{g_c}{g} = 4\,500 \text{ lb}_\text{f} \, \frac{386 \text{ in/seg}^2}{386 \text{ in/seg}^2} = 4\,500 \text{ lb}_\text{m} \qquad (e)$$

Observe que lb_m es numéricamente igual a lb_f; por ello, no debe usarse como una unidad de masa, a menos que se utilice la forma de la ley de Newton expresada en la ecuación A.4*b*.

A.10 RESUMEN

El diseño llega a ser divertido y frustrante al mismo tiempo. Como los problemas de diseño son poco estructurados, una gran parte de la tarea consiste en darles la estructura suficiente para hacerlos manejables. Naturalmente, esto trae consigo soluciones múltiples. Para los estudiantes que acostumbran buscar una respuesta que coincida con la de la “parte final del libro”, quizás este ejercicio resulte frustrante. En un problema de diseño, no hay “una respuesta correcta”; más bien, respuestas donde unas son más o menos convincentes que otras. En el mercado hay muchos ejemplos de este fenómeno. ¿Cuál es la diferencia entre los diversos modelos de automóviles disponibles? ¿No tienen más o menos las mismas funciones? Pero lo más probable es que el lector tenga su opinión acerca de cuáles realizan las tareas mejor que otros. Aún más, la definición de tarea no es exactamente la misma en todos los ejemplos. Un automóvil de cuatro pasajeros se diseña con una definición del problema ligeramente diferente que la de un vehículo deportivo de dos asientos (incluso, algunos ejemplos incluyen ambas características).

Entonces, el mensaje para el diseñador principiante es que tenga la mente abierta a los problemas de diseño planteados. No debe enfocarse en los problemas de diseño con la actitud de encontrar “la respuesta correcta”, porque no la hay. En vez de ello, ¡hay que ser audaz!, intentar algo radical. Luego habrá que probarlo con un buen análisis. Cuando

encuentre que no funciona, no se desanime; más bien, vea que usted ha aprendido algo acerca del problema que no sabía antes. ¡Los resultados negativos son tan sólo resultados! Si se aprende de los errores y luego se podría diseñar una mejor solución la próxima vez. Éste es el porqué la *iteración* resulta crucial para que el diseño logre el éxito.

La computadora es una herramienta necesaria para la solución de problemas de ingeniería contemporáneos. Los problemas se resuelven con mayor rapidez y exactitud con el uso adecuado de un software de ingeniería asistida por computadora (CAE). Sin embargo, los resultados serán tan buenos como buena sea la calidad de los modelos y datos usados. El ingeniero no debe tan sólo depender de soluciones generadas por computadora, sin desarrollar y aplicar también un entendimiento cabal de los fundamentos en que se basan el modelo y las herramientas de CAE.

Ecuaciones importantes usadas en este apéndice

Consulte las secciones de referencia acerca del uso apropiado de tales ecuaciones.

Masa (véase la sección A.9):

$$m = \frac{W}{g_c} \tag{A.3}$$

Fuerza dinámica: para uso con unidades de masa estándares (kg, slugs, blobs) (véase la sección A.9):

$$F = ma \tag{A.3a}$$

Fuerza dinámica: para uso con unidades de masa en $lb_m = lb_f$ (véase la sección A.9):

$$F = \frac{ma}{g_c} \tag{A.3b}$$

A.11 REFERENCIAS

1 *Random House Dictionary of the English Language*, 2a. ed., completa, S.B. Flexner, ed., Random House: Nueva York, 1987, p. 1151.

2 **R.L. Norton**, *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*, 3a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, 2004, pp. 7-14.

3 **Autocad**, Autodesk Inc., http://usa.autodesk.com

4 **Unigraphics**, EDS, Cyprus, CA, http://www.eds.com

5 **ADAMS**, Mechanical Dynamics, MSC Software, http://www.krev.com

6 **Working Model**, MSC Software, http://www.krev.com

7 **Pro/Engineer**, Parametric Tecnology Corp., Waltham, MA, http://www.ptc.com

8 **TK Solver**, Universal Technical Systems, Rockford, IL, http://www.uts.com

9 **Mathcad**, Mathsoft Inc., Cambridge, MA, http://www.mathsoft.com

10 **Excel**, Microsoft Corp., Redmond, WA, http://www.microsoft.com

11 **MATLAB**, Mathworks Inc., Natick, MA, http://www.mathworks.com

12 **Solidworks**, Solidworks Corp., Concord, MA, http://www.solidworks.com

A.12 REFERENCIAS WEB

http://www.onlineconversion.com

Convierta prácticamente una cosa a otra diferente. Hasta 5,000 unidades, y 50,000 conversiones.

http://www.katmarsoftware.com/uconeer.htm

Descargue gratis un programa convertidor de unidades para ingenieros.

http://global.ihs.com

Busca un conjunto de estándares técnicos en más de 500,000 documentos disponibles para descarga electrónica.

http://www.thomasnet.com

Recurso en línea para encontrar compañías y productos manufacturados en América del Norte.

A.13 BIBLIOGRAFÍA

Para información acerca de la creatividad y el proceso de diseño, se recomienda lo siguiente:

J. L. Adams, *The Care and Feeding of Ideas*. 3a. ed., Addison Wesley: Reading, Mass., 1986.

J. L. Adams, *Conceptual Blockbusting*. 3a. ed., Addison Wesley: Reading, Mass., 1986.

J. R. M. Alger y C. V. Hays, *Creative Synthesis in Design*. Prentice-Hall: Englewood Clips, N. J., 1964.

M. S. Allen, *Morphological Creativity*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., 1962.

H. R. Buhl, *Creative Engineering Design*. Iowa State University Press: Ames, Iowa, 1960.

W. J. J. Gordon, *Synectics*. Harper and Row: Nueva York, 1962.

J. W. Haefele, *Creativity and Innovation*. Reinhold: Nueva York, 1962.

L. Harrisberger, *Engineersmanship*. 2a. ed., Brooks/Cole: Monterey, Calif., 1982.

D. A. Norman, *The Psychology of Everydays Things*. Basic Books: Nueva York, 1986.

A. F. Osborne, *Applied Imaginations*. Scribners: Nueva York, 1963.

C. W. Taylor, *Widening Horizons in Creativity*. John Wiley: Nueva York, 1964.

E. K. Von Fange, *Professional Creativity*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., 1959.

Para información acerca de la elaboración de informes de ingeniería, se recomienda lo siguiente:

R. Barrass, *Scientists Must Write*. Chapman and Hall: Nueva York, 1978.

W. G. Crouch y R. L. Zetler, *A Guide to Technical Writing*, 3a. ed., The Ronald Press Co.: Nueva York, 1964.

D. S. Davis, *Elements of Engineering Reports*. Chemical Publishing Co., Nueva York, 1963.

D. E. Gray, *So You Have to Write a Technical Report*. Information Resources Press: Washington, D. C., 1970.

H. B. Michaelson, *How to Write and Publish Engineering Papers and Reports*. ISI: Filadelfia, Pa., 1982.

J. R. Nelson, *Writing the Technical Report*. 3a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, 1952.

A

Tabla PA-0
Matriz de tema/problema

A.4 Modelo de ingeniería	A-1, A-2, A-3
A.9 Unidades	A-4, A-5, A-6, A-7, A-8

A.14 PROBLEMAS

A-1 Con frecuencia se dice: "Construya la mejor ratonera y el mundo marcará una ruta hacia su puerta." Considere este problema y escriba un planteamiento de la meta y un conjunto de, por lo menos, 12 tareas que se aplicaría para su solución. Luego sugiera 3 conceptos posibles para alcanzar la meta. Haga anotaciones y dibujos a mano de las opciones.

A-2 Se desea una máquina de bolos (boliche) que tome en cuenta a jóvenes parapléjicos, quienes únicamente pueden mover una palanca de mando, para interesarlos en el deporte de los bolos usando una mesa convencional. Considere los factores que intervienen, escriba un planteamiento de la meta y desarrolle un conjunto de, por lo menos, 12 tareas que delimiten este problema. Luego sugiera 3 conceptos posibles para alcanzar la meta. Haga anotaciones y dibujos a mano de las opciones.

A-3 Un parapléjico necesita un volteador de hojas automatizado que le permita leer libros sin ayuda. Considere los factores involucrados, escriba un planteamiento de la meta y desarrolle un conjunto de, por lo menos, 12 tareas que delimiten tal problema. Luego sugiera 3 conceptos posibles para alcanzar la meta. Haga anotaciones y dibujos a mano de las opciones.

*A-4 Convierta una masa de 1000 lb_m a *a*) lb_f, *b*) slugs, *c*) blobs, *d*) kg.

*A-5 Una masa de 250 lb_m se acelera a 40 in/seg^2. Obtenga en libras la fuerza necesaria para producir esta aceleración.

*A-6 Exprese una masa de 100 kg de masa en slugs, blobs y lb_m. ¿Cuánto pesa esta masa en lb_f y en N?

A-7 Prepare un programa interactivo de computadora (usando, por ejemplo, *Excel, Mathcad, MATLAB o TK Solver*), con el cual se calculen las propiedades de la sección transversal para las formas mostradas en la parte interior de los forros del libro. Desarrolle el programa para manejar los sistemas de unidades, tanto *ips* como *SI*, y convierta los resultados entre tales sistemas.

A-8 Prepare un programa de computadora interactivo (usando, por ejemplo, *Excel, Mathcad, MATLAB o TK Solver*), con el cual se calculen las propiedades de la masa para los sólidos mostrados en la primera guarda del libro. Desarrolle el programa para manejar los sistemas de unidades, tanto *ips* como *SI,* y convierta los resultados entre dichos sistemas.

A-9 Modifique el programa desarrollado para el problema A-7 para usar un conjunto de funciones y subrutinas que se ejecuten desde cualquier programa, con el mismo lenguaje, para resolver las propiedades de la sección transversal de las formas mostradas en la parte interior de los forros del libro.

A-10 Modifique el programa desarrollado para el problema A-8 para usar un conjunto de funciones y subrutinas que se ejecuten desde cualquier programa, con el mismo lenguaje, para resolver las propiedades de la masa de los sólidos mostrados en la primera guarda del libro.

* Las respuestas de estos problemas se incluyen en el apéndice H.

Apéndice B

MATERIALES Y PROCESOS

No hay un tema tan antiguo que ya no se pueda decir algo de él.

DOSTOYEVSKI

B.0 INTRODUCCIÓN

Todo lo que el lector diseñe, debe hacerlo necesariamente con algún material y debe ser capaz de fabricarlo. Para el buen diseño de una máquina, resultan esenciales la comprensión integral de las propiedades, los tratamientos y los procesos de manufactura de los materiales. Se supone que el lector ya tomó un curso introductorio sobre la ciencia de materiales. Este apéndice presenta un breve repaso de conceptos básicos de metalurgia y un resumen de las propiedades de materiales que se usan en ingeniería, los cuales habrán de servir como antecedentes para lo que sigue. Desde luego, lo anterior no intenta fungir como sustituto de un texto sobre ciencia de materiales, por lo que se exhorta al lector a estudiar las referencias listadas en la bibliografía del apéndice, para obtener información más detallada. En otras partes del libro se exploran aún más algunos de los modos de falla comunes en los materiales.

La tabla B-0 muestra las variables usadas en este capítulo, además de que hace referencia a las ecuaciones, las figuras o las secciones donde se mencionan. Al final del apéndice, se proporciona una sección de resumen que agrupa las ecuaciones más importantes, con el propósito de facilitar la consulta e identificar la sección donde se estudian.

B.1 DEFINICIONES DE LAS PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

Las propiedades mecánicas de un material se determinan por lo general usando pruebas destructivas de las muestras, en condiciones de carga controladas. Las cargas de prueba no son exactamente las cargas reales que experimentarán las piezas de una máquina en servicio, excepto en casos especiales. Tampoco hay garantía de que el material que el lector compra para cierta pieza tendrá las mismas propiedades de resistencia que las muestras del mismo material ya probado. Existe una variación estadística en la resistencia de

Tabla B-0 Variables usadas en este capítulo

Símbolo	Variable	unidades ips	unidades SI	Consulte
A	área	in^2	m^2	Secc. B.1
A_0	área original, prueba de espécimen	in^2	m^2	Ec. B.1*a*
E	módulo de Young	psi	Pa	Ec. B.2
el	límite elástico	psi	Pa	Figura B-2
f	punto de fractura	ninguna	ninguna	Figura B-2
G	módulo de corte, módulo de rigidez	psi	Pa	Ec. B.4
HB	dureza Brinell	ninguna	ninguna	Ec. B.10
HRB	dureza Rockwell B	ninguna	ninguna	Secc. B.4
HRC	dureza Rockwell C	ninguna	ninguna	Secc. B.4
HV	dureza Vickers	ninguna	ninguna	Secc. B.4
J	segundo momento polar del área	in^4	m^4	Ec. B.5
K	intensidad del esfuerzo	$kpsi\text{-}in^{0.5}$	$MPa\text{-}m^{0.5}$	Secc. B.1
K_c	dureza a la fractura	$kpsi\text{-}in^{0.5}$	$MPa\text{-}m^{0.5}$	Secc. B.1
l_0	longitud medida, prueba del espécimen	in	m	Ec. B.3
N	número de ciclos	ninguna	ninguna	Figura B-10
P	fuerza o carga	lb	N	Secc. B.1
pl	límite de proporcionalidad	psi	Pa	Figura B-2
r	radio	in	m	Ec. B.5*a*
S_d	desviación estándar	cualquiera	cualquiera	Ec. B.9
S_e	límite de resistencia	psi	Pa	Figura B-10
S_{el}	resistencia en el límite elástico	psi	Pa	Ec. B.7
S_f	resistencia a la fatiga	psi	Pa	Figura B-10
S_{us}	resistencia última al corte	psi	Pa	Ec. B.5
S_{ut}	resistencia última a la tensión	psi	Pa	Figura B-2
S_y	resistencia de tensión a la fluencia	psi	Pa	Figura B-2
S_{ys}	resistencia de fluencia al corte	psi	Pa	Ec. B.5*c*
T	torque	lb-in	N-m	Secc. B.1
U_R	módulo de resiliencia	psi	Pa	Ec. B.7
U_T	módulo de dureza	psi	Pa	Ec. B.8
y	punto de fluencia	ninguna	ninguna	Figura B-2
ε	deformación	ninguna	ninguna	Ec. B.1*b*
σ	esfuerzo a la tensión	psi	Pa	Secc. B.1
τ	esfuerzo al corte	psi	Pa	Ec. B.3
θ	deflexión angular	rad	rad	Ec. B.3
μ	media aritmética	cualquiera	cualquiera	Ec. B.9*b*
ν	razón de Poisson	ninguna	ninguna	Ec. B.4

cualquier muestra específica comparada con el promedio de las propiedades probadas de ese material. Por tal razón, muchos de los datos de resistencia que se publican se presentan como valores mínimos. Considerando esta advertencia, se deben ver todos los datos de propiedades de materiales publicados, ya que es responsabilidad del ingeniero garantizar la seguridad de sus diseños.

Los mejores datos acerca de las propiedades de materiales se obtienen a partir de pruebas, destructivas o no destructivas, bajo cargas de servicio reales en prototipos del diseño real, con los materiales y el proceso de manufactura reales. Esto normalmente sucede sólo cuando los riesgos económicos y por seguridad son altos. En general, los fabricantes de aviones, automóviles, motocicletas, motos para nieve, maquinaria agrícola y otros productos prueban montajes terminados, bajo condiciones de servicio reales o simuladas.

En ausencia de datos de tales pruebas específicas, el ingeniero debe adaptar y aplicar datos publicados sobre propiedades de materiales, obtenidos a partir de pruebas estándar para la situación particular. La *Sociedad Estadounidense de Pruebas y Materiales* (ASTM) define normas para muestras de prueba y procedimientos de prueba para diversas mediciones de propiedades de los materiales.* La prueba de materiales más común que se utiliza es la prueba de tensión.

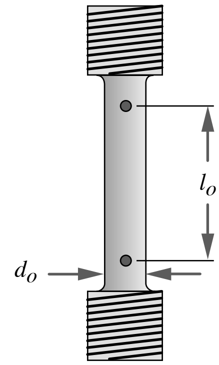


FIGURA B-1
Muestra de prueba de tensión

Prueba de tensión

La típica prueba de tensión en una muestra se presenta en la figura B-1. Dicha barra de tensión se trabaja en el material que se probará, en uno de varios diámetros d_o y longitud l_o estandarizados. La longitud medida es una longitud arbitraria, definida por dos hendiduras a lo largo de una porción del diámetro pequeño de la muestra, de modo que su crecimiento se mida durante la prueba. Los extremos más gruesos de la barra tienen cuerdas para enroscarse en la máquina de prueba, la cual es capaz de aplicar tanto cargas como deflexiones controladas en los extremos de la barra, en tanto que la porción de la longitud calibrada está pulida al espejo para eliminar concentraciones de esfuerzos por defectos en la superficie. La barra se estira a tensión con lentitud hasta que se rompe, mientras la carga y la distancia, a través de la longitud calibrada (o, alternativamente, la deformación unitaria) se monitorean en forma continua. El resultado es una gráfica de esfuerzo-deformación unitaria del comportamiento del material bajo la carga, tal como se ilustra en la figura B-2*a*, la cual representa la curva de un acero "dulce" o al bajo carbono.

ESFUERZO Y DEFORMACIÓN Observe que los parámetros medidos son cargas y deflexiones, pero los que se dibujan son esfuerzos y deformaciones unitarias. El **esfuerzo** (σ) se define como la *carga por unidad de área* (o *unidad de carga*), el cual, para la tensión del espécimen, se calcula como

$$\sigma = \frac{P}{A_o} \tag{B.1a}$$

donde P es la carga aplicada en cualquier instante y A_o es el área transversal original de la muestra. Se supone que el esfuerzo está distribuido uniformemente a través de la sección transversal. Las unidades de esfuerzo son psi o Pa.

La **deformación** unitaria es el *cambio en la longitud por unidad de longitud* y se calcula como

$$\varepsilon = \frac{l - l_o}{l_o} \tag{B.1b}$$

donde l_o es la longitud calibrada original y l es la longitud calibrada para cualquier carga P. Al dividirse longitud entre longitud, la deformación unitaria no tiene unidades.

MÓDULO DE ELASTICIDAD La curva de esfuerzo-deformación unitaria por tensión brinda varios parámetros útiles de los materiales. El punto *pl* de la figura B-2*a* es el **límite de proporcionalidad** por abajo del cual el esfuerzo es proporcional a la deformación unitaria, tal como se expresa en la forma unidimensional de la **ley de Hooke**:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{B.2}$$

B

* *ASTM*, *1994 Annual Book of ASTM Standards*, vol. 03.01, Soc. Est. de Pruebas y Materiales, Filadelfia, PA.

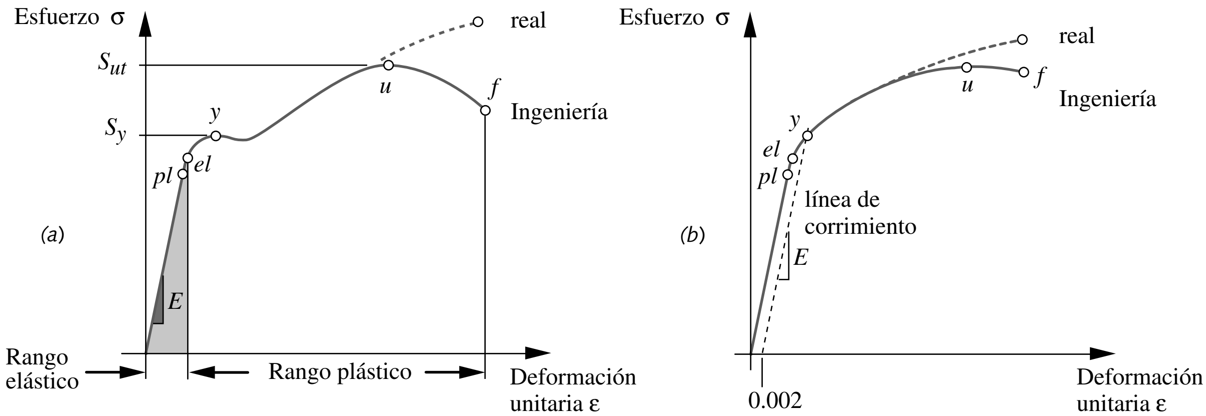


FIGURA B-2

Curvas de ingeniería y de esfuerzo-deformación unitaria real para materiales dúctiles: *a*) acero al bajo carbono, *b*) acero templado al alto carbono

donde *E* define la pendiente de la curva de esfuerzo-deformación unitaria hasta el límite de proporcionalidad y se conoce como **módulo de Young** o **módulo de elasticidad** del material. *E* mide la rigidez del material en el rango elástico y tiene las mismas unidades del esfuerzo. La mayoría de los metales presentan ese comportamiento de rigidez lineal, así como módulos elásticos que varían muy poco con el calor o en aleación con otros elementos. Por ejemplo, el acero de alta resistencia tiene la misma *E* que el acero de baja resistencia: 30 Mpsi (207 Gpa), aproximadamente. En la mayoría de los materiales dúctiles (que se definen abajo), el módulo de elasticidad a la compresión es el mismo que a la tensión. Esto no es así en hierros vaciados ni otros materiales frágiles (también definidos abajo) o para el magnesio.

LÍMITE ELÁSTICO El punto identificado como *el* en la figura B-2*a* es el *límite elástico*, es decir, el punto más allá del cual el material sufrirá un endurecimiento o una deformación plástica permanentes. El límite elástico marca la frontera entre las regiones del **comportamiento elástico** y el **comportamiento plástico** del material. Los puntos *el* y *pl* usualmente están tan cerca que a menudo se consideran como uno solo.

RESISTENCIA A LA FLUENCIA En el punto *y*, ligeramente arriba del límite elástico, el material comienza a ceder con más facilidad a los esfuerzos aplicados, y se incrementa su tasa de deformación (observe la pendiente más baja). Lo anterior se conoce como el **punto de fluencia**, cuyo valor del esfuerzo define la **resistencia a la fluencia** S_y del material.

Algunas veces, los materiales que son muy dúctiles, como los aceros al bajo carbono, mostrarán una caída aparente en el esfuerzo justamente después del punto de fluencia, como se indica en la figura B-2*a*. Materiales mucho menos dúctiles, como el aluminio y los aceros al medio o al alto carbonos, no presentan dicha caída aparente en el esfuerzo y se parecen más a la figura B-2*b*. La resistencia a la fluencia de un material que no presenta un punto de fluencia claro se define mediante una línea de corrimiento, paralela a la curva elástica, desplazada un pequeño porcentaje a lo largo del eje de deformación unitaria. Con frecuencia se usa un desplazamiento de deformación unitaria de 0.2%. La resistencia a la fluencia se toma entonces en la intercepción de la curva de esfuerzo-deformación unitaria y la línea de desplazamiento, como se ilustra en la figura B-2*b*.

RESISTENCIA ÚLTIMA A LA TENSIÓN El esfuerzo en la muestra continúa incrementándose de manera no lineal, hasta un valor pico S_{ut} o **resistencia última a la tensión** en el punto *u*. Se considera que éste es el mayor esfuerzo de tensión que el material soporta antes de romperse. Sin embargo, para la curva del acero dúctil mostrada, el esfuerzo parece

B

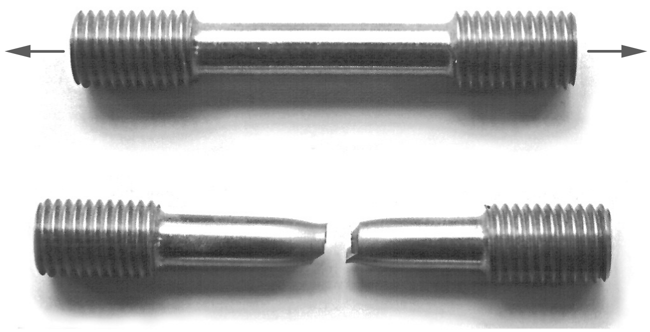


FIGURA B-3

Prueba de tensión de una muestra de acero dúctil dulce, antes y después de la fractura

caer hasta un valor menor en el punto de fractura *f*. La caída aparente del esfuerzo, antes del punto de fractura (de *u* a *f*, en la figura B-2*a*), es una consecuencia mecánica del "cuello de botella" o la reducción en el área de la muestra dúctil. La reducción del área transversal no es uniforme a lo largo de la muestra, como se observa en la figura B-3.

Puesto que el esfuerzo se calcula usando el área original A_o en la ecuación B.1*a*, se subestima el valor real del esfuerzo después del punto *u*. Resulta difícil monitorear con exactitud, durante la prueba, el cambio dinámico en el área transversal, pero tales errores son aceptables. Las resistencias de materiales diferentes pueden compararse desde estas bases. Cuando se basan en el área A_o incorrecta, esto se conoce como **curva de esfuerzo-deformación unitaria de ingeniería**, como se indica en la figura B-2.

El esfuerzo en la fractura es realmente más grande que el mostrado. La figura B-2 también indica la **curva de esfuerzo-deformación unitaria real** que resultaría si se tomara en cuenta el cambio en el área. En la figura B-2, los datos de **esfuerzo-deformación de ingeniería** son los que, por lo general, se utilizan en la práctica. Los valores de resistencia más usados para **cargas estáticas** son los de resistencia a la fluencia S_y y de resistencia última a la tensión S_{ut}. La rigidez del material está definida por el módulo de Young, *E*.

En la comparación de las propiedades de diferentes materiales es bastante útil expresar dichas propiedades normalizadas con la densidad del material. Puesto que los pesos ligeros siempre son un objetivo en el diseño, en general se busca el material más ligero, con la resistencia y la rigidez suficientes para soportar las cargas aplicadas. La **resistencia específica** de un material se define como *la resistencia dividida entre la densidad*. A menos que se especifique otra cosa, se considera que en este caso la resistencia representa la resistencia última a la tensión, de modo que cualquier criterio de resistencia se puede normalizar de esta forma. La **razón resistencia/peso** (SWR) es otra manera de expresar la resistencia específica. La **rigidez específica** es el *módulo de Young dividido entre la densidad del material*.

B

Ductilidad y fragilidad

La tendencia de un material a deformarse significativamente antes de fracturarse es una medida de su ductilidad. La ausencia de una deformación significativa antes de la fractura se conoce como fragilidad.

DUCTILIDAD La curva de esfuerzo-deformación unitaria de la figura B-2*a* es de un material dúctil: acero dulce. Tome un sujetapapeles (clip) común hecho de alambre de acero dulce. Enderécelo con sus dedos. Dóblelo dándole una forma nueva. El lector

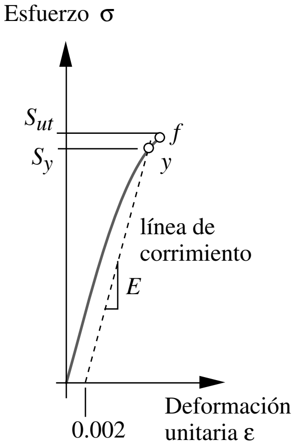


FIGURA B-4

Curva de esfuerzo-deformación unitaria de un material frágil

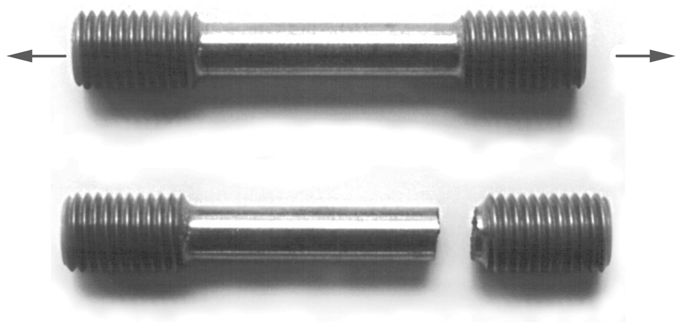


FIGURA B-5

Prueba de tensión de una muestra de hierro vaciado frágil, antes y después de la fractura

hace ceder el alambre de acero dúctil, aunque no lo fracture. Opera entre el punto *y* y el punto *f* de la curva de esfuerzo-deformación unitaria de la figura B-2*a*. La presencia de una región plástica significativa en la curva de esfuerzo-deformación unitaria es evidencia de ductilidad.

La figura B-3 presenta una muestra de prueba de acero dúctil, después de la fractura. La distorsión llamada *cuello de botella* se observa con claridad en la rotura. La superficie de la fractura, rasgada con valles y cimas, también indica una falla dúctil. La **ductilidad** de un material se mide por su porcentaje de elongación hasta la fractura, o por el porcentaje de reducción en el área de fractura. Los materiales con una elongación mayor al 5% en la fractura se consideran dúctiles.

Fragilidad La figura B-4 muestra la curva de esfuerzo-deformación unitaria de un material frágil. Observe la falta de un punto de fluencia claramente definido y la ausencia de un rango plástico antes de la fractura. Repita el experimento del sujetapapeles, pero ahora use un palillo de dientes o un cerillo de madera. Cualquier intento por doblar estos objetos causa fractura. La madera es un material frágil.

Los materiales frágiles no tienen un punto de fluencia claro, de modo que la resistencia a la fluencia debe definirse en el cruce entre la curva de esfuerzo-deformación unitaria y una línea de corrimiento, paralela a la curva elástica, desplazada un pequeño porcentaje, por ejemplo del 0.2%, a lo largo del eje de deformación unitaria. Algunos materiales frágiles como el hierro vaciado no tienen una región elástica lineal, en tanto que la línea de desplazamiento se define con la pendiente promedio de la región. La figura B-5 presenta la prueba de una muestra de hierro vaciado después de la fractura. La rotura no presenta evidencia del cuello de botella, pero sí tiene los contornos de la superficie más finos, típicos de una fractura quebradiza.

Los mismos metales pueden ser dúctiles o quebradizos, dependiendo de la forma en que se manufacturen, se trabajen o se traten con calor. Los metales que se **forjan** (lo cual significa que se moldean en forma sólida mientras están calientes o fríos) llegan a ser más dúctiles que los metales que se vacían al verter el metal fundido en un molde. No obstante, hay muchas excepciones en este enunciado tan general. El trabajo en frío de un metal (que se analiza más adelante) suele reducir su ductilidad e incrementar su fragilidad. El tratamiento con calor (que también se analiza más adelante), además, produce un efecto notable en la ductilidad de los aceros. Por lo tanto, resulta difícil generalizar acerca de la ductilidad o fragilidad relativa de varios materiales. Un repaso cuidadoso de las propiedades mecánicas de un material dado revelará su historia.

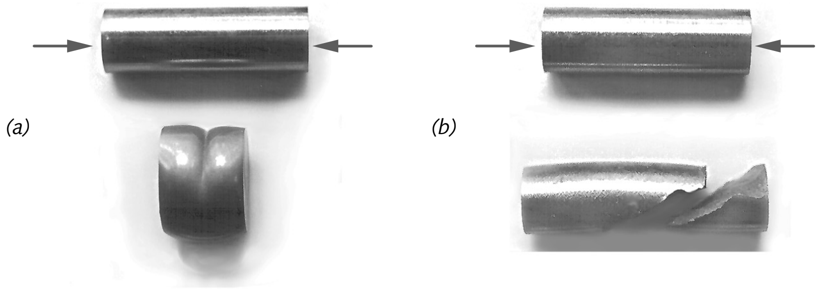


FIGURA B-6

Prueba de compresión de una muestra, antes y después de la falla *a*) acero dúctil, *b*) acero vaciado frágil

La prueba de compresión

La máquina para probar la tensión puede funcionar en reversa para aplicar una carga de compresión a una muestra consistente en un cilindro de diámetro constante, como el de la figura B-6. Es difícil obtener una curva útil de esfuerzo-deformación unitaria de esta prueba, porque un material dúctil cederá e incrementará su área transversal, como se ilustra en la figura B-6*a*, pero, a final de cuentas, detendrá la máquina de pruebas. La muestra dúctil no se fracturará a la compresión. Si la máquina tuviera fuerza suficiente, la pieza quedaría aplastada en forma de un panqueque. Los materiales más dúctiles tienen resistencias a la compresión similares a sus resistencias a la tensión, por lo que se usa la curva de esfuerzo-deformación unitaria a la tensión para representar también su comportamiento a la compresión. Un material que esencialmente tiene resistencias iguales de tensión y compresión se denomina **material par**.

Los materiales frágiles se fracturarán con la compresión. En la figura B-6*b*, se presenta una muestra de hierro fundido frágil con falla. Observe la superficie de fractura, rugosa y angulada. La causa de la falla sobre un plano angulado se analiza en el capítulo 2. Los materiales frágiles por lo general tienen mucho mayor resistencia a la compresión que a la tensión. Se pueden generar las curvas de esfuerzo-deformación unitaria de la compresión, ya que el material se fractura en vez de aplastarse, mientras que el área de la sección transversal no cambia significativamente. Un material con resistencias a la tensión y a la compresión diferente se conoce como **material no par**.

La prueba de flexión

Una varilla delgada, como la que se muestra en la figura B-7, está soportada en cada extremo como una viga y cargada transversalmente en el centro de su longitud hasta que falla. Si el material es dúctil, la falla es por fluencia, como se indica en la figura B-7*a*. Si el material es frágil, la viga se fractura, como se ilustra en la figura B-7*b*. Las curvas de esfuerzo-deformación unitaria no se generan en tal prueba, porque la distribución del esfuerzo en la sección transversal no es uniforme. La curva σ-ε de la prueba de tensión se utiliza para predecir fallas en la flexión, puesto que los esfuerzos de flexión son tensiones sobre el lado convexo y compresiones sobre el lado cóncavo de la viga.

La prueba de torsión

Las propiedades de corte de un material son más difíciles de determinar que sus propiedades de tensión. Una muestra similar a la de la prueba de tensión se fabrica con detalles no circulares en sus extremos, de modo que pueda torcerse axialmente hasta que falle. La figura B-8 presenta dos casos de lo anterior, uno de acero dúctil y otro de

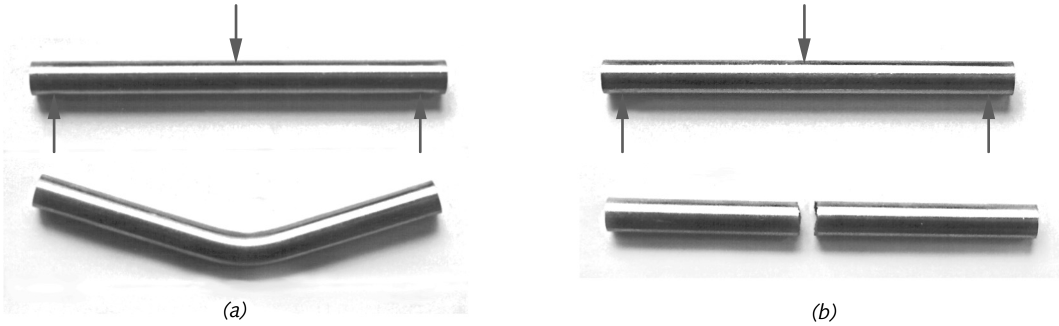


FIGURA B-7

Muestras de prueba de flexión, antes y después de la falla *a*) acero dúctil, *b*) acero fundido frágil

acero fundido frágil. Observe las líneas pintadas a lo largo de sus longitudes. Las líneas eran originalmente rectas en ambos casos. El giro helicoidal en la línea de la muestra dúctil después de la falla indica que giraría algunas revoluciones antes de la ruptura. La línea de la prueba de torsión de la muestra frágil permanece recta después de la falla, pues no había distorsión plástica significativa antes de la fractura.

Tabla B-1
Razón de Poisson ν

Material	ν
Aluminio	0.34
Cobre	0.35
Hierro	0.28
Acero	0.28
Magnesio	0.33
Titano	0.34

Módulo de rigidez La relación esfuerzo-deformación unitaria para la torsión pura se define como

$$\tau = \frac{Gr\theta}{l_o} \tag{B.3}$$

donde τ es el esfuerzo al corte, r es el radio de la muestra, l_o es la longitud calibrada, θ es el giro angular en radianes y G es el módulo de corte o **módulo de rigidez**. G se define en términos del módulo de Young E y de la razón de Poisson ν:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{B.4}$$

Razón de Poisson (ν) es la razón entre la deformación lateral y longitudinal, pero para la mayoría de los metales es de aproximadamente 0.3, como se indica en la tabla B-1.

Resistencia última al corte La resistencia a la ruptura en la torsión se conoce como resistencia última al corte o módulo de ruptura S_{us} y se calcula como

B

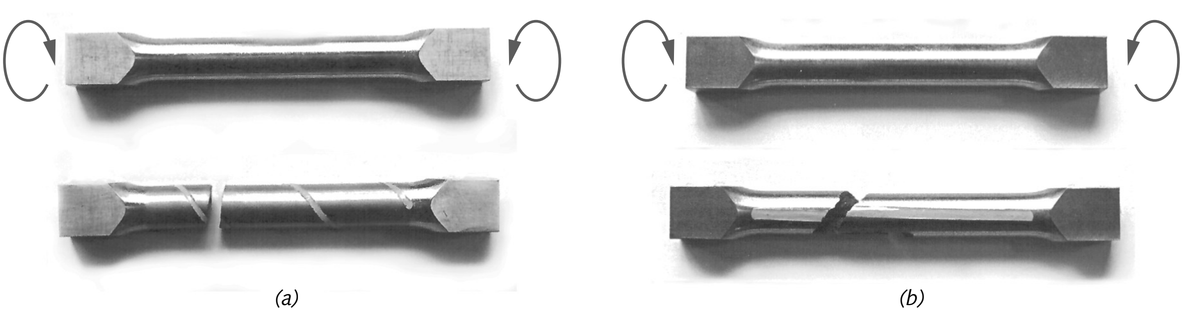


FIGURA B-8

Muestra de la prueba de torsión, antes y después de la falla *a*) acero dúctil, *b*) hierro vaciado frágil

$$S_{us} = \frac{T r}{J} \qquad \text{(B.5}a\text{)}$$

donde T es el torque aplicado necesario para romper la muestra, r es el radio de la muestra y J es el segundo momento polar del área de la sección transversal. La distribución del esfuerzo en la sección cargada en torsión no es uniforme. Es cero en el centro y máximo en el exterior del radio. Por lo tanto, cuando las partes exteriores ya han cedido plásticamente, las partes más internas se encuentran aún abajo del punto de fluencia. Tal distribución no uniforme del esfuerzo en la prueba de torsión (a diferencia de la distribución uniforme, en la prueba de tensión) es la causa por la que al valor medido en la falla de una barra sólida en torsión se le llama *módulo de ruptura*. Por consiguiente, un tubo de pared delgada es una mejor muestra para la prueba de torsión que una barra sólida, y puede brindar una mejor medida de la resistencia última al corte.

En ausencia de datos disponibles de la resistencia última al corte de un material, se obtiene una aproximación razonable a partir de los datos de la prueba de tensión:*

$$\begin{aligned} &\text{aceros:} && S_{us} \cong 0.80 S_{ut} \\ &\text{otros metales dúctiles:} && S_{us} \cong 0.75 S_{ut} \end{aligned} \qquad \text{(B.5}b\text{)}$$

Observe que la resistencia de fluencia al corte guarda una relación diferente con la resistencia de fluencia a la tensión:

$$S_{ys} \cong 0.577 S_y \qquad \text{(B.5}c\text{)}$$

Esta relación se deduce en el capítulo 3, donde se estudia con más detalle la falla del material bajo una carga estática.

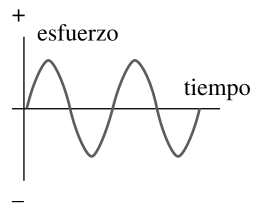


FIGURA B-9
Carga variable con el tiempo

Resistencia a la fatiga y el límite de resistencia

Las cargas se aplican con lentitud y una sola vez en la muestra, tanto en la prueba de tensión como en la prueba de torsión. Éstas son pruebas estáticas y miden resistencias estáticas. Mientras que algunas piezas de máquinas pueden tener sólo cargas estáticas todo su tiempo de vida, la mayoría experimentará cargas y esfuerzos que varían con el tiempo. Los materiales tienen un comportamiento muy diferente en respuesta a cargas que vienen y se van (se les llama **cargas de fatiga**) del que tienen frente a cargas que permanecen estáticas. El diseño de máquinas trata principalmente con el diseño de piezas para cargas que varían con el tiempo, de modo que es necesario conocer la **resistencia a la fatiga** de los materiales bajo tales condiciones de carga.

Una prueba de resistencia a la fatiga es la prueba de la viga giratoria de R. R. Moore, donde a una muestra similar, aunque ligeramente más pequeña que la mostrada en la figura B-1, se aplica una carga como a una viga que se flexiona mientras se gira con un motor. De su curso de resistencia de materiales, recuerde que una carga de flexión causa tensión en un lado de la viga y compresión en el otro. (Véase las secciones 2-9 y 2-10, para un repaso de vigas en flexión.) La rotación de la viga provoca que cualquier punto sobre la superficie pase de la compresión a la tensión y, luego, a la compresión en cada ciclo, lo cual da origen a una curva de carga-tiempo como la que se indica en la figura B-9.

La prueba continúa, con un nivel de esfuerzo específico, hasta que la pieza se fractura y luego se anota el número de ciclos N. Se prueban muchas muestras del mismo material a varios niveles de esfuerzo S, hasta que se genera una curva similar a la de la figura B-10. Ésta recibe el nombre de diagrama resistencia-vida de Wohler o diagrama S-N. Describe la resistencia a la ruptura de un material específico, en varios números de ciclos de esfuerzos que se invierten totalmente.

* En el capítulo 10, sobre diseño de resortes helicoidales, se presenta la relación empírica, en la ecuación 10.4 (p. 655), $S_{us} = 0.67\ S_{ut}$ de la resistencia última al corte de un alambre de acero de diámetro pequeño, con base en una prueba exhaustiva de un alambre en torsión. Evidentemente esto es diferente de la aproximación general para el acero en la ecuación B.5*b*. Los mejores datos de propiedades de materiales siempre se obtendrán de las pruebas de los mismos materiales, geometrías y cargas, tales como aquellas que tendrá la pieza durante su servicio. En ausencia de datos de prueba directos, se depende de aproximaciones del tipo de la ecuación B.5*b* y de la aplicación de los factores de seguridad adecuados con base en la incertidumbre de tales aproximaciones.

B

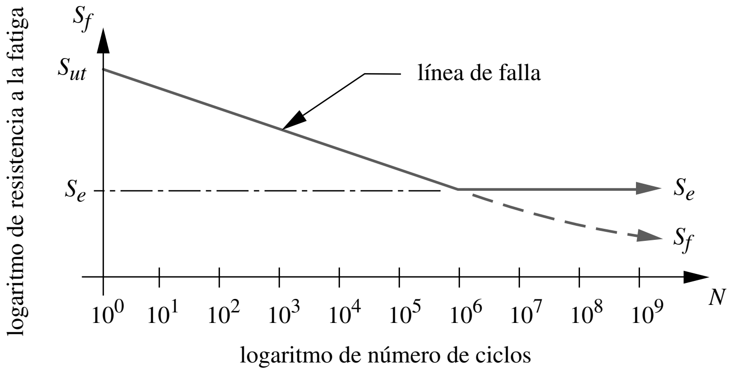


FIGURA B-10

El diagrama de resistencia-vida de Wohler grafica la resistencia a la fatiga contra el número de ciclos de esfuerzos que se invierten totalmente

Observe que en la figura B-10 la **resistencia a la fatiga** S_f en un ciclo es la misma que la resistencia estática S_{ut} y que disminuye en forma constante, con el incremento del número de ciclos N (en una representación logarítmica), hasta que se estabiliza en 10^6 ciclos aproximadamente. Dicha estabilización de resistencia a la fatiga existe sólo en ciertos metales (de manera notable, en aceros y algunas aleaciones de titanio) y se conoce como límite de resistencia S_e. Las resistencias a la fatiga de otros materiales continúan cayendo más allá de ese punto. Mientras haya una variación considerable entre materiales, sus resistencias a la fatiga crudas (o sin corregir) de aproximadamente $N = 10^6$ ciclos tienden a ser no mayores del 40% a 50% de su resistencia a la tensión estática S_{ut}. Se trata de una reducción significativa, las cuales, conforme se repase el capítulo 4, serán necesarias reducciones adicionales en las resistencias a la fatiga de materiales debidas a otros factores, como el terminado de la superficie y el tipo de carga.

Es importante recordar ahora que la prueba de esfuerzo-deformación unitaria a la tensión no cuenta la historia completa y que las propiedades de resistencia estática de los materiales rara vez son suficientes para predecir por sí mismas la falla en una aplicación de diseño de maquinaria. El tema de resistencia a la fatiga y el límite de resistencia es tan importante y fundamental en el diseño de máquinas, que el capítulo 4 se dedicó exclusivamente al estudio de fallas por fatiga.

La prueba de la viga giratoria se sustituye, entonces, por pruebas de tensión axial ejecutadas en máquinas de prueba modernas, las cuales aplican cargas —de cualquier naturaleza y con variaciones en el tiempo— a la muestra de la prueba axial. Dicho enfoque brinda mayor flexibilidad en la prueba, así como datos más exactos, debido a la distribución uniforme del esfuerzo en la tensión de la muestra. Los resultados son consistentes (aunque ligeramente menores) con los datos históricos en la prueba de la viga giratoria para los mismos materiales.

Resistencia al impacto

La prueba de esfuerzo-deformación unitaria se realiza a tasas muy bajas y controladas de deformación unitaria, permitiendo así que el material se acomode por sí mismo a las cargas variables. Si la carga se aplica repentinamente, la capacidad de absorción de energía del material se vuelve importante. La energía en un elemento diferencial es su **densidad de energía de deformación** (energía de deformación por unidad de volumen U_0) o el área bajo la curva de esfuerzo-deformación unitaria en cualquier deformación unitaria específica.

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon \tag{B.6a}$$

La energía de deformación U es igual a la densidad de energía de deformación integrada sobre el volumen v.

$$U = \int_v U_0 \, dv \tag{B.6b}$$

La **resiliencia** y **dureza** de un material se miden, respectivamente, a partir de la energía de deformación presente en el material, en el límite elástico o en el punto de fractura.

RESILIENCIA A la capacidad del material para absorber energía por unidad de volumen, sin que se deforme permanentemente, se le llama **resiliencia** U_R (también se conoce como **módulo de resiliencia**) y es igual al área debajo de la curva de esfuerzo-deformación unitaria hasta el límite elástico, que se indica como área sombreada en la figura B-2*a.* La resiliencia se define como

$$\begin{aligned} U_R &= \int_0^{\varepsilon_{el}} \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} S_{el}\varepsilon_{el} \\ &= \frac{1}{2} S_{el} \frac{S_{el}}{E} = \frac{1}{2}\frac{S_{el}^2}{E} \\ U_R &\cong \frac{1}{2}\frac{S_y^2}{E} \end{aligned} \tag{B.7}$$

donde S_{el} y ε_{el} representan la resistencia y deformación unitaria en el límite elástico, respectivamente. La sustitución de la ley de Hooke a partir de la ecuación B.2 expresa la relación en términos de la resistencia y el módulo de Young. Puesto que rara vez se conoce el valor de S_{el}, se obtiene una aproximación razonable de la elasticidad usando el esfuerzo a la fluencia S_y en su lugar.

Tal relación indica que un material más rígido con la misma resistencia elástica es menos resiliente. Una pelota de hule puede absorber más energía, sin deformarse permanentemente, que una hecha de vidrio.

TENACIDAD La capacidad de un material para absorber energía por unidad de volumen, sin fracturarse, se conoce como **tenacidad** U_T (llamada también **módulo de tenacidad**) y es igual al área debajo de la curva de esfuerzo-deformación unitaria hasta el punto de fractura, representada por el área total sombreada en la figura B-2*a*. La dureza se define como

$$\begin{aligned} U_T &= \int_0^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon \\ &\cong \left(\frac{S_y + S_{ut}}{2}\right)\varepsilon_f \end{aligned} \tag{B.8}$$

donde S_{ut} y ε_f representan la resistencia última a la tensión y la deformación unitaria en la fractura, respectivamente. Puesto que una expresión analítica de la curva de esfuerzo-deformación unitaria rara vez está disponible para una integración real, se obtiene una aproximación de la dureza utilizando el promedio de las resistencias a la fluencia y última, así como la deformación en la fractura, para calcular el área. Las unidades de dureza y resiliencia son energía por unidad de volumen (in-lb/in^3 o joules/m^3). Observe que dichas unidades son numéricamente equivalentes a psi o Pa.

Un material dúctil de resistencia última similar a uno frágil será mucho más duro. Una hoja de metal de la carrocería de un automóvil absorberá más energía en una colisión, a través de una deformación plástica, que uno frágil de fibra de vidrio.*

* ¡Resulta interesante notar que uno de los materiales de mayor dureza y fuerza conocidos es la *telaraña*! Los arácnidos diminutos producen un filamento que tiene una resistencia última a la tensión de 200 a 300 kpsi (1380 a 2070 Mpa) y 35% de elongación para la fractura. También puede absorber más energía, sin romperse, que cualquier fibra conocida, pues absorbe tres veces más energía que el *Kevlar*, la fibra artificial para elaborar chalecos antibalas. De acuerdo con el *Boston Globe*, del 18 de enero de 2002, investigadores en Canadá y Estados Unidos sintetizaron un material con propiedades similares a la seda de araña en hilos de hasta 10 pies de largo, con resistencias de 1/4 a 1/3 de la fibra de seda natural, "más fuertes que un alambre de acero de peso similar", y con mayor elasticidad que la fibra orgánica de seda.

Prueba de impacto Se han concebido varias pruebas para medir la capacidad de los materiales para resistir cargas de impacto. Las pruebas **Izod** y **Charpy** son dos de tales procedimientos que implican el golpeteo de una muestra estriada con un péndulo, lo que registra la energía cinética requerida para romper la muestra a una temperatura determinada. Si bien estos datos no tienen relación directa con el área debajo de la curva de esfuerzo-deformación unitaria, brindan un medio para comparar la capacidad de absorción de energía, en condiciones controladas, de varios materiales. Los manuales de materiales, como los que se listan en la bibliografía de este capítulo, ofrecen datos sobre la resistencia al impacto de varios materiales.

Tenacidad a la fractura

La **tenacidad a la fractura** K_c (no se confunda con el módulo de tenacidad ya definido) es *una propiedad del material que define su capacidad para resistir esfuerzos en la punta de una grieta*. La tenacidad a la fractura de un material se mide sometiendo una muestra de prueba estándar, previamente agrietada, a cargas de tensión cíclicas hasta que se rompe. Las grietas crean concentraciones del esfuerzo locales muy altas, lo cual causa fluencias locales (véase la sección 2.15). El efecto de la grieta sobre el esfuerzo local se mide con un **factor de intensidad del esfuerzo** K, el cual se define en la sección 3.3. Cuando la intensidad del esfuerzo K alcanza la tenacidad de fractura K_c ocurre, sin advertencia, una fractura repentina. El estudio de este tipo de falla se conoce como **mecánica de fractura** y se estudia con más detalle en los capítulos 3 y 4.

Efectos de termofluencia y temperatura

La prueba de tensión, aun siendo lenta, no toma mucho tiempo en comparación con el tiempo con el que la pieza de una máquina real puede estar sujeta a cargas constantes. En condiciones ambientales propicias (sobre todo a temperaturas elevadas), todos los materiales cederán por fluencia (deformarán) lentamente debido a los esfuerzos de carga, muy por debajo del nivel (punto de fluencia) estimado de seguridad en la prueba de tensión. Los metales ferrosos tienden a presentar deformaciones por fluencia insignificantes a temperatura ambiente o por debajo de ésta. Su tasa de termofluencia se incrementa conforme aumenta la temperatura ambiente, aunque usualmente se vuelve significativo cuando la temperatura alcanza entre 30% a 60% de la temperatura de fusión del material.

Los metales con baja temperatura de fusión, como el plomo y muchos polímeros, llegan a presentar una termofluencia significativa a temperatura ambiente y a incrementar sus tasas de termofluencia a temperaturas más altas. Los datos sobre termofluencia de materiales en ingeniería son escasos, por lo costoso y el tiempo requerido para obtener datos experimentales. El diseñador de máquinas debe estar consciente de los fenómenos de termofluencia y obtener los datos más recientes del fabricante sobre los materiales seleccionados, si se esperan altas temperaturas o si son polímeros los recomendados. El fenómeno de ensanchamiento es más complejo de lo que implica su mera descripción. Consulte la bibliografía de este apéndice para obtener información más completa y detallada sobre termofluencia de materiales.

También es importante entender que todas las propiedades de los materiales son una función de la temperatura y los datos de prueba que se publican por lo común se generan a temperatura ambiente. El incremento de la temperatura suele reducir la resistencia. Muchos materiales que son dúctiles a temperatura ambiente pueden comportarse como materiales frágiles a temperaturas bajas. Por lo tanto, si su aplicación involucra temperaturas altas o bajas, será necesario buscar datos pertinentes acerca de las propiedades de materiales, de acuerdo con el ambiente de operación. Los fabricantes de materiales son la mejor fuente de información actualizada. La mayoría de fabricantes de polímeros publican datos de termofluencia de sus materiales a varias temperaturas.

B.2 NATURALEZA ESTADÍSTICA DE LAS PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

Algunos datos que se publican sobre propiedades de materiales representan valores promedio de muchas muestras probadas. (Otros datos se presentan como valores mínimos.) El intervalo de variación de los datos de prueba que se publican se determina algunas veces, otras no. La mayoría de las propiedades de materiales variarán alrededor del valor promedio (o media), de acuerdo con alguna distribución estadística como la *distribución gaussiana o normal* de la figura B-11. Esta curva se define en términos de dos parámetros, la *media aritmética* μ y la *desviación estándar* S_d. La ecuación de la curva de distribución gaussiana es

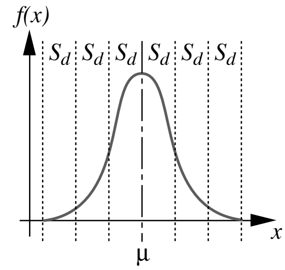


FIGURA B-11

La distribución gaussiana (normal)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}S_d}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2S_d^2}\right], \qquad -\infty \le x \le \infty \tag{B.9a}$$

donde x representa algún parámetro del material y $f(x)$ es la frecuencia con que ocurre el valor de x en la población, mientras μ y S_d se definen como

$$\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{B.9b}$$

$$S_d=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \tag{B.9c}$$

La *media* μ define el valor de ocurrencia más frecuente de x en la cresta de la curva, en tanto que la *desviación estándar* S_d es una medida de la "dispersión" de la curva alrededor de la *media*. Un valor pequeño de S_d en relación con μ significa que la población total se agrupa cerca de la media. Una S_d grande indica que la población está demasiado dispersa alrededor de la media. Se esperaría encontrar el 68% de la población dentro de $\mu \pm 1S_d$, el 95% dentro de $\mu \pm 2S_d$ y el 99% dentro de $\mu \pm 3S_d$.

Hay una dispersión considerable en pruebas múltiples del mismo material bajo las mismas condiciones de prueba. Observe que hay 50% de probabilidad de que las muestras de cualquier material que compre tendrán una resistencia menor que el valor de la media publicada del material. Por lo tanto, el lector no querría usar tan sólo la media como un factor de predicción de la resistencia de una muestra, seleccionada al azar, de ese material. Si la desviación estándar de los datos de prueba se publica junto con la media, se puede "calcular" a un valor menor que pronostique algún porcentaje mayor de la población, con base en las tasas listadas. Por ejemplo, si el lector quiere tener 99% de probabilidad de que todas las muestras posibles del material sean más fuertes que la resistencia supuesta del material debe restar $3S_d$ de μ para obtener un valor permisible para su diseño. Esto supone que la distribución de las propiedades del material es gaussiana y no se desvía hacia un extremo u otro del espectro. Si se proporciona (y usa) el valor mínimo de una propiedad del material, entonces no interesa su distribución estadística.

En general no hay datos disponibles sobre la desviación estándar de las muestras probadas del material. Sin embargo, el lector simplemente puede reducir la media de la resistencia publicada, para lo cual deberá elegir un factor confiable con base en una S_d supuesta. Un enfoque como éste supone que la S_d es un porcentaje de μ basado en la experiencia. Haugen y Wirsching[1] afirman que las desviaciones estándar de la resistencia de los aceros rara vez exceden el 8% de sus valores promedio. La tabla B-2 lista los factores de reducción en la seguridad, de acuerdo con la suposición de que la $S_d = 0.08\ \mu$ para varios niveles de seguridad. Observe que el 50% de confiabilidad tiene un factor de 1 y el factor se reduce conforme el lector selecciona una confiabilidad más alta.

Tabla B-2
Factores de confiabilidad para una $S_d = 0.08\ \mu$

% de confiabilidad	Factor
50	1.000
90	0.897
95	0.868
99	0.814
99.9	0.753
99.99	0.702
99.999	0.659
99.9999	0.620

B

El factor de reducción se multiplica por la media de la propiedad relevante del material. Por ejemplo, si se desea que el 99.99% de las muestras tengan o excedan la resistencia supuesta, la resistencia media se multiplica por 0.702.

En resumen, el enfoque más seguro consiste en desarrollar datos propios acerca de las propiedades de los materiales y de las condiciones de carga pertinentes de su diseño. Pero como este enfoque es usualmente prohibitivo por lo costoso, tanto en tiempo como en dinero, a menudo el ingeniero debe confiar en los datos publicados. Algunos datos de resistencia publicados se expresan como la resistencia mínima que se espera en una muestra estadística; sin embargo, otros pueden presentarse como el valor promedio de las muestras probadas. En este caso, algunas de las muestras probadas fallaron con un esfuerzo menor que el valor promedio y la resistencia de su diseño quizá necesite reducirse en concordancia.

B.3 HOMOGENEIDAD E ISOTROPÍA

Hasta el momento, todos los estudios de las propiedades de materiales suponen que el material es homogéneo e isótropo. **Homogéneo** significa que las *propiedades del material son uniformes a través de un continuo*; por ejemplo, no son una función de la posición. El estado ideal rara vez se encuentra en los materiales reales, muchos de los cuales, debido a sus procesos de manufactura, tienen discontinuidades, precipitaciones, vacíos o partículas de materia extraña. No obstante, la mayoría de los metales y no metales se consideran, desde el punto de vista de la ingeniería, macroscópicamente homogéneos a pesar de sus desviaciones microscópicas.

Un material **isótropo** es aquel cuyas *propiedades mecánicas son independientes de la orientación o la dirección*. Es decir, las resistencias a lo ancho y a lo alto son las mismas que a lo largo de la pieza, por ejemplo. La mayoría de los metales y algunos no metales se pueden considerar macroscópicamente isotrópicos. Otros materiales son **anisótropos**, lo cual significa que *no existe un plano de simetría en las propiedades del material.* Los materiales **ortotrópicos** *tienen tres planos mutuamente perpendiculares de simetría en las propiedades y pueden tener diferentes propiedades del material a lo largo de cada eje.* La madera, el contrachapado, la fibra de vidrio y algunas hojas de metal roladas en frío son ortotrópicos.

Una gran variedad de materiales que claramente son no homogéneos (es decir, son heterogéneos) y no isotrópicos son los **compuestos** (véase más adelante). La mayoría de los compuestos son artificiales, aunque algunos, como la madera, se dan naturalmente. La madera es un compuesto de fibras largas que se mantienen unidas en una matriz resinosa de lignina. El lector sabe por experiencia que es fácil partir la madera a lo largo de las líneas del grano (fibras), pero casi imposible hacerlo cruzando el grano. Su resistencia es una función tanto de la orientación como de la posición. La matriz es más débil a lo largo de las fibras y siempre se raja por las fibras.

B.4 DUREZA

La dureza de un material suele ser un indicador de su resistencia al desgaste (aunque no es una garantía). Las resistencias de algunos materiales como los aceros están muy estrechamente relacionadas con la dureza. Hay varios tratamientos que se aplican a los aceros y a otros metales para incrementar su dureza y su resistencia. Esto se analizará más adelante.

La dureza se mide con una de tres escalas: *Brinell*, *Rockwell* o *Vickers*. Todas estas pruebas de dureza requieren la impresión de una pequeña huella en la superficie del material que se examina. En la **prueba Brinell** se utiliza una esfera de 10 mm de acero endurecido o de carburo de tungsteno* que se empuja hacia la muestra con una carga de 500 o de 3000 kg, lo cual depende del intervalo de dureza del material. El diámetro de la marca resultante se mide con un microscopio y se usa para calcular el número de dureza Brinell, el cual tiene las unidades kg_f/mm^2. La **prueba Vicker** utiliza una pirámide de diamante como marcador y mide el ancho de la huella con el microscopio. La **prueba Rockwell** emplea una esfera de 1/16 in o un marcador de diamante en forma de cono de 120°; mide la profundidad de penetración.

La dureza se representa con un número seguido por una letra H, seguida por letra(s) para identificar el método usado; por ejemplo, 375 HB, o bien, 396 HV. Se utilizan varias escalas alfabéticas (A, B, C, D, F, G, N, T) para materiales con diferentes intervalos de dureza Rockwell, en tanto que es necesario especificar tanto la letra como el número de una lectura Rockwell; por ejemplo, 60 HRC. En el caso de la escala Rockwell N, se emplea un marcador de diamante cónico de ángulo estrecho con cargas de 15, 30 o 40 kg, y la especificación debe incluir tanto la carga utilizada como la letra; por ejemplo, 84.6 HR15N. La escala Rockwell N sirve normalmente para medir la dureza "superficial" de materiales delgados o de superficies endurecidas. La menor carga y la punta N de ángulo angosto indican una penetración superficial, que mide la dureza de la superficie sin considerar los efectos del núcleo blando.

Todas estas pruebas no son destructivas, en el sentido de que la muestra permanece intacta. No obstante, la impresión suele presentar un problema si el acabado de la superficie es crítico o si la sección es delgada, de modo que en realidad se consideran pruebas destructivas. La prueba Vickers tiene la ventaja de realizar una prueba única para todos los materiales. Las pruebas Brinell y Rockwell requieren la selección del tamaño de la punta o la carga de impresión, o ambas, para identificar el material examinado. La prueba Rockwell tiene la ventaja de que se elimina el error del operador, ya que no se requiere la lectura de un microscopio, mientras que la impresión tiende a ser pequeña, sobre todo si se utiliza la punta N. Sin embargo, el número de dureza Brinell ofrece una manera muy conveniente de calcular con rapidez la resistencia última a la tensión (S_{ut}) del material, a partir de la relación

$$\begin{aligned} S_{ut} &\cong 500\,\text{HB} \pm 30\,\text{HB} \quad \text{psi} \\ S_{ut} &\cong 3.45\,\text{HB} \pm 0.2\,\text{HB} \quad \text{MPa} \end{aligned} \tag{B.10}$$

donde HB es el número de dureza Brinell. Esto proporciona una forma conveniente de obtener una medida experimental burda de la resistencia, de cualquier muestra de una aleación de acero o una muestra de acero al bajo —o medio— carbono, incluso de una muestra que ya haya estado en servicio donde la prueba no sea destructiva.

Las **pruebas de microdureza** usan una fuerza pequeña sobre un pequeño marcador de diamante, y ofrecen un perfil de microdureza como una función de la profundidad en la muestra seccionada. La dureza se calcula en una escala absoluta dividiendo la fuerza aplicada entre el área de la impresión. Las unidades de **dureza absoluta** son kg_f/mm^2. Los números de dureza Brinell y Vickers también tienen estas unidades; sin embargo, los valores medidos sobre la misma muestra quizá difieran con cada método. Por ejemplo, una dureza Brinell de 500 HB es aproximadamente la misma dureza Rockwell C de 52 HRC y una dureza absoluta de 600 kg_f/mm^2. Observe que dichas escalas no se relacionan en forma lineal, de modo que su conversión resulta complicada. La tabla B-3 muestra conversiones aproximadas entre las escalas de dureza Brinell, Vickers y Rockwell B y C para aceros, así como su equivalente aproximado de resistencia última a la tensión.

* El carburo de tungsteno es una de las sustancias más duras conocidas.

B

Tabla B-3 Números de dureza aproximada equivalentes y resistencias últimas a la tensión para aceros

Brinell	Vickers	Rockwell		Última, σ_u	
HB	*HV*	*HRB*	*HRC*	MPa	ksi
627	667	—	58.7	2393	347
578	615	—	56.0	2158	313
534	569	—	53.5	1986	288
495	528	—	51.0	1813	263
461	491	—	48.5	1669	242
429	455	—	45.7	1517	220
401	425	—	43.1	1393	202
375	396	—	40.4	1267	184
341	360	—	36.6	1131	164
311	328	—	33.1	1027	149
277	292	—	28.8	924	134
241	253	100	22.8	800	116
217	228	96.4	—	724	105
197	207	92.8	—	655	95
179	188	89.0	—	600	87
159	167	83.9	—	538	78
143	150	78.6	—	490	71
131	137	74.2	—	448	65
116	122	67.6	—	400	58

Nota: Carga de 3000 kg para HB.

Fuente: Tabla 5-10, p. 185, en N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993, con autorización.

Tratamiento térmico

El proceso de tratamiento térmico del acero es complicado, por lo que se estudia con detalle en textos como los que se listan en la bibliografía al final del capítulo. Se sugiere al lector consultar tales referencias para un estudio más completo. Aquí sólo se ofrece un repaso breve de los puntos más sobresalientes.

La dureza, así como otras características de muchos aceros y de algunos materiales no ferrosos se pueden modificar con un tratamiento térmico. El acero es una aleación de hierro y carbono. El porcentaje en peso del carbono presente afecta la capacidad de la aleación para tratarse de manera térmica. Un acero al bajo carbono tiene aproximadamente de 0.03 a 0.30% de carbono, un acero al medio carbono aproximadamente de 0.35 a 0.55% y un acero al alto carbono aproximadamente de 0.60 a 1.50%. (El hierro fundido contiene más del 2% de carbono.) La capacidad del acero para endurecerse aumenta con el contenido de carbono. El acero al bajo carbono tiene muy poco carbono para que el endurecimiento integral sea efectivo, de modo que se deben utilizar otros métodos de endurecimiento superficial (véase más adelante). Los aceros al medio y alto carbonos se endurecen integralmente con los tratamientos térmicos adecuados. La profundidad de la dureza variará de acuerdo con el contenido de la aleación.

TEMPLADO Para endurecer un acero al medio o al alto carbonos, se calienta la pieza por arriba de su temperatura crítica (aproximadamente 1400°F [760°C]), permitiendo el equilibrio por algún tiempo y, luego, se enfría súbitamente a temperatura ambiente por inmersión en agua o aceite. El enfriamiento rápido crea una solución supersaturada de hierro y carbono llamada martensita, la cual es extremadamente dura y mucho más fuerte

que el material original. Por desgracia, también es muy frágil. En efecto, se ha intercambiado la ductilidad del acero por el incremento en su resistencia. El enfriamiento rápido agrega, además, deformaciones a la pieza. En la figura B-12 (que no está a escala) se ilustra el cambio en la forma de la curva de esfuerzo-deformación, como resultado del templado de un acero dúctil al medio carbono. Mientras que es deseable el incremento de la resistencia, la fragilidad severa de un acero integralmente templado lo hace inservible si no se templa de nuevo.

REVENIDO Después del templado, se puede recalentar la misma pieza a una temperatura inferior (400 a 1300°F [200 a 700°C]), inmersa térmicamente, y luego enfriarla con lentitud. Lo anterior ocasionará que una parte de la martensita se convierta en ferrita y cementita, lo cual reduce un poco la resistencia, pero recupera algo de ductilidad. Con esto, se logra una gran flexibilidad en términos de obtención de la combinación de propiedades deseada, variando el tiempo y la temperatura durante el proceso de revenido. El ingeniero de materiales o metalurgista pueden obtener gran variedad de propiedades para satisfacer cualquier aplicación. La figura B-12 muestra también la curva de esfuerzo-deformación unitaria del mismo acero después del templado.

RECOCIDO Los procesos de templado y revenido son reversibles mediante el recocido. Se calienta la pieza por encima de la temperatura crítica (como en el templado), pero permitiendo ahora el enfriamiento lento a temperatura ambiente. Esto restablece las condiciones de la solución y las propiedades mecánicas de la aleación sin endurecer. El recocido se usa con frecuencia, aun si no se ha realizado previamente el endurecimiento, para eliminar los esfuerzos y las deformaciones residuales generados por las fuerzas aplicadas en la formación de la pieza. El recocido deja a la pieza en un estado dulce y “relajado”, restableciendo su curva de esfuerzo-deformación unitaria original, como se indica en la figura B-12.

NORMALIZADO Muchas tablas con datos de aceros comerciales indican que el acero se normalizó luego de rolarlo o darle su forma de inventario final. La normalización es similar al recocido, aunque requiere un tiempo de inmersión menor a temperatura elevada, así como una tasa de enfriamiento más rápida. El resultado es un acero un tanto más fuerte y duro que uno totalmente recocido, pero más cerca del recocido que del revenido.

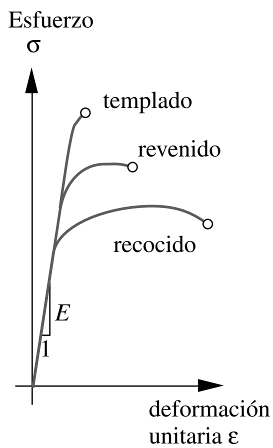


FIGURA B-12

Curvas de esfuerzo-deformación unitaria del acero recocido, templado y revenido

Dureza superficial (cementación)

Cuando una pieza es grande, o gruesa, resulta difícil obtener una dureza uniforme interior mediante endurecimiento integral. Una alternativa consiste en endurecer tan sólo la superficie y dejar el centro dulce. Lo anterior también elimina la distorsión asociada con un templado intenso de la pieza. Si el acero contiene suficiente carbono, se puede calentar, templar y revenir, como se haría para lograr un endurecimiento integral. Para aceros al bajo carbono (dulces), se necesitan otras técnicas para obtener la condición de dureza. Esto implica el calentamiento de la pieza en un ambiente especial rico en carbono, nitrógeno o ambos, para luego templarlo aplicando un proceso llamado *carburación, nitruración* o *cianuración*. En todos los casos, el resultado es una superficie dura (es decir, *cementación*) sobre un núcleo dulce, que se conoce como endurecimiento por cementado.

La **carburación** calienta los aceros al bajo carbono en una atmósfera gaseosa de monóxido de carbono, provocando así que la superficie se penetre del carbono de la solución. La **nitruración** calienta el acero al bajo carbono en una atmósfera gaseosa de nitrógeno y forma nitruros de hierro sólido en la superficie. La **cianuración** calienta la pieza en un baño salino de cianuro a 1500°F (800°C) aproximadamente, en tanto que el acero al bajo carbono toma la sal tanto de los carburos como de los nitruros.

Para aceros al medio y alto carbonos no se requiere una atmósfera artificial, puesto que el acero tiene suficiente carbono para endurecerse. Hay dos métodos de uso común. En el **endurecimiento a la llama** se pasa una llama de oxiacetileno sobre la superficie

que se va a endurecer y luego se templa con un chorro de agua, lo cual da como resultado una superficie más dura que la obtenida con los métodos de atmósferas artificiales. El **endurecimiento por inducción** utiliza bobinas eléctricas para calentar rápidamente la superficie de la parte, que luego se templa antes de que se caliente el núcleo.

La cementación por cualquier método es un tratamiento de endurecimiento muy deseable en muchas aplicaciones. Con frecuencia resulta ventajoso conservar la ductilidad total (y, por lo tanto, la tenacidad) del núcleo del material, con la finalidad de mejorar la capacidad de absorción de energía, mientras se obtiene también gran dureza en la superficie para reducir el desgaste e incrementar la resistencia de la superficie. Las piezas grandes de una máquina, como las levas y los engranes, son ejemplos de elementos que se benefician más con el cementado que con el endurecimiento, ya que se minimiza la distorsión por calor, en tanto que el núcleo tenaz y duro absorbe mejor la energía por impacto.

Tratamiento térmico de materiales no ferrosos

Algunas aleaciones no ferrosas se pueden endurecer y otras no. Ciertas aleaciones de aluminio se **endurecen por precipitación**, lo cual también se conoce como **endurecimiento por envejecimiento**. Un ejemplo es la aleación de aluminio con hasta aproximadamente 4.5% de cobre. Dicho material se trabaja en caliente (rolado, forjado, etcétera) a ciertas temperaturas y, luego, se calienta y mantiene a una temperatura mayor, para forzar una dispersión aleatoria del cobre en la solución sólida. Después se templa para captar la solución supersaturada a temperatura normal. En seguida se recalienta la parte a una temperatura por debajo de la temperatura de templado y se mantiene por un largo tiempo, mientras algo de la solución supersaturada se precipita y se incrementa la dureza del material.

Otras aleaciones de aluminio, magnesio, titanio y unas cuantas de cobre son susceptibles de recibir tratamientos térmicos similares. Las resistencias de las aleaciones de aluminio endurecido se aproximan a las de aceros al medio carbono. Como todo el aluminio tiene aproximadamente 1/3 de la densidad del acero, las aleaciones de aluminio más fuertes tienen mejores tasas de resistencia-peso, en comparación con los aceros (dulces) al bajo carbono.

Conformado y endurecimiento mecánicos

Trabajo en frío A temperatura ambiente, el trabajo mecánico sobre los metales para cambiar su forma o tamaño también los endurecerá e incrementará su resistencia a expensas de la ductilidad. El trabajo en frío puede ser resultado del proceso de rolado, donde unas barras de metal reducen progresivamente su grosor cuando se pasa entre rodillos, o de cualquier operación que lleva al metal dúctil más allá del punto de fluencia y lo deforma permanentemente. La figura B-13 ilustra cómo el proceso afecta la curva de esfuerzo-deformación unitaria del material. Cuando la carga se incrementa desde el origen O hasta rebasar el punto de fluencia y y llega al punto B, se presenta una deformación permanente OA.

Si la carga se remueve de ese punto, se recupera la energía elástica almacenada y el material regresa a un esfuerzo cero en el punto A a lo largo de una nueva línea elástica BA paralela a la pendiente elástica original E. Si la carga ahora se reaplica y llega al punto C, el material cede otra vez, por lo que la nueva curva de esfuerzo-deformación unitaria es $ABCf$. Observe que ahora hay un nuevo punto de fluencia y', que está en un esfuerzo mayor que el anterior. El material se ha endurecido por **deformación unitaria**, incrementando su resistencia a la fluencia y reduciendo su ductilidad. Este proceso se puede repetir hasta que el material se vuelve frágil y se fractura.

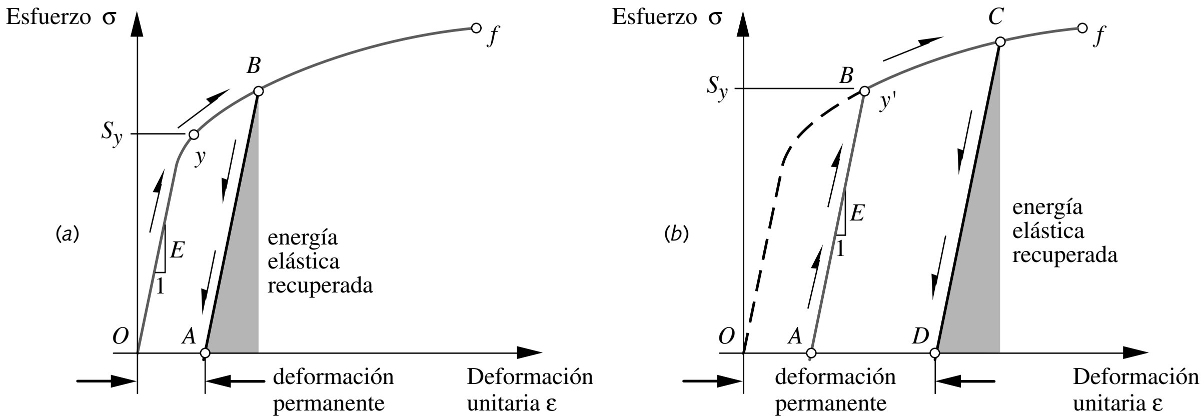


FIGURA B-13

Endurecimiento con deformación de un material dúctil mediante trabajo en frío *a*) Primer trabajo, *b*) Segundo trabajo

Si se requiere una deformación plástica significativa para la manufactura, como en la fabricación de ollas o cilindros de metal profundos, es necesario dar forma en frío al material en etapas sucesivas y recocer la parte entre cada etapa para evitar la fractura. El recocido restaura el material lo más cercano a la curva original de esfuerzo-deformación unitaria, lo cual permite una fluencia adicional sin fractura.

Trabajo en caliente Todos los metales tienen una temperatura de recristalización, por debajo de la cual los efectos del trabajo mecánico serán como los que se describieron, por ejemplo del trabajo en frío. Si el material se trabaja mecánicamente por encima de su temperatura de recristalización (trabajo en caliente), tenderá al menos en forma parcial al recocido conforme se enfría. Por lo tanto, el trabajo en caliente reduce el problema de endurecimiento por deformación, pero introduce sus propios problemas de oxidación rápida en la superficie, debido a las temperaturas elevadas. Los metales rolados en caliente suelen tener mayor ductilidad, menor resistencia y un acabado superficial deficiente, en comparación con los metales trabajados en frío para la misma aleación. El trabajo en caliente no incrementa apreciablemente la dureza del material; sin embargo, se logra aumentar la resistencia mejorando la estructura del grano y alineando el "grano" del metal con los contornos finales de la pieza. Esto es básicamente cierto en las piezas forjadas.

Forja Es la automatización del arte milenario de la herrería. El herrero calienta la parte al rojo vivo en la forja y, luego, le da forma golpeándola con un martillo. Cuando se enfría lo suficiente como para darle forma, se recalienta y se repite el proceso. En la forja se utiliza una serie de martillos a manera de dados para dar forma gradualmente al metal caliente hasta alcanzar la forma final. Cada golpe representa un cambio realizado en la forma del lingote original, hasta que la pieza obtiene la forma final deseada. La pieza se recalienta entre golpe y golpe del martillo, que está montado en una presa de forjado. Las grandes fuerzas requeridas para deformar plásticamente el metal caliente exigen presiones masivas para piezas de tamaños mediano a grande. Se requieren operaciones de maquinado para remover el gran cinturón de "rebabas" a lo largo de la carrera del dado y para maquinar orificios, superficies de montaje, etcétera. El acabado de una forja es tan burdo como cualquier parte rolada en caliente, debido a la oxidación y descarburación del metal calentado.

Prácticamente es posible forjar cualquier metal dúctil. Se utilizan comúnmente el acero, el aluminio y el titanio. La forja tiene la ventaja de crear piezas más fuertes que el vaciado o el maquinado. Las aleaciones de fundición son inherentemente más débiles a la tensión que las aleaciones forjadas. La hechura en caliente de un material forjado

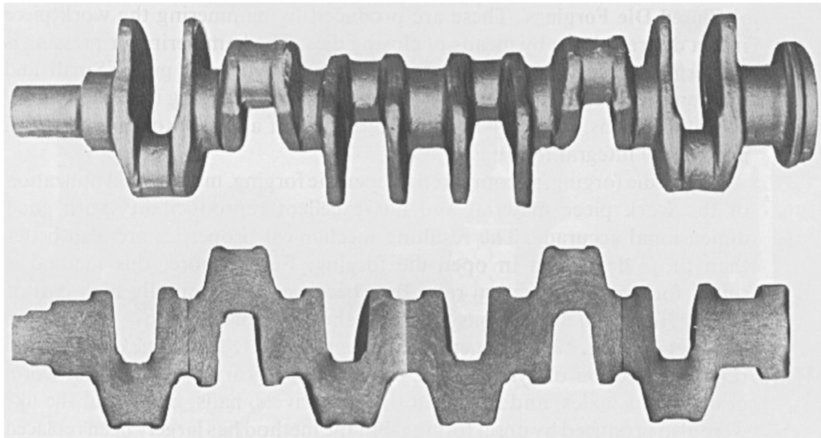


FIGURA B-14

Cigüeñal de acero forjado para un motor de camión diesel *Cortesía de Wyman-Gordon Corp., Grafton, MA*

causa que "las líneas de flujo" interno del material o "grano" se aproximen a los contornos de la pieza, lo cual suele dar como resultado mayor resistencia que si las líneas de flujo de la hechura se hubieran cortado en serie con maquinado del contorno final. La forja se usa profusamente en piezas expuestas a grandes esfuerzos, como las alas de avión y las estructuras del fuselaje, así como los cigüeñales de motor, las bielas y las uniones de la suspensión de automóviles. La figura B-14 ilustra un cigüeñal forjado de camión. En la sección transversal se observa que las líneas del grano siguen los contornos. El alto costo de los múltiples dados necesarios para las hechuras forjadas lo vuelve una elección poco práctica, a menos que las cantidades a producir sean lo suficientemente grandes como para amortizar el costo de la herramienta.

EXTRUSIÓN Se utiliza sobre todo en metales no ferrosos (en especial en el aluminio), ya que comúnmente emplea dados de acero. El dado típico es un disco grueso de acero endurecido con un "agujero" u orificio en forma de cuña, en el extremo de la sección transversal de la pieza terminada. El producto de la extrusión se calienta para suavizarlo y luego se golpea, de manera uniforme, a alta rapidez con el dado, el cual está sujeto a la máquina. La pieza fluye, o se extrude, con la forma del dado. El proceso es similar a la obtención del macarrón. Una hebra grande del material, con la sección transversal deseada, se extrude a partir de la pieza. Luego, la extrusión pasa por una estación donde se rocía con agua fría. La extrusión es una forma económica de obtener perfiles de sección transversal constante a la medida del cliente, ya que la hechura de los dados no es muy costosa. El control dimensional y el acabado de la superficie son buenos. La extrusión se emplea para elaborar perfiles de aluminio para molinos como ángulos, canales, vigas en I y perfiles a pedido del cliente en marcos para ventana y contrapuertas, marcos para puertas corredizas, entre otros. Las extrusiones se cortan y se maquinan lo suficiente para ensamblarlas en productos terminados. En la figura B-15 se muestran algunos perfiles de extrusión.

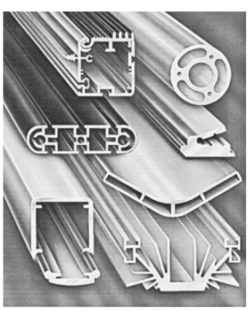


FIGURA B-15

Extrusiones *Cortesía de The Aluminum Extruders Council*

B.5 TRATAMIENTOS DE RECUBRIMIENTO Y SUPERFICIES

Hay muchos tratamientos de recubrimiento para las superficies. Algunos tienen el propósito fundamental de inhibir la corrosión, en tanto que otros buscan mejorar la dureza de la superficie y la resistencia al desgaste. Los recubrimientos también sirven para cambiar (ligeramente) las dimensiones, así como para alterar las propiedades físicas como reflexión, color y resistividad. Por ejemplo, los anillos para pistones están recubiertos

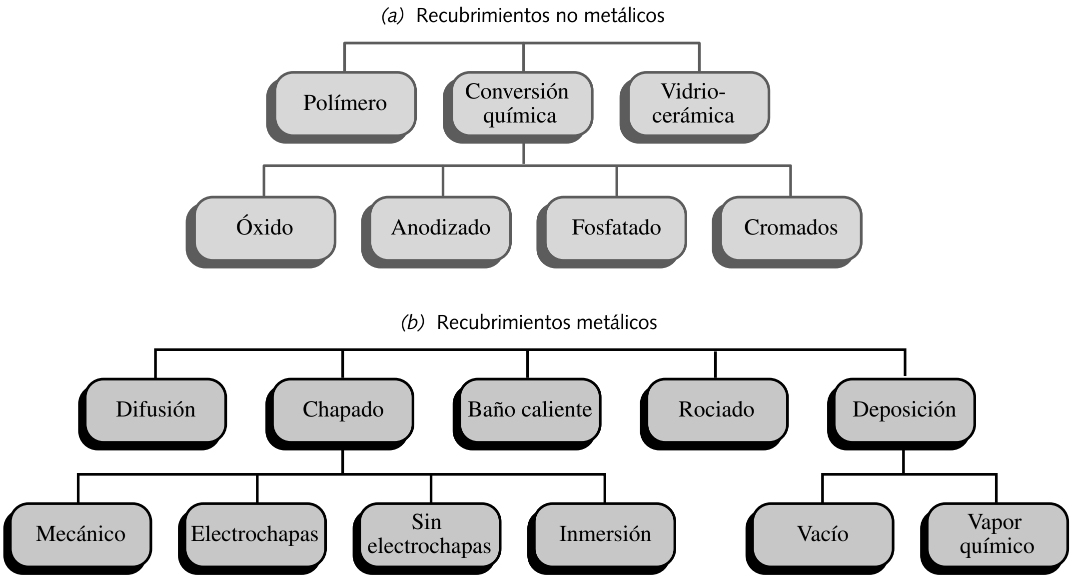


FIGURA B-16

Coating Methods Available for Metals

de cromo para mejorar su resistencia al desgaste, los sujetadores están recubiertas para reducir la corrosión y las molduras de los automóviles están recubiertas de cromo para mejorar la estética y resistencia a la corrosión. La figura B-16 presenta un diagrama con varios tipos de recubrimientos para aplicaciones en las máquinas. Éstos se dividen en dos clases principales: metálicos y no metálicos, dependiendo del tipo de recubrimiento, no del sustrato. Algunas clases se dividen en varias subclases. Aquí sólo se verán algunas. Se invita al lector a buscar más información en las referencias de la bibliografía.

Acción galvánica

Cuando se aplica un revestimiento de metal a otro metal diferente, se puede crear una celda galvánica. Todos los metales son electrolíticamente activos en mayor o menor grado y, si son lo suficientemente diferentes en su potencial electrolítico, formarán una batería eléctrica en presencia de un electrolito conductor como agua de mar o incluso agua del grifo. La tabla B-4 lista algunos metales comunes ordenados del menos noble (electrolíticamente más activos) al más noble (menos activos), en cuanto a su acción galvánica potencial. Las combinaciones de metales cercanas entre sí en la serie galvánica, como el hierro fundido y el acero, están relativamente a salvo de la corrosión galvánica. La combinación de metales alejados dentro de esta escala, como el aluminio y el cobre, experimentarán una corrosión severa en un ambiente electrolítico o incluso en un ambiente húmedo.

En un medio conductor, los dos metales se convierten en ánodo y cátodo, respectivamente, donde el metal menos noble actúa como ánodo. El flujo de corriente eléctrica generada causa una pérdida de material del ánodo y una deposición de material en el cátodo. El metal menos noble desaparece en forma gradual. Tal problema se presenta siempre que dos metales lo suficientemente separados en la serie galvánica se encuentren en un medio conductor de electricidad. Por lo tanto, no sólo los revestimientos sino también los sujetadores (broches) y las piezas en contacto deben fabricarse usando combinaciones de metales que no creen este problema.

Tabla B-4
Serie galvánica de metales en agua de mar

Serie galvánica
Menos noble
Magnesio
Zinc
Aluminio
Cadmio
Acero
Hierro fundido
Acero inoxidable
Plomo
Estaño
Níquel
Latón
Cobre
Bronce
Monel
Plata
Titanio
Grafito
Oro
Platino
Más noble

B

Electrochapas

Las electrochapas (chapas electrolíticas) implican la creación deliberada de una celda galvánica, donde la pieza que se recubre es el cátodo y el material de recubrimiento es el ánodo. Los dos metales se colocan en un baño electrolítico y se aplica una corriente directa desde el ánodo hasta el cátodo. Los iones del material de recubrimiento se conducen al sustrato de recubrimiento a través del electrolito, y cubren la parte con un revestimiento delgado del material. Se debe tener tolerancia para el espesor del recubrimiento, el cual es controlable. El espesor del recubrimiento es uniforme, excepto en las esquinas filosas, o bien, en orificios y grietas. El recubrimiento se acumula en las esquinas exteriores, aunque no así en los orificios o en las grietas angostas. Por lo tanto, quizá sea necesario lijar después del recubrimiento para restaurar las dimensiones. Algunas veces las partes desgastadas (o mal fabricadas) se reparan con un recubrimiento de material adecuado sobre el revestimiento y, luego, lijando de nuevo para recuperar la dimensión.

Los aceros, las aleaciones basadas en níquel y cobre, así como otros metales se revisten electrolíticamente con facilidad. Existen dos enfoques. Si un metal más noble (menos activo) recubre el sustrato, puede reducir la tendencia a la oxidación en la medida en que el recubrimiento permanece intacto protegiendo al sustrato del ambiente. El estaño, el níquel y el cromo se utilizan con frecuencia para recubrir electrolíticamente el acero, con la finalidad de hacerlo resistente a la corrosión. El recubrimiento de cromo también proporciona un incremento en la dureza de la superficie hasta HRC 70, la cual está por encima de aquella que se obtiene en muchas aleaciones de acero endurecido.* Por desgracia, cualquier trastorno o hueco en el recubrimiento puede generar nodos por la acción galvánica si están presentes medios conductores (como agua de lluvia). Como el sustrato es menos noble que el recubrimiento, se convierte en el ánodo sacrificado y se corroe con rapidez. El recubrimiento electrolítico, con metales más nobles que el sustrato, rara vez se utiliza en piezas que estarán inmersas en agua o en otros electrolitos.

Como alternativa, un metal menos noble puede recubrir el sustrato para servir como el ánodo sacrificable, el cual se corroerá en vez del sustrato. El ejemplo más común de esto es el recubrimiento de zinc del acero, también conocido como galvanización. (Es posible usar el cadmio en vez del zinc, pues durará más tiempo en ambientes de agua salada o con sal en el aire.) El revestimiento de zinc o cadmio se corroerá gradualmente, pero protegerá al sustrato de acero más noble hasta que el revestimiento se acabe, después de lo cual el acero se oxidará. El revestimiento de zinc se aplica mediante un proceso llamado "inmersión en caliente" en vez del recubrimiento electrolítico, el cual dará como resultado un revestimiento más grueso y más protector, reconocible por su apariencia de "madreperla". La galvanización se aplica con frecuencia en la fabricación de paneles de carrocería para automóviles, con la finalidad de inhibir la corrosión. Los ánodos sacrificables de zinc se utilizan, asimismo, en los motores fuera de borda y lanchas con casco de aluminio para evitar cortos circuitos debidos a la corrosión del aluminio en agua de mar.

Una advertencia en relación con los revestimientos electrolíticos es que puede ocurrir que el sustrato se vuelva frágil por la acción del hidrógeno, lo que ocasionaría una pérdida significativa en la resistencia. Los acabados recubiertos electrolíticamente no deberían utilizarse en piezas sometidas a cargas de fatiga. La experiencia ha demostrado que el recubrimiento electrolítico reduce de manera significativa la resistencia a la fatiga de los metales, pero es posible que cause una falla prematura.

Sin electrochapas

El recubrimiento sin electricidad coloca un revestimiento de níquel sobre un sustrato, sin necesidad de una corriente eléctrica. El sustrato "catódico", en este caso (no hay ánodo), actúa como un catalizador para iniciar una reacción química, la cual hace que los iones de níquel en la solución electrolítica se reduzcan y se depositen sobre el sustrato. El

* Resulta interesante observar que el cromo en forma pura es más blando que el acero endurecido, pero cuando recubre electrolíticamente el acero se vuelve más duro que el sustrato de acero. El níquel y el hierro también incrementan su dureza cuando recubren electrolíticamente sustratos de metal. El mecanismo no está bien comprendido, pero se cree que en el proceso de recubrimiento se generan microdeformaciones internas, que endurecen el revestimiento. La dureza del recubrimiento se controla modificando las condiciones del proceso.

revestimiento de níquel también actúa como catalizador y mantiene la reacción hasta que la parte se retira del baño. Así se obtienen revestimientos relativamente delgados. El espesor de los revestimientos se encuentra comúnmente entre 0.001 in y 0.002 in. A diferencia de las electrochapas, la chapa de níquel aplicada sin electricidad es completamente uniforme y penetrará en los orificios y las grietas. La chapa es densa y su dureza es uniforme de alrededor de 43 HRC. Otros metales también sirven para chapar sin electricidad, aunque por lo general se utiliza el níquel.

Anodizado

Mientras que el aluminio puede recubrirse electrolíticamente (con alguna dificultad), es más común tratarlo mediante la anodización. Tal proceso crea una capa muy delgada de óxido de aluminio sobre la superficie. El revestimiento de óxido de aluminio es autoprotector, pues evita que el oxígeno de la atmósfera ataque el sustrato de aluminio en servicio. El revestimiento de óxido anodizado es incoloro de manera natural, aunque es posible teñirlo para agregar color a la superficie tratada y dar una apariencia agradable en una amplia gama de tonos. Éste es un tratamiento de superficies relativamente barato, con buena resistencia a la corrosión y una distorsión insignificante. El titanio, el magnesio y el zinc también se pueden anodizar.

Una variación de la anodización convencional del aluminio se conoce como “anodizado duro”. Puesto que el óxido de aluminio (alúmina) es un material cerámico, es naturalmente muy duro y resistente a la abrasión. El **anodizado duro** brinda un revestimiento más grueso (aunque no más duro) que la anodización convencional y a menudo se utiliza para proteger las piezas de aluminio relativamente suaves del desgaste en contactos abrasivos. La dureza de este tratamiento de superficies rebasa la del acero más duro, en tanto que las piezas de aluminio así anodizadas pueden competir contra el acero más duro; sin embargo, algo del óxido de aluminio abrasivo en la superficie no es benévola con el acero.

Recubrimientos de rociado por plasma

Un buen número de revestimientos de cerámica muy dura se pueden aplicar a los aceros y a otras piezas metálicas si se utiliza la técnica de rociado de plasma. Las temperaturas de aplicación son altas, lo cual limita la selección del sustrato. Los revestimientos que se rocían tienen el acabado superficial rugoso como una “cáscara de naranja”, el cual requiere esmerilado o pulimento para lograr un acabado fino. La principal ventaja es una superficie con una dureza y una resistencia química muy altas. No obstante, los recubrimientos cerámicos son frágiles y están sujetos a descarcararse cuando se exponen a impactos mecánicos o térmicos.

Revestimientos químicos

Los tratamientos químicos más comunes para una gama de metales van desde el lavado del acero con ácido fosfórico (o ácido cromático sobre aluminio), el cual proporciona resistencia limitada y de corto plazo, hasta las pinturas de varios tipos diseñadas para dar una protección más duradera contra la corrosión. Hay una gran diversidad de pinturas con diferentes formulaciones para varios ambientes y sustratos. Una porción de pintura da como resultado un poco menos de protección que dos porciones de formulación epóxica, aunque todos los revestimientos químicos deberían visualizarse sólo como protección temporal contra la corrosión, en especial cuando se emplean sobre materiales vulnerables a la corrosión como el acero. Los acabados de esmalte horneado y porcelana sobre el acero tienen vidas más largas, en términos de resistencia a la corrosión, aun cuando padecen de fragilidad. Continuamente se están desarrollando nuevas fórmulas de pinturas y revestimientos protectores. La mejor información y la más reciente se obtienen de los vendedores de tales productos.

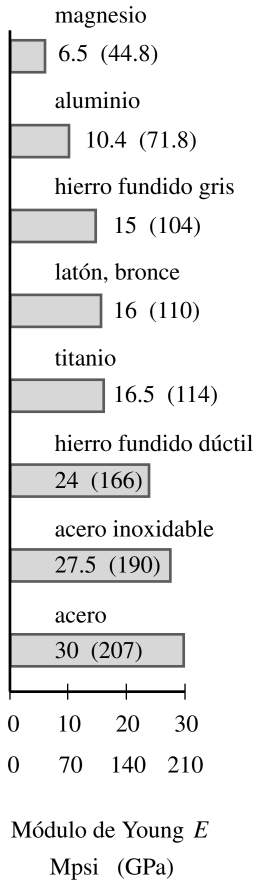


FIGURA B-17

Módulos de Young para varios metales

B.6 PROPIEDADES GENERALES DE LOS METALES

La gran variedad de materiales útiles en ingeniería llega a crear confusión en el ingeniero novato. En este libro no hay espacio suficiente para estudiar el tema de selección de materiales con detalle completo. En este apéndice se incluyen varias referencias bibliográficas y se invita al lector a consultarlas. En el apéndice E se incluyen tablas de datos de propiedades mecánicas para un conjunto limitado de materiales. La figura B-17 presenta los módulos de Young de varios metales para ingeniería.

Las siguientes secciones intentan dar alguna información general y lineamientos para ayudar al ingeniero a identificar qué tipos de materiales serían adecuados, en cierta situación de diseño. Se espera que el ingeniero en activo se apoye, en gran medida, en la pericia y la ayuda disponible de los fabricantes de materiales, en cuanto a la selección del material óptimo en cada diseño. Además, se publican muchas referencias donde se listan a detalle los datos de las propiedades de la mayoría de los materiales para ingeniería. Algunas de tales referencias se mencionan en la bibliografía de este apéndice.

Hierro fundido

Los hierros fundidos constituyen una familia de materiales completa. Sus ventajas principales son su costo relativamente bajo y que son fáciles de fabricar. Algunos son débiles a la tensión comparados con el acero; pero, como la mayoría de los materiales fundidos, tienen alta resistencia a la compresión. Sus densidades son ligeramente menores que las del acero de alrededor de 0.25 lb/in^3 (6920 kg/m^3). La mayoría de los hierros fundidos no presentan una relación lineal de esfuerzo-deformación unitaria por debajo del límite elástico; no se rigen por la ley de Hooke. Su módulo de elasticidad E se estima dibujando una línea desde el origen hasta un punto sobre la curva a 1/4 de la resistencia última a la tensión y se encuentra en el rango de los 14 a los 25 Mpsi (97 a 172 Mpa). La composición química del hierro difiere de la del acero, sobre todo por su mayor contenido de carbono, que se encuentra entre el 2% y el 4.5%. La gran cantidad de carbono, presente en algunos hierros fundidos que se encuentran en forma de grafito, hace que algunas de dichas aleaciones sean fáciles de vaciar como líquido fundido y también fáciles de maquinar como sólidos. El modo más común de fabricación es la fundición en arena con las subsecuentes operaciones de maquinado. Sin embargo, los hierros fundidos no son fáciles de soldar.

HIERRO FUNDIDO BLANCO Es un material muy duro y frágil. Es difícil de maquinar y tiene usos limitados, uno de ellos es como recubrimiento en las mezcladoras de cemento, donde su dureza es necesaria.

HIERRO FUNDIDO GRIS Es la forma más común del hierro fundido. Sus escamas de grafito le dan su apariencia y su nombre. La ASTM gradúa el hierro fundido gris en siete categorías, con base en la resistencia mínima a la tensión en kpsi. La clase 20 tiene una resistencia mínima a la tensión de 20 kpsi (138 MPa). Los números de clase 20, 25, 30, 35, 40, 50 y 60 representan, entonces, la resistencia a la tensión en kpsi. El costo se incrementa con el aumento de la resistencia a la tensión. Tal aleación es fácil de vaciar y de maquinar, a la vez que ofrece una buena amortiguación acústica. Esto hace de él la selección popular para armazones de máquinas, carters, rotores de frenos y tambores, etcétera. Las escamas de grafito le dan, asimismo, una buena lubricidad y resistencia al desgaste. Su relativamente baja resistencia a la tensión no recomienda su uso en situaciones donde hay flexiones o cargas de fatiga grandes; sin embargo, algunas veces se utiliza en cigüeñales de máquinas de bajo costo. Si se lubrica, funciona razonablemente bien contra el acero.

HIERRO FUNDIDO MALEABLE Presenta una resistencia a la tensión mayor que el hierro fundido gris, pero no se desgasta a sí mismo. La resistencia a la tensión puede variar de 50 a 120 kpsi (345 a 827 MPa), lo cual depende de la fórmula empleada. Con frecuencia se utiliza en piezas donde se presentan esfuerzos de flexión.

Hierro fundido nodular (dúctil) Tiene la mayor resistencia a la tensión de los hierros fundidos, la cual va de 70 a 135 kpsi (480 a 930 MPa). El nombre *nodular* proviene del hecho de que sus partículas de grafito son de forma esferoide. El hierro fundido dúctil tiene el módulo de elasticidad (de aproximadamente 25 MPsi [172 GPa]) más alto que el hierro fundido gris y presenta una curva lineal de esfuerzo-deformación unitaria. Es más tenaz, más fuerte, más dúctil y menos poroso que el hierro fundido gris. Es el hierro fundido que se elige para piezas con cargas de fatiga como cigüeñales, pistones y levas.

Aceros fundidos

El acero fundido es similar al acero forjado en términos de su contenido químico, es decir, tiene mucho menos carbono que el hierro fundido. Las propiedades mecánicas del acero fundido son mejores que las del hierro fundido, pero inferiores a las del acero forjado. Su principal ventaja es que su fabricación es sencilla cuando se utiliza fundición de arena o inversión (pérdida de cera). De acuerdo con su contenido de carbono, el acero fundido se clasifica en bajo carbono ($< 0.2\%$), medio carbono (0.2% a 0.5%) y alto carbono ($> 0.5\%$). Las aleaciones de acero fundido se fabrican también agregando otros elementos para altas resistencia y resistencia al calor. Las resistencias a la tensión de las aleaciones de aceros fundidos están en un rango de alrededor de 65 a 200 kpsi (450 a 1380 MPa).

Aceros forjados

El término “forjado” se refiere a todos los procesos que manipulan la forma del material sin fundirlo. El rolado en caliente y el rolado en frío son los dos métodos más comunes que se usan, aunque hay variantes como el estiramiento de alambre, el estiramiento profundo, la extrusión y el formado en frío. El común denominador es una fluencia deliberada del material para cambiar su forma a temperaturas ambiente o elevada.

Acero rolado en caliente Se produce forzando lingotes de acero calientes a través de conjuntos de rodillos o dados, los cuales cambian progresivamente su forma a vigas de perfil I, secciones acanaladas y ángulos de hierro, así como productos planos, cuadrados y redondos, además de tubos, lámina, placas, entre otros. El acabado de la superficie de los productos rolados en caliente es rugoso debido a la oxidación a elevadas temperaturas. Las propiedades mecánicas también son relativamente bajas porque el material termina en estado recocido o normalizado, a menos que en modo deliberado se trate térmicamente después. Ésta es la elección típica para elementos de acero estructural al bajo carbono, que se usan en la construcción de estructuras de edificios y máquinas. El material rolado en caliente también se utiliza para piezas de máquinas que estarán sujetas a maquinado exhaustivo (engranes, levas, etcétera), donde el acabado inicial de inventario es irrelevante y uniforme, mientras que las propiedades del material que no se trabaja en frío son deseables como adelanto de un tratamiento térmico planeado. Hay gran cantidad de aleaciones que contienen carbono en formas de rolado en caliente.

Acero rolado en frío Se produce a partir de piezas o formas roladas en caliente. La pieza obtiene su forma y dimensión finales por rolado entre rodillos de acero endurecido, o por trefilado a través de dados a temperatura ambiente. Los rodillos o dados pulen la superficie y trabajan en frío el material, lo que incrementa su resistencia y reduce su ductilidad, como se describe en la sección sobre endurecimiento y formado mecánico. El resultado es un material con buen acabado superficial y dimensiones precisas, en comparación con el material rolado en caliente. Su resistencia y dureza se incrementan a expensas de defectos (deformaciones) de fábrica significativos, que luego causan distorsión, lo cual es posible resolver durante el maquinado, soldado o tratamiento térmico. Las formas roladas en frío disponibles, en general, son láminas, cintas, placas, barras redondas y rectangulares, así como tubos, entre otras. Las formas estructurales como las vigas de perfil I se obtienen tan sólo con rolado en caliente.

Sistemas de numeración del acero

En general, hay muchos sistemas de numeración del acero. La ASTM, el AISI y la SAE* tienen códigos concebidos para definir los elementos de la aleación y el contenido de carbono en los aceros. La tabla B-5 lista algunas de las denominaciones AISI/SAE de las aleaciones de acero más comunes que se utilizan. Los primeros dos dígitos indican los principales elementos de la aleación; los últimos dos dígitos, la cantidad de carbono presente expresada en centésimas de porcentaje. La ASTM y la SAE han desarrollado un nuevo sistema de numeración unificado para todas las aleaciones metálicas, el cual usa el prefijo UNS seguido por una letra y una cifra de cinco dígitos. La letra define la categoría de la aleación: *F* para hierro fundido, *G* para acero y aleaciones al bajo carbono, *K* para aceros especiales, *S* para aceros inoxidables y *T* para acero de herramientas. En las series *G*, los números son los mismos que las denominaciones AISI/SAE de la tabla B-5 con un cero agregado al final. Por ejemplo, la denominación SAE4340 se convierte en UNS G43400. Para mayor información, véase la referencia 2 sobre sistemas de numeración de metales. Se utilizarán las denominaciones de aceros AISI/SAE.

ACERO BÁSICO AL CARBONO Se identifica porque el primer dígito es un 1 y el segundo es 0, pues no hay ningún otro elemento en la aleación, salvo el carbono. Los aceros al bajo carbono son aquéllos identificados como AISI 1005 a 1030, los aceros al medio carbono de 1035 a 1055 y los aceros al alto carbono de 1060 a 1095. La serie AISI 11xx agrega azufre básicamente para mejorar el maquinado. Tales aceros se llaman sin maquinado y no se consideran aleaciones de acero porque el azufre no mejora las propiedades

* La ASTM es la Sociedad Estadounidense de Pruebas y Materiales, el AISI es el Instituto Estadounidense del Hierro y el Acero, y la SAE es la Sociedad de Ingenieros Automotrices. Tanto el AISI como la SAE usan las mismas denominaciones para los aceros.

Tabla B-5 Denominaciones AISI/SAE para aleaciones de acero
Lista parcial para otras aleaciones disponibles; para otras aleaciones, consulte a los fabricantes

Tipo	Series AISI/SAE	Elementos principales de la aleación
Aceros al carbono		
Básico	10xx	Carbono
Libre corte	11xx	Carbono más azufre (resulfurizado)
Aleaciones de acero		
Al manganeso	13xx	1.75% de manganeso
	15xx	1.00% a 1.65% de manganeso
Al níquel	23xx	3.50% de níquel
	25xx	5.00% de níquel
Al níquel-cromo	31xx	1.25% de níquel y 0.65% o 0.80% de cromo
	33xx	3.50% de níquel y 1.55% de cromo
Al molibdeno	40xx	0.25% de molibdeno
	44xx	0%.40 o 0.52% de molibdeno
Al cromo-molibdeno	41xx	0.95% de cromo y 0.20% de molibdeno
Al níquel-cromo-molibdeno	43xx	1.82% de níquel, 0.50% o 0.80% de cromo y 0.25% de molibdeno
	47xx	1.45% de níquel, 0.45% de cromo y 0.20% o 0.35% de molibdeno
Al níquel-molibdeno	46xx	0.82% o 1.82% de níquel y 0.25% de molibdeno
	48xx	3.50% de níquel y 0.25% de molibdeno
Al cromo	50xx	0.27% a 0.65% de cromo
	51xx	0.80% a 1.05% de cromo
	52xx	1.45% de cromo
Al cromo-vanadio	61xx	0.60% a 0.95% de cromo y 0.10% a 0.15% de vanadio mínimo

mecánicas, pero sí lo vuelve frágil. La resistencia última a la tensión del acero al carbono varía de 60 a 150 kpsi (414 a 1 034 MPa) aproximadamente, dependiendo del tratamiento térmico.

Aleaciones de acero Tienen varios elementos agregados en pequeñas cantidades para mejorar la resistencia, dureza, la resistencia a la temperatura, la resistencia a la corrosión y otras propiedades del material. Se puede combinar cualquier cantidad de carbono junto con los elementos de la aleación. El cromo se agrega para mejorar resistencia, ductilidad, dureza, resistencia al desgaste y dureza. El níquel se agrega para mejorar la resistencia, pero sin perder la ductilidad, aunque también aumenta el templado por cementado. El molibdeno se utiliza en combinación con el níquel y/o con el cromo para incrementar la dureza, reducir la fragilidad e incrementar la tenacidad. Muchas otras aleaciones en diversas combinaciones, como las de la tabla B-5, se usan para obtener propiedades específicas. Los fabricantes de acero especializados son la mejor fuente de información y ayuda para el ingeniero que desee encontrar el mejor material para cualquier aplicación. La resistencia última a la tensión de una aleación de acero varía desde 80 hasta 300 kpsi (550 a 2 070 MPa) aproximadamente, lo cual depende de los elementos de la aleación y el tratamiento térmico. El apéndice E contiene tablas de datos respecto de propiedades mecánicas para una selección de aceros al carbono y aleaciones de acero. La figura B-18 presenta las resistencias últimas aproximadas a la tensión de algunos aceros al carbono normalizados y aleaciones de acero estandarizadas, mientras que la figura B-19 indica las curvas de esfuerzo-deformación unitaria de ingeniería para las pruebas de tensión de tres aceros.

Aceros para herramientas Son aleaciones de acero al medio y al alto carbonos, especialmente formuladas para dar una dureza muy alta, en combinación con resistencia al desgaste y la tenacidad suficientes para resistir las cargas de choque propias del servicio de las herramientas de corte, dados y moldes. Hay una amplia variedad de herramientas de acero. Consulte la bibliografía y la literatura de los fabricantes para mayor información.

Aceros inoxidables Son aleaciones de acero que contienen por lo menos 10% de cromo y ofrecen gran mejoría en la resistencia a la corrosión, en comparación con los aceros básicos u otras aleaciones de acero; sin embargo, su nombre no debería tomarse al pie de la letra. Los aceros inoxidables se deforman y corroen (con lentitud) en ambientes severos como el agua salada. Algunas aleaciones de acero inoxidable han

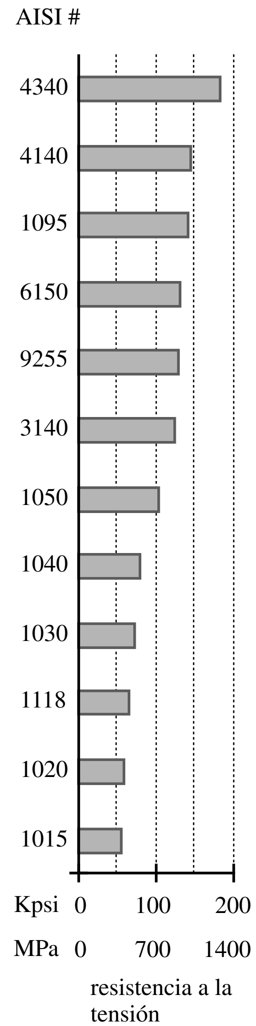


FIGURA B-18

Resistencias últimas a la tensión aproximadas para algunos aceros normalizados

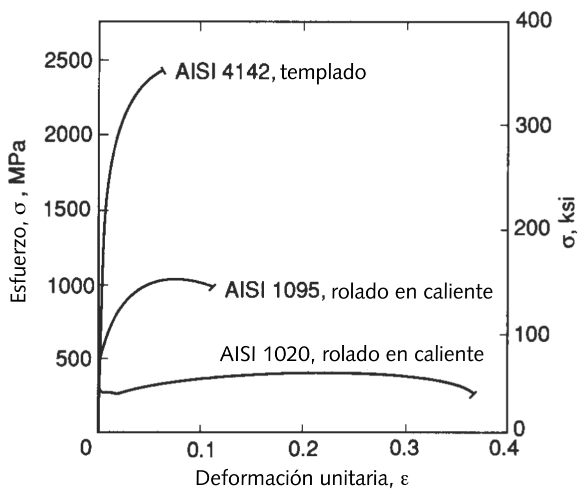


FIGURA B-19

Curvas de esfuerzo-deformación unitaria de pruebas de tensión de tres aleaciones de acero (De la fig. 5.16, p. 160, en N.E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993, con autorización)

B

mejorado la resistencia a las altas temperaturas. Existen cuatro tipos de aceros inoxidables: **martensítico**, **ferrítico**, **austenítico** y **precipitación endurecida**.

El acero inoxidable **martensítico** contiene de 11.5% a 15% de Cr y de 0.15% a 1.2% de C, es magnético, se endurece con tratamiento térmico y se utiliza comúnmente en la elaboración de cuchillería. El acero inoxidable **ferrítico** tiene más de 16% de Cr y bajo contenido de carbono, es magnético, blando y dúctil, pero no es susceptible al tratamiento térmico; sin embargo, su resistencia se incrementa en forma modesta cuando se trabaja en frío. Sirve para elaborar piezas de extracción profunda, como utensilios de cocina, y presenta mejor resistencia a la corrosión que el martensítico SS. Los aceros inoxidables ferríticos y los martensíticos se conocen como aceros inoxidables de **serie 400**.

El acero inoxidable **austenítico** es una aleación de 17% a 25% de cromo y 10% a 20% de níquel. Tiene mejor resistencia a la corrosión debido al níquel, es no magnético y tiene excelente ductilidad y tenacidad. Únicamente se endurece cuando se trabaja en frío. Está clasificado como acero inoxidable de **serie 300**.

Los aceros inoxidables de **endurecimiento por precipitación** se identifican con sus porcentajes de la aleación, seguidos por las letras PH, como el 17-4 PH, que contiene 17% de cromo y 4% de níquel. Dichas aleaciones tienen alta resistencia, así como alta resistencia al calor y a la corrosión.

La **serie 300** de acero inoxidable es fácil de soldar, aunque la serie 400 es menos soldable. Todas las graduaciones de acero inoxidable tienen menos conductividad de calor que el acero regular, en tanto que muchas de las aleaciones inoxidables son difíciles de maquinar. Todos los aceros inoxidables son significativamente más costosos que el acero normal. Véase el apéndice E para consultar los datos de las propiedades mecánicas.

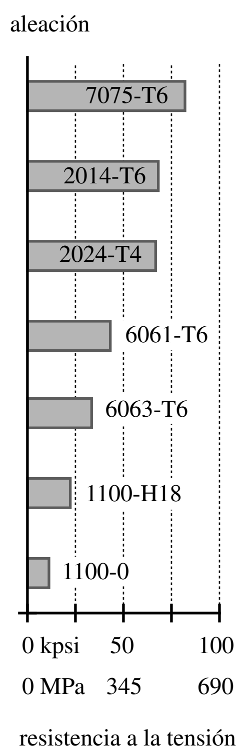


FIGURA B-20

Resistencia última a la tensión de algunas aleaciones de aluminio

Aluminio

El aluminio es el material no ferroso más ampliamente utilizado en el mundo; ocupa el segundo lugar, sólo después del acero. Se produce en estado "puro" y en forma de aleaciones. El aluminio comercial tiene hasta 99.8% de pureza. Los elementos más comunes en las aleaciones de aluminio son cobre, silicio, magnesio, manganeso y zinc, en cantidades que varían hasta el 5%. Las principales ventajas del aluminio son baja densidad, buena tasa resistencia-peso (SWR), ductilidad, excelente facilidad para trabajarse, facilidad para fundirse y soldarse, resistencia a la corrosión, alta conductividad y costo razonable. Comparado con el acero, tiene 1/3 de su densidad (0.10 lb/in^3 contra 0.28 lb/in^3), alrededor de 1/3 de su rigidez (E = 10.3 Mpsi [71 Gpa] contra 30 Mpsi [207 Gpa]) y por lo general es menos fuerte. Si el lector compara las resistencias del acero al bajo carbono y el aluminio puro, el acero es cerca de tres veces más fuerte. Por lo tanto, la resistencia específica es casi la misma en esa comparación. No obstante, el aluminio puro rara vez se utiliza en aplicaciones de ingeniería. Es muy suave y débil. Las principales ventajas del aluminio puro son su acabado brillante y su buena resistencia a la corrosión. Se usa sobre todo en aplicaciones decorativas.

Las aleaciones de aluminio tienen resistencias significativamente mayores que el aluminio puro y se usan ampliamente en ingeniería, donde las industrias de la aviación y automotriz se encuentran entre sus principales usuarios. Las aleaciones de aluminio de mayor resistencia tienen resistencias a la tensión de 70 a 90 kpsi (480 a 620 MPa) y resistencias a la fluencia de cerca del doble del acero templado. Se comparan de manera favorable con los aceros al medio carbono, en lo referente a la resistencia específica. El aluminio compite exitosamente con el acero en algunas aplicaciones; sin embargo, pocos materiales le ganan al acero si se necesita una resistencia muy alta. Consulte la figura B-20 de resistencias a la tensión de algunas aleaciones de aluminio. La figura B-21 ilustra las curvas de esfuerzo-deformación unitaria de pruebas de tensión para tres aleaciones de aluminio. La resistencia del aluminio se reduce a temperaturas bajas y altas.

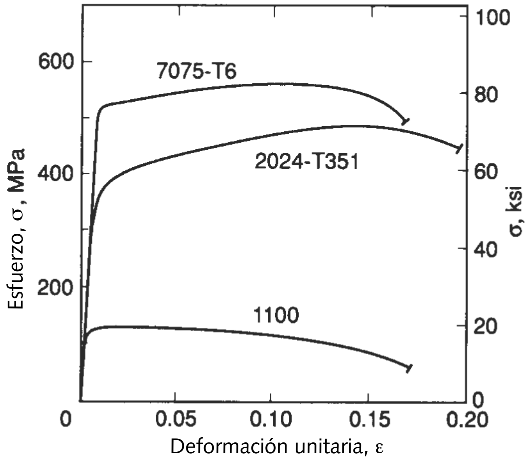


FIGURA B-21

Curvas de esfuerzo-deformación unitaria de pruebas de tensión para tres aleaciones de aluminio (De la fig. 5.17, p. 160, en N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993, con autorización)

Algunas aleaciones de aluminio se endurecen con un tratamiento térmico; y otras, por endurecimiento con deformación o precipitación, así como por envejecimiento. Las aleaciones de aluminio de alta resistencia son aproximadamente 1.5 veces más duras que el acero blando; mientras que los tratamientos superficiales, como la *dureza por anodizado*, pueden llevar a la superficie a una condición de dureza mayor que la del acero más duro.

El aluminio se encuentra entre los materiales con más facilidad para trabajarse; no obstante, tiende a endurecerse con el trabajo. Se funde, se maquina, se suelda* y se le da forma† fácilmente en caliente y en frío. También se trabaja en la extrusión. Las aleaciones están especialmente formuladas para el moldeado en arena y con dados, así como para el formado a través del forjado y la extrusión, y para piezas forjadas.

Aleaciones de aluminio forjado Se encuentran en gran variedad de perfiles como vigas en I, ángulos, canales, barras, láminas y tubos. La extrusión produce, asimismo, perfiles a la medida a un costo relativamente bajo. En la tabla B-6 se presenta el sistema de numeración para aleaciones de la Asociación del Aluminio. El primer dígito indica el principal elemento de la aleación y define la serie. La dureza se representa mediante un sufijo que contiene una letra y hasta tres números, como se define en la tabla. Las aleaciones de aluminio más usadas y disponibles en las aplicaciones de diseño de máquinas son las series 2000 y 6000.

La aleación de aluminio más antigua es la 2024, que contiene 4.5% de cobre, 1.5% de magnesio y 0.8% de manganeso. Está entre las aleaciones de aluminio más maquinables y es tratable al calor. Los templados más altos, como el -T3 y el -T4, tienen una resistencia a la tensión de aproximadamente 70 kpsi (483 MPa), lo cual también la hace una de las aleaciones de aluminio más fuertes. De igual forma, presenta alta resistencia a la fatiga. Sin embargo, tiene poca facilidad para la soldadura y el formado, en comparación con otras aleaciones de aluminio.

La aleación 6061 contiene 0.6% de silicio, 0.27% de cobre, 1.0% de manganeso y 0.2% de cromo. Se usa ampliamente en aplicaciones estructurales, debido a su excelente facilidad para la soldadura. Su resistencia es de aproximadamente 40 a 45 kpsi (276 a 310 MPa) en los recocidos más altos. menor resistencia a la fatiga que el aluminio 2024. Se maquina fácilmente y es una aleación popular en la extrusión, la cual resulta en un proceso de formado en caliente.

La serie 7000 se conoce como aluminio para aviones y se utiliza básicamente en las estructuras de los aviones. Éstas son las aleaciones de aluminio más fuertes con resistencias a la tensión de hasta 98 kpsi (676 MPa) yla resistencia más alta a la fatiga

* El calor de la soldadura causa recocidos locales, los cuales pueden eliminar los efectos de resistencia deseados del trabajo en frío o del tratamiento térmico en cualquier metal.

† Algunas aleaciones de aluminio harán trabajo en frío, cuando ya deformadas se trate de enderezarlas otra vez (sin recocerlas primero) causando fractura. Algunos ciclistas prefieren estructuras de acero en sus bicicletas, en vez del aluminio, a pesar del peso agregado, ya que una vez que una estructura de aluminio se flexiona al punto de falla, no puede enderezarse sin que se rompa. Los tubos de acero dañados de la estructura se enderezan y se utilizan de nuevo.

Tabla B-6 Denominaciones de aleaciones de aluminio de la Asociación del Aluminio

Lista parcial para otras aleaciones disponibles consulte a los fabricantes

Serie	Elementos principales de la aleación	Elementos secundarios
1xxx	Comercialmente puro (99%)	Ninguno
2xxx	Cobre (Cu)	Mg, Mn, Si
3xxx	Manganeso (Mn)	Mg, Cu
4xxx	Silicio (Si)	Ninguno
5xxx	Magnesio (Mg)	Mn, Cr
6xxx	Magnesio y silicio	Cu, Mn
7xxx	Zinc (Zn)	Mg, Cu, Cr
Denominaciones de dureza		
xxxx-F	De fábrica	
xxxx-O	Recocido	
xxxx-Hyyy	Endurecimiento por trabajo	
xxxx-Tyyy	Endurecimiento térmico/envejecimiento	

de aproximadamente 22 kpsi (152 MPa) @ 10^8 ciclos. Algunas aleaciones también se encuentran en forma *alclad*, la cual une una delgada capa de aluminio puro con uno, o ambos lados, para mejorar la resistencia a la corrosión.

ALEACIONES DE ALUMINIO FUNDIDO Se formulan de modo diferente a las aleaciones forjadas. Algunas son susceptibles a endurecerse, pero su resistencia y ductilidad son menores que las de las aleaciones forjadas. Las aleaciones están disponibles por moldeado en arena, moldeado por dados o moldeado por inversión. Remítase al apéndice E para consultar las propiedades mecánicas de las aleaciones de aluminio forjado y aluminio fundido.

Titanio

Aunque fue descubierto como elemento en 1791, la producción comercial del titanio se inició en la década de 1940, de modo que se encuentra entre los metales más nuevos en ingeniería. El titanio puede ser la respuesta a los deseos de los ingenieros, en algunos casos. Tiene la temperatura límite de servicio más alta de 1 200 a 1 400 °F (650 a 750 °C), cuando mucho pesa la mitad del acero (0.16 lb/in^3 [4 429 kg/m^3]) y es tan fuerte como un acero de resistencia media (135 kpsi [930 MPa]). Su módulo de Young es de 16 a 18 Mpsi (110 a 124 GPa), o de alrededor del 60% del que tiene el acero. Su resistencia específica se aproxima a la de aleaciones de acero más fuertes y supera la de aceros de resistencia media por un factor de 2. Su rigidez específica es mayor que la del acero, haciéndolo tan bueno o mejor en el límite de deflexión. También es no magnético.

El titanio es muy resistente a la corrosión y no tóxico, lo cual permite que se use en contacto con productos alimenticios ácidos o alcalinos y con químicos, y en el cuerpo humano como sustituto de válvulas del corazón y articulaciones de cadera. Por desgracia, su costo es elevado, comparado con el del aluminio y el del acero. Tiene muchas aplicaciones en la industria aeroespacial, sobre todo en estructuras de aviones militares y motores de jet, donde se requiere resistencia, peso ligero, y resistencia a las altas temperaturas y a la corrosión.

El titanio está disponible en estado puro, así como en aleaciones con combinaciones de aluminio, vanadio, silicio, hierro, cromo y manganeso. Sus aleaciones pueden endurecerse y anodizarse. Comercialmente hay formas limitadas en inventario. Puede ser forjado y fundido; sin embargo, es difícil vaciarlo, maquinarlo y darle forma en frío. Como el acero, y a diferencia de otros metales, algunas aleaciones de titanio presentan un límite real de resistencia, o estabilización de la resistencia a la fatiga, más allá de 10^6 ciclos de cargas repetidas, como se indica en la figura B-10. Remítase al apéndice E para consultar los datos de propiedades mecánicas.

Magnesio

El magnesio, el más ligero de los metales comerciales, es relativamente débil. Las resistencias a la tensión de sus aleaciones están entre 10 y 50 kpsi (69 y 345 MPa). Los elementos más comunes de la aleación son aluminio, manganeso y zinc. Debido a su baja densidad (0.065 lb/in^3 [1 800 kg/m^3]), su resistencia específica se aproxima a la del aluminio. Su módulo de Young es de 6.5 Mpsi (45 GPa), mientras su rigidez específica excede la del aluminio y el acero. Es muy fácil de vaciar y maquinar, pero es más frágil que el aluminio y, por lo mismo, es difícil su formado en frío.

Es no magnético y tiene una resistencia razonable a la corrosión, mejor que la del acero, aunque no es tan buena como la del aluminio. Algunas aleaciones de magnesio se pueden endurecer, en tanto que todas se anodizan. Es el metal más activo en la escala de galvanización y no se combina con la mayoría de otros metales en un ambiente húmedo. También es muy inflamable, en especial en forma de polvo o astillas; su flama no se apaga con agua. El maquinado requiere inundarlo con aceite frío para prevenir incendios. Es más o menos dos veces más costoso por libra que el aluminio. El magnesio se utiliza donde el peso ligero es de primordial importancia, como en la fundición de sierras de cadena domésticas y otros artículos manuales. Remítase al apéndice E para consultar los datos de las propiedades mecánicas.

Aleaciones de cobre

El cobre puro es blando, débil y maleable; se usa sobre todo en tuberías, sellados, conductores eléctricos (de alambre) y motores. Funciona fácilmente en frío y suele volverse frágil después del formado, lo cual requiere recocido entre estirados sucesivos.

Se pueden hacer muchas aleaciones de cobre. Las más comunes son latones y bronces, los cuales son en sí mismos familias de las aleaciones. Los **latones**, en general, son aleaciones de cobre y zinc en proporciones que varían y se utilizan en muchas aplicaciones, desde cartuchos de artillería y balas hasta lámparas y joyería.

Los **bronces** se definieron originalmente como aleaciones de cobre y estaño, aunque ahora también se incluyen aleaciones que no contienen estaño, como el bronce, silicio y el bronce aluminio, de modo que la terminología es algo confusa. El **bronce silicio** se usa en aplicaciones marinas como en las hélices de los barcos.

El **cobre berilio** no es ni latón ni bronce, es la más fuerte de las aleaciones, con resistencias que se aproximan a la del acero (200 kpsi [1380 MPa]). Se usa a menudo en resortes que no deben ser magnéticos, que transporten electricidad y que se den en ambientes corrosivos. El **bronce fósforo** también sirve para resortes; pero, a diferencia del cobre berilio, no se es posible doblarlo a lo largo del grano ni someterlo a tratamiento térmico.

El cobre y sus aleaciones tienen excelente resistencia a la corrosión y son no magnéticos. Todas las aleaciones de cobre se pueden fundir, formarse en caliente o en frío, y maquinarse; sin embargo, el cobre puro es difícil de maquinar. Algunas aleaciones son susceptibles de recibir tratamientos térmicos, pero todas funcionarán endurecidas. El módulo de Young de la mayoría de las aleaciones de cobre es de aproximadamente 17 Mpsi (117 GPa), mientras que su densidad de peso es ligeramente más alta que la del acero, que es de 0.31 lb/in^3 (8 580 kg/m^3). Las aleaciones de cobre son costosas comparadas con otros metales estructurales. Remítase al apéndice E para consultar los datos de propiedades mecánicas.

B.7 PROPIEDADES GENERALES DE LOS NO METALES

El uso de materiales no metálicos se ha incrementado mucho en los últimos 50 años. Las ventajas que usualmente se buscan son peso ligero, resistencia a la corrosión, resistencia a la temperatura, resistencia dieléctrica y facilidad de manufactura. El costo varía de bajo a alto, comparado con el de los metales, dependiendo del material no metálico específico. Existen tres categorías generales de los no metales de interés en la ingeniería: **polímeros** (plásticos), **cerámicas** y **compuestos**.

Los **polímeros** tienen una amplia gama de propiedades: sobre todo peso ligero, resistencia y rigidez relativamente bajas, alta resistencia a la temperatura, alta a la corrosión y eléctrica, así como un costo relativamente bajo por unidad de volumen. Los **cerámicos** pueden tener resistencias a la compresión muy altas (pero no a la tensión), alta rigidez, alta resistencia a la temperatura, alta resistencia dieléctrica (resistencia al paso de la corriente eléctrica), alta dureza y relativamente bajo costo por unidad de volumen. Los **compuestos** tienen casi cualquier combinación de propiedades que el lector desee, que incluyen las más altas resistencias específicas disponibles en cualquier material. Los compuestos son de costo tanto bajo como muy alto. Se examinarán brevemente los no metales y algunas de sus aplicaciones. El espacio no permite el estudio completo de tan importante clase de materiales. El lector tendrá que consultar la bibliografía para mayor información. En el apéndice E también se incluyen algunos datos de las propiedades mecánicas de los polímeros.

Polímeros

La palabra polímeros viene de **poli** = *muchos* y **meros** = *moléculas*. Los polímeros son moléculas de cadena larga de materiales orgánicos o compuestos basados en el carbono. (Asimismo hay una familia de compuestos poliméricos basada en el silicio.) La fuente de la mayoría de los polímeros son el petróleo o el carbón, los cuales contienen el carbono o los hidrocarburos necesarios para crear los polímeros. Mientras hay muchos compuestos de polímeros naturales (cera, hule, proteínas), la mayoría de los polímeros usados en aplicaciones de ingeniería son artificiales. Sus propiedades pueden ajustarse según un amplio rango de copolimerización con otros compuestos, o por aleación de dos o más polímeros juntos. Las mezclas de polímeros y materiales inorgánicos como el talco o la fibra de vidrio son comunes también.

B

Debido a su variedad, resulta difícil generalizar acerca de las propiedades mecánicas de los polímeros; no obstante, comparados con los metales tienen baja densidad, baja resistencia, baja rigidez, curvas no lineales de esfuerzo-deformación unitaria elástica, como se indica en la figura B-22 (con unas cuantas excepciones), baja dureza, excelente resistencia eléctrica y a la corrosión, así como facilidad de fabricación. Sus módulos de elasticidad aparente varían mucho, de aproximadamente 10 kpsi (69 MPa) a aproximadamente a 400 kpsi (2.8 GPa), pero todos son mucho menos rígidos que cualquier metal. El intervalo de sus resistencias últimas a la tensión es de aproximadamente 4 kpsi (28 MPa) para el polímero más débil sin relleno, a aproximadamente 22 kpsi (152 MPa) para los polímeros más fuertes rellenos de vidrio. Las gravedades específicas de la mayoría de los polímeros caen dentro del intervalo de aproximadamente 0.95 a 1.8, comparados

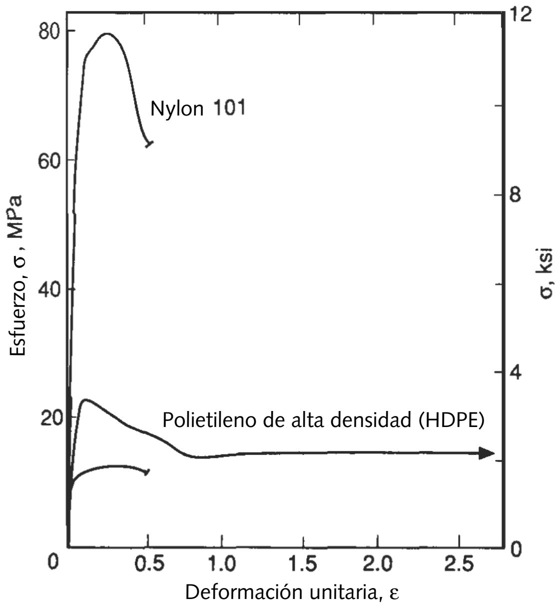


FIGURA B-22

Curvas de esfuerzo-deformación unitaria de pruebas de tensión de tres polímeros termoplásticos (De la fig. 5.18, p. 161, en N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall, 1993, con autorización)

con los aproximadamente 2 del magnesio, 3 del aluminio, 8 del acero y 13 del plomo. De modo que, aun cuando las resistencias absolutas de los polímeros sean bajas, sus resistencias específicas son respetables gracias a sus bajas densidades.

Los polímeros se dividen en dos clases, **termoplásticos** y **termoestables**. Los **polímeros termoplásticos** se pueden fusionar y solidificar repetidamente; no obstante, sus propiedades se suelen degradar debido a las altas temperaturas de fusión. Los termoplásticos son fáciles de moldear, mientras sus productos defectuosos o sobrantes se trituran y modelan de nuevo. Los **polímeros termoestables** presentan entrecruzamientos cuando primero se calientan y luego arden, pero no se fusionan con el recalentamiento. Los entrecruzamientos crean conexiones (como los peldaños de una escalera) entre moléculas de cadena larga, las cuales ondean y giran a través del polímero. Tales conexiones agregan resistencia y rigidez al polímero.

Se puede hacer otra división de los polímeros en compuestos llenos y vacíos. Los rellenos generalmente son materiales inorgánicos, como carbono negro, grafito, talco, fibra de vidrio molida y polvos metálicos. Los rellenos se agregan tanto a resinas termoplásticas como a resinas termoestables; no obstante, se utilizan con mayor frecuencia en las últimas. Los compuestos rellenos tienen mejores resistencia, rigidez y resistencia a la temperatura que las cadenas de polímeros, pero son más difíciles de moldear y fabricar.

Actualmente se dispone comercialmente de un confuso conjunto de polímeros. La confusión se incrementa por la proliferación de nombres de marcas para compuestos similares elaborados por diferentes fabricantes. Los nombres químicos genéricos de los polímeros tienden a ser largos, complejos y difíciles de recordar. En algunos casos, el nombre de marca de un polímero en particular se utiliza tanto que se convierte en nombre genérico. Algunos ejemplos de esto son nylon, plexiglás y fibra de vidrio. Se facilitaría la comprensión aprendiendo los nombres químicos genéricos, así como los nombres de marca asociados de las principales familias de polímeros para ingeniería. La tabla B-7 incluye varias familias de polímeros importantes. Las propiedades mecánicas de unos cuantos de ellos que con aplicaciones significativas en ingeniería se muestran en el apéndice E.

Tabla B-7
Familias de polímeros

Termoplásticos
Celulosas
Etilénicos
Poliamidas
Poliacetales
Policarbonatos
Óxidos polifenilos
Polisulfones
Termoestables
Aminos
Elastómeros
Epóxicos
Fenoles
Poliéster
Silicones
Uretanos

Cerámicos

Los materiales cerámicos tienen cada vez más aplicaciones en ingeniería, mientras se dedican grandes esfuerzos para desarrollar nuevos compuestos cerámicos. Los cerámicos se encuentran entre los materiales de ingeniería más antiguos; los ladrillos de arcilla son materiales cerámicos. No obstante su amplio uso en la construcción, la arcilla ya no se considera un cerámico de ingeniería. Los cerámicos de ingeniería son compuestos típicos de elementos metálicos y no metálicos. Pueden ser óxidos de un metal, mezclas de óxidos metálicos, carburos, boruros, nitruros o componentes como Al_2O_3, MgO, SiC y Si_3N_4, por ejemplo. Las propiedades principales de los materiales cerámicos son dureza y fragilidad altas, resistencia química y a la alta temperatura, alta resistencia a la compresión y alta resistencia dieléctrica, así como bajos costo y peso. Los materiales cerámicos son muy difíciles de maquinar con las técnicas convencionales y, por lo general, se forman mediante la compactación de polvo, luego se ponen al fuego o se aglomeran para formar adherencias entre sus partículas e incrementar su resistencia. La compactación de polvos se hace con dados o con presión hidrostática. Algunas veces se mezcla polvo de vidrio con cerámica y el producto se pone al fuego para fusionar el vidrio y alearlos juntos. Se intenta sustituir los metales tradicionales con cerámica en aplicaciones como cárters fundidos, pistones y otras piezas para motor. La baja resistencia a la tensión, la porosidad y la baja dureza a la fractura de la mayoría de las cerámicas llegan a causar problemas en tales aplicaciones. Los compuestos cerámicos, rociados en forma de plasma, se utilizan con frecuencia como revestimientos duros en sustratos metálicos, con la finalidad de obtener superficies resistentes al desgaste y la corrosión.

Compuestos

La mayoría de los compuestos son artificiales, aunque algunos, como la madera, se dan naturalmente. La madera es un compuesto de fibras de celulosa largas que se mantienen juntas en un una matriz resinosa de lignina. En general, los compuestos elaborados por el hombre suelen ser una combinación de algún material fuerte y fibroso, como vidrio, carbono o fibras de boro pegadas en una matriz de resina como epoxy o poliéster. La fibra de vidrio usada en embarcaciones y otros vehículos es un ejemplo común de un compuesto de poliéster reforzado con fibra de vidrio (GFRP). Las propiedades fundamentales del material en un compuesto se pueden hacer a la medida de la aplicación, ordenando las fibras en diferentes yuxtaposiciones; por ejemplo, paralelas, entretejidas en ángulos particulares o al azar, o tejidas alrededor de un mandril. Los compuestos por encargo incrementan su uso en aplicaciones con grandes esfuerzos, como estructuras para aeronaves, debido a sus tasas de resistencia-peso superiores, en comparación con los metales estructurales comunes. Las resistencias a la temperatura y a la corrosión también pueden diseñarse en algunos materiales compuestos. En general, tales compuestos no son homogéneos ni isotrópicos, como se indica en la sección B.3.

Es interesante observar que si uno calcula la resistencia teórica de cualquier material cristalino elemental "puro", con base en el vínculo interatómico del elemento, las resistencias pronosticadas son de un orden mayor que las vistas en cualquier prueba de un material "real", como las que se indican en la tabla B-8. La enorme diferencia entre las resistencias reales contra las teóricas se atribuye a trastornos de los enlaces atómicos debidos a defectos cristalinos en el material real. Es decir, se considera imposible fabricar "algo puro" a cualquier escala superatómica realista. Se supone que si se fuera capaz de hacer un "alambre" de hierro puro de un solo átomo de diámetro, tendría una "superresistencia" teórica. La fibra larga se ha elaborado con éxito con materiales elementales y presenta resistencias a la tensión muy altas, las cuales se aproximan a sus valores teóricos (tabla B-8).

Tabla B-8
Resistencias del hierro y el acero

Forma	S_{ut} kpsi (MPa)
Teórica	2 900 (20*E*3)
Fibra larga	1 800 (12*E*3)
Alambre fino	1 400 (10*E*3)
Acero dulce	60 (414)
Hierro fundido	40 (276)

Otra evidencia empírica de dicha teoría surge del hecho de que las fibras de cualquier material, fabricadas en diámetros muy pequeños, presentan resistencias a la tensión mucho mayores que las esperadas en las pruebas de esfuerzo-deformación unitaria en muestras más grandes del mismo material. Se supone que las secciones transversales muy pequeñas se aproximan a un estado material "más puro". Por ejemplo, es bien conocido el hecho de que el cristal muestra escasa resistencia a la tensión. Sin embargo, el pequeño diámetro de las fibras de vidrio indica una resistencia a la tensión mucho mayor que las hojas de vidrio, lo que las convierte en una fibra práctica (y menos costosa) para utilizarse en los cascos de embarcaciones, los cuales se someten a esfuerzos de tensión muy altos cuando están en servicio. Las fibras de carbono y de boro de diámetro pequeño tienen incluso resistencias a la tensión mayores que la fibra de vidrio, lo cual explica su utilidad en compuestos para aplicaciones en aviones militares y espaciales, donde su alto costo relativo no es un obstáculo.

B.8 SELECCIÓN DE MATERIALES

Una de las decisiones más importantes en el diseño es la selección adecuada del material. Los materiales limitan el diseño y aún se están inventando nuevos materiales que abren nuevas posibilidades al diseño. Ayudaría mucho si hubiera un modo sistemático para seleccionar el material de una aplicación. M. F. Ashby propuso un enfoque donde se comparan varias propiedades de materiales entre sí, para formar "gráficas de selección de materiales".[3] *Grosso modo*, los materiales se dividen en seis clases: metales, cerámicas, polímeros (sólidos o espumas), elastómeros, vidrios y compuestos (que incluyen la madera). Los miembros de tales clases y subclases suelen agruparse en una gráfica de este tipo.

La figura B-23 ilustra una gráfica que compara el módulo de Young contra la densidad, lo cual se conoce como *rigidez específica*. Al dibujar líneas de pendiente constante sobre dicha gráfica, se observa qué materiales tienen propiedades parecidas. La línea de rigidez específica $E/\rho = C$ se trazó continuamente en la figura B-23 y señala que algunas maderas presentan una rigidez específica equivalente al acero y a algunos otros metales. La línea también pasa por la sección inferior de la "burbuja" de los compuestos para ingeniería, lo cual significa que la fibra de vidrio (GFRP) tiene aproximadamente la misma dureza específica que la madera y el acero, mientras que en termoplásticos no reforzados como el nylon y el poliéster son menores sus rigideces específicas. De modo que si el lector busca el material más rígido/más ligero, debería moverse hacia arriba y hacia la izquierda de la gráfica. Se muestran otras líneas con pendientes iguales a $E^n/\rho = C$, donde n es una fracción como 1/2 o 1/3. Lo anterior representa las situaciones de carga, como vigas en flexión, para las cuales el parámetro de interés es una función no lineal de la rigidez específica. Como la gráfica es una presentación logarítmica, las funciones exponenciales se trazan como líneas rectas, lo cual permite que se hagan comparaciones sencillas.

La figura B-24 ilustra la gráfica de resistencia contra la densidad (conocida como *resistencia específica*) para varios materiales. En esta gráfica, la resistencia del material específico que se utiliza varía con el carácter del mismo. Por ejemplo, los metales y los polímeros dúctiles mostrarán su resistencia a la fluencia, las cerámicas frágiles su resistencia al aplastamiento por compresión y los elastómeros su resistencia al rasgado. La elongación vertical de la "burbuja" del material indica el intervalo de valores de resistencia, que se obtienen mediante endurecimiento térmico o endurecimiento por trabajo, los elementos de la aleación, etcétera. La línea continua sobre la gráfica representa un valor particular de resistencia específica, o bien, $\sigma/\rho = C$, e indica que la tasa entre resistencia y peso de algunas maderas es tan buena como las del acero de alta resistencia y mejor que la mayoría de los demás metales. No debería sorprender que la madera sea un material popular en la industria de la construcción. Además, observe la resistencia específica alta de las cerámicas para ingeniería. Por desgracia, sus resistencias a la tensión son cuando mucho de tan sólo 10% de tales resistencias compresivas, lo cual es la razón por la que el lector rara vez las verá en estructuras donde comúnmente se encuentran esfuerzos a la tensión.

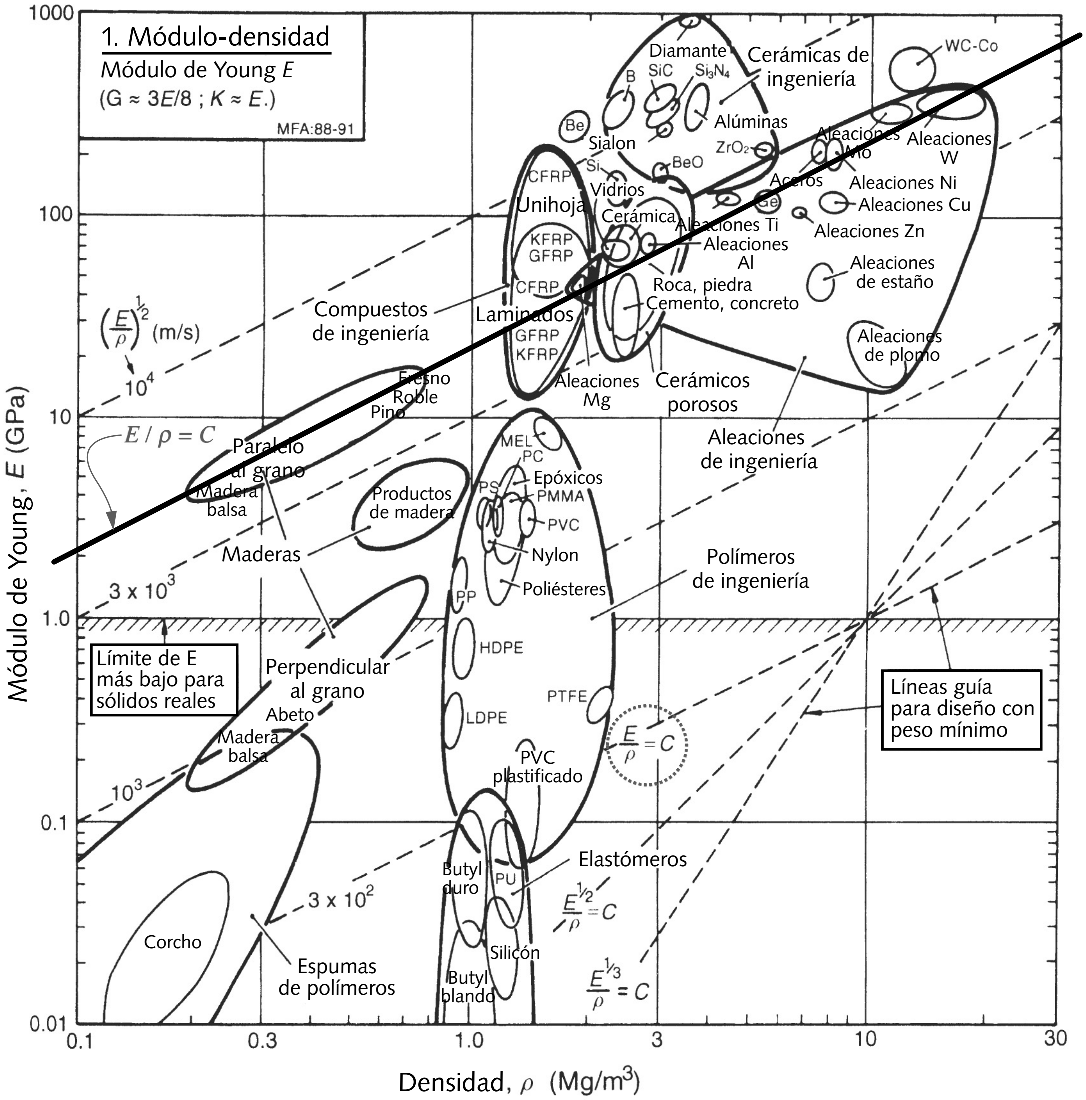


FIGURA B-23

Módulo de Young graficado contra la densidad de materiales para ingeniería (de la figura 4-3, p. 37, en M. F. Ashby, de *Materials Selection in Mechanical Design*, 2a. ed., Butterworth-Heinemann 1999, con autorización)

B

El texto de Ashby[3] es una referencia muy útil para el ingeniero en activo. Incluye docenas de gráficas del tipo que aquí se muestra, donde se comparan varias propiedades entre sí, de una forma tal que facilita su comparación y logra un buen conocimiento.

B.9 RESUMEN

Hay muchas clases de resistencias de materiales. Por ello, es muy importante entender cuáles son las importantes en una situación de carga específica. Las resistencias más

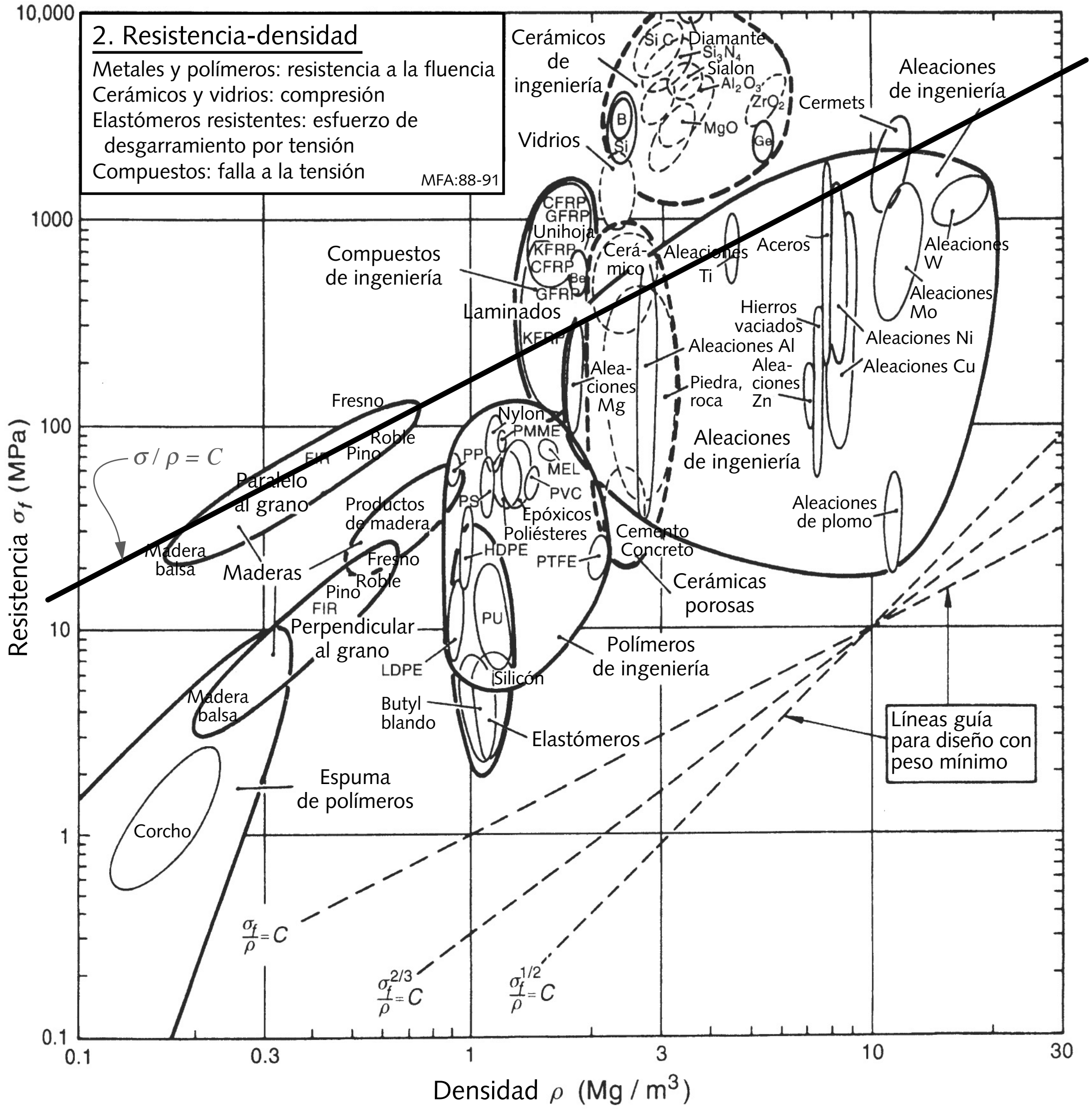


FIGURA B-24

Resistencia graficada contra la densidad de materiales para ingeniería (de la figura 4-4, p. 39, de M. F. Ashby, de *Materials Selection in Mechanical Design*, 2a. ed., Butterworth-Heinemann 1999, con autorización)

comúnmente medidas y documentadas son la **resistencia última a la tensión** S_{ut} y la **resistencia a la fluencia** S_y. La S_{ut} indica el mayor esfuerzo que el material aceptará antes de fracturarse; y S_y, el esfuerzo más allá del cual el material tendrá una deformación permanente. Muchos materiales tienen **resistencias a la compresión** aproximadamente iguales a sus resistencias a la tensión; se conocen como **materiales uniformes**. La mayoría de los metales forjados entran en dicha categoría. Algunos materiales tienen resistencias a la compresión y a la tensión significativamente diferentes; éstos se conocen como **materiales no uniformes**. Los metales fundidos generalmente están en tal categoría, con resistencias a la compresión mucho mayores que las de tensión. Las **resistencias al corte** de los materiales uniformes tienden a ser aproximadamente la mitad

de las resistencias a la tensión, en tanto que las resistencias al corte de los materiales no uniformes suelen estar entre sus resistencias a la tensión y a la compresión.

Una o más de estas resistencias puede ser de interés cuando la carga es estática. Si el material es dúctil, entonces S_y es el criterio común de falla, puesto que un material dúctil tiene una capacidad de distorsión significativa antes de la fractura. Si el material es frágil, como son la mayoría de los materiales vaciados, entonces la S_{ut} es un parámetro más interesante, porque el material se fracturará antes de que ocurra cualquier distorsión a la fluencia significativa. No obstante, los valores de la resistencia a la fluencia están documentados para los materiales frágiles, pero en general se calculan con base en un pequeño valor arbitrario de la deformación, en vez de una medida de la fluencia del espécimen. El capítulo 3 trata con más detalle que en este apéndice los mecanismos de fallas de materiales tanto dúctiles como frágiles.

La **prueba de tensión** es la medida más común de tales parámetros de resistencia estática. La **curva de esfuerzo-deformación** (σ-ε), generada en la prueba, se ilustra en la figura B.2. La llamada **curva de ingeniería σ-ε** difiere de la **curva real σ-ε** debido a la reducción del área de un espécimen de prueba dúctil durante el proceso de falla. Sin embargo, la **curva de ingeniería σ-ε** es el estándar para comparar materiales, ya que la curva verdadera σ-ε es más difícil de generar.

La pendiente de la curva σ-ε en el rango elástico, conocido como **módulo de Young** o **módulo de elasticidad** *E*, es un parámetro muy importante, porque define la rigidez del material o la resistencia a la flexión elástica bajo carga. Si el lector diseña para controlar las flexiones y los esfuerzos, el valor de *E* puede ser más interesante que la resistencia del material. Mientras que las aleaciones de un material base determinado llegan a variar ostensiblemente, en cuanto a sus resistencias, en esencia tendrán la misma *E*. Si la flexión es la primera preocupación, una aleación de resistencia baja sería tan buena como una de resistencia alta del mismo material base.

Cuando la carga sobre la parte varía con el tiempo, se le conoce como **carga dinámica** o **carga de fatiga**. Entonces, las resistencias estáticas no son un buen indicador de falla. En cambio, la **resistencia a la fatiga** es de mayor interés. Este parámetro de resistencia se mide sujetando el espécimen a la carga dinámica hasta que falla. Tanto la magnitud del esfuerzo como el número de ciclos de esfuerzo hasta la falla se reportan como los criterios de resistencia. La resistencia a la fatiga de un material determinado siempre será menor que su resistencia estática, aunque con frecuencia es menor que la mitad de su S_{ut}. En el capítulo 4 se trata con más detalle el fenómeno de falla por fatiga de los materiales.

Otros parámetros de materiales de interés para el diseñador de máquinas son la **resiliencia**, que es la capacidad para absorber energía sin deformación permanente, y la **tenacidad** o capacidad para absorber energía sin fracturarse (pero *con* deformación permanente). La **homogeneidad** es la uniformidad de un material a través de su volumen. Muchos materiales de ingeniería, en especial los metales, se pueden considerar macroscópicamente homogéneos, aun cuando a nivel microscópico sean con frecuencia heterogéneos. El **isotropismo** significa que se observan las mismas propiedades en cualquier dirección dentro del material. Muchos materiales de ingeniería son razonablemente isotrópicos en lo macro; se consideran así para propósitos de ingeniería. Sin embargo, otros materiales útiles para ingeniería, como la madera y los compuestos, no son ni homogéneos ni isotrópicos, por lo que sus resistencias deben medirse por separado en diferentes direcciones. La **rigidez** es importante en la resistencia al uso y también se relaciona con la resistencia. El **tratamiento térmico**, tanto integral como superficial, así como el **trabajo en frío**, incrementan la dureza y la resistencia de algunos materiales.

Ecuaciones importantes usadas en este capítulo

Remítase a las secciones referenciadas para consultar la información sobre el uso adecuado de estas ecuaciones.

Esfuerzo a la tensión axial (sección B.1):

$$\sigma = \frac{P}{A_o} \tag{B.1a}$$

Deformación unitaria por tensión axial (sección B.1):

$$\varepsilon = \frac{l - l_o}{l_o} \tag{B.1b}$$

Módulo de elasticidad (módulo de Young)(sección B.1):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{B.2}$$

Módulo de rigidez (sección B.1):

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{B.4}$$

Resistencia última al corte (sección B.1):

$$\begin{aligned} &\text{aceros:} && S_{us} \cong 0.80 S_{ut} \\ &\text{otros metales dúctiles:} && S_{us} \cong 0.75 S_{ut} \end{aligned} \tag{B.5b}$$

Resistencia a la fluencia de corte (sección B.1):

$$U = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon \tag{B.6}$$

Módulo de resiliencia (sección B.1):

$$U_R \cong \frac{1}{2} \frac{S_y^2}{E} \tag{B.7}$$

Módulo de tenacidad (sección B.1):

$$U_T \cong \left(\frac{S_y + S_{ut}}{2} \right) \varepsilon_f \tag{B.8}$$

Media aritmética (sección B.2):

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{B.9b}$$

Desviación estándar (sección B.2):

$$S_d = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mu \right)^2} \tag{B.9c}$$

B

Resistencia última a la tensión como una función de la dureza Brinell (sección B.4):

$$S_{ut} \cong 500\,\text{HB} \pm 30\,\text{HB} \quad \text{psi}$$
$$S_{ut} \cong 3.45\,\text{HB} \pm 0.2\,\text{HB} \quad \text{MPa} \qquad \text{(B.10)}$$

B.10 REFERENCIAS

1. **E. B. Haugen y P. H. Wirshing**, "Probabilistic Design". *Machine Design*, **vol**. 47, núms. 10 a 14, Penton Publishing, Cleveland, Ohio, 1975.
2. **H. E. Boyer y T. L. Gall**, eds. *Metals Handbook*. vol. 1, American Society for Metals: Metals Park, Ohio, 1985.
3. **M. F. Ashby**, *Material Selection in Mechanical Design*, 2a. ed., Butterworth and Heinemann, 1999.

B.11 REFERENCIAS WEB

La Web es un recurso útil para actualizar su información acerca de propiedades de los materiales en este y otros sitios que pueden encontrarse con un buscador.

http://www.matweb.com

Hojas de datos con las propiedades de 41,000 metales, plásticos, cerámicas y compuestos.

http://metals.about.com

Propiedades de materiales y datos.

B.12 BIBLIOGRAFÍA

Para información general sobre materiales, consulte lo siguiente:

Metals & Alloys in the Unified Numbering System, 6a. ed. ASTM/SAE: Filadelfia, Pa., 1944.

Brady, ed. *Materials Handbook*, 13a. ed., McGraw-Hill: Nueva York. 1992.

H. E. Boyer, ed. *Atlas of Stress-Strain Curves*. Amer. Soc. for Metals: Metals Park, Ohio, 1987.

K. Budinski, *Engineering Materials: Properties and Selection*. 4a. ed., Reston-Prentice-Hall: Reston, Va., 1992.

M. M. Farag, *Selection of Materials and Manufacturing Processes for Engineering Design*. Prentice-Hall International: Hertfordshire, U.K., 1989.

I. Granet, *Modern Materials Science*, Reston-Prentice-Hall: Reston, Va., 1980.

H. W. Pollack, *Materials Science and Metallurgy*, 2a. ed., Reston-Prentice-Hall: Reston, Va., 1977.

S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill: Nueva York, 1983.

L. H. V. Vlack, *Elements of Material Science and Engineering*, 6a. ed., Addison-Wesley: Reading, Mass., 1989.

M. M. Schwartz, ed. *Handbook of Structural Ceramics*, McGraw-Hill: Nueva York, 1984.

Para información específica sobre propiedades de los materiales, consulte lo siguiente:

H. E. Boyer y T. L. Gall, ed. *Metals Handbook*, vol. 1, American Society for Metals: Metals Park, Ohio, 1985.

U. S. Department of Defense, *Metallic Materials and Elements for Aerospace Vehicles and Structures* MIL-HDBK-5H, 1998.

R. Juran, ed. *Modern Plastic Encyclopedia*, McGraw-Hill: Nueva York, 1998.

J. D. Lubahn y R. P. Felgar, *Plasticity and Creep of Metals*, Wiley: Nueva York, 1961.

Para información sobre fallas de materiales, consulte lo siguiente:

J. A. Collins, *Failure of Materials in Mechanical Design*, Wiley: Nueva York, 1981.

N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1992.

R. C. Juvinall, *Stress, Strain and Strength*, McGraw-Hill: Nueva York, 1967.

Para información sobre plásticos y compuestos, consulte lo siguiente:

ASM, *Engineered Materials Handbook: Composites*, vol. 1, American Society for Metals: Metals Park, Ohio, 1987.

ASM, *Engineered Materials Handbook: Engineering Plastics*, vol. 2, American Society for Metals: Metals Park, Ohio, 1988.

Harper, ed. *Handbook of Plastics, Elastomers and Composites*, 2a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, 1990.

J. E. Hauck, “Long-Term Performance of Plastics”, *Materials in Design Engineering*, pp. 113-128, noviembre, 1965.

M. M. Schwartz, *Composite Materials Handbook*, McGraw-Hill: Nueva York, 1984.

Para información sobre procesos de manufactura, véase:

R. W. Bolz, *Production Processes: The Productivity Handbook*. Industrial Press: Nueva York, 1974.

J. A. Schey, *Introduction to Manufacturing Processes*. McGraw-Hill: Nueva York, 1977.

B.13 PROBLEMAS

Tabla PB-0
Matriz de tema/problema

B.1 Propiedades de materiales
B-1, B-2, B-3, B-4, B-5, B-6, B-7, B-8, B-9, B-10, B-11, B-12, B-18, B-19, B-20, B-21, B-22, B-23

B.4 Dureza
B-13, B-14

B.6 Propiedades generales
B-15, B-16, B-17, B-24, B-25, B-26

B.8 Selección de materiales
B-37, B-38, B-39, B-40

B-1. La figura PB-1 ilustra las curvas de esfuerzo-deformación unitaria de tres especímenes que fallaron en la prueba de tensión. Todos están graficados a la misma escala.

a) Identifique cada material como frágil o dúctil.
b) ¿Cuál es la rigidez?
c) ¿Cuál tiene la mayor resistencia última?
d) ¿Cuál tiene el mayor módulo de resiliencia?
e) ¿Cuál tiene el mayor módulo de tenacidad?

B-2. Determine una razón aproximada entre la resistencia a la fluencia y la resistencia última de cada material mostrado en la figura PB-1.

B-3. ¿Cuál de las aleaciones de acero mostradas en la figura B-19 seleccionaría para obtener

a) La resistencia máxima?
b) El módulo de resiliencia máxima?
c) El módulo de tenacidad máximo?
d) La rigidez máxima?

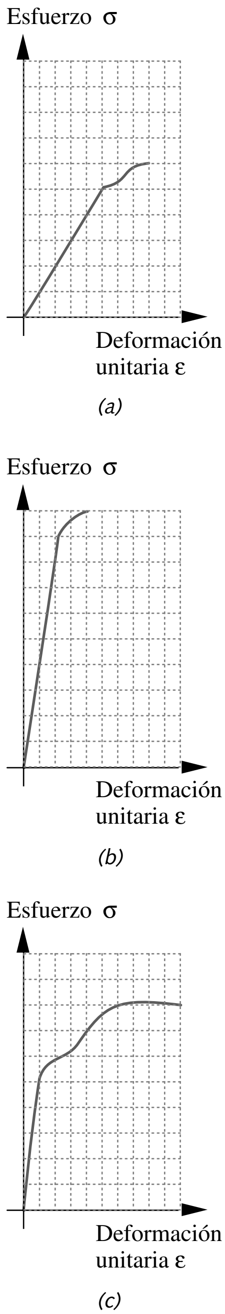


FIGURA PB-1

Curvas de esfuerzo-deformación unitaria

B-4. ¿Cuál de las aleaciones de aluminio de la figura B-21 seleccionaría para obtener

a) La resistencia máxima?
b) El módulo de resiliencia máxima?
c) El módulo de tenacidad máxima?
d) La rigidez máxima?

B-5. ¿Cuál de los polímeros termoplásticos de la figura B-22 seleccionaría para obtener

a) La resistencia máxima?
b) El módulo de resiliencia máxima?
c) El módulo de tenacidad máxima?
d) La rigidez máxima?

*B-6. Un metal tiene una resistencia de 414 MPa en su límite elástico y la deformación en ese punto es 0.002. Suponga que el espécimen de prueba es de 12.8 mm de diámetro con una longitud medida de 50 mm. ¿Cuál es su módulo de elasticidad? ¿Cuál es la energía de deformación en el límite elástico? ¿Identifica el tipo de metal con base en los datos proporcionados?

B-7. Un metal tiene una resistencia de 41.2 kpsi (284 MPa) en su límite elástico y la deformación en ese punto es de 0.004. Suponga que el espécimen de prueba es de 0.505 in de diámetro y de 2 in su longitud medida. ¿Cuál es la energía de deformación en el límite elástico? ¿Identifica el tipo de metal con base en los datos proporcionados?

*B-8. Un metal tiene una resistencia de 134 MPa en su límite elástico y la deformación en ese punto es de 0.003. ¿Cuál es su módulo de elasticidad? Suponga que el espécimen de prueba es de 12.8 mm de diámetro y su longitud medida es de 50 mm. ¿Cuál es su módulo de elasticidad? ¿Cuál es la energía de deformación en el límite elástico? ¿Identifica el tipo de metal con base en los datos proporcionados?

*B-9. Un metal tiene una resistencia de 100 kpsi (689 MPa) en su límite elástico y la deformación en ese punto es de 0.006. ¿Cuál es su módulo de elasticidad? ¿Cuál es la energía de deformación en el límite elástico? Suponga que el espécimen de prueba es de 0.505 in de diámetro y su longitud medida de 2 in. ¿Identifica el tipo de metal con base en los datos proporcionados?

B-10. Un material tiene una resistencia a la fluencia de 689 MPa con un desplazamiento del 0.6% de deformación. ¿Cuál es su módulo de resiliencia?

B-11. Un material tiene una resistencia a la fluencia de 60 kpsi (414 MPa) con un desplazamiento del 0.2% de deformación. ¿Cuál es su módulo de resiliencia?

*B-12. Un acero tiene una resistencia a la fluencia de 414 MPa, una resistencia última a la tensión de 689 MPa y una elongación en la fractura del 15%. ¿Cuál es el módulo de dureza aproximado? ¿Cuál es el módulo de resiliencia aproximado?

B-13. La dureza Brinell de un espécimen de acero fue de 250 HB. ¿Cuál es la resistencia a la tensión aproximada del material? ¿Cuál es la dureza en la escala Vickers? ¿En la escala Rockwell?

*B-14. La dureza Brinell de un espécimen de acero fue de 340 HB. ¿Cuál es la resistencia a la tensión aproximada del material? ¿Cuál es la dureza en la escala Vickers? ¿En la escala Rockwell?

B-15. ¿Cuáles son los principales elementos de una aleación de acero AISI 4340? ¿Qué cantidad de carbono tiene? ¿Puede endurecerse? ¿Con qué técnicas?

*B-16. ¿Cuáles son los principales elementos de una aleación de acero AISI 1095? ¿Qué cantidad de carbono tiene? ¿Puede endurecerse? ¿Con qué técnicas?

B-17. ¿Cuáles son los principales elementos de una aleación de acero AISI 6180? ¿Qué cantidad de carbono tiene? ¿Puede endurecerse? ¿Con qué técnicas?

B-18. ¿Cuál de los aceros de los problemas B-15, B-16 y B-17 es el más rígido?

* Las respuestas a estos problemas se encuentran en el apéndice H.

B-19. Calcule la *resistencia específica* y la *rigidez específica* de los siguientes materiales, luego elija uno para usarlo en la viga mayor del ala de un avión.

a) Acero S_{ut} = 80 kpsi (552 MPa)
b) Aluminio S_{ut} = 60 kpsi (414 MPa)
c) Titanio S_{ut} = 90 kpsi (621 MPa)

B-20. Si se deseara la *resistencia máxima al impacto* en una parte, ¿qué propiedades del material buscaría?

B-21. Consulte la tabla de datos de materiales en el apéndice E, luego determine las razones entre resistencia y peso para las siguientes aleaciones, con base en sus resistencias a la fluencia en tensión: aluminio 2024 tratado térmicamente, acero SAE 1040 rolado en frío, titanio Ti-75a, acero inoxidable tipo 302 rolado en frío.

B-22. Consulte la tabla de datos de materiales en el apéndice E, luego determine las razones entre resistencia y peso de las siguientes aleaciones, con base en sus resistencias últimas a la tensión: aluminio 2024 tratado térmicamente, acero SAE 1040 rolado en frío, plástico acetal sin relleno, titanio Ti-75A, acero inoxidable tipo 302 rolado en frío.

B-23. Consulte la tabla de datos de materiales en el apéndice E y calcule la rigidez específica de aluminio, titanio, hierro vaciado gris, hierro dúctil, bronce, acero al carbono y acero inoxidable. Clasifíquelos en orden ascendente según dicha propiedad y analice la importancia de tales datos en ingeniería.

B-24. Llame a sus distribuidores locales de acero y aluminio (consulte la sección amarilla) y obtenga los costos actuales por libra de un inventario de tamaño consistente de acero al bajo carbono (SAE 1020), acero SAE 4340, aluminio 2024-T4 y aluminio 6061-T6. Calcule la razón resistencia/unidad monetaria y la razón rigidez/unidad monetaria para cada aleación. ¿Cuál sería su elección con base en el costo-beneficio para una varilla redonda con carga axial a la tensión

a) si se necesita la resistencia máxima?
b) si se necesita la rigidez máxima?

B-25. Llame a sus distribuidores de plástico (consulte la sección amarilla) y obtenga los costos actuales por libra de varillas redondas o tubos de tamaño consistente de plexiglás, acetal, nylon 6-6 y PVC. Calcule la razón resistencia/unidad monetaria y la razón rigidez/unidad monetaria para cada aleación. ¿Cuál sería su elección con base en el costo-beneficio para una varilla redonda o tubos de diámetros particulares con carga axial a la tensión (nota: Los parámetros de los materiales se encuentran en el apéndice E)

a) si se necesita la resistencia máxima?
b) si se necesita la rigidez máxima?

B-26. Se diseñó una pieza y no se pueden cambiar sus dimensiones. Para minimizar sus deflexiones bajo la misma carga en todas direcciones, sin tomar en cuenta los niveles de esfuerzo, ¿cuál de estos materiales seleccionaría: aluminio, titanio, acero, o acero inoxidable? ¿Por qué?

*B-27. Suponiendo que los datos de propiedades mecánicas proporcionados en la tabla E-9 del apéndice representan los valores medios para algunos aceros al carbono, ¿cuál es el valor de la resistencia a la fluencia en tensión para un acero 1050 fundido y templado a 400F si se requiere una confiabilidad del 99.9%?

B-28. Suponiendo que los datos de propiedades mecánicas proporcionados en la tabla E-9 del apéndice representan los valores medios para algunos aceros al carbono, ¿cuál es el valor de la resistencia última a la tensión para un acero 4340 fundido y templado a 800F si se requiere una confiabilidad del 99.99%?

B-29. Suponiendo que los datos de propiedades mecánicas proporcionados en la tabla E-9 del apéndice representan los valores medios para algunos aceros al carbono, ¿cuál es el valor de la resistencia última a la tensión para un acero 4130 fundido y templado a 400F si se requiere una confiabilidad del 90%?

B-30. Suponiendo que los datos de propiedades mecánicas proporcionados en la tabla E-9 del apéndice representan los valores medios para algunos aceros al carbono, ¿cuál es el valor de la resistencia a la fluencia en tensión para un acero 4140 fundido y templado a 800F si se requiere una confiabilidad del 99.999%?

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H.

B-31. Se va a recubrir una placa de acero para mejorar su resistencia a la corrosión. Se están considerando dos materiales: cadmio y níquel. Considerando sólo el problema de la acción galvánica, ¿cuál seleccionaría? ¿Por qué?

B-32. Una parte de acero con muchos orificios y esquinas angulosas se va a recubrir con níquel. Se están considerando dos procesos: recubrimiento electrolítico y recubrimiento sin electricidad. ¿Qué proceso seleccionaría? ¿Por qué?

B-33. ¿Cuál es el tratamiento común que se utiliza para prevenir la oxidación en el aluminio? ¿Qué otros metales se pueden tratar también con este método? ¿De qué opciones se dispone en tal método?

*B-34. El acero se recubre frecuentemente con un metal menos noble que actúa como un ánodo sacrificable que se corroerá en vez del acero. ¿Qué metales se usan comúnmente con dicho propósito (cuando el producto terminado no se expone al agua salada)? ¿Cuál es el proceso de revestimiento seleccionado y cuáles son los procesos usados para obtener el producto terminado?

B-35. Una pieza de acero al carbono se tratará térmicamente para incrementar su resistencia. Si se requiere una resistencia última a la tensión de aproximadamente 550 MPa, ¿qué dureza Brinell promedio debería tener la parte después del tratamiento? ¿Cuál es la dureza equivalente en la escala Rockwell?

B-36. Una parte de acero al bajo carbono se somete a una prueba de dureza usando el método Brinell y se obtuvo una dureza de 220 HB. ¿Cuáles son aproximadamente los límites inferior y superior de la resistencia última a la tensión de esta parte en MPa?

B-37. La figura B-24 indica "líneas guías" para diseñar con el peso mínimo cuando se usa el criterio de falla. La guía, o índice, para minimizar el peso de una viga sometida a flexión es $\sigma_f^{2/3}/\rho$, donde σ_f es la resistencia a la fluencia del material y ρ es la densidad de masa. Para un perfil de sección transversal determinado, el peso de la viga con una carga dada se minimizará cuando se maximice este índice. Los materiales siguientes se consideran para aplicaciones de vigas: aluminio 5052, rolado en frío; cobre berilio Ca-170, duro y envejecido; y acero 4130, Q&T @ 1200F. ¿Cuál de estos materiales proporcionará la viga con el peso más ligero?

B-38. La figura B-24 muestra las "líneas guías" para diseñar con el peso mínimo cuando se usa el criterio de falla. La guía, o índice, para minimizar el peso de un miembro en tensión es σ_f/ρ, donde σ_f es la resistencia a la fluencia del material y ρ es la densidad de masa. El peso del miembro con una carga dada se minimizará cuando este índice se maximice. Para los tres materiales proporcionados en el problema B-37, ¿cuál de estos materiales proporcionará el miembro con el peso de tensión mínimo?

B-39. La figura B-23 presenta las "líneas guías" para diseñar con el peso mínimo cuando se usa el criterio de rigidez. La guía, o índice, para minimizar el peso de una viga sometida a flexión es $E^{1/2}/\rho$, donde E es el módulo de elasticidad del material y ρ es la densidad de masa. Para un perfil de sección transversal determinado, el peso de la viga con una rigidez dada se minimizará cuando este índice se maximice. Los siguientes materiales se consideran para aplicaciones en vigas: aluminio 5052, rolado en frío; cobre berilio CA-170, duro y envejecido; y acero 4130, Q&T @ 1200F. ¿Cuál de estos materiales proporcionará la viga con el peso mínimo?

B-40. La figura B-24 ilustra las "líneas guías" para diseñar con el peso mínimo cuando se usa el criterio de rigidez. La guía, o índice, para minimizar el peso de un miembro sometido a tensión es E/ρ, donde E es el módulo de elasticidad del material y ρ es la densidad de masa. El peso de un miembro con una rigidez dada se minimizará cuando dicho índice se maximice. Para los tres materiales dados en el problema B-39, ¿cuál de estos materiales proporcionará el miembro con el peso mínimo?

* Las respuestas de estos problemas se encuentran en el apéndice H.

Apéndice C

ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS

Si se ingresa basura en una computadora no sale más que basura. Pero al pasar por una máquina tan costosa, esa basura se ha ennoblecido de alguna forma y nadie se atreve a criticarla.

ANÓNIMO

C.0 INTRODUCCIÓN

Todos los ejemplos de análisis de deflexión y esfuerzo estudiados en los primeros capítulos del libro se resolvieron con las técnicas de análisis clásico de forma cerrada, las cuales son el foco principal de la obra. Dichas técnicas son aplicables, en primer lugar, a piezas con una geometría simple: cilindros, prismas rectangulares, etcétera. Sin embargo, en la realidad, muchas piezas de máquinas tienen formas geométricas más complejas, lo que hace difícil —o incluso imposible— el cálculo exacto del esfuerzo y la deflexión con las técnicas clásicas. Considere, por ejemplo, la forma tan compleja del cigüeñal de una máquina como el de la figura B-14 (p. 894). Para hacer un análisis del esfuerzo y la deflexión en una pieza de tal complejidad geométrica, se divide su volumen en un conjunto finito de elementos discretos contiguos y se resuelve el conjunto (grande) de ecuaciones simultáneas, cada una de las cuales se aplica a un elemento y a los nodos que conectan los elementos. La figura C-1 presenta modelos de elementos finitos de un cigüeñal y un pistón, así como la biela de un motor.

El concepto de análisis lineal de elementos finitos (FEA) es bastante sencillo; no obstante, los cálculos para realizarlo no lo son. La teoría matemática detrás del FEA está más allá del alcance de este texto, pero se cubre en muchos otros libros, algunos de los cuales se encuentran en la bibliografía de este apéndice. La meta consiste en presentar al lector esta técnica, destacando algunos de sus requerimientos y sus dificultades, así como brindarle algunos ejemplos de su uso.

Se ha vuelto relativamente fácil utilizar el FEA por la disponibilidad de paquetes comerciales de análisis, muchos de los cuales se conectan con uno o más paquetes de CAD de modelado espacial. Es muy probable que los ingenieros que lleguen a la profesión en el siglo XXI descubran que su compañía tiene y maneja tanto el modelado espacial como el FEA en el diseño de sus productos y máquinas. Con el software comercial de FEA,

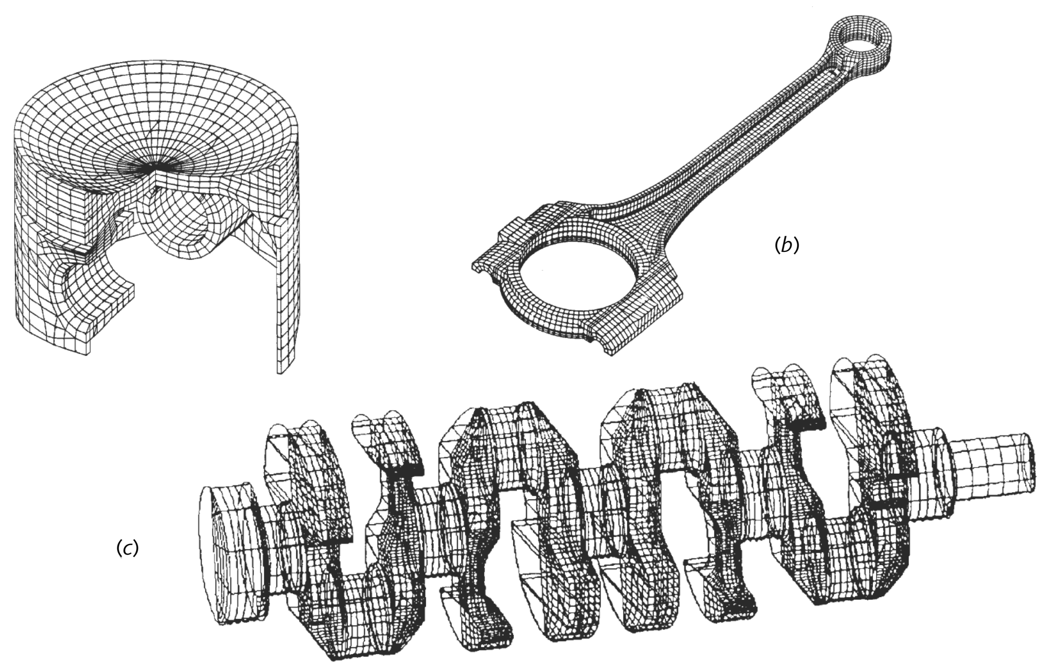


FIGURA C-1

Modelos de elementos finitos en el pistón (*a*), la biela (*b*) y el cigüeñal (*c*) de un motor *Cortesía de General Motors Co.*

es muy sencillo obtener resultados de FEA que parezcan razonables, aunque podrían estar muy errados si el usuario no sabe cómo usar la herramienta adecuadamente. Se recomienda que el estudiante de diseño de máquinas tome un curso de teoría y aplicación de FEA. La mayoría de las carreras de ingeniería cuentan con uno ahora.

Cálculo del esfuerzo y la deformación

El esfuerzo varía a lo largo del continuo de cualquier pieza. Al dividirla en un número finito de *elementos* discretos, conectados en sus *nodos* (una *malla*), se obtiene una *aproximación* al esfuerzo y a la deformación dentro de la pieza para cualquier conjunto dado de restricciones y cargas aplicadas en varios nodos de la estructura.* La aproximación se mejoraría mediante más elementos de menor tamaño, a expensas del incremento en el tiempo de procesamiento. Con las velocidades de las computadoras actuales (que continuarán en aumento) éste es un problema menor comparado con los que se enfrentaban los primeros días del FEA.† Una pieza del problema del analista es elegir el tipo adecuado, el número y la distribución de elementos para optimizar el equilibrio entre exactitud y tiempo de procesamiento. Es posible utilizar elementos más grandes en regiones de la pieza donde el gradiente de esfuerzo (pendiente) varía con lentitud. En regiones donde el gradiente de esfuerzo cambia rápidamente, como las cercanas a concentraciones de esfuerzos, o a cargas aplicadas o restricciones, se requiere una malla más fina. Observe en la figura C-1*c* que los elementos cercanos a los extremos del cigüeñal, donde el diámetro es constante, son más grandes que los de las manivelas y los pernos de biela.

El FEA no se limita al análisis estructural. Sirve también para cálculos de mecánica de fluidos, transferencia de calor, acústica, electromagnetismo y otros problemas especializados. Se analizará su uso sólo para problemas lineales de mecánica estructural. Todos los tipos comerciales de FEA manejan este caso. Otros trabajan, además, sistemas

C

* Al respecto, los cálculos de esfuerzo por los métodos clásicos de forma cerrada también son tan sólo aproximaciones, ya que los supuestos de simplificación que, por lo general, se tiene que hacer para resolver el problema.

† No obstante, conforme las velocidades se incrementan, los ingenieros enfrentan problemas de FEA más complejos, sobre todo los sistemas no lineales que causa tiempos de procesamiento significativos, incluso con computadores poderosas.

no lineales, en los cuales la deformación excede los límites supuestos por el análisis estático lineal, las propiedades del material son no lineales o se habrá de modelar la superficie de contacto. El FEA brinda información sobre esfuerzo, deformación, deflexión, frecuencias naturales y modos de vibración (eigenvalores y eigenvectores), impacto y vibración transitoria o de estado estable de una estructura.

Se han propuesto y utilizado varias formulaciones matemáticas desde 1956, cuando se codificó por primera vez el método del elemento finito, que fue bautizado por Turner y otros.[1] El procedimiento usado para el análisis estructural, en muchos paquetes comerciales de software de FEA, es el método directo de rigidez (DSM) que utiliza elementos rígidos para calcular los desplazamientos nodales y las fuerzas internas que resultan de un conjunto de cargas externas aplicadas y condiciones de frontera. Las deformaciones se determinan a partir de los desplazamientos; y los esfuerzos, a partir de las deformaciones mediante la ley de Hooke.

C.1 MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

Sólo se presentará el ejemplo más sencillo del proceso matemático del método directo de rigidez para el análisis del elemento finito. De esta forma, el concepto es fácil de entender. Su aplicación matemática es más compleja que la descrita aquí y el cálculo es intensivo, pues requiere la solución de grandes matrices. Hay muchos libros que explican con detalle las matemáticas y la implementación del FEA. Para más información, véase la bibliografía.

La figura C-2*a* muestra un diagrama de cuerpo libre del elemento finito estructural más simple posible: un resorte lineal en una dimensión. Éste posee una rigidez característica (constante de resorte) $k_h = f/\Delta u$, de modo que el desplazamiento crea una fuerza nodal. Suponga desplazamientos positivos u_i y u_j y sume las fuerzas en cada nodo.

$$\begin{aligned} f_{ih} &= k_h u_i - k_h u_j \\ f_{jh} &= -k_h u_i + k_h u_j \end{aligned} \tag{C.1a}$$

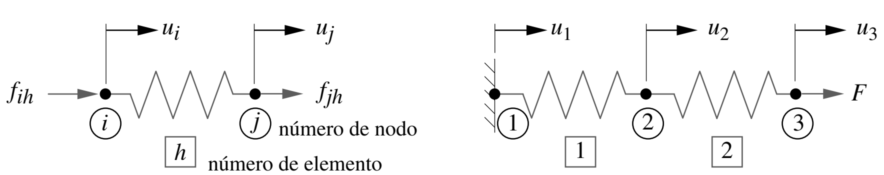
Si se pone esto en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} k_h & -k_h \\ -k_h & k_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{ih} \\ f_{jh} \end{Bmatrix} \tag{C.1b}$$

lo cual se escribe en notación matricial como:

$$[k]\{d\} = \{f\} \tag{C.1c}$$

C



(*a*) Diagrama de cuerpo libre del elemento (*b*) Malla de 2 elementos y 3 nodos

FIGURA C-2

Elemento y modelo de resorte simple

donde k es la matriz de rigidez, d es el vector de desplazamiento nodal del elemento y f es el vector de las fuerzas internas del elemento.

La figura C-2*b* muestra dos de estos elementos simples conectados entre sí para crear una malla de elemento finito. El elemento 1 está fijo a la estructura, lo cual crea una restricción de condición de frontera, mientras el elemento 2 tiene una fuerza externa aplicada en el nodo 3. Aplique la ecuación C.1*a* a tales elementos.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{Bmatrix} \tag{C.2a}$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{22} \\ f_{32} \end{Bmatrix} \tag{C.2b}$$

Las fuerzas en las ecuaciones C.2 son las fuerzas internas del elemento que actúan sobre los nodos. Para lograr el equilibrio, la suma de las fuerzas nodales debe ser igual a las fuerzas externas aplicadas en el nodo. Sea F_i la fuerza externa en cada nodo, donde i es el número de nodo. Entonces, al sumar las fuerzas en cada nodo:

$$\begin{aligned} &\text{en el nodo 1} && f_{11} = F_1 \\ &\text{en el nodo 2} && f_{21} + f_{22} = F_2 \\ &\text{en el nodo 3} && f_{32} = F_3 \end{aligned} \tag{C.3}$$

Sustituyendo las expresiones de las fuerzas nodales internas de la ecuación C.2 en la C.3.

$$\begin{aligned} k_1u_1 \quad - k_1u_2 \quad\quad &= F_1 \\ -k_1u_1 + (k_1 + k_2)u_2 - k_2u_3 &= F_2 \\ -k_2u_2 + k_2u_3 &= F_3 \end{aligned} \tag{C.4a}$$

y poniendo el resultado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{C.2b}$$

o bien:

$$[K]\{D\} = \{F\} \tag{C.4c}$$

Se conocen las fuerzas aplicadas y la rigidez. Se calcularán los desplazamientos nodales, lo cual requiere la multiplicación de ambos lados por la inversa de $[K]$.* Sin embargo, esta $[K]$ tiene un recíproco singular, de modo que no hay una solución única. Se debe a que el sistema de ecuaciones C.4 tiene un grado de libertad (DOF) cinemático (cuerpo rígido) y puede estar en equilibrio en cualquier ubicación de su universo unidimensional. Todavía no se ha considerado la atadura rígida a la estructura del nodo 1. Para resolver un problema estático con FEA, se deben eliminar todos los grados de libertad cinemáticos, lo cual se logra aplicando las condiciones de frontera adecuadas. Es posible fijar el sistema haciendo el desplazamiento del nodo 1 (u_1) igual a cero, como una condición de frontera. Los ceros de la primera columna de la matriz de rigidez dejan con 3 ecuaciones y 2 incógnitas. Si no se conoce la fuerza de reacción F_1, se puede eliminar la primera ecuación y utilizar las dos restantes para despejar los desplazamientos desconocidos. Además, la figura C-2*b* muestra que no se aplica fuerza externa en el nodo 2, en tanto que F_2 es igual a cero. La sustitución da como resultado:

* La solución, con ayuda de la computadora, no se genera en realidad y premultiplica la matriz inversa, porque éste es un cálculo muy laborioso. Se utilizan otras técnicas numéricas más eficientes para resolver las ecuaciones matriciales con el mismo resultado.

C

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \tag{C.5}$$

La matriz-k, que se conoce como matriz de rigidez reducida, tiene una inversa no singular, de modo que la ecuación se resuelve para los desplazamientos desconocidos. Después de que se obtienen los desplazamientos, se calculan las fuerzas internas sobre cada elemento con las ecuaciones C.2. Las ecuaciones que incluyen las fuerzas de reacción desconocidas y se eliminaron para reducir la matriz, se resuelven ahora para determinar las fuerzas de reacción. Las deformaciones se determinan al diferenciar los desplazamientos, mientras el esfuerzo se obtiene a partir de las deformaciones y las propiedades del material. La mayoría de resolvedores calculan y despliegan tanto los esfuerzos principales como los de von Mises, así como la deformación y el desplazamiento.

Este ejemplo trivial incluye los pasos esenciales en una solución de FEA. En un problema real, se utilizarían elementos más complicados, cuyos nodos tienen múltiples grados de libertad, pero también hay un número muy grande de elementos, los cuales también llegan a ejercer funciones "de resorte" no lineales.

C.2 TIPOS DE ELEMENTOS

Los elementos son uni, bi o tridimensionales, llamados también elementos de línea, superficie y volumen, respectivamente.* Asimismo, pueden ser de diferente "orden", término que se refiere al orden de la función (usualmente un polinomio) que define la distribución de desplazamiento a través del elemento. La figura C-3 presenta algunos elementos que se usan comúnmente, agrupados por dimensionalidad y orden. En general, a uno le gustaría emplear los elementos más sencillos que brinden la información deseada, porque el tiempo de procesamiento es mayor para elementos con dimensiones u órdenes más altos.

Dimensión de un elemento y grado de libertad (DOF)

En la figura C-3, los elementos que se muestran se dividen en grupos uni, bi y tridimensionales, identificados como 1-D, 2-D y 3-D, respectivamente. Tales grupos dimensionales definen cuántos grados de libertad tiene cada nodo de un elemento.† Observe que el elemento de línea se encuentra en todos los grupos. Los elementos de línea son adecuados para modelar estructuras como miembros de armaduras y vigas de sección transversal constante, con 1, 2, 3 o 6 grados de libertad en cada uno de sus nodos. Un elemento de línea 1-D tiene un total de 2 grados de libertad, uno en cada nodo. Físicamente, lo anterior representa un elemento de armadura, conectado con sus vecinos mediante juntas de pernos. Sólo transmite fuerza a lo largo de su longitud (una dimensión), por lo que no soporta momentos en sus nodos. Un elemento de línea 2-D tiene 3 grados de libertad por nodo y puede representar una viga 2-D capaz de soportar un momento en sus nodos, así como fuerzas lineales en dos direcciones. Un elemento de línea 3-D tiene 6 grados de libertad por nodo y puede representar una viga-eje 3-D con momentos y torques en cada nodo, además de fuerzas lineales en tres direcciones. Los elementos de geometría más complicada como el triángulo, el cuadrilátero, el tetraedro y el hexaedro (ladrillo) presentan más grados de libertad.

Observe que un elemento de línea 1-D daría buenos resultados para un miembro de armadura cargado en tensión axial, aunque no predeciría correctamente el pandeo, si la carga axial es de compresión. El pandeo debe verificarse por separado, mediante las fórmulas de la secante, o de Euler o Johnson, como se describe en la sección 2.16. Algunos códigos de FEA proporcionan un medio para calcular el pandeo por separado.

C

* Hay también elementos de cero dimensiones que incluyen elementos de resorte, elementos de cuerpo rígido, masas concentradas y otros tipos especiales.

† Los "grupos dimensionales" de la figura C-3 se refieren a las dimensiones geométricas del modelo.

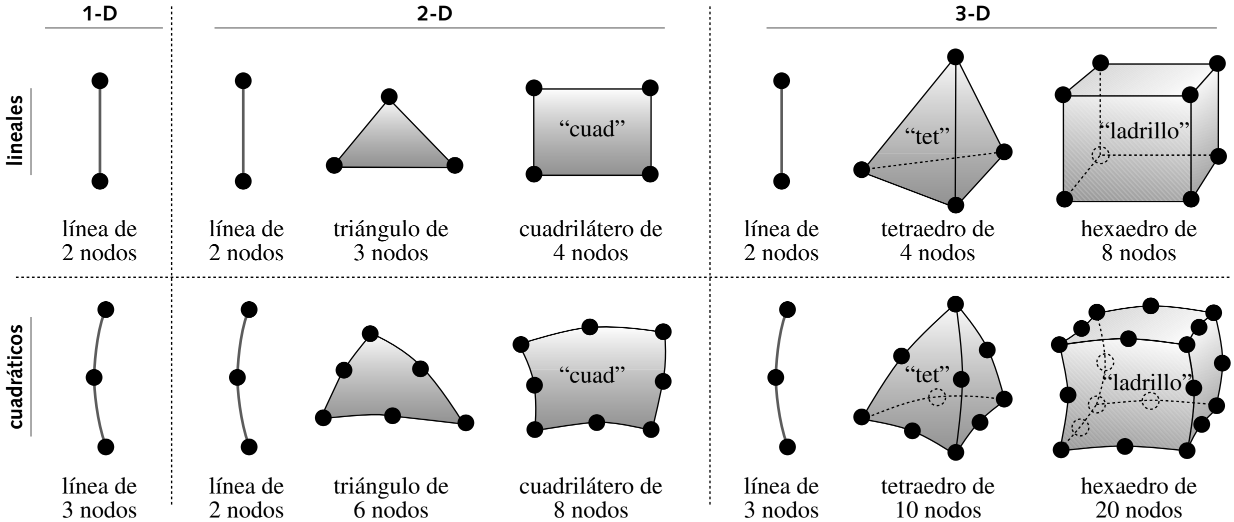


FIGURA C-3

Algunos elementos finitos comunes

Los elementos bidimensionales se utilizan para modelar una estructura tridimensional, si su geometría y su carga crean un caso de esfuerzo plano o de deformación plana, los cuales tienen magnitudes igual a cero en la tercera dimensión. Una viga larga con cargas aplicadas de flexión o axiales simétricas, con respecto al ancho de su dimensión, se analiza con elementos 2-D. Sin embargo, cuando las cargas están desplazadas, se requieren los elementos 3-D. Para que el análisis 2-D de una viga sea válido, todos los planos longitudinales de la viga deben permanecer en sus planos originales cuando la viga se flexiona.

Si una pieza es simétrica en relación con su eje, de pared delgada y la carga está simétricamente distribuida, como una tubería o un recipiente de presión sometidos a presión interna, entonces se utilizan los elementos de superficie 2-D (cascarón). Esto supone que el gradiente de esfuerzo, a través de la pared delgada, es lo suficientemente pequeño para ignorarlo. Las estructuras que no son simétricas, de acuerdo con su eje, se analizan con elementos del cascarón siempre que el espesor de su pared sea pequeño en comparación con el área de su superficie.

Muchas piezas de máquinas tienen carga y geometría que requieren el uso de elementos 3-D. Si su geometría es simple, entonces se resuelven por los métodos clásicos de forma-cerrada. Todos los ejemplos de la figura C-1 presentan geometría muy complicada para utilizar el enfoque clásico con una precisión razonable, por lo que se vuelven necesarios los elementos continuos 3-D de FEA.

Orden del elemento

Los elementos de orden más alto pueden tener límites curvos, mientras que en los elementos lineales los límites son rectos. Los primeros tienen la habilidad de ajustarse a los contornos geométricos de piezas complejas y manejan gradientes de esfuerzo más bruscos. Sin embargo, el incremento en el orden del elemento aumentaría considerablemente el tiempo de procesamiento, de modo que muchos analistas tratan primero de modelar una pieza con elementos lineales.

La deformación es una función de la velocidad de cambio del desplazamiento, a través del elemento (es decir, el gradiente de desplazamiento), que se calcula diferenciando la función de desplazamiento del elemento. Para un elemento lineal triangular o tetraedro (tet), la función de desplazamiento a través del elemento es una línea recta y la

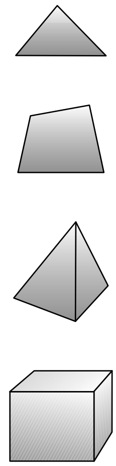
deformación es constante. Esto hace a los elementos demasiado rígidos. Los esfuerzos se determinan a partir de la deformación y el módulo de elasticidad del material. Por lo tanto, los triángulos lineales y tetraedros también tienen esfuerzo constante a través de su dimensión. Los triángulos cuadráticos, tetraedros y ladrillos tienen funciones parabólicas de desplazamiento y una distribución de deformación lineal (y esfuerzo) dentro del elemento, por lo que ofrecen mejores estimaciones de esfuerzo.

Los expertos no recomiendan el uso de elementos triangulares de 3 nodos o tetraedros de 4 nodos, ya que dan estimaciones imprecisas sobre el esfuerzo y la rigidez. Las mejores estimaciones de esfuerzo son resultado de un elemento cuadrilátero (cuad) de 4 nodos o un hexaedro (ladrillo) de 8 nodos, los cuales tienen deformación lineal a través del elemento. Por desgracia, en el FEA resulta más difícil mallar piezas con formas complicadas con elementos cuadriláteros o ladrillos, que con triángulos o tetraedros. Una alternativa es incrementar el orden del elemento triángulo o tetraedro, con la finalidad de mejorar su habilidad en el cálculo de esfuerzos. El triángulo de 6 nodos y el tetraedro de 10 nodos, de orden superior, dan mejores aproximaciones de esfuerzos que sus contrapartes de orden menor, pues han demostrado ser tan buenos como el cuadrilátero de 4 nodos o el ladrillo de 8 nodos, respectivamente.

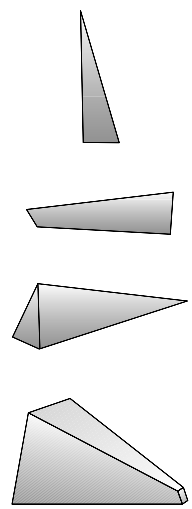
Como los elementos adyacentes (de cualquier orden) comparten nodos y cada elemento tiene un esfuerzo diferente al de sus vecinos, habrá por lo menos dos valores de esfuerzos posibles en cada nodo. Como consecuencia, el campo de esfuerzo calculado por el FEA tiene una serie de discontinuidades a través del continuo de la pieza, en vez del campo de esfuerzo continuo de la pieza real. La mayoría de los procesadores que manejan la información del FEA crean un esfuerzo promedio para cada elemento, con el propósito de desplegar una gráfica suave del esfuerzo en los contornos.

Elementos h contra elementos p

Varios procesadores de FEA utilizan dos tipos de elementos, llamados *elementos h* y *elementos p,* respectivamente. Los elementos h son los más comunes y su orden se limita por lo general al cuadrático. Se debe hacer un refinamiento de la malla (véase más adelante), para incrementar el número y reducir el tamaño de los elementos h en regiones cercanas a los gradientes de esfuerzo altos. Los elementos p permiten que el orden de los polinomios de los bordes del elemento (interpolación) se incremente hasta 9, o un orden mayor, para captar la variación de los esfuerzos locales donde sea necesario. Entonces, los elementos p son más relativamente grandes y menos numerosos que los elementos h en el mismo problema. También se ajustan en forma adecuada a las formas complejas de los límites de la pieza con una función del borde (interpolación) de orden alto.



(*a*) Relaciones de aspecto buenas



(*b*) Relaciones de aspecto malas

FIGURA C-4

Relaciones de aspecto del elemento buenas y malas

Relación de aspecto del elemento

La relación de aspecto de un elemento se obtiene al dividir la longitud del lado más grande del elemento entre la longitud del lado más corto.[2] Para los elementos h es recomendable una relación de aspecto menor de 5:1, aun cuando los elementos p manejen relaciones de hasta 20:1.[3] Si la forma del elemento se desvía excesivamente de su forma básica, se introducirá un error. La figura C-4 muestra algunos ejemplos de elementos con relaciones de aspecto buenas y malas. La *distorsión*, la *oblicuidad* y el *estrechamiento* de un elemento también están relacionados con la precisión. Para las definiciones, véase la referencia 4.

C.3 MALLADO

En los comienzos del FEA, mallar una pieza requería un trabajo enorme. Ahora, los automalladores y preprocesadores de los paquetes de FEA la hacen una tarea muy fácil. Muchos paquetes importan la geometría de la pieza de un programa de CAD de modelado espacial y automallan la pieza.La mayoría de los automalladores sustituyen la malla 2-D

con cuadriláteros lineales o una malla con cuadriláteros dominantes y triángulos adicionales en las regiones donde lo requiere la forma de la pieza. Muchos automalladores sólo pueden mallar modelos 3-D con elementos tetraédricos (tets). Los tetraedros lineales han demostrado ser menos adecuados para la estimación de esfuerzos; sin embargo, los tetraedros de orden superior son aceptables. Un paquete de FEA también tiene un preprocesador que permite el mallado manual de la pieza con los elementos elegidos. Se logra un mejor resultado en el mallado 3-D con una combinación de ladrillos de 8 nodos y cuñas de 6 nodos, o aumentando el orden de los elementos tetraédricos, aun cuando ello incremente el tiempo de procesamiento. Esto se está volviendo menos problemático en la medida en que las computadoras son más rápidas. Algunos estudios de caso de este apéndice, por ejemplo, requirieron pruebas de 16o. orden. El mallado manual requiere más trabajo y habilidad del analista que el automallado; no obstante, podría ser necesario para obtener buenos resultados. Cuando se diseña una pieza nueva, a menudo se utiliza el automallado para acelerar el proceso, a pesar de sus limitaciones en exactitud. Aun cuando los números absolutos sean menos exactos, uno compara diseños alternativos con base en resultados de automallado de FEA. Al inicio de un proceso de diseño, es mejor obtener información menos precisa con rapidez, para determinar si el diseño es factible antes de perder mucho tiempo para saber que el diseño no es viable. Cuando el diseño está listo, se invierte más tiempo para generar un mejor mallado y obtener números más precisos para el diseño final.

Densidad de la malla

Para minimizar el tiempo de cálculo, es deseable una malla burda con elementos más grandes. En regiones de la pieza donde el gradiente de esfuerzo es pequeño, una malla burda daría los resultados adecuados. Sin embargo, en regiones donde el gradiente de esfuerzo es alto, como en las proximidades de las concentraciones de esfuerzos, cargas aplicadas, o condiciones de frontera, se requiere una malla más fina con elementos h (o la misma densidad de malla con elementos p de orden superior), para captar la variación del esfuerzo. Por ejemplo, observe las distribuciones del esfuerzo fotoelástico alrededor de las concentraciones de esfuerzo en la figura 2-34 (p. 117), así como los puntos de aplicación de carga en la figura 5-19 (p. 384). Entonces, quizá sea necesario variar la densidad de malla sobre el modelo; a tal proceso se le llama refinamiento de malla. Se requieren algunas directrices de ingeniería basadas en la comprensión del concepto de flujo de fuerza (véase las figuras 2-37 y 2-38, pp. 121-122) y la concentración de esfuerzos (sección 2.15, p. 116) para hacerlo.

Refinamiento de la malla

Inicialmente, se aplica una malla burda a la pieza; no obstante, el diseñador o el analista deben utilizar directrices de ingeniería basadas en la distribución de esfuerzos en piezas cargadas, con la finalidad de decidir qué regiones necesitan una malla más fina. La figura C-5 muestra un ejemplo de refinamiento de malla en un modelo 2-D. Observe en el inciso (*a*) la concentración de elementos más pequeños alrededor del orificio y de la fuerza aplicada sobre la mandíbula. La concentración de esfuerzos en tales ubicaciones es visible en la gráfica del contorno del esfuerzo en el inciso (*b*). El refinamiento de la malla se hace necesario particularmente en regiones de alta concentración de esfuerzos.

Convergencia

¿Cómo se sabe cuando una malla se ha refinado lo suficiente? El procedimiento usual es aplicar una prueba de convergencia. Se resuelve el modelo para el esfuerzo, iniciando con una malla de cierto tamaño. Luego se modifica el tamaño del elemento por algún factor, en regiones donde se anticipa un gradiente de esfuerzo alto, y se resuelve otra vez el modelo. Los valores de esfuerzo en ubicaciones particulares se comparan con las soluciones de diferente densidad de malla. Si hay una diferencia significativa entre una

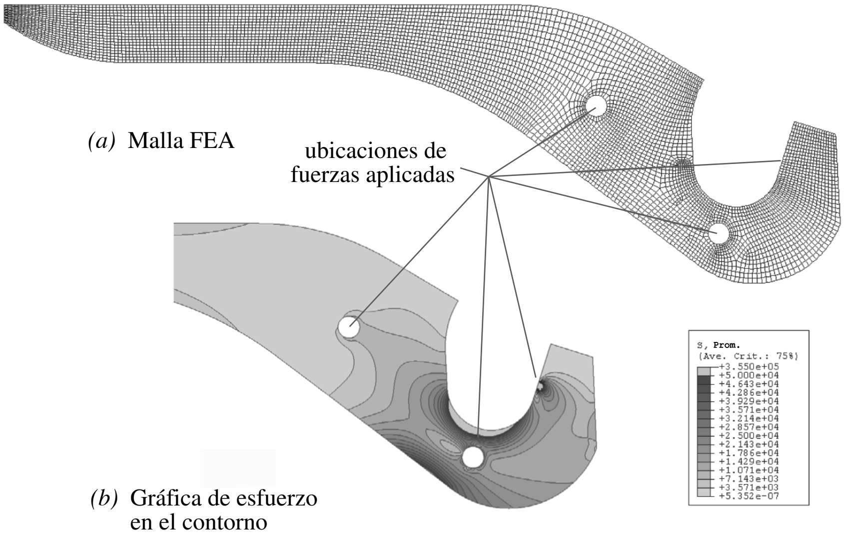


FIGURA C-5

Análisis de elemento finito en la pinza ponchadora del estudio de caso 2B.

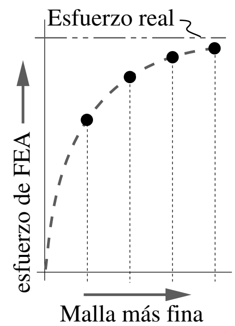


FIGURA C-6

Resultados del refinamiento de la malla

solución y otra, significa que la malla anterior es demasiado burda en esa región, por lo que necesita más refinamiento. A final de cuentas, el cambio en los valores de esfuerzo calculados en mallas sucesivamente más finas se vuelve pequeño, lo que indica que se está convergiendo hacia una solución real. Si se grafican los resultados de varios refinamientos sucesivos de la malla de esfuerzo, en una ubicación específica, será como la curva de la figura C-6. La curva se aproxima en forma exponencial a la asíntota, que es el valor de esfuerzo real.[*]

EJEMPLO C-1

Análisis de elemento finito de una viga en voladizo con muesca

Problema **Una viga en voladizo, con muesca, de sección transversal rectangular está cargada a la flexión, con una fuerza transversal de ciclo invertido. Encuentre una malla razonable de elemento finito y compare el pronóstico de máximos esfuerzo y deflexión, con una solución de forma cerrada para los puntos en el extremo *l* de la viga, la distancia *b* y la muesca en *a*.**

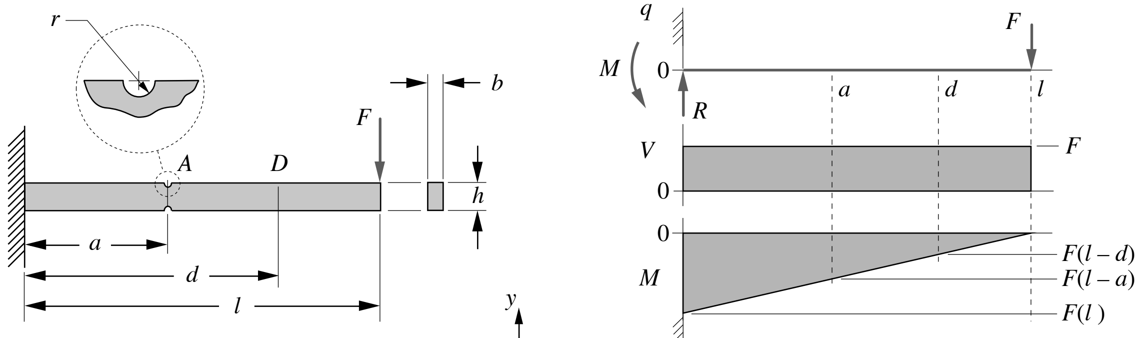
Se proporciona **Las dimensiones de la viga de la figura C-7*a* son: $a = 4$, $d = 7.5$, $l = 10$, $b = 0.1$, $h = 1$ y $r = 0.167$ in. La carga $F = 25$ lb. El material es acero.**

Suposiciones **Se considera que la pared de soporte es mucho más rígida que la viga. El peso de la viga es despreciable, comparado con la carga aplicada. La reducción de la sección transversal de la viga debido a la muesca produce un efecto mínimo sobre la deflexión total de la viga, pero un efecto significativo sobre el esfuerzo local. Un modelo de fea 2-D es suficiente, puesto que se supone un esfuerzo plano.**

Solución

1. Primero elabore una solución de forma cerrada, para determinar los valores teóricos del esfuerzo y la deflexión. La figura C-7*b* muestra un diagrama de cuerpo libre, así como los diagramas de fuerza cortante y momento de esta viga. Existen tres

[*] Algunos procesadores de FEA aplican una estrategia de arriba hacia abajo, en vez de abajo hacia arriba, para converger en lo óptimo, como se muestra en la figura C-6. Independientemente de la estrategia que se utilice, el resultado final debería ser similar.



(*a*) Geometría de la viga

(*b*) Diagramas de cuerpo libre, fuerza cortante y momento

FIGURA C-7

Viga en voladizo del ejemplo C-1

ubicaciones de interés, las fibras exteriores de la viga en la pared, también en *D*, y en la raíz de la muesca en *A,* donde hay concentración de esfuerzos. En la pared, la magnitud del momento es Fl = 250 in-lb y el esfuerzo de flexión en la fibra exterior es:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{250(0.5)}{\dfrac{0.1(1)^3}{12}} = \frac{125}{0.0083} = 15\ 000 \text{ psi} \qquad (a)$$

Tabla C-1

Esfuerzos de FEA contra tamaño de la malla del ejemplo C-1

Elementos	Esfuerzo (psi) @Pt. D	@ Muesca
535	3158	17 128
1146	3167	21 710
15 688	3653	27 801
97 797	3713	30 363
analítico	3750	31 676

El punto *D* ofrece una verificación sobre el esfuerzo alejado de las concentraciones.* A la distancia *d* de la pared, el momento es $F(l - d) = 25(10 - 7.5) =$ 62.5 in-lb y el esfuerzo de flexión en la fibra externa del punto *D* es:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{62.5(0.5)}{0.1(1)^3/12} = 3750 \text{ psi} \qquad (b)$$

En la muesca, el factor de concentración de esfuerzos a partir de la figura D-12 es:

$$K_t = A\left(\frac{r}{d}\right)^b = 0.98315\left(\frac{0.167}{1-2(0.167)}\right)^{-0.33395} = 1.56 \qquad (c)$$

La magnitud del momento es $F(l - a) = 25(10 - 4) = 150$ in-lb y el esfuerzo de flexión local en la muesca es:

$$\sigma = K_t\frac{Mc}{I} = 1.56\frac{150(0.5-0.167)}{\dfrac{0.1\left[1-2(0.167)^3\right]}{12}} = 1.56\frac{49.950}{0.00246} = 31\ 676 \text{ psi} \qquad (d)$$

2. La ecuación de la deflexión máxima, debida a la flexión, se obtiene de la figura H-1:

$$y_{\text{máx}} = -\frac{Fl^3}{3EI} = \frac{25(10)^3}{3(30E6)(0.0083)} = -0.0335 \text{ in} \qquad (e)$$

3. Se prefieren los elementos cuad, en vez de los triangulares, de modo que se usarán aquéllos. La figura C-8 muestra las cuatro condiciones de malla usadas. La tabla C-1 presenta los esfuerzos calculados en el punto *D* y en la muesca para cada una de tales condiciones de malla. La figura C-9 grafica los esfuerzos en la muesca contra el tamaño de la malla. El cálculo analítico en el punto *D* de convergencia es más rápido que el de la muesca, debido a la ausencia de concentración de esfuerzos ahí.†

C

* Por el principio de St. Venant, los esfuerzos alejados del punto de aplicación de las fuerzas o reacciones no se verán afectados por el área de contacto de la fuerza.

† Tome nota de que no es necesario refinar la malla en la pieza completa, como se hizo aquí. Habría sido suficiente refinarla localmente alrededor de la muesca, donde se encuentra la concentración de esfuerzos. En este ejemplo, se refinó la malla completa para demostrar los efectos en el punto *D*, alejado de la muesca, así como en la muesca.

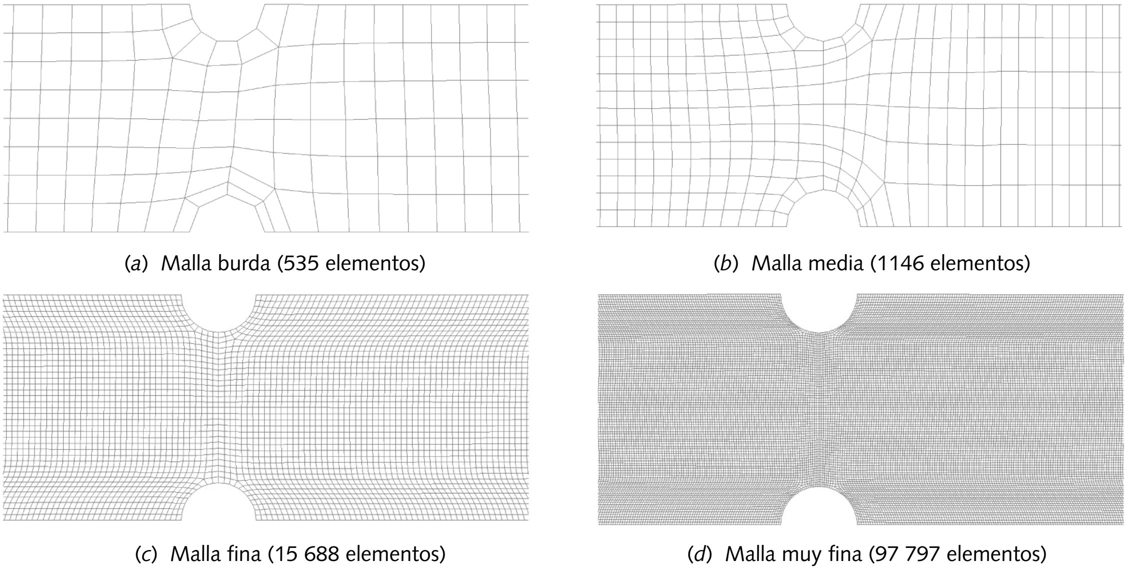


FIGURA C-8

Refinamiento de la malla de la viga del ejemplo C-1 (sólo se muestra un área parcial)

Pero se necesita la malla "muy fina" de la figura C-*8d* para obtener una buena convergencia en la muesca. Las diferencias entre los esfuerzos de FEA calculados en el punto *D,* para varios tamaños de la malla, y el valor analítico se deben, en parte, al hecho de que el esfuerzo analítico se calcula en la fibra exterior, mientras los esfuerzos de FEA mostrados son un promedio de los esfuerzos calculados en los cuatro puntos de integración para cada elemento, entonces difieren dependiendo del tamaño del elemento. Otras opciones son informar los esfuerzos de FEA en los nodos del elemento o en los puntos de integración, de donde se obtienen 4 valores por elemento cuad.

4. La tabla C-2 muestra los estimados del FEA de la deflexión sobre el eje neutro en la punta de la viga para cada tamaño de la malla, comparados con la solución analítica de deflexión. Observe que hay poca diferencia entre los resultados con tamaños tan diferentes de la malla, lo cual indica que no se necesita una malla fina para precisar las deflexiones, como en el caso de los esfuerzos locales. Observe, además, que todas las deflexiones de FEA son más grandes que las analíticas. Lo anterior se debe a que la solución de FEA incluye los efectos de la deflexión debida al cortante transversal, que no se considera en la ecuación (*e*) de la deflexión-flexión, pero serían significativos cuando la viga es corta. Aquí se suma el 10% a la deflexión-flexión.

5. La figura C-10 muestra la distribución de los esfuerzos de von Mises, calculados por el FEA, los cuales incluyen el esfuerzo cortante transversal. Observe las concentraciones de esfuerzos en las muescas (punto *A*) y en la punta de la viga, donde se aplicó la carga (*L*). La solución analítica no calcula directamente dichas concentraciones de esfuerzos. Se debió aplicar un factor de concentración de esfuerzos al cálculo del esfuerzo en la muesca. Si no se hubiera hecho también así en el punto de aplicación de la carga, no se vería el incremento del esfuerzo ahí. No es tan fácil observarlo en la figura, pero también hay alguna concentración de esfuerzos en la raíz de la viga (*R*), donde la restricción de la pared causa el incremento del esfuerzo local. El FEA (con elementos 2-D o mayores) tiene la ventaja de revelar en forma automática las concentraciones de esfuerzos, debidas a la geometría local, o a fuerzas aplicadas localmente y las condiciones de frontera. Pero se requiere estar seguro de que hay una malla de convergencia adecuada, sobre todo alrededor de las áreas con concentración de esfuerzos potenciales, o sus resultados enfrentarían errores grandes, como se observa en la tabla C-1 y en la figura C-9.

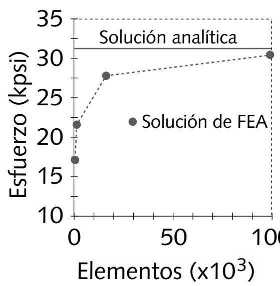


FIGURA C-9

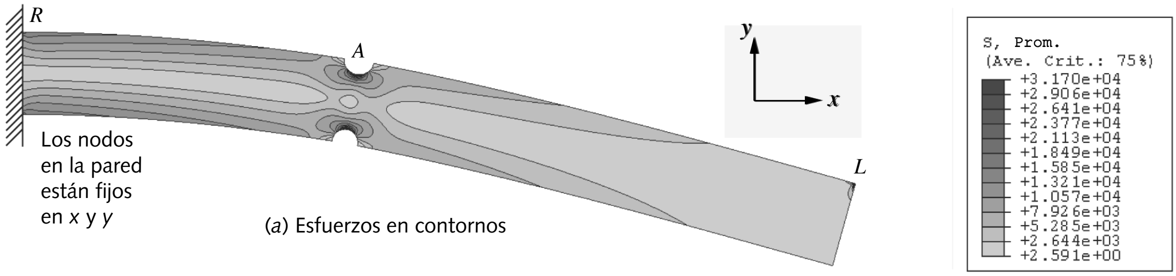
Malla de convergencia en la muesca del ejemplo C-1

C

Tabla C-2

Deflexión contra tamaño de la malla del ejemplo C-1

Elementos	Deflexión (in)
535	0.0359
1146	0.0364
15 688	0.0368
97 797	0.0369
analíticos	0.0335



(*a*) Esfuerzos en contornos

(*b*) Magnitudes del esfuerzo

FIGURA C-10

Esfuerzos de von Mises calculados con el FEA para el ejemplo C-1

C.4 CONDICIONES DE FRONTERA

La identificación de condiciones frontera (BC), que realmente representen las restricciones sobre una pieza real, no es una tarea trivial, pero sí podría ser la diferencia entre una solución razonable o ridícula del problema. Cada nodo de un elemento tiene algún número de grados de libertad, como se describió en la página 923. Cada uno de los nodos de un cuadrilátero 2-D de esfuerzo plano tiene 2 grados de libertad de traslación; los de un ladrillo 3-D, tres grados de libertad de traslación. Los elementos de cascarón o de línea también pueden tener grados de libertad giratorios en sus nodos. Las restricciones externas se aplican a los nodos del modelo. Como mínimo, se deben aplicar las restricciones suficientes para eliminar todos los grados de libertad cinemática de la pieza y ponerla en equilibrio estático. Adicionalmente, las conexiones físicas de la pieza, con sus vecinos en el montaje, deben modelarse tan fielmente como sea posible. Las condiciones de frontera no deben permitir ni restringir deformaciones que no ocurrirían en la realidad. Una restricción física nunca tiene rigidez infinita, pero si se le especifica el nodo no logra moverse en el modelo de FEA, es realmente fijo y se convierte en infinitamente rígido. Lo anterior tiende a exagerar el efecto de la restricción física. Si se aplican muy pocas condiciones de frontera, el sistema se subrestringe y los cálculos fallan. Si se aplican demasiadas condiciones de frontera, el sistema se sobrerrestringe y será demasiado rígido.

Por ejemplo, considere el portaobjetos de sección transversal rectangular soportado por dos cojinetes planos, con una carga transversal aplicada, como se muestra en la figura C-11*a*.* Los cojinetes lineales son estacionarios y están sujetos a la estructura de la máquina, la cual se asienta sobre el piso. El piso forma parte de una construcción que se asienta sobre la tierra. Si se quieren determinar los esfuerzos y las deflexiones del portabojetos, a partir de esta carga aplicada, ¿qué elementos del sistema se necesita modelar? ¿Es posible modelar sólo el portaobjetos o se necesitan incluir los cojinetes, la estructura de la máquina, el piso y el pantano sobre el que se asienta la construcción? El lector no dudaría en concluir que, en este caso, se puede ignorar sin problema la dependencia de la tierra, de la construcción y de la estructura de la máquina, así como considerarlos infinitamente rígidos para los objetivos, a menos que haya un portaobjetos realmente grande con una carga en verdad grande, tan grande que la construcción lo note.

Con dicha suposición, se necesita definir cómo restringen los cojinetes al portaobjetos para soportar la carga. Los cojinetes entran en contacto con el portaobjetos, de modo que hay una parte significativa de su longitud sin soporte. ¿Qué tipo de restricciones brindan estos soportes al portaobjetos? Si evitan que el portaobjetos cambie de pendiente a lo largo de su extensión, entonces funcionaría como una junta con momento. Si no, tan sólo funcionarían para dar un “soporte simple”.

C

* Observe que el modelo de “viga móvil” se considera como sustituto del eje giratorio sobre cojinetes planos, ya que las lecciones aprendidas con respecto a los efectos de las condiciones de frontera, elegidas sobre la deflexión, son las mismas. No obstante, un modelo del eje requeriría un análisis de FEA 3-D. El modelo de la viga móvil se puede analizar en 2-D sin perder generalidad.

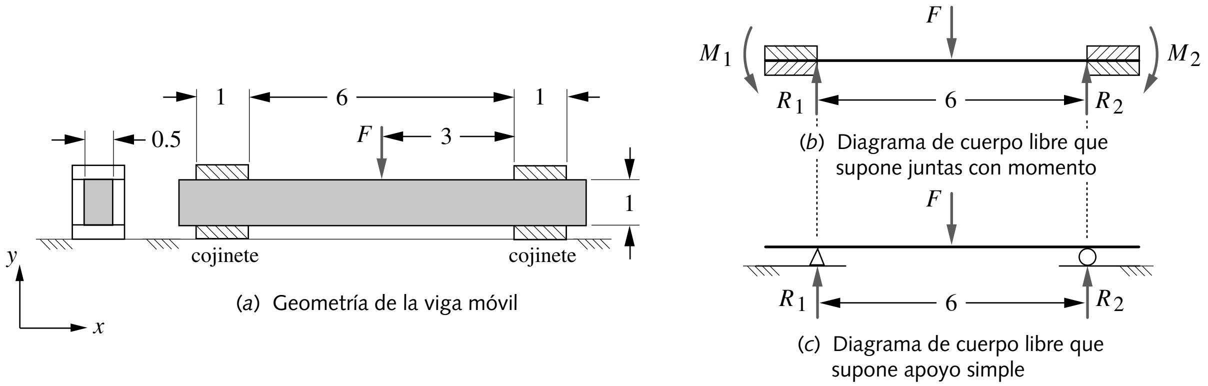


FIGURA C-11

Viga apoyada en cojinetes deslizantes, con sus diagramas de cuerpo libre alternativos

Las figuras C-11*b* y *c* muestran los diagramas de cuerpo libre que resultarían de tales supuestos. ¿Cual es "correcto"? Quizá ninguno. Ambos son idealizaciones que se utilizan en general en el análisis de forma cerrada en problemas de mecánica. La junta con momento supone que el apoyo (el cojinete, en este caso) es infinitamente rígido a la flexión y que el portaobjetos está acoplado a él de una forma que no permite el movimiento relativo en el plano de flexión. Para que esto sea verdad, tendría que haber cero espacio entre el portaobjetos y el cojinete, lo cual haría difícil que se moviera el portaobjetos. El modelo de apoyo simple supone que el portaobjetos se apoya en el borde de un cuchillo en un extremo y en un rodillo sin fricción en el otro. Aun con este supuesto, ¿dónde se colocaría el borde del cuchillo y el rodillo, en el centro de los cojinetes o en sus extremos? ¿Y en cuál extremo? Pensando un poco se revelará que si los cojinetes son rígidos y el eje se flexiona hacia abajo por el centro, el portaobjetos entrará en contacto con los extremos interiores de los cojinetes, como se muestra en la figura C-11*c*. Analice cada uno de tales modelos, tanto de forma cerrada como con FEA y vea lo que sucede.

EJEMPLO C-2

Condiciones de frontera de una viga móvil

Problema **Una viga móvil de sección transversal rectangular está apoyada por cojinetes deslizantes y cargada a la flexión por una fuerza transversal, en una posición fija en *x*, como se muestra en la figura C-11*a*. Determine un conjunto de condiciones de frontera razonable y compare sus pronósticos de deflexión con soluciones de forma cerrada.**

Se proporciona **Las dimensiones de la viga, como se muestra en la figura C-11*a*. La carga F = 250 lb. El material es acero.**

Suposiciones **Los cojinetes de apoyo se consideran mucho más rígidos que la viga. El peso de la viga es despreciable, comparado con la carga aplicada. Cada uno de los cojinetes tiene 0.001 in de tolerancia alrededor de la sección transversal de la viga, para permitir el deslizamiento.**

C

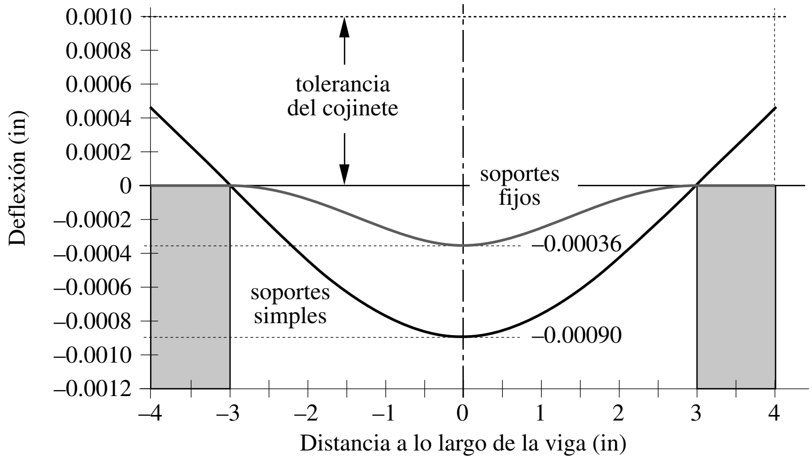


FIGURA C-12

Deflexiones de dos modelos de condiciones límite del ejemplo C-2 con soluciones de forma cerrada

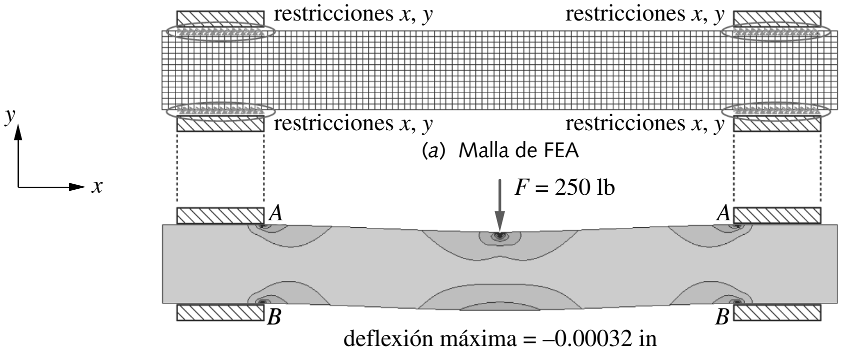
Solución

1. Las curvas de deflexión de las soluciones de forma cerrada, para los casos de la figura C-*11b* y *c*, se muestran en la figura C-12. La deflexión máxima para el modelo fijo-fijo es de −0.00036 in y −0.00090 in para el modelo con soporte simple. La fijación en el extremo reduce la deflexión total en un factor de 3. Esto se debe a que las restricciones de momento hacen la pendiente de la viga igual a cero en los cojinetes y efectivamente rígidos.

2. Aun cuando éste es un sistema 3-D, primero se utilizará un modelo 2-D de FEA, de esfuerzo plano con elementos cuad, para simplificar. Como el FEA se basa en el desplazamiento, las deflexiones del modelo proporcionan un buen medio para verificar si las restricciones aplicadas son razonables. Si las deflexiones son creíbles y la convergencia de la malla se prueba por separado, entonces uno confiaría en los resultados. En el ejemplo, la carga se aplica en el centro de la longitud.

3. La figura C-13*a* muestra la malla para el caso fijo-fijo, con los nodos de todos los elementos que entran en contacto con los cojinetes restringidos en las direcciones *x* y *y,* para simular las juntas de momento en cada cojinete. La figura C-13*b* indica la forma flexionada, mientras la deflexión máxima se obtiene por FEA, la cual es de −0.00032 in, cerca del valor encontrado en el paso 1. Observe las concentraciones de esfuerzos en el punto de aplicación de la fuerza, así como en los puntos *A* y *B*, donde los extremos de los cojinetes entran en contacto con el portaobjetos. Lo anterior señala el efecto de las condiciones de frontera sobre los esfuerzos locales.

4. La figura C-14*a* presenta el mismo modelo enmallado de la figura C-13*a*, pero sus condiciones de frontera se modificaron para simular soporte simple en cada extremo. En el extremo izquierdo (encerrado en un círculo en el punto *A*) se fija un nodo individual, en el borde interior del cojinete en *x* y *y*, para representar una bisagra. En el extremo derecho (encerrado en un círculo en el punto *B*), un nodo individual en el borde interior del cojinete está restringido sólo en *y* para representar el cilindro de soporte. La figura C-14*b* muestra la forma flexionada y la deflexión máxima de la viga simplemente soportada obtenida con FEA, la cual es de −0.00099 in, cerca del valor obtenido en el paso 1. Observe las concentraciones de esfuerzos en el punto de aplicación de la fuerza, así como en los puntos *A′* y *B′*, donde los bordes de los cojinetes entran en contacto con el portaobjetos y muestran el efecto de las condiciones de frontera sobre los esfuerzos locales. Observe, asimismo, que los extremos superiores de la viga no entran en contacto con los interiores de los cojinetes superiores, lo cual es consistente con el cálculo de la forma cerrada. (Véase la figura C-12.)



(*a*) Malla de FEA

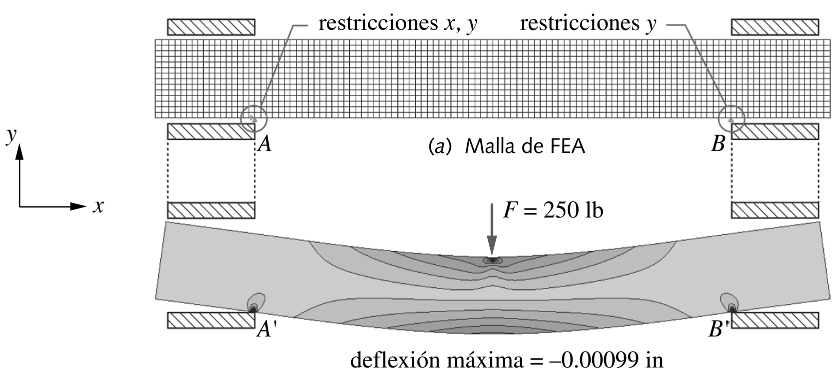
(*b*) Distribución del esfuerzo y la forma de la deflexión (escala vertical x300)

FIGURA C-13

El modelo de FEA con condiciones de frontera fijo-fijo para la viga del ejemplo C-2

Entonces, ¿cuál es el mejor modelo de condiciones de frontera? ¿Es razonable suponer que los cojinetes previenen cualquier giro del portaobjetos alrededor del eje z? Si el portaobjetos se mueve en el cojinete, se necesita alguna tolerancia. Suponga que hay una tolerancia total de 0.001 in. ¿Qué ángulo puede tener el portaobjetos dentro de la longitud del cojinete con esa tolerancia? Un cálculo sencillo resulta en 0.057 grados. La pendiente del portaobjetos en los soportes en el modelo simplemente soportado es de 0.035 grado. Como este ángulo es menor que la tolerancia angular en el cojinete, el portaobjetos puede alcanzar esa pendiente bajo esta carga aplicada. El cojinete no aplicará un par al portaobjetos hasta que la tolerancia se llene, así como que las partes superior e inferior del portaobjetos entren en contacto con los extremos opuestos del cojinete. Hasta aquí se trata de soporte simple, como se observa en la figura C-12, la cual muestra alrededor de 0.00052 in de tolerancia restante en los bordes externos del cojinete. Entonces, se concluye que el modelo simplemente soportado está más cerca de la realidad que el fijo-fijo, en este caso específico.

Pero, ¿es lo mejor que se puede hacer? ¿Es razonable suponer que el portaobjetos y los cojinetes se contactan en un solo nodo de cada cojinete? El nodo tiene dimensión cero, lo cual daría un esfuerzo infinito. ¿Qué sucede cuando se incrementa la carga?



(*a*) Malla de FEA

(*b*) Distribución de esfuerzos y forma de la deflexión (escala vertical x300)

FIGURA C-14

Modelo FEM con condiciones de frontera de soporte simple para la viga del ejemplo C-2

C

¿Se ocuparía entonces la tolerancia? Un mejor modelo de condición de frontera tomaría en cuenta la posibilidad de alguna área de contacto entre las dos piezas, tanto en la superficie de arriba como la superficie de abajo del cojinete. Algunos códigos de FEA ofrecen restricciones de contacto que permiten la transmisión de la fuerza sólo en una dirección. Si la fuerza cambia de signo se separan. Una mejor forma de modelar las condiciones de frontera entre el portaobjetos y el cojinete, en el ejemplo anterior, sería aplicar las restricciones de contacto a todos los nodos a lo largo de la longitud de ambos puntos de contacto cojinete-portaobjetos. Sin carga aplicada, todos los nodos en la parte inferior estarán en contacto, de modo parecido al modelo fijo-fijo anterior. Conforme la carga se aplica, los elementos de los extremos exteriores inferiores de los cojinetes se separan y permiten a la forma de la viga separarse y dirigirse hacia el modelo simplemente soportado. Con suficiente carga aplicada, la viga entrará en contacto con la superficie superior del cojinete y modificará la restricción límite efectiva. El único inconveniente es que las restricciones de contacto son no lineales, por lo que requieren una solución de FEA no lineal, lo cual incrementa el tiempo de procesamiento. Haga de nuevo el ejemplo C-2, pero ahora con las restricciones de contacto del modelo de FEA.

EJEMPLO C-3

Restricciones de contacto como condiciones de frontera de FEA

Problema **La viga de sección transversal rectangular del ejemplo C-2 está soportada por cojinetes deslizantes y cargada de flexión por una fuerza transversal, en una posición fija en *x*, como se muestra en la figura C-11*a*. Construya un modelo de FEA con restricciones de contacto para las condiciones de frontera y compare la deflexión pronosticada con los resultados del ejemplo C-2.**

Se proporciona **El material es acero. Las dimensiones de la viga se indican en la figura C-11*a*. Considere dos casos de carga, una carga de F = 250 lb, como en el ejemplo C-2, y una carga más grande de F = 1000 lb.**

Suposiciones **Se considera que los cojinetes de soporte son mucho más rígidos que la viga. El peso de la viga es despreciable, comparado con la carga aplicada. Los cojinetes tienen 0.001 in de tolerancia alrededor de la sección transversal de la viga para permitir el deslizamiento.**

Solución

1. La figura C-15 muestra una malla de FEA con restricciones de contacto (condiciones de frontera) aplicadas en *A* y *B*. Estas restricciones se aplican a los cojinetes, no a la viga. No permiten que la viga interfiera con la geometría del cojinete, pero permiten a los nodos alejarse de la superficie del cojinete. Por lo tanto, soportan una carga de compresión entre la viga y el cojinete, pero no una carga de tensión. Conforme se aplica la carga a la viga y se flexiona, el contacto nodal varía a lo largo de la longitud del cojinete, tal como ocurre en el sistema real. La viga no tiene movimiento en la

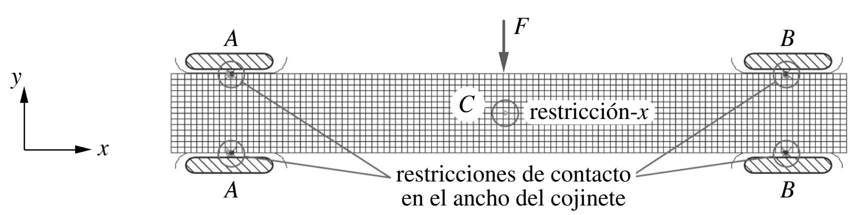


FIGURA C-15

Modelo de FEA con condiciones de frontera contacto-restricción para la viga del ejemplo C-3

C

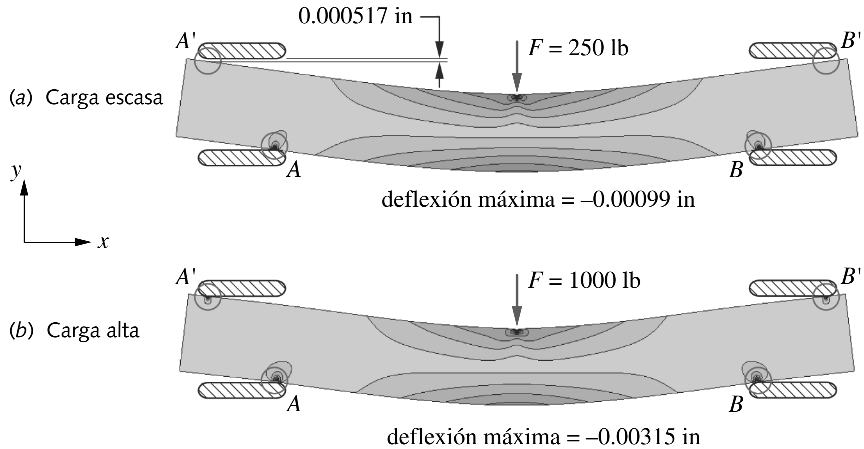


FIGURA C-16

Esfuerzo y deflexión con las condiciones de frontera contacto-restricción para la viga del ejemplo C-3

dirección *x*, porque está sujeta en *C* por una restricción sobre el eje neutro. Al ubicar tal restricción de *x* en el centro de la viga, se les permite a ambos extremos de la viga deslizarse a lo largo de los cojinetes en la dirección *x,* como en el sistema real. La geometría del cojinete en el modelo de FEA está redondeada en ambos extremos para eliminar la creación de los esfuerzos infinitos, que se generarían en el punto de contacto en los extremos de los cojinetes conforme la viga se flexiona.

2. La figura C-16*a* muestra los esfuerzos y la flexión que resultan cuando se aplica una carga transversal de 250 lb en el centro de la viga. Observe la similitud entre el caso de soporte simple con la misma carga, mostrado en la figura C-14. La viga entra en contacto con los cojinetes en las esquinas internas inferiores (puntos *A* y *B*), donde se observa la concentración de esfuerzos. La superficie superior de la viga no entra en contacto con la superficie superior de los cojinetes en los puntos *A'* y *B'*. La tolerancia es de 0.000517 in, similar a la presentada en la figura C-12. La deflexión máxima calculada con este modelo en la carga es de −0.00099 in, la misma que la del modelo de FEA simplemente apoyado del ejemplo C-2.

3. La figura C-16*b* muestra los esfuerzos y la flexión resultantes de la aplicación de una carga transversal de 1000 lb en el centro de la viga. El incremento de la carga hace que la viga se flexione lo suficiente como para que la parte superior de la viga entre en contacto con las superficies superiores de los cojinetes en los puntos *A'* y *B'*, donde se observa la concentración de esfuerzos. Ahora la viga se comporta de forma más parecida al modelo fijo-fijo del ejemplo C-2. Observe que la flexión con una carga de 1000 lb es sólo de 3.18x más grande que la de la carga de 250 lb. Si el modelo de soporte simple fuera válido en ambos casos, entonces se esperaría que la flexión fuera 4x más grande, en proporción directa con el aumento de la carga. El cambio en las condiciones de frontera, como una función de la carga, la convierte en un sistema no lineal.

4. La figura C-17 ilustra una gráfica de la flexión de la viga en función de la fracción de carga máxima aplicada en cada caso, lo cual se puede interpretar como resultado de un incremento paulatino en la aplicación de cada carga, desde cero hasta su máximo valor. Para el caso de la carga de 250 lb, el incremento (negativo) de la flexión es lineal con el aumento de la carga. En el caso de la carga de 1000 lb, la flexión se incrementa linealmente hasta donde los extremos de la viga golpean los cojinetes superiores, punto (identificado como *A*) donde la pendiente cambia abruptamente debido a que la viga se vuelve más rígida de repente. La curva se vuelve no lineal más allá del punto *A*, debido al cambio constante de los puntos de contacto conforme se flexiona. Lo anterior muestra la respuesta no lineal de la viga a una carga que “ocupa” la tolerancia del cojinete y modifica las condiciones de frontera.*

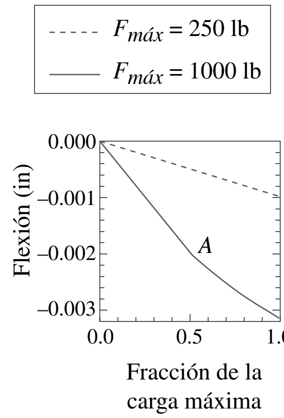


FIGURA C-17

Cambio en la flexión conforme la carga se aplica para los dos casos de carga del ejemplo C-3

* Este fenómeno se utiliza con frecuencia para obtener un resultado predeterminado, como en los resortes de las válvulas de velocidad variable que se emplean en los árboles de válvulas automotrices. Las espirales de algunos de tales resortes estarían más cerca que las de otros (véase la figura 10-2*a* de la p. 651), de modo que, conforme el resorte se flexiona con el uso, las espirales con espacios más estrechos se tocan y se vuelven sólidas. Esto cambia la rigidez del resorte en flexión media y ayuda a reducir la vibración de éste.

Los sistemas de suspensión de los camiones utilizan un concepto similar, pero agregan resortes más rígidos (auxiliares), que sólo funcionan cuando la suspensión del viaje excede un cierto nivel, como pasa cuando se sobrecarga el vehículo o al caer en un bache grande. Cuando el espacio se llena, la rigidez de la suspensión se incrementa repentinamente para limitar la deflexión.

C

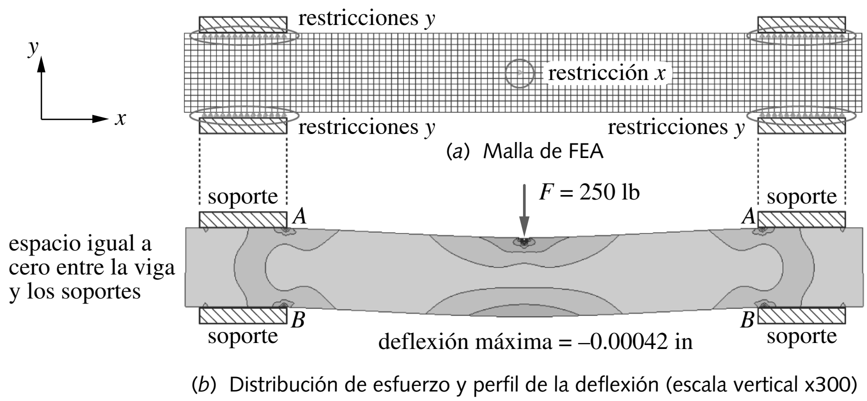


FIGURA C-18

Modelo de FEA de la viga de la figura C-11, que fija sólo en la dirección *y* con un nodo restringido en *x*

Considere un ejemplo ligeramente diferente. Suponga que la viga de la figura C-11 (p. 931) no requiere deslizarse y está soportada en ambos extremos por juntas de momento que tienen tolerancia cero. En el ejemplo C-2 se realizó tal supuesto en el paso 3 (p. 932). En la figura C-13 (p. 933) se muestran las condiciones de frontera de la malla que se generan, así como los resultados del FEA. La flexión máxima calculada en el FEA es de −0.00032 in, lo cual se compara de manera favorable con la solución de forma cerrada de −0.00036 in. Las condiciones de frontera de la figura C-13 fijan todos los nodos dentro de los soportes en las direcciones *x* y *y*. Lo anterior simula una condición donde la viga está sujeta tan estrechamente dentro de los soportes, que no hay movimiento relativo de deslizamiento, ni siquiera microscópico, entre la viga y los soportes. Esto sería real si en los hechos la viga estuviera tan sujeta. Sin embargo, otra posibilidad es que los soportes prevengan cualquier movimiento en la dirección *y,* pero también permitan un ligero movimiento en *x*, incluso en ausencia de tolerancia. Tal situación se simula en el FEA, con un conjunto diferente de condiciones de frontera, como se indica en la figura C-18*a*. Aquí todos los nodos dentro de los soportes están fijos en la dirección *y*, no así en *x*. Los grados de libertad en *x* se eliminan, como se hizo en el ejemplo C-3, fijando un nodo sobre el eje neutro en el centro de la viga. La figura C-18*b* presenta la distribución de esfuerzos y flexión resultantes. Observe que la flexión máxima es ahora de −0.00042 in, más grande que la del modelo de FEA fijo-fijo, de la figura C-13, o bien, el resultado fijo-fijo, de forma cerrada, de la figura C-12 de la p. 932 (lo cual supone la fijación de los soportes, tanto en la dirección *x* como en la dirección *y*, como en la figura C-13*a*).

El análisis anterior muestra la sensibilidad de los resultados del FEA para la selección de las condiciones de frontera. El siguiente análisis reforzará ese concepto. El asunto aquí tiene que ver con las restricciones de frontera entre un eje (o clavija) y su soporte, o un tornillo y su orificio.

Se utilizará un ejemplo diferente para investigar esto. La figura C-19 muestra una palanca utilizada en un sistema de eslabones. Se quiere modelarlo para determinar sus esfuerzos y su flexión, bajo una carga determinada, así como, a partir de ellos, obtener su razón de resorte como viga. Está soportada sobre dos pernos que sirven como pivotes y funciona sobre cojinetes de bronce. Tanto el perno como el cojinete tienen elasticidad. Los pernos en general se hacen de acero; los cojinetes planos, de bronce u otro material más suave como el *babbit* (véase el capítulo 7), los que son menos rígidos que el acero. No obstante, el bronce o el *babbit* se fabrican generalmente bastante delgados y reforzados con acero, de modo que el cojinete por lo común se supone tan rígido como el material circundante, el cual, en este caso, es también acero.

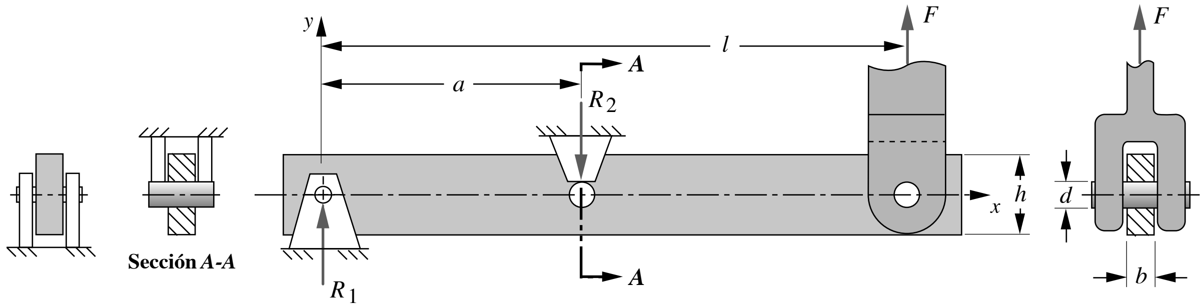


FIGURA C-19

Viga suspendida del ejemplo C-4

En este ejemplo, la carga es vertical; no hay componentes horizontales de la fuerza aplicada. La solución de forma cerrada, que considera la teoría de vigas, supone que las fuerzas actúan en los centros de los orificios; sin embargo, un modelo de FEA no tendría normalmente elementos dentro de los orificios.

Si los pernos estuvieran ajustados de manera forzada, en los orificios, entonces entrarían en contacto con todo el borde de la circunferencia y distribuirían la carga como corresponde. Con holgura diametral, si tanto el perno como el cojinete fueran infinitamente rígidos, sólo tendrían línea de contacto en una ubicación. Esto podría simularse restringiendo un nodo en la parte superior o en la inferior del orificio en un modelo 2-D. Es evidente que tales esfuerzos y la flexión serán muy diferentes en esos dos escenarios, ya que uno proporciona una junta de momento y el otro, soporte simple. Como se supondrá, la realidad se encuentra entre los dos extremos.

Ambas partes se flexionarán localmente bajo la carga y crearán una huella de contacto, como se describió en la sección 5.9 (p. 374). Lo anterior dará como resultado una área de contacto que se extiende a un lado de la línea de contacto teórica, en la parte inferior (o superior) del cojinete. Las condiciones de frontera necesitan tomar esto en cuenta. Los cambios en tales condiciones de contacto afectarán la deflexión y esfuerzo de la viga, en ubicaciones lejanas de los puntos de contacto, como sucedió en el estudio previo. Los cambios en las condiciones de frontera afectarán, de igual modo, el estimado de concentración de esfuerzos local en la región de contacto.

Una opción factible sería fijar todos los elementos alrededor de la circunferencia del orificio en cada soporte. Lo anterior, no obstante, restringirá en exceso la parte en comparación con la restricción real que el perno genera en el orificio. La pregunta continúa vigente: si se deben restringir los nodos alrededor de la circunferencia del orificio, ¿qué porción de ésta se debería restringir?

El dilema se resuelve con facilidad si el paquete de FEA que se usa incluye elementos de "cuerpo rígido" entre sus opciones. La estrategia es colocar un nodo en el centro del orificio y conectarlo con elementos de cuerpo rígido a todos los nodos sobre la circunferencia del orificio. Lo anterior se parecerá a los rayos de una rueda de bicicleta. Luego se restringe el nodo en el centro de manera adecuada. En este ejemplo, ambos centros de los orificios se restringen tanto en x como en y para representar la junta del perno. La carga F se manejaría de alguna forma, aplicándola al nodo en el centro del orificio conectado a la circunferencia por los elementos rígidos. El siguiente ejemplo analizará dos de dichos enfoques, para la aplicación de las condiciones de frontera en el pivote de un perno, y sus resultados se compararán con los de la solución de forma cerrada, mediante la teoría de vigas.

EJEMPLO C-4

Condiciones de frontera entre un perno y un orificio

Problema **Una viga suspendida está apoyada sobre dos pernos en cojinetes. Determine un escenario de condiciones de frontera adecuadas para su análisis, luego estime su flexión máxima, su esfuerzo máximo y la razón de resorte en el punto de carga.**

Se proporciona **Las dimensiones de la viga en la figura C-19 (p. 937) son: $a = 8$, $l = 20$, $b = 0.75$, $h = 2$ y $d = 0.5$ in. La carga $F = 100$ lb. La viga y los pernos son de acero, mientras los cojinetes son de bronce sobre acero. La sección transversal de la viga es constante en toda su longitud, excepto en los orificios de los pernos, los cuales tienen un diámetro de 0.5 in.**

Supuestos **La carga y las reacciones en los soportes son coplanares. Los pernos de soporte son significativamente más rígidos que la viga.**

Solución

1. Primero se resuelve lo de la viga con los métodos clásicos de forma cerrada, como se indica en el ejemplo 2-6 (p. 99). Las ecuaciones para el caso de viga suspendida también se obtienen del apéndice F, figura F-3, inciso (*a*). El esfuerzo máximo se encuentra en el soporte de la derecha en la figura C-19, donde la magnitud del momento es máxima: $M = F(l - a) = 1200$ lb-in. El esfuerzo de flexión en la fibra exterior en $x = a$ es:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{1200(1)}{\dfrac{0.75\left(2^3 - 0.5^3\right)}{12}} = \frac{1200}{0.4922} = 2438 \text{ psi} \qquad (a)$$

Observe que el valor de I de la sección transversal se redujo por el efecto del orificio en $x = a$.

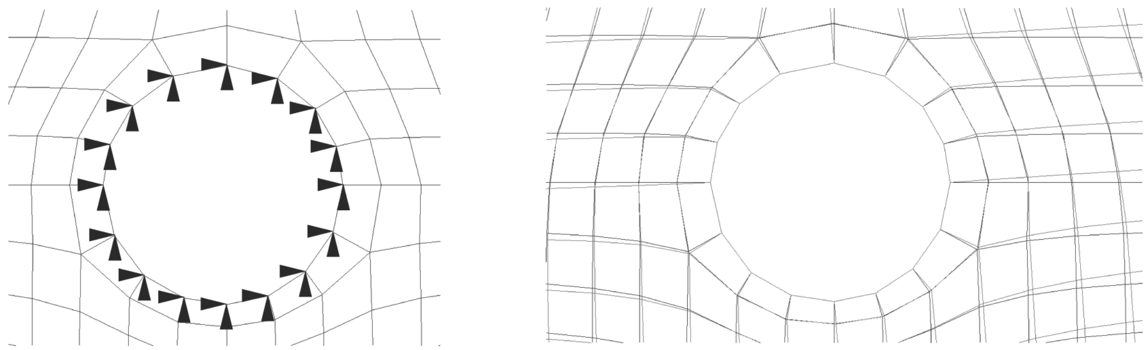
2. La flexión máxima se encuentra en el extremo derecho de la viga y se obtiene a partir de la ecuación del apéndice F, figura F-3, inciso (*a*), con $x = 20$, $a = 8$, $l = 20$ e $I = 0.50$, para la sección transversal completa sin eliminar orificios:

$$\begin{aligned} y &= \frac{F}{6aEI}\left[(a-l)x^3 - a\langle x-l\rangle^3 + l\langle x-a\rangle^3 + l\left(-l^2 + 3al - 2a^2\right)x\right] \\ &= -0.0064 \text{ in} \end{aligned} \qquad (b)$$

3. En el primer intento se restringen todos los nodos alrededor de la circunferencia de cada orificio en las direcciones x y y. En la figura C-20 se presentan la malla y las condiciones de frontera alrededor de un orificio de la viga, así como la malla flexionada y sin flexionar. Observe que no hay movimiento en ninguno de los nodos sobre la circunferencia del orificio.

4. En el segundo intento se coloca un nodo en el centro del orificio y se conecta con los elementos de cuerpo rígido de todos los nodos, sobre la circunferencia del orificio. Aquéllos se denominan a veces “acoplamientos cinemáticos”. Dicha técnica restringe, en efecto, los nodos sobre la circunferencia, para no tener movimiento en la dirección radial; no obstante, los deja libres para girar alrededor del centro del orificio.* La figura C-21*a* señala la malla alrededor de un orificio con tales restricciones aplicadas. Los nodos en ambos centros de los orificios están fijos en x y y, porque los pernos se encuentran sobre el eje neutro de la viga, lo cual no modifica la longitud cuando la viga se flexiona. La figura C-21*b* muestra las mallas superpuestas con flexión y sin flexión. Observe el giro de los nodos sobre la circunferencia del orificio cuando la viga se flexiona, lo que permite que la pieza gire sobre el “perno” conforme se flexiona.

* Si su paquete de FEA no tiene la funcionalidad de elementos de cuerpo rígido, se logra el mismo efecto si se establece un sistema de coordenadas cilíndricas en el centro del orificio y, luego, se restringen las coordenadas radiales de los nodos sobre la circunferencia del orificio, mientras que los ángulos se dejan sin restringir.



(*a*) Malla alrededor del orificio con restricciones

(*b*) Malla sin flexión (en negro) y malla con flexión (en color) alrededor del orificio (véase los forros interiores del libro)

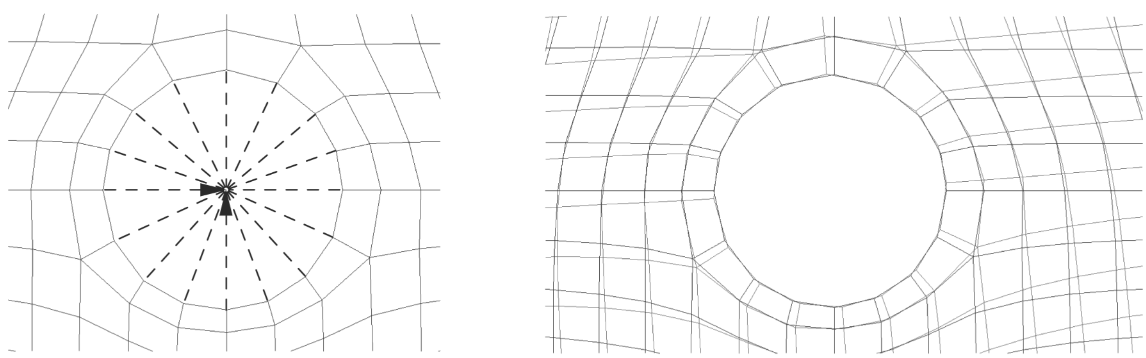
FIGURA C-20

Malla de restricciones circunferenciales del ejemplo C-4, paso 3

5. La figura C-22 muestra las formas flexionadas y las flexiones máximas de los dos modelos de vigas, así como sus distribuciones de esfuerzos de von Mises. La flexión calculada por el método de "acoplamiento cinemático" es de 0.0066 in, muy cerca de la calculada por la teoría de vigas en el paso 2.

6. La deflexión calculada por el método de FEA de "fijación circunferencial" fue de 0.0049 in, un 23% de error. La restricción de la circunferencia completa del orificio hace a la viga mucho más rígida.

7. La razón de resorte para la viga se calcula fácilmente con la flexión y la fuerza aplicada, como $k = F/y = 100/0.0066 = 15\,152$ lb/in.



(*a*) Malla alrededor del orificio con restricciones

(*b*) Malla sin flexión (negro) y malla con flexión (color) alrededor del orificio

FIGURA C-21

Malla de restricciones de acoplamiento cinemático del ejemplo C-4, paso 4

C

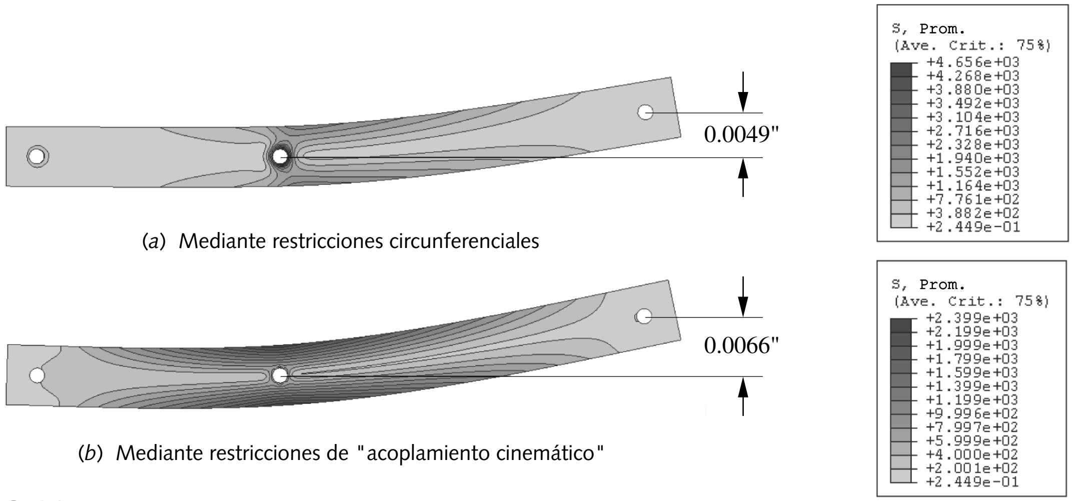


FIGURA C-22

Flexión y distribuciones de esfuerzos en los dos casos de condiciones de frontera del ejemplo C-4

C.5 CARGAS APLICADAS

La aplicación de las cargas adecuadas a un modelo es similar al problema de aplicación correcta de las condiciones de frontera. Con frecuencia, se describen las cargas en modelos de forma cerrada como si estuvieran aplicadas en un punto.* Esto también se logra con el FEA, ya que una carga es posible aplicarla en un nodo individual. Sin embargo, las cargas reales están distribuidas sobre una porción finita de la pieza. Si en realidad se aplicara la carga en un punto, el esfuerzo local ahí sería infinito.

La mayoría de los paquetes de FEA tienen una variedad de modelos de carga. Distribuyen la magnitud y la dirección de una carga especificada sobre cualquier parte del modelo que se indique, repartiendo la carga en los nodos dentro de la ubicación especificada, de acuerdo con la función elegida. La función de carga se puede uniformar sobre una longitud o un área, o seguir la función que se defina. Se puede aplicar una presión a una superficie. En un sistema dinámico, se aplica una aceleración de cualquier magnitud y dirección para representar la gravedad o una fuerza inercial. Las cargas de momento son un poco más difíciles de aplicar cuando los elementos utilizados sólo tienen grados de libertad traslacional. Una técnica común es sujetar dos elementos rígidos de igual longitud del modelo perpendicular al eje del momento y —sobre lados opuestos de éste— aplicar un par en los extremos de los elementos rígidos. Una buena verificación de su modelo consiste en hacer que el resolvedor determine las fuerzas de reacción y los momentos debidos a las cargas. Si coinciden con su cálculos de $\Sigma F = 0$ y $\Sigma M = 0$, significará que la definición de su modelo es correcta.

Sea muy cuidadoso con las unidades de las cargas aplicadas. La mayoría de los sistemas de CAD tienen un conjunto de unidades prestablecido, por lo que quizá no sean las que se quiera para trabajar. Es muy importante que las unidades de todos los elementos y las fuerzas sean consistentes con el sistema empleado. Cuando haga análisis dinámico o de aplicación de cargas de aceleración, tome nota de las unidades prestablecidas de densidad y de masa en su modelador espacial. Muchas marcas estadounidenses utilizan lb_m como el predeterminado de la unidad de masa. Lo anterior no es una unidad de masa real, pues es numéricamente igual a lb_f, y se tiene que dividir entre g para ponerla en unidades de masa adecuadas. Consulte la sección A.9 sobre el manejo apropiado de unidades. Es bastante probable que muchos errores de ingeniería se deban a problemas de unidades, más que a cualquier otra causa. Incluso los científicos de cohetes no son inmunes a los errores de unidades como el que se muestra en la nota de la página 868.

C

* Por el principio de St. Venant, los esfuerzos alejados del punto de aplicación de las fuerzas o las reacciones no se verán afectados por el área de contacto de la fuerza.

C.6 PRUEBA DEL MODELO (VERIFICACIÓN)

Los ejemplos analizados anteriormente fueron seleccionados por tener geometría y carga lo suficientemente simple como para permitir la ejecución de, por lo menos, una solución de forma cerrada como verificación del ejemplo. Los problemas reales, que son candidatos al FEA, rara vez tienen la geometría tan simple como para facilitar una solución de forma cerrada. Si la tienen, por lo general es más rápido aplicar el método de forma cerrada. Sin embargo, antes de enfrentar un problema complicado, se recomienda definir y resolver una versión simplificada del problema, con el método de forma cerrada. La solución de forma cerrada es posible compararla con los resultados del FEA del modelo simplificado. Lo anterior permite tanto iterar las condiciones de frontera, hasta un estado razonable, como ayudar el refinamiento de la malla. Ya que se tiene una correspondencia razonable, entre la solución de forma cerrada y el resultado de FEA, se reintroduce la geometría complicada original y se procede al análisis con base en la experiencia y la comprensión, obtenidas con la prueba del modelo simplificado, además de que se utilizan las restricciones ya probadas.

El ejemplo C-4 es la simplificación de un problema real de geometría y carga más complejas para el cual es imposible obtener una solución de forma cerrada. El modelo simplificado se creó para determinar las condiciones de frontera adecuadas del problema. El problema real se presentará ahora como otro ejemplo.

EJEMPLO C-5

Análisis del brazo del seguidor de una leva

Problema **Una viga está soportada sobre dos pernos en cojinetes con poca tolerancia. Determine su flexión máxima y la razón de resorte en el punto de carga.**

Se proporciona **Las dimensiones de la viga en la figura C-23 son: $a = 8$, $l = 20$, $b = 0.75$, $h = 2$, $d = 0.5$ in, $e = 0.375$ in, $f = 0.438$ in, y $g = 0.375$ in. Todos los orificios de los pernos miden 0.5 in de diámetro. La carga $F = 100$ lb. La viga y los pernos son de acero; los cojinetes, de bronce sobre acero. La sección transversal de la viga disminuye de manera gradual y está embolsada para reducir su masa. La geometría básica es como la del ejemplo C-4.**

Suposiciones **La carga y las reacciones de apoyo son paralelas, aunque se ubican en planos diferentes. Los soportes de los pernos son significativamente más rígidos que la viga.**

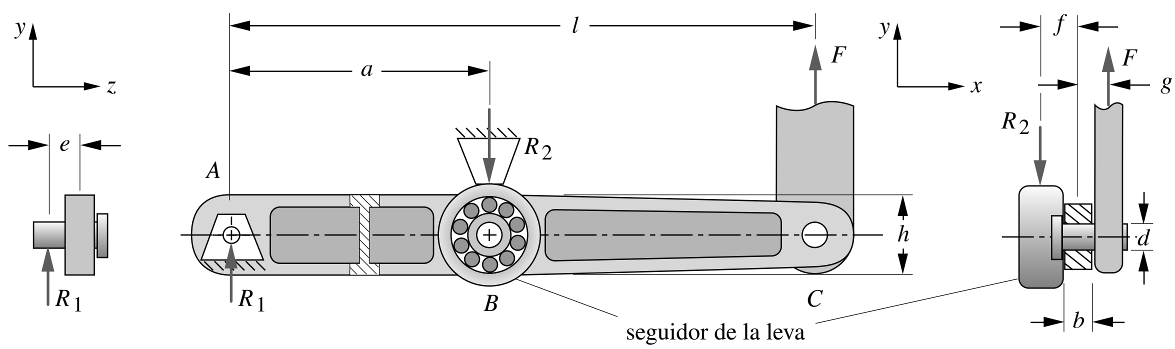


FIGURA C-23

Viga suspendida del ejemplo C-5

Solución

1. En el ejemplo C-4 se analizó una versión simplificada de esta viga, en la cual todas las cargas y reacciones se consideraron coplanares y la geometría de la sección transversal de la viga era constante a lo largo de la longitud de la viga, en lugar de acuñada y embolsada, como se indica en la figura C-23. Tales simplificaciones permitieron una solución de forma cerrada con la teoría de vigas para compararla con los resultados de FEA 2-D. Éste es un paso importante en cualquier análisis de FEA, pues ofrece una verificación de la validez de las elecciones del tamaño de la malla y las condiciones de frontera. Una vez que se resuelven tales asuntos, se está listo para analizar la geometría más complicada de la pieza real, confiando en que los resultados serán válidos.

2. La figura C-24 muestra una malla de elementos hexaédricos lineales 3-D, de 8 nodos (ladrillos), aplicados a la viga acuñada y embolsada de la figura C-23. Como en este ejemplo lo que interesa son sobre todo las flexiones, el refinamiento de la malla no es tan crítico como cuando se necesita estimar el esfuerzo con precisión.

3. Como las cargas y las reacciones aplicadas en esta pieza no están en el plano central de la viga, sino desplazadas hacia los lados en la dirección *z*, las condiciones de frontera y la carga habrá que aplicarlas a los nodos colocados en esas ubicaciones. La figura C-25 presenta tales condiciones de frontera con "restricciones cinemáticas" de un elemento rígido, que conecta un nodo desplazado a la distancia adecuada desde el centro del "perno" hasta los nodos de la viga física. Ésta es la misma técnica que se usó en el paso 4 del ejemplo C-4 (véase la figura C-21, p. 939), pero note que el desplazamiento de *z* hace que estas conexiones formen un conjunto de "conos" de elementos rígidos, que sujetan al nodo de la condición de frontera (o carga) con todos los nodos en el interior del orificio del perno. La técnica crea efectivamente un "perno" rígido en la forma del nodo desplazado conectado rígidamente al orificio del perno, además de hacer que la pieza gire alrededor del eje *z* del perno.

4. Se aplican restricciones en *A* para fijar el desplazamiento en *x*, *y* y *z*, así como para fijar el giro alrededor de *x* y *y*. El desplazamiento de *B* está fijo en *y*. Los desplazamientos de *B* en *x* y *z* no están restringidos, ya que el rodillo sobre la leva permite el movimiento en esas direcciones. La carga de 100 lb se aplica en la dirección positiva de *y* en *C*. Véase la figura C-25.

5. La figura C-26 muestra la flexión (exagerada por 10x) y la distribución del esfuerzo de von Mises en la viga. Los valores de los esfuerzos no se muestran, porque la malla no está refinada para brindar resultados exactos. Las gráficas del contorno del esfuerzo sirven para mostrar los "sitios calientes" del esfuerzo en este caso.

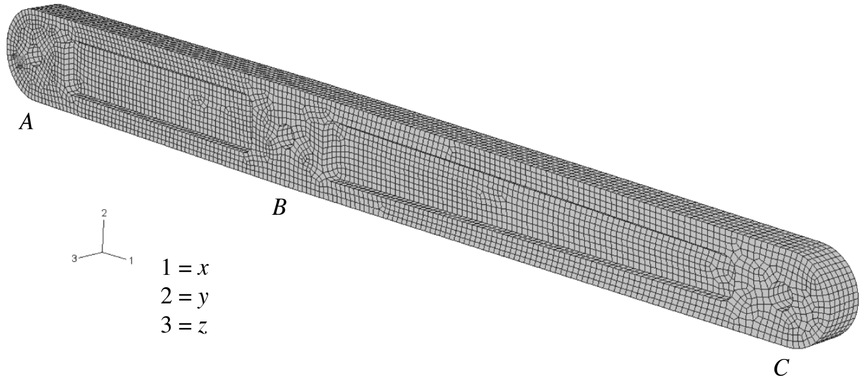
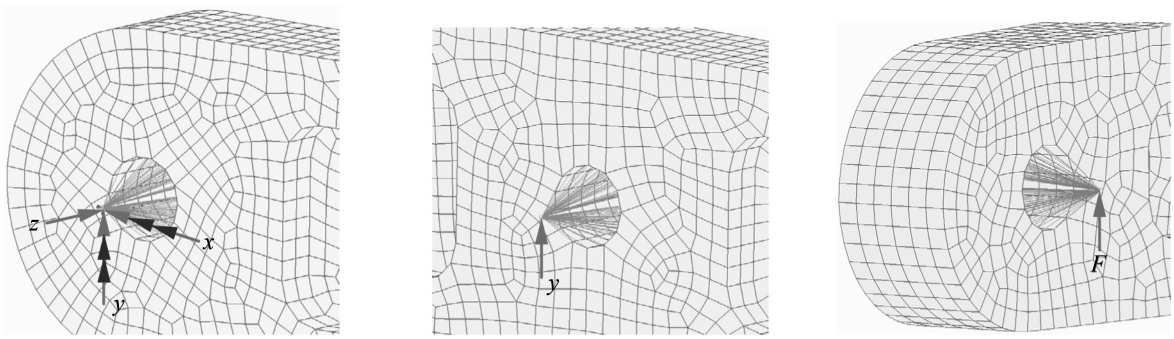


FIGURA C-24

Malla de la viga envuelta del ejemplo C-5



(*a*) Restricciones en el punto *A* (*b*) Restricciones en el punto *B* (*c*) Restricciones en el punto *C*

Claves: Restricción traslacional ◄ Restricción giratoria ◄◄

FIGURA C-25

Condiciones de frontera y carga aplicada para la viga del ejemplo C-5

El estimado de esfuerzo tenía indicados algunos niveles de esfuerzo riesgosos (lo cual no es así), por lo que se tendrían que haber hecho corridas adicionales del modelo con mallas más finas. Observe, sin embargo, que la viga presenta flexión torsional y flexión simple por las cargas desplazadas. Lo anterior no debe sorprendernos dada su carga fuera del plano. La flexión en la dirección y en la carga aplicada (en C) es de 0.0193 in.

6. La deflexión calculada por el modelo 2-D de la misma viga, con geometría simplificada y cargas coplanares, fue de 0.0066 in, aproximadamente 1/3 del valor de arriba. Uno esperaría que el modelo 3-D tuviera una mayor deflexión, puesto que la viga se debilitó por su forma de cuña y la remoción del material de la envoltura (para reducir la masa y mejorar la dinámica), así como porque las cargas descentradas superponen una deflexión torsional sobre la de flexión simple. Recuerde que el modelo más sencillo de la viga que se utilizó en el ejemplo C-4 fue creado para determinar el conjunto más apropiado de condiciones de frontera. Por tal motivo, se necesita un modelo lo suficientemente simple para verificarlo con una solución de forma cerrada. Hecho eso, se procede con el modelo más complejo y se confía en su resultado.

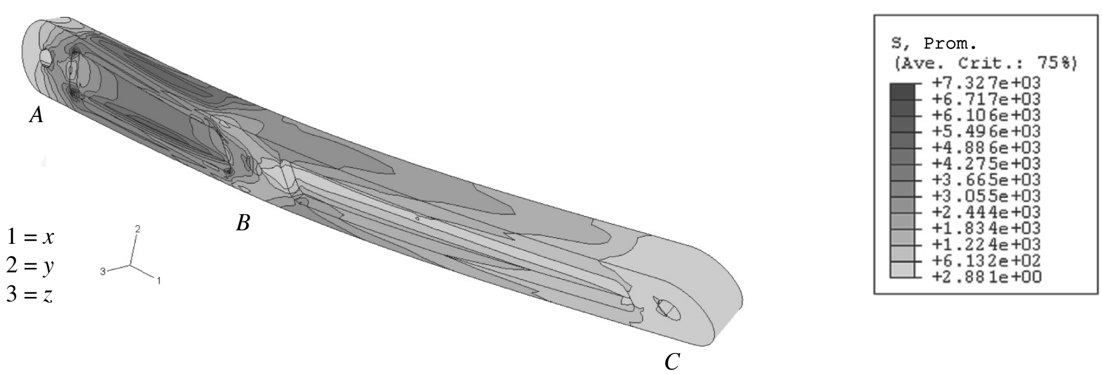


FIGURA C-26

Deflexión y distribuciones de esfuerzos en la viga embolsada del ejemplo C-5

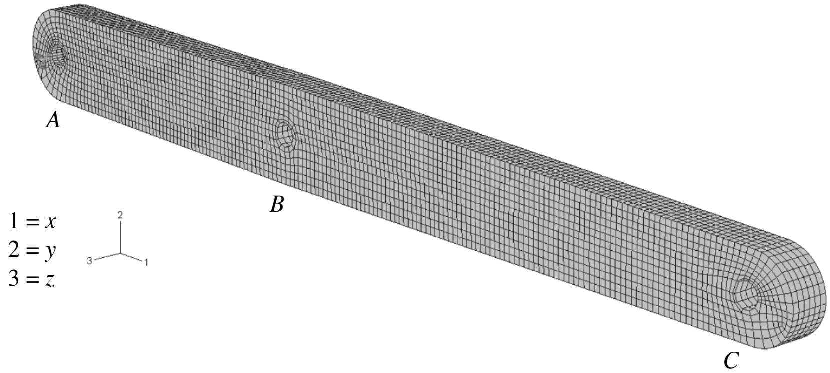


FIGURA C-27

Malla del rediseño (sin bolsa) de la viga sólida acuñada del ejemplo C-5

7. En este caso (que es el brazo real del seguidor de una leva), la deflexión de 0.0193 in (0.5 mm) se consideró demasiado grande, de modo que se necesita un rediseño. Como la deflexión torsional era del mismo orden que la curvatura de flexión, el modelo de la viga se rediseñó sin la bolsa para incrementar la rigidez a la torsión.* La malla de este brazo rediseñado se muestra en la figura C-27. Las restricciones y la carga se aplicaron del mismo modo que en el paso 4 y la figura C-25.
8. La figura C-28 ilustra la deflexión (exagerada por 10x) y la distribución de esfuerzos de von Mises en la viga rediseñada. La deflexión en la carga es ahora de 0.0099 in, aproximadamente la mitad de la del diseño de la viga embolsada. Esto se consideró aceptable.
9. La razón de resorte de la viga en flexión se calcula con facilidad a partir de la desviación de flexión y de la fuerza aplicada como $k = F/y = 100/0.0099 = 10\ 101$ lb/in.

* Remítase al ejemplo 2-8 (p. 105) para revisar por qué las secciones abiertas, como el perfil de la viga I de esta viga embolsada, son una selección deficiente para situaciones de carga por torsión.

C.7 ANÁLISIS MODAL

Todos los ejemplos mostrados hasta ahora implican sólo análisis estático. El FEA también tiene la capacidad de análisis modal, a partir del cual se logran determinar las propiedades dinámicas de la estructura. Con el FEA se calculan además las frecuencias naturales

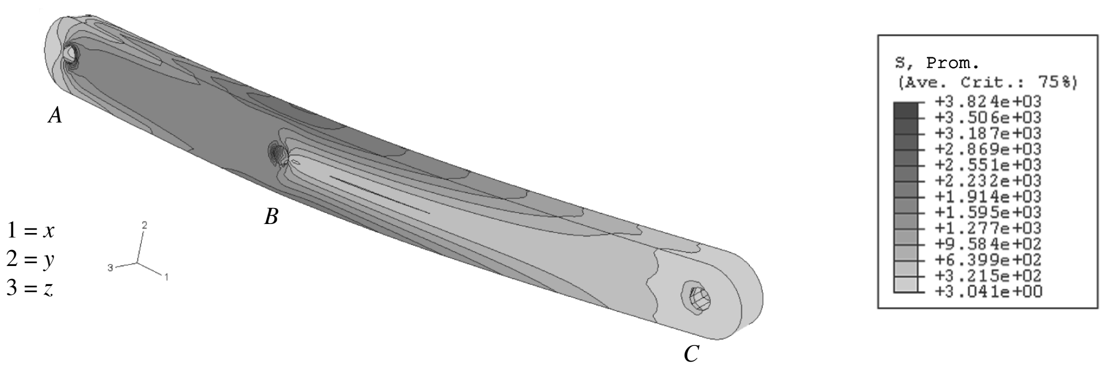


FIGURA C-28

Deflexiones y distribuciones de esfuerzos de la viga rediseñada (sin bolsa) del ejemplo C-5

y las formas (eigenvalores y eigenvectores) de una estructura. La mayoría de las advertencias con respecto a la selección adecuada de tipos de elementos, convergencia de la malla y restricción también se aplican; sin embargo, son menos críticas en el análisis modal que en el análisis de esfuerzos. Por ejemplo, con una malla burda se obtiene una estimación razonable de los eigenvalores y eigenvectores, que sería inadecuada para el análisis preciso del esfuerzo y la deflexión. También es menos crítico el refinamiento de la malla alrededor de los cambios locales de geometría para un eigenanálisis, ya que las propiedades modales son generales en vez de locales. No obstante, si se requieren estimaciones de esfuerzos dinámicos para condiciones de carga independientes del tiempo, a partir del análisis modal, la malla debe estar tan refinada como lo estaría para un problema de análisis de esfuerzo estático.

EJEMPLO C-6

Análisis modal del brazo de un mecanismo leva-seguidor

Problema **Obtenga los eigenvalores (frecuencias naturales) y los eigenvectores (formas modales) de la parte del ejemplo C-5, si los pernos del pivote están expuestos a la vibración aleatoria de la máquina donde fueron montados.**

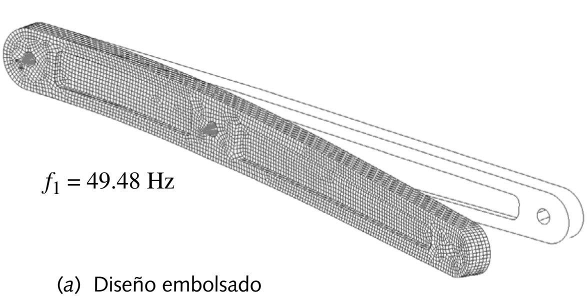
Se proporciona **La geometría de la viga es como se definió en el ejemplo C-5 y la figura C-23.**

Supuestos **Las cargas y las reacciones son paralelas, pero en planos diferentes. Los pernos de soporte son significativamente más rígidos que la viga. Los soportes de la viga fueron sometidos a la vibración aleatoria.**

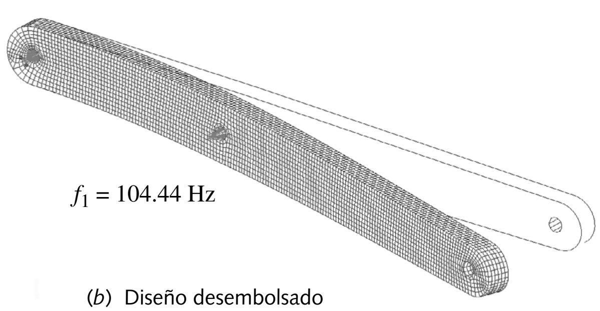
Solución

1. En el ejemplo C-5 se analizó esta viga estáticamente. La malla y las restricciones del acoplamiento cinemático, que funcionaron para el análisis estático también se utilizan para el análisis modal, el cual se analizó aquí con el mismo modelo.

2. La figura C-29 muestra las primeras formas modales del diseño de la viga, tanto embolsada como desembolsada, del ejemplo C-5. La primera frecuencia natural de la viga desembolsada es de 49.48 Hz. Al eliminar las bolsas dicho valor se vuelve más del doble hasta 104.44 Hz.



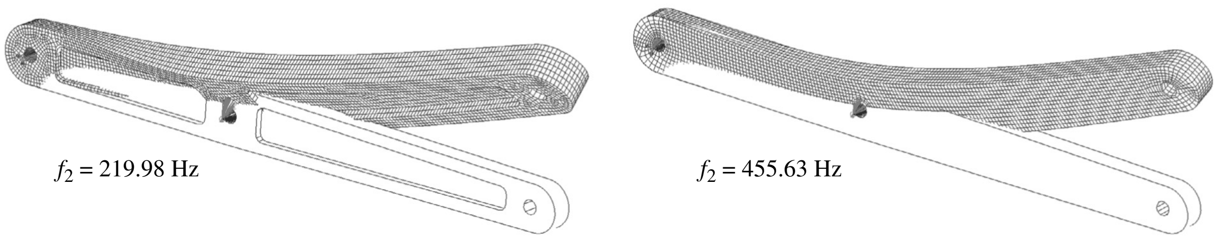
(*a*) Diseño embolsado



(*b*) Diseño desembolsado

FIGURA C-29

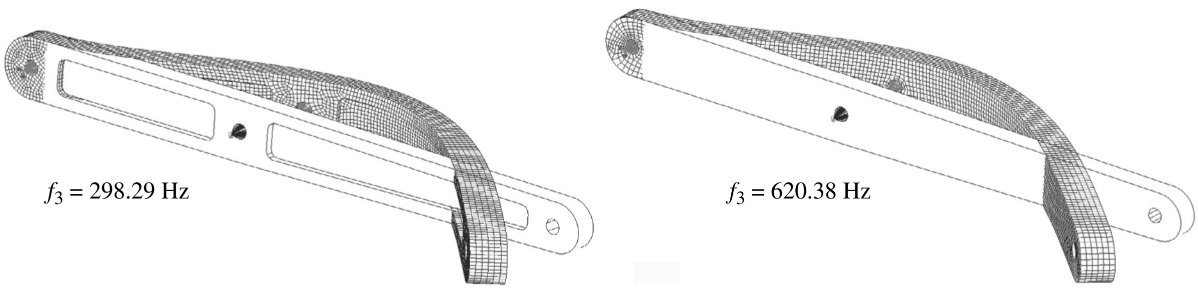
Primeras formas modales de las vigas embolsadas y desembolsadas del ejemplo C-6 (las deflexiones se exageran considerablemente)



(*a*) Diseño embolsado (*b*) Diseño desembolsado

FIGURA C-30

Segundas formas modales de las vigas embolsada y desembolsada del ejemplo C-6 (las deflexiones se exageran considerablemente)



(*a*) Diseño embolsado (*b*) Diseño desembolsado

FIGURA C-31

Terceras formas modales de las vigas embolsada y desembolsada del ejemplo C-6 (las deflexiones se exageran considerablemente)

3. La figura C-30 muestra las segundas formas modales de ambos diseños de la viga. La segunda frecuencia natural de la viga embolsada es de 219.98 Hz, que se incrementa a 455.63 Hz cuando se eliminan las bolsas.

4. La figura C-31 presenta las terceras formas modales de ambos diseños de la viga. La tercera frecuencia natural de la viga embolsada es de 298.29 Hz, que se incrementa a 620.38 Hz cuando se eliminan las bolsas.

5. Con este estudio queda claro que las bolsas dañan más que ayudar al diseño. Las bolsas duplican la deflexión estática y reducen las frecuencias naturales en un factor mayor de 2. A pesar de la reducción deliberada de masa, por la remoción del material de la bolsa, el costo en rigidez quizás haga que no valga la pena hacerlo en este caso. Sería más difícil y consumiría más tiempo llegar a esta conclusión sin el uso del FEA.

C.8 ESTUDIOS DE CASO

Los principios desarrollados en este apéndice se aplicarán ahora a problemas con geometrías más complicadas.

ESTUDIO DE CASO 1D

Análisis de FEA de la palanca del freno de una bicicleta

Problema **En el estudio de caso 1B (p. 136), se analizan el esfuerzo y la deflexión con métodos clásicos y geometría simplificada. Analice este montaje con el FEA y compare los resultados con los del estudio anterior.**

Se proporciona **Se conocen la geometría y la carga por el estudio de caso 1A (p. 9) y el análisis clásico del esfuerzo que se hizo en el estudio de caso 1B (p. 136). La mano humana promedio es capaz de desarrollar una fuerza de sujeción de alrededor de 267 N (60 lb) en la posición mostrada de la palanca.**

Suposiciones **Un análisis estático es aceptable debido al pequeño número de ciclos de carga.**

Solución **Véase las figuras C-32 a C-33.**

1. La figura 1-1 ilustra el montaje de la palanca del freno y la figura 2-48 muestra el modelo simplificado de la geometría, las cargas y las restricciones de la palanca, que se usaron en la solución clásica en el estudio de caso 1B. La compleja geometría del manubrio tenía que ignorarse y se modeló como una viga recta en voladizo cortada o truncada, donde el manubrio se une con el bloque del pivote. Un modelo espacial del brazo que capta exactamente la geometría se crea con facilidad con CAD, de manera que es posible aplicar el análisis del elemento finito.

2. Como primer paso, se crea el modelo de la viga truncada de la figura 2-48*a*, el cual se analizó en el estudio previo, aunque con su geometría real. La figura C-32*a* muestra el modelo espacial con carga y las condiciones de frontera aplicadas como una viga en voladizo. La figura C-32*b* presenta la malla; la figura C-32*c*, la gráfica del contorno del esfuerzo. La malla utiliza elementos tetraédricos de 16o. orden con 16 nodos por lado. El mayor esfuerzo se encuentra en el punto identificado como *P* en la figura y es de 69.63 MPa. Lo anterior se compara con el valor de 70.9 MPa del análisis clásico que supuso una sección transversal redonda para el manubrio en ese punto. El modelo de FEA tiene una sección transversal ovalada. Los números se ubican dentro del 2%, lo que apunta al valor de un modelo simple, como el que se utilizó en la solución clásica. La solución de FEA implicó más trabajo en este caso que la solución clásica. Ese no siempre es el caso en vista de que las piezas de geometría muy compleja son difíciles de modelar con los métodos clásicos. El método clásico da como resultado una deflexión de 0.54 mm, en tanto que el modelo de FEA da 0.69 mm debido a que la geometría real del brazo es menos rígida que la de la figura 2-48*b*.

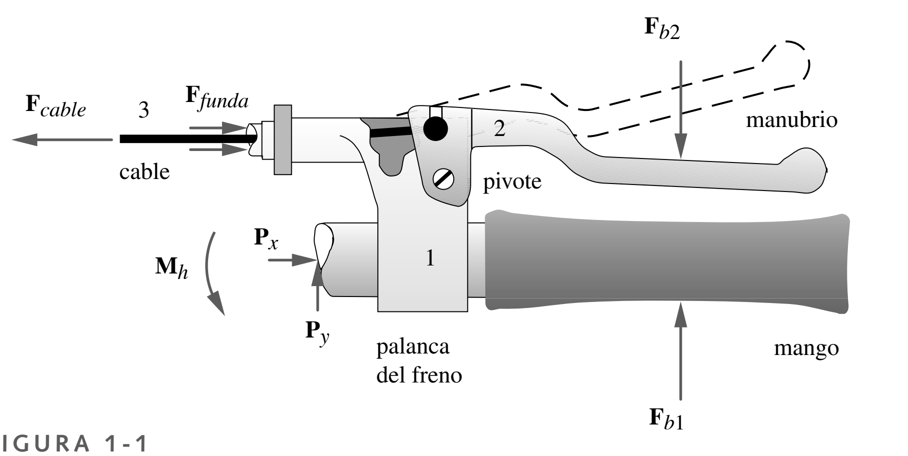


FIGURA 1-1
Montaje de la palanca del freno de la bicicleta

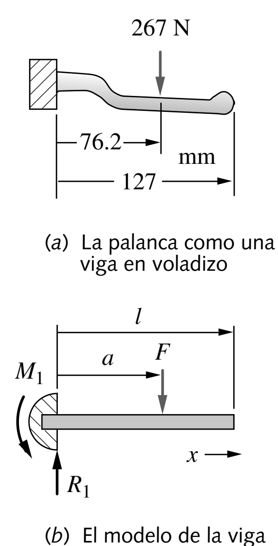


FIGURA 2-48
Modelo de viga en voladizo de la palanca

C

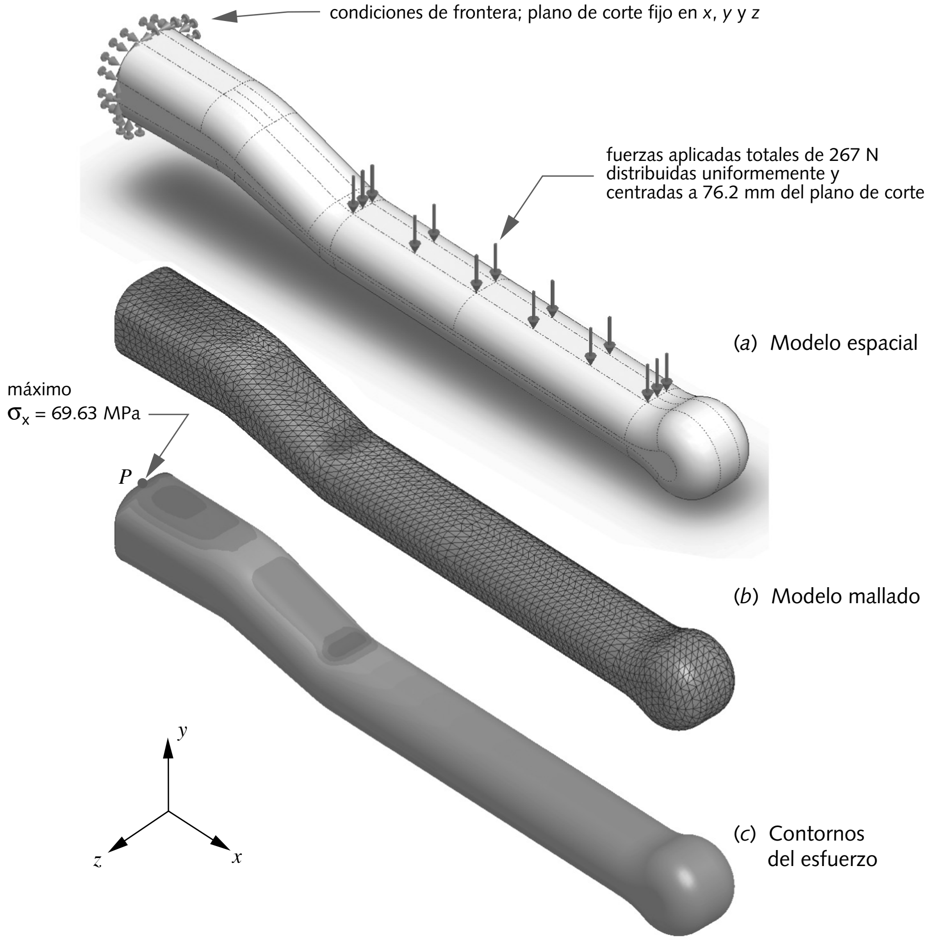


FIGURA C-32

Modelo espacial, malla de FEA y distribución de esfuerzos en el modelo de una viga truncada del estudio de caso 1D

3. Con la capacidad para modelar geometrías complejas, podemos crear un modelo de FEA que incluya las piezas del montaje que se ignoraron en el modelo truncado de la figura 2-48, es decir, el bloque final del pivote del manubrio, el pivote del perno y el cable. La figura C-33 muestra un modelo que incluye esos detalles.

4. La figura C-33*a* muestra el manubrio completo sujeto a la base de forma arbitraria por restricciones cinemáticas, alrededor del perno de la base que se ajusta al orificio del manubrio. El extremo del cable tiene una saliente cilíndrica que se ajusta en el orificio abierto del manubrio, cuya interacción con el manubrio también está definida por restricciones cinemáticas sobre la mitad de la superficie del orificio que sostiene la carga de la saliente del cable. La carga manual que se aplica al manubrio se equilibra con la carga del cable, junto con las fuerzas de reacción en las condiciones de frontera fijas en la parte inferior de la base. El esquema imita muy bien la carga real sobre el manubrio.

5. La figura C-33*b* muestra el modelo mallado del manubrio solo. La base y el extremo del cable también se mallaron y el sistema se resolvió como un montaje en FEA. Se utilizó la malla más fina disponible y todos los elementos son tetraedros de 16o. orden. La figura C-33*c* muestra las distribuciones de esfuerzos en la base del pivote y el manubrio donde son más grandes. El mayor esfuerzo de tensión se encuentra en la junta del manubrio con la base del pivote (identificada como *P*), donde la

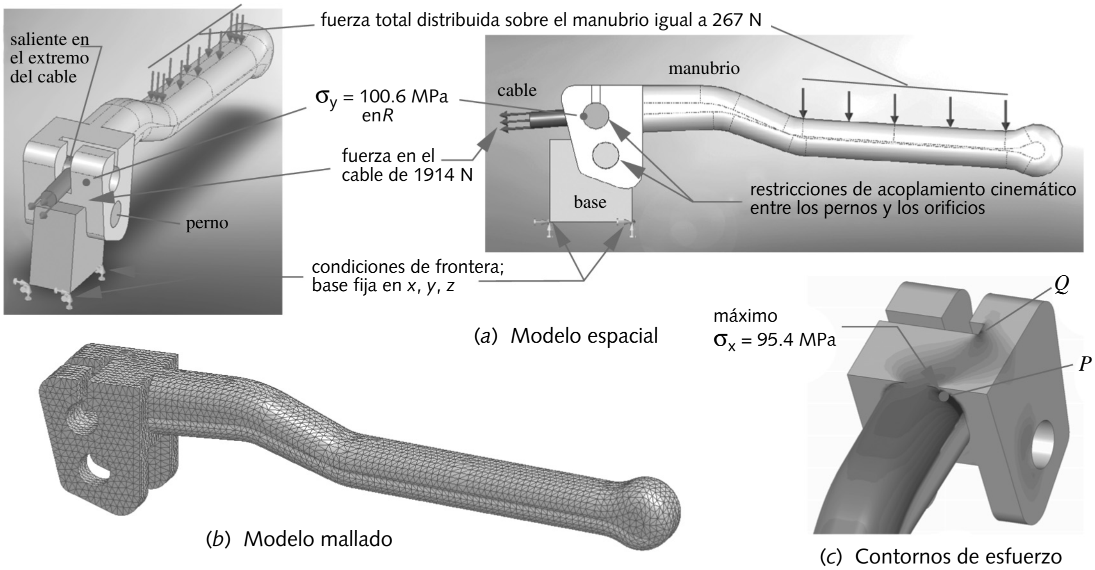


FIGURA C-33

Modelo espacial, malla FEA, carga y distribución de esfuerzos en el modelo completo del estudio de caso 1D

concentración de esfuerzos en esa esquina eleva el esfuerzo hasta 98.12 MPa. Esto es 1.4 veces los 69.63 MPa calculados con el modelo truncado más simple, lo que significa que la esquina tiene un factor de concentración de esfuerzos de $K_c = 1.4$. El modelo truncado no brinda información sobre la concentración de esfuerzos, ya que la esquina afilada no existe en ese modelo. Entonces, el modelo más complicado es superior pero toma mucho tiempo y trabajo hacerlo. Como una alternativa, la solución clásica podría estimar un factor de concentración de esfuerzos para la esquina, y obtener un mejor estimado de esfuerzo en menor tiempo y trabajo que el que exige una solución de FEA. El punto *Q* produce un esfuerzo elevado en la esquina puntiaguda, lo que se mejoraría rediseñándola para tener un radio completo en el extremo de la ranura. El esfuerzo en *R*, que se estimó en 91.9 MPa en el modelo clásico, es 100.6 MPa en este modelo de FEA más preciso. La deflexión en el extremo del manubrio en el modelo completo es de 0.98 mm. Un modelo espacial de este estudio se encuentra en la carpeta del caso 1-D del CD-ROM.

ESTUDIO DE CASO 2D

Análisis de FEA de una pinza de presión

Problema — **Se analizó una pinza de presión para esfuerzo y deflexión con métodos clásicos y geometría simplificada en el estudio de caso 2B (p. 139). Analice este montaje con FEA y compare los resultados con los del estudio anterior.**

Se proporciona — **La geometría y la carga se conocen por el estudio de caso 2A de la p. 14. El espesor del eslabón 1 es de 0.313 in, el de los eslabones 2 y 3 es 0.125 in, y; el del eslabón 4, 0.187 in. Todo el material es acero AISI 1095.**

Suposiciones — **Un análisis estático es aceptable debido al pequeño número de ciclos de carga.**

Solución — **Véase las figuras C-34 a C-35.**

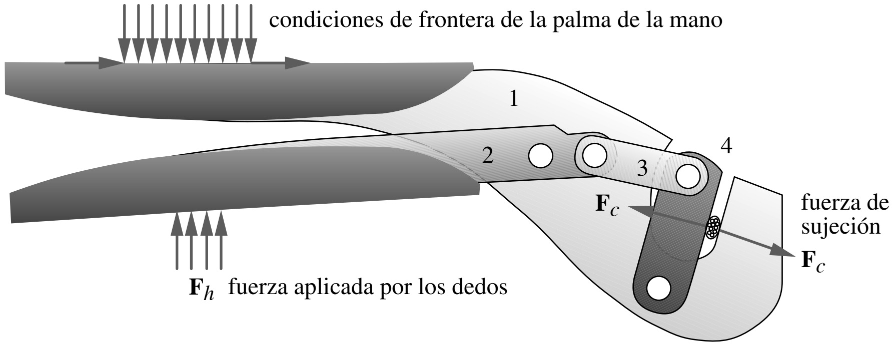
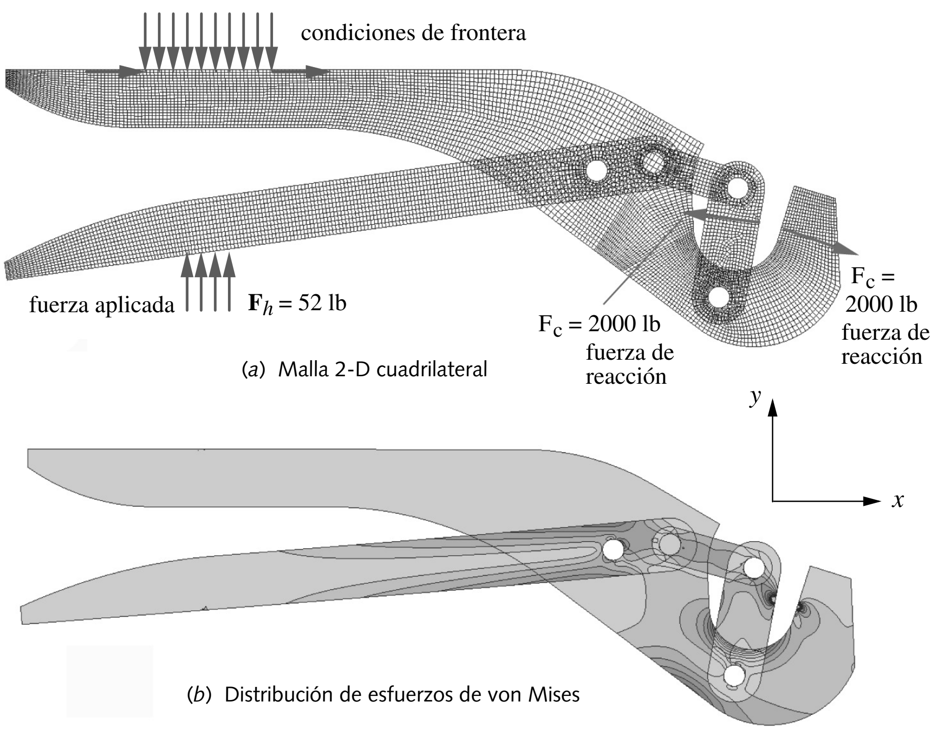


FIGURA C-34

Pinza de presión para conectar alambre

1. La figura C-34 muestra las cargas y las restricciones aplicadas al montaje de la pinza de presión del estudio de caso 2B. La herramienta se sostiene (restringe) con la palma de la mano en el mango superior, mientras la fuerza es aplicada por los dedos en el mango inferior, hasta que la fuerza de presión requerida (F_c = 2000 lb) se aplica con las mandíbulas de la herramienta a la pieza que se debe apretar. La geometría se definió en el estudio de caso 2A.
2. La figura C-35*a* muestra una malla de FEA de elementos cuadriláteros aplicada al montaje con restricciones y cargas aplicadas. En el modelo, los eslabones están conectados con pernos. Un conjunto de nodos a lo largo de la superficie de arriba está restringido en *y* y *x* para representar la restricción de la palma de la mano. La fuerza F_h requerida de los dedos se aplica al mango de abajo.



(*a*) Malla 2-D cuadrilateral

(*b*) Distribución de esfuerzos de von Mises

FIGURA C-35

Malla de FEA, fuerzas, condiciones de frontera y distribución de esfuerzos en el montaje de la pinza de presión

C

3. La figura C-35*b* indica la distribución de esfuerzos en la pieza con las restricciones y cargas aplicadas de 2000 lb en las pinzas. En la tabla C-3 se comparan los resultados con ambos métodos. La tabla C-4 presenta las fuerzas en el perno, calculadas con cada método.*

4. En el estudio de caso 2B se hizo una simplificación a la geometría en el extremo derecho del eslabón 1, con la finalidad de volverlo compatible con una solución de forma cerrada para una viga curva. Aquí no se debe hacer ninguna simplificación geométrica, ya que la malla se podría ajustar a la geometría real. La solución de forma cerrada da como resultado un esfuerzo máximo de 74 kpsi en el punto *P*. El estudio de FEA indica que el mayor esfuerzo en la parte es de 81 kpsi en el punto *P*. La diferencia quizá sea por la simplificación geométrica hecha en la solución previa.

Tabla C-3
Resultados del esfuerzo principal de forma cerrada (CF) vs. FEA

Eslabón	Esfuerzo (kpsi)	
	CF	FEA
1	74.0	81.2
2	N.A.	45.5
3	–50.0	–40.0
4	31.0	26.9

Tabla C-4
Resultados de la fuerza en el perno de forma cerrada (CF) vs. FEA

Fuerza	Magnitud (lb)	
	CF	FEA
F_{12}	1560	1574
F_{14}	452	456
F_{23}	1548	1545
F_{43}	1548	1545

ESTUDIO DE CASO 4D

Análisis de FEA para el brazo del freno de una bicicleta

Problema **El brazo del freno de una bicicleta se analizó para el esfuerzo y la deflexión, con métodos clásicos y geometría simplificada, en el estudio de caso 4B (p. 147). Analice este montaje con FEA y compare los resultados con los del estudio anterior.**

Se proporciona **La geometría y la carga se conocen por el estudio de caso 4A (p. 24) y sobre el brazo actúa la fuerza del cable, que es igual a 1 046 N en la posición mostrada.**

Supuestos **La aceleración es despreciable. El modelo de carga de clase 1 es adecuado y el análisis estático es aceptable. El coeficiente de fricción entre la almohadilla del freno y el armazón de la rueda es de 0.45 a temperatura ambiente y de 0.40 a 150 °F.**

Solución **Véase las figuras C-36 a C-37.**

1. La figura 1-9 muestra la geometría del montaje del brazo del freno. La simetría permite analizar un solo lado en el estudio de caso 4B; así se hará aquí también. Para la solución clásica, se dividió en dos vigas en voladizo. Eso no es necesario aquí y se analizará como un montaje integrado por el brazo, el perno del pivote y las restricciones para representar el armazón de la rueda. El perfil de la sección transversal habrá de modelarse burdamente, ya que en la solución clásica y la teoría de vigas curvas se utilizó un perfil T rectangular para analizar el esfuerzo de flexión. En el modelo de FEA se emplea la geometría real y se hace un análisis general del esfuerzo. Se esperan algunas diferencias en los resultados entre los dos modelos.

2. La figura C-36 muestra el modelo espacial del montaje. El brazo se soporta sobre un perno, que tiene la cara de un extremo fija a la estructura en *x*, *y* y *z*. El brazo está restringido cinéticamente al perno que permite que la superficie del orificio gire sobre el diámetro exterior del perno, aunque no puede moverse en *x* ni en *y*. La dirección *z* del brazo está restringida por la creación de un detalle “arandela” sobre la cara del cubo, en tanto el área de la “arandela” está restringida contra el movimiento en *z*. El giro del brazo alrededor del eje *z* del perno se previene restringiendo el área “*A*” sobre la cara de la porción ranurada contra el movimiento en *x*. Esto representa la almohadilla del freno sujeta ahí, la cual se presiona contra la estructura de la rueda. El torque de la rueda y la fricción con la almohadilla del freno se modelan como fuerzas de tracción en las direcciones *y* y *z,* sobre la misma área *A* y sobre el área *B* del lado de atrás. Tales fuerzas de tracción aparecen como flechas que permanecen sobre la superficie, tanto del lado de la almohadilla del brazo como de la superficie intermedia de la ranura sobre el lado posterior del brazo, donde se asienta el tornillo que sujeta la almohadilla. Por último, la fuerza del cable se aplica en el orificio *C* como componentes *x* y *y*.

C

* Observe que las fuerzas en el perno se deben calcular antes de realizar el análisis de esfuerzos de forma cerrada, ya que se necesitan en las ecuaciones de esfuerzos. El cálculo de FEA, por otro lado, sólo necesita las cargas aplicadas y las condiciones de frontera para calcular los esfuerzos. Las fuerzas de reacción se pueden obtener calculándolas hacia atrás a partir de los esfuerzos. Es buena idea verificar las fuerzas de reacción que resultan del análisis de FEA, así como compararlas con el análisis de fuerzas estáticas del sistema usando $\Sigma F = 0$ y $\Sigma M = 0$. Si están de acuerdo, se ratifica que su modelo de FEA es razonable.

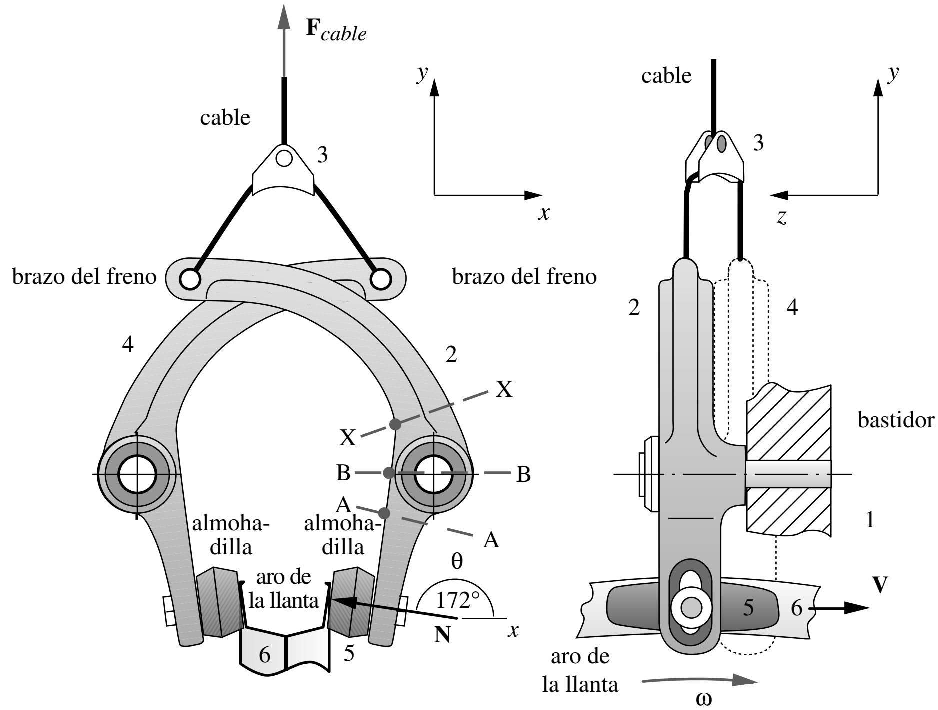


FIGURA 1-9 repetida

Ensamble del brazo del freno jalado por el centro de una bicicleta

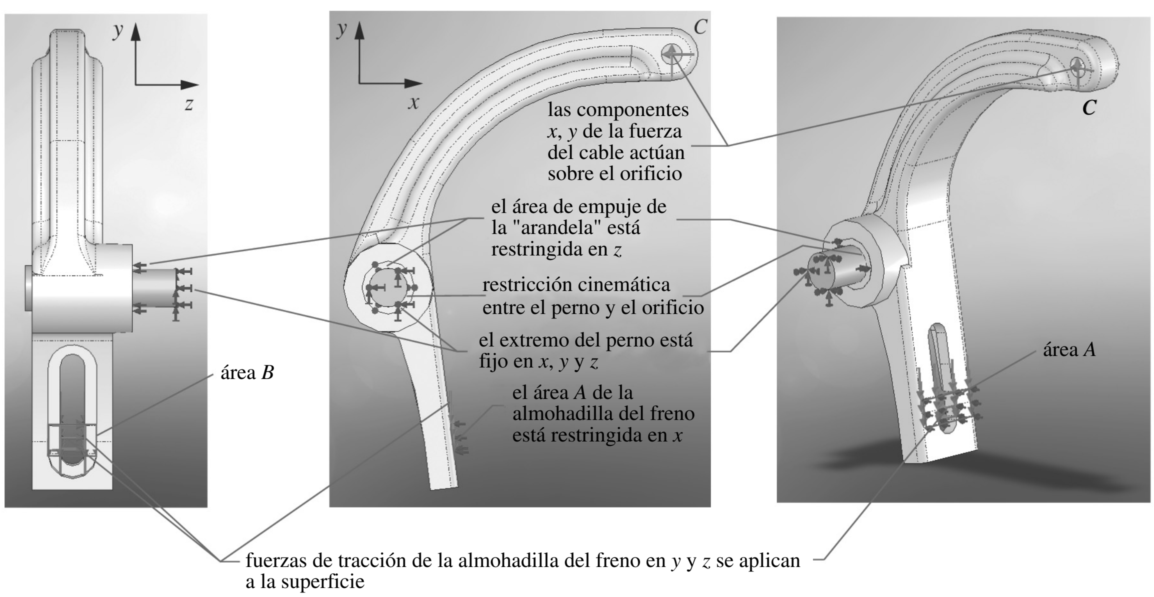
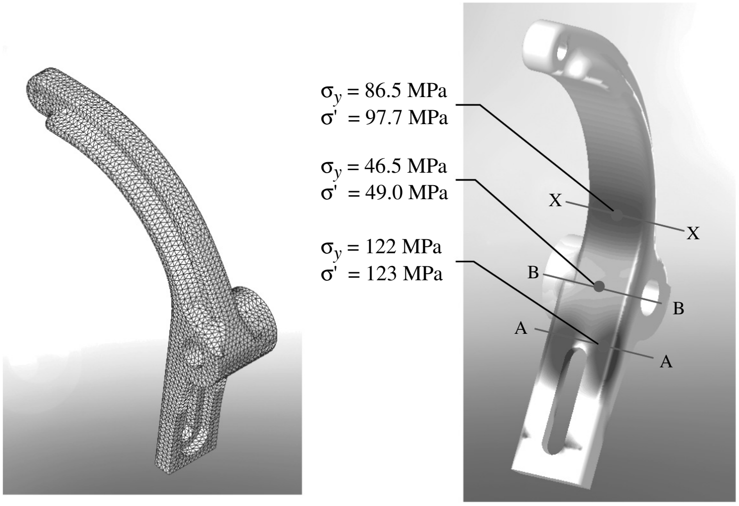


FIGURA C-36

Condiciones de frontera, restricciones y cargas en el modelo de FEA del brazo del freno de una bicicleta

C



(*a*) Modelo mallado

(*b*) Distribución de esfuerzos (σ_y)

FIGURA C-37

Malla y distribución de esfuerzos del modelo de FEA del brazo del freno de una bicicleta

3. El análisis de esfuerzo clásico de esta parte, realizado en el estudio de caso 4B, selecciona, para analizar, varias ubicaciones con posibles altos esfuerzos, las cuales constan de un plano identificado como X-X en la figura 1-9 a lo largo de la sección de la viga curva cerca de su raíz, un plano B-B a lo largo del orificio del pivote y un plano A-A que pasa cerca de la raíz del voladizo rectangular, que contiene la ranura para el montaje de la almohadilla. En los tres planos, los mayores esfuerzos de tensión se encontraron en la superficie interior en las ubicaciones mostradas como puntos A, B, X en la figura 1-9 (repetida) de la página opuesta.

4. La figura C-37*a* muestra el brazo mallado con 54 432 elementos tetraédricos de 16o. orden y la figura C-37*b* presenta una gráfica de contorno de esfuerzo de la superficie interior del brazo. Esta grafica el esfuerzo normal de tensión σ_y, que es la componente calculada para dichos puntos en el estudio de caso 4B. Las ubicaciones donde se cortan los planos A-A, B-B, y X-X se ilustran en la superficie interior. Los puntos calientes de altos esfuerzos son visibles con claridad en A-A y X-X, pero no en B-B. Ello se debe a que el esfuerzo en B-B es menor que en las otras ubicaciones. También se muestra el esfuerzo de von Mises y está cerca del valor de σ_y, porque es dominante en esos puntos.

5. La tabla C-5 compara los resultados del análisis de esfuerzos clásico con los del FEA, para esfuerzo de tensión en la dirección, *y* en la fibra interior para las tres ubicaciones. La tabla C-6 compara los resultados del análisis de esfuerzos clásico con los del FEA, para esfuerzo de compresión en la fibra externa de la sección X-X. En la superficie interior de las secciones A-A y X-X, los resultados del FEA muestran un esfuerzo menor que los del análisis clásico. Lo anterior muy probablemente es porque el análisis clásico ignoró el aumento del espesor de la sección debido a los radios del filete sobre los contornos externos del brazo y supuso, además, que la profundidad (espesor) de la viga era constante hasta la raíz en ambos lados del cubo. La buena noticia es que el análisis clásico dio una estimación conservadora en las dos ubicaciones. Sin embargo, el FEA pronosticó aproximadamente el doble de esfuerzo en la sección B-B del que pronosticó el análisis clásico. En este caso, el FEA dio una mejor estimación del esfuerzo.

6. El FEA da un resultado superior en este caso, porque la geometría compleja que tendría que ser demasiado simplificada en el análisis clásico. El modelo en Solidworks se encuentra en el CD-ROM en la carpeta llama CASE4-D.

Tabla C-5

Resultados del esfuerzo por tensión σ_y en la superficie interior, análisis clásico (CA) vs. FEA

Ubicación	Esfuerzo (MPa)	
	CF	FEA
A–A	142.2	122.0
B–B	25.4	46.5
X–X	162.0	86.5

Tabla C-6

Resultados del esfuerzo por compresión σ_y en la superficie exterior, análisis clásico (CA) vs FEA

Ubicación	Esfuerzo (MPa)	
	CF	FEA
X–X	–190.0	–79.3

C

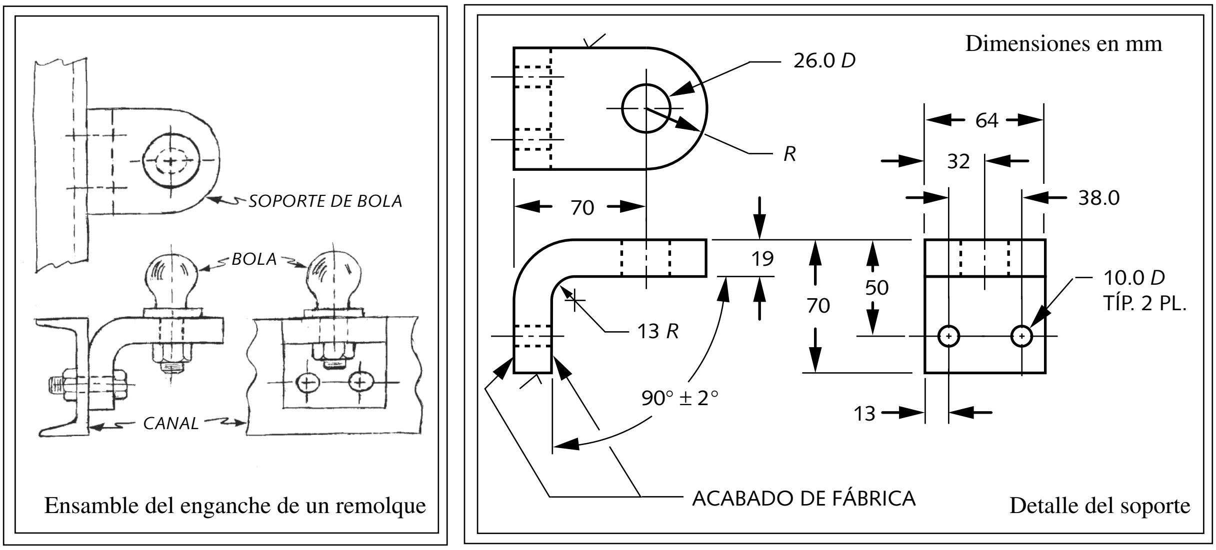


FIGURA C-38

Ensamble y detalle de un remolque para tractor

ESTUDIO DE CASO 7

Análisis de FEA para soporte de un remolque

Problema **El subensamble del enganche de un remolque y las dimensiones de su soporte se muestran en la figura C-38. Las cargas se aplican como se indica en la figura C-39. Analice este montaje con FEA, luego determine sus esfuerzos.**

Se proporciona **El peso de la lengüeta de 998 N actúa hacia abajo, mientras la fuerza de arrastre de 4905 N actúa horizontalmente. Todo el material es acero.**

Supuestos **La estructura a la cual está atornillado el enganche es significativamente más rígida que el montaje del enganche.**

Solución **Véase las figuras C-38 a C-41.**

C

1. La geometría de la pieza requiere un modelo de FEA 3-D, si se necesita información sobre concentración de esfuerzos alrededor de los orificios. La figura C-40*a* muestra la parte mallada con elementos “ladrillo” hexaédricos lineales de 8 nodos. Note el patrón más fino de la malla alrededor de los orificios. La malla se refinó hasta que los esfuerzos convergieron en valores que cambiaban sólo ligeramente con mallas sucesivamente más finas, como se hizo en el ejemplo C-1.

2. La figura C-40*b* muestra las restricciones aplicadas. Los orificios en los puntos *A* y *B* tienen el mismo tipo de “restricción cinemática” aplicado, como se usó en ejemplos anteriores para simular un perno o un sujetador redondo (en este caso un tornillo) en un orificio. Se coloca un nodo en el centro del orificio en la superficie de atrás, donde el soporte toca la estructura (que no se muestra) a la cual está sujeto. Elementos de cuerpo rígido unen este nodo central con todos los nodos sobre la superficie interior del orificio. Los nodos centrales en *A* y *B* están fijos en *x*, *y* y *z*.

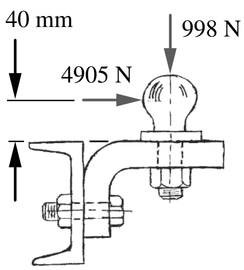
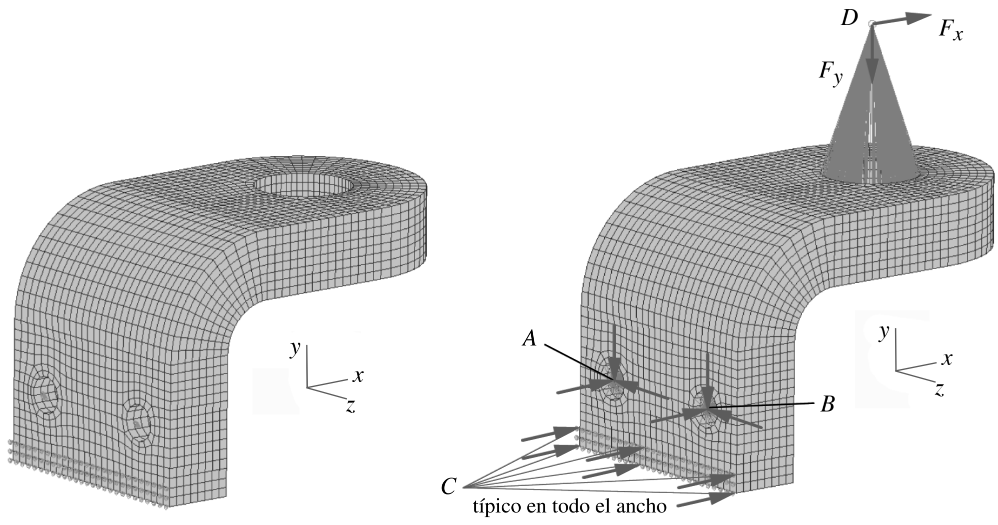


FIGURA C-39

Carga del enganche



(*a*) Malla (*b*) Malla con restricciones y cargas

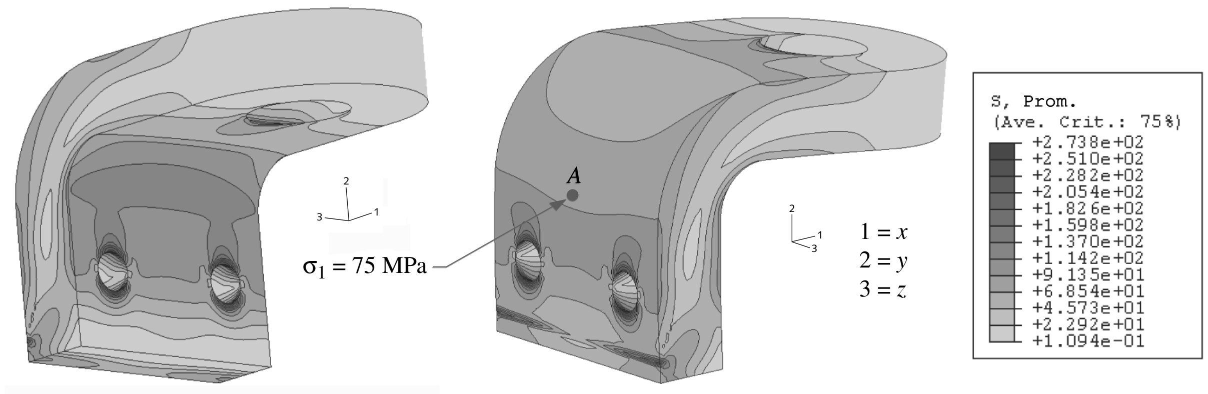
FIGURA C-40

Malla y restricciones del soporte del enganche del remolque del estudio de caso 7

3. El área de abajo en la superficie de atrás —identificada como *C* en la figura C-40— tiene fijos todos los nodos de la superficie de las dos filas inferiores de elementos en *x*, para representar el contacto con la estructura y prevenir el giro del cuerpo rígido alrededor del eje *z*. Observe que la mejor forma de hacerlo sería proporcionar restricciones de contacto a todos los nodos en la superficie de atrás que tocan la estructura. Esto tomaría en cuenta una posible carga invertida que tendería a separar las filas inferiores de nodos de la estructura. Utilizar restricciones de contacto requeriría entonces un análisis de FEA no lineal, que incrementaría de manera significativa el tiempo de procesamiento. El enfoque empleado aquí permite un cálculo de FEA lineal. (Observe que debido a que la parte es simétrica alrededor del plano medio y está cargada en ese plano, un análisis 2-D de la pieza sin orificios también daría buena información, aunque menos completa, y tendría una corrida en un tiempo mucho menor.)

4. Se coloca otro nodo en el punto *D*, 40 mm por encima de la superficie de arriba sobre el eje del orificio que acepta la bola del enganche. El nodo se conecta con elementos de cuerpo rígido a los nodos en la superficie interior del orificio de 26 mm de diámetro. Las fuerzas se aplican a dicho nodo desplazado para representar su aplicación en el centro de la bola de enganche. Tal procedimiento supone en forma implícita que la bola es mucho más rígida que el soporte (es decir, prácticamente rígida). Si se está preocupado por los esfuerzos y las deflexiones en la bola, se deben incluirlos en el modelo a expensas de la generalización del modelo y del tiempo de procesamiento.

5. La figura C-41 muestra la distribución de los esfuerzos de von Mises a través del soporte, cuyo intervalo va de 11 a 274 MPa. Observe las concentraciones de esfuerzos alrededor de los orificios. El punto *A* en la tangente entre el radio exterior y la superficie de atrás, que sujeta la estructura, tiene un esfuerzo principal máximo de 75 MPa. Esto está de acuerdo con el valor de 72.8 MPa, calculado en el mismo punto aplicando la teoría clásica de vigas en voladizo en la solución del problema 2-4*e* (p. 158), como se reporta en el apéndice H (p. 1005). Advierta que hay puntos con mayores esfuerzos que éstos en el interior de la parte, usualmente en ubicaciones de concentración de esfuerzos alrededor de orificios.



(*a*) Distribución del esfuerzo de von Mises

(*b*) Magnitudes del esfuerzo de von Mises (Mpa)

FIGURA C-41

Distribución de esfuerzos en el soporte del enganche del remolque del estudio de caso 10

C.9 RESUMEN

El análisis de elementos finitos es una herramienta muy poderosa que se utiliza de manera muy extensiva en ingeniería. Permite la solución de problemas cuya geometría es muy compleja para los métodos clásicos de forma cerrada, en el análisis de esfuerzos y deflexión. No obstante, como cualquier herramienta, requiere habilidad para usarse adecuadamente, porque cuando se emplea en forma incorrecta los resultados serían desastrosos. Es necesario tener los conocimientos suficientes acerca de los fundamentos teóricos y matemáticos del FEA para estar conscientes de sus limitaciones. También es importante probar y verificar cualquier modelo de FEA contra la solución de forma cerrada de un problema de prueba o contra datos experimentales, en lugar de tan sólo aceptar sus resultados al pie de la letra.

En este apéndice sólo se presentó una introducción breve del tema y se explicaron algunos de los riesgos asociados con la construcción de modelos viables de del FEA. La selección de un tipo de elemento que mejor se adapte a la geometría y situación de carga es el primer paso. También es importante verificar que la malla tiene una convergencia razonable para obtener una solución creíble. Quizás el aspecto más difícil del modelado con el FEA sea establecer restricciones realistas sobre el modelo que representen muy bien las condiciones de frontera reales, sobre el sistema físico que se modela. Varios ejemplos del apéndice demostraron cómo se cae en errores significativos si tales detalles no se atienden adecuadamente.

Antes de intentar el uso profesional del FEA, se recomienda al estudiante buscar más información y/o instrucción en la teoría y la práctica del FEA, ya sea con cursos específicos del tema o leyendo la literatura disponible. Un comienzo razonable hacia esta última meta sería revisar los libros listados en la siguiente bibliografía, la cual, en su momento, le permitirán profundizar en el mundo del FEA. Además, en la Web hay gran riqueza de información sobre el FEA, incluyendo libros de texto completos. Algunos sitios se listan más adelante. La búsqueda en la Web de un tema revelará muchos otros.

C.10 REFERENCIAS

1. **M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin** y **L.J. Topp**, "Stiffness and Deflection Analyisis of Complex Structures", *J. Aero. Sci*., 23, pp. 805-824, 1956.

2. http://www.iti-cae.com/caelabs/user_guide/plasticslab/plasticslab-291.html

3. **V. Adams** y **A. Askenazi**, *Building Better Products with Finite Element Analysis*, Onword Press: Santa Fe, N. M., p. 246, 1998.

4. **D.L. Logan**, *A First Course in the Finite Element Method*. 2a. ed. PWS Kent: Boston, p. 408, 1992.

C.11 BIBLIOGRAFÍA

V. Adams y A. Askenazi, *Building Better Products with Finite Element Analysis*, Onword Press: Santa Fe, N. M., 1998.

K.J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1982.

D.L. Logan, *A First Course in the Finite Element Method*. 2a. ed., PWS Kent: Boston, 1992.

I.H. Shames y C.L. Dym, *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*. Hemisphere Publishing: Nueva York, 1985.

E. Zahavi, *The Finite Element Method in Machine Design*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1992.

C.12 RECURSOS WEB

http://caswww.colorado.edu/courses.d/IFEM.d/Home.html

http://www.devdept.com/fem/books.php

http://feaservices.com/intro_fea/intro_fea.html

http://www.memagazine.org/supparch/medesign/mesh/mesh.html

http://caswww.colorado.edu/Felippa.d/FelippaHome.d/Publications.d/Report.CU-CAS-00-13.pdf

http://campus.umr.edu/mfge/ugumrmfge/FEMwebpage/Projecta.htm

http://www.engr.usask.ca/~macphed/finite/fe_resources/fe_resources.html

http://www.3.sympatico.ca/peter_budgell/Modeling_issues.html

http://www.DermotMonaghan.com/

http://www.femur.wpi.edu/

C.13 PROBLEMAS

C-1. Resuelva el problema 2-10 con el FEA.

C-2. Resuelva el problema 2-11 con el FEA.

C-3. Resuelva el problema 2-12 con el FEA.

C-4. Resuelva el problema 2-13 con el FEA.

C-5. Resuelva el problema 2-17 con el FEA.

C-6. Resuelva el problema 2-19 con el FEA.

C-7. Resuelva el problema 2-23, para la(s) fila(s) asignada(s), con el FEA.

C-8. Resuelva el problema 2-24, para la(s) fila(s) asignada(s), con el FEA.

C-9. Resuelva el problema 2-25, para la(s) fila(s) asignada(s), con el FEA.

C-10. Resuelva el problema 2-26, para la(s) fila(s) asignada(s), con el FEA.

†C-11. Resuelva el problema 2-33, para la(s) fila(s) asignada(s), con el FEA.

†C-12. Resuelva el problema 2-34, para la(s) fila(s) asignada(s), con el FEA.

C-13. Resuelva el problema C-37 con el FEA.

C-14. Resuelva el problema 2-59 con el FEA.

C-15. Resuelva el problema 2-60 con el FEA.

C-16. Resuelva el problema 2-62 con el FEA.

C-17. Resuelva el problema 2-63 con el FEA.

C-18. Resuelva el problema 2-66 con el FEA.

†C-19. Resuelva el problema D-4, para la(s) fila(s) asignada(s), con el FEA.

†C-20. Resuelva el problema D-5, para la(s) fila(s) asignada(s), con el FEA.

†C-21. Resuelva el problema 2-3 con el FEA.

†C-22. Resuelva el problema 2-9 con el FEA.

†C-23. Resuelva el problema 2-33 con el FEA.

†C-24. Resuelva el problema 2-34 con el FEA.

†C-25. Resuelva el problema 2-35 con el FEA.

†C-26. Resuelva el problema 2-40 con el FEA.

†C-27. Resuelva el problema 2-57 con el FEA.

†C-28. Resuelva el problema 2-59 con el FEA.

†C-29. Resuelva el problema 2-60 con el FEA.

†C-30. Resuelva el problema 2-61 con el FEA.

†C-31. Resuelva el problema 2-69 con el FEA.

†C-32. Resuelva el problema 2-70 con el FEA.

†C-33. Resuelva el problema 2-71 con el FEA.

†C-34. Resuelva el problema 2-72 usando el FEA.

* Las respuestas de algunos de los problemas referenciados en capítulos anteriores se encuentran en el apéndice H. Para los otros, su profesor debería estar dispuesto a brindarle los valores de la solución de forma cerrada del problema original, a partir de la solución manual para utilizarla como verificación de sus resultados de FEA. Si no, resuélvalos mediante los métodos clásicos.

† Los modelos en Solidworks de estos problemas se encuentran en el CD.

Apéndice D

ESTUDIOS DE CASO DE DISEÑO

El conocimiento del hombre no puede ir más allá de su experiencia.

JOHN LOCKE

D.0 INTRODUCCIÓN

Este apéndice presenta estudios de caso de mayor alcance que los presentados en capítulos anteriores. Dichos estudios de caso se utilizarán en el libro para ilustrar el uso de varios aspectos del proceso de diseño en cada problema. Cada uno de los siguientes problemas explora un tipo de elemento diferente de diseño: ejes, engranes, resortes, etcétera, los cuales se encuentran comúnmente en las máquinas. Este conjunto de elementos no es exhaustivo, pero ilustra la manera en la que se aplican los principios de la parte inicial del libro a problemas prácticos de diseño. Los elementos de máquinas seleccionados para su estudio se eligieron, en parte, porque se utilizan comúnmente y en parte para ejemplificar criterios de diseño y de fallas estudiados en la parte I del texto. La tabla D-0 muestra las variables que se manejan en el apéndice, así como las referencias a los estudios de caso donde se emplean.

El diseño es, por naturaleza, un proceso iterativo. Cuando uno se encuentra con el enunciado de un problema de diseño, para iniciar siempre es necesario definir algunos supuestos para simplificación. Conforme el diseño toma forma, las decisiones posteriores inevitablemente forzarán al diseñador a reabordar supuestos anteriores sobre las piezas ya diseñadas y modificarlas para ajustarlas a las nuevas condiciones. Un ejemplo sencillo de lo anterior es el diseño de un conjunto de engranes montados sobre ejes. Ya sea que uno inicie con el diseño de los ejes o los engranes (por decir, los ejes), cuando llega el momento de abordar el segundo de los dos elementos (por decir, los engranes), sus requisitos pueden obligar a cambiar algunas de las suposiciones hechas antes, en relación con el diseño del eje. Por último, se llega a un acuerdo que satisface todas las restricciones, pero sólo después de algo de iteración que, inevitablemente, implica el rediseño de piezas consideradas con anterioridad.

Por la necesidad de iteración, el tiempo utilizado en la definición de la solución del problema en una herramienta de cómputo, como una hoja de cálculo o un resolvedor de

Tabla D-0 Variables usadas en este apéndice

Símbolo	Variable	unidades ips	unidades SI	Véase
A	área	in^2	m^2	Caso 7A
a	aceleración	in/seg^2	m/seg^2	Caso 8A
c	constante de amortiguamiento	lb-seg/in	N-seg/m	Caso 8A, 9A
C_f	coeficiente de fluctuación	ninguna	ninguna	Caso 9A
d	diámetro	in	m	Caso 7A
E	energía	in-lb	joules	Caso 9A
F	fuerza o carga	lb	N	todo
g	aceleración gravitacional	in/seg^2	m/seg^2	Caso 8A
k	exponente de la ley de los gases	ninguna	ninguna	Caso 7A
k	razón de resorte o constante de resorte	lb/in	N/m	Caso 8A, 9A
l	longitud	in	m	Caso 7A
m	masa	lb-seg^2/in	kg	todo
P	potencia	hp	watts	Caso 8A
p	presión	psi	Pa	Caso 7A
r	radio	in	m	Caso 7A
T	torque	lb-in	N-m	todo
v	volumen	in^3	m^3	Caso 7A
v	velocidad lineal	in/seg	m/seg	Caso 8A
W	peso	lb	N	Caso 8A
y	desplazamiento	in	m	todo
ω	velocidad rotacional o angular	rad/seg	rad/seg	todo
ω_n	frecuencia natural	rad/seg	rad/seg	Caso 9A
ζ	razón de amortiguamiento	ninguna	ninguna	Caso 9A

ecuaciones, será bien recompensado cuando se tenga que rediseñar cada pieza varias veces. Un programa de modelado espacial de CAD también es una herramienta de diseño valiosa. La falta de un programa de modelado asistido por computadora lo enfrentará con la repetición de sus cálculos, desde el inicio para cada iteración, lo cual no es una perspectiva placentera. Se hará uso intenso de las herramientas de diseño asistido por computadora en estos estudios de caso.

D

D.1 ESTUDIO DE CASO 8: COMPRESOR DE AIRE PORTÁTIL*

Un contratista necesita un pequeño compresor de aire con motor de gasolina para impulsar martillos neumáticos, en sitios de trabajo remotos. En la figura D-1 se ilustra un diseño conceptual preliminar. Un motor de dos tiempos de un solo cilindro con un volante acoplado, a través de un embrague (que se puede desconectar al arrancar el motor), a una caja de transmisión para reducir la rapidez del motor e incrementar su torque adecuadamente. Se debe determinar la razón de la caja de transmisión. El motor de gasolina de 2.5 hp trabaja a 3800 rpm. El eje de salida de la caja de transmisión impulsa el cigüeñal del pistón del compresor Schramm (con válvula de retención) de un solo cilindro, a través de un acoplamiento con cuña. Unos cálculos preliminares de termodinámica (véase los archivos CASE-A) indican que la rapidez de flujo deseada de 9 cfm a una presión

* Quizás el estudiante no se haya enfrentado aún a todos los aspectos de tales problemas tan amplios en sus estudios; sin embargo, no se debería desanimar si algunos detalles de los estudios de caso parecen oscuros. Indudablemente se encontrará una explicación más detallada de dichos temas en otros cursos, en experiencias posteriores o en su estudio por cuenta propia. Uno de los aspectos más interesantes del diseño en ingeniería es su amplitud. Se debe aprender continuamente nuevas habilidades para resolver problemas reales de ingeniería. Una preparación en ingeniería se inicia en la universidad y está lejos de concluirse con la graduación. Se tiene que dar la bienvenida al desafío de explorar temas nuevos a lo largo de la carrera.

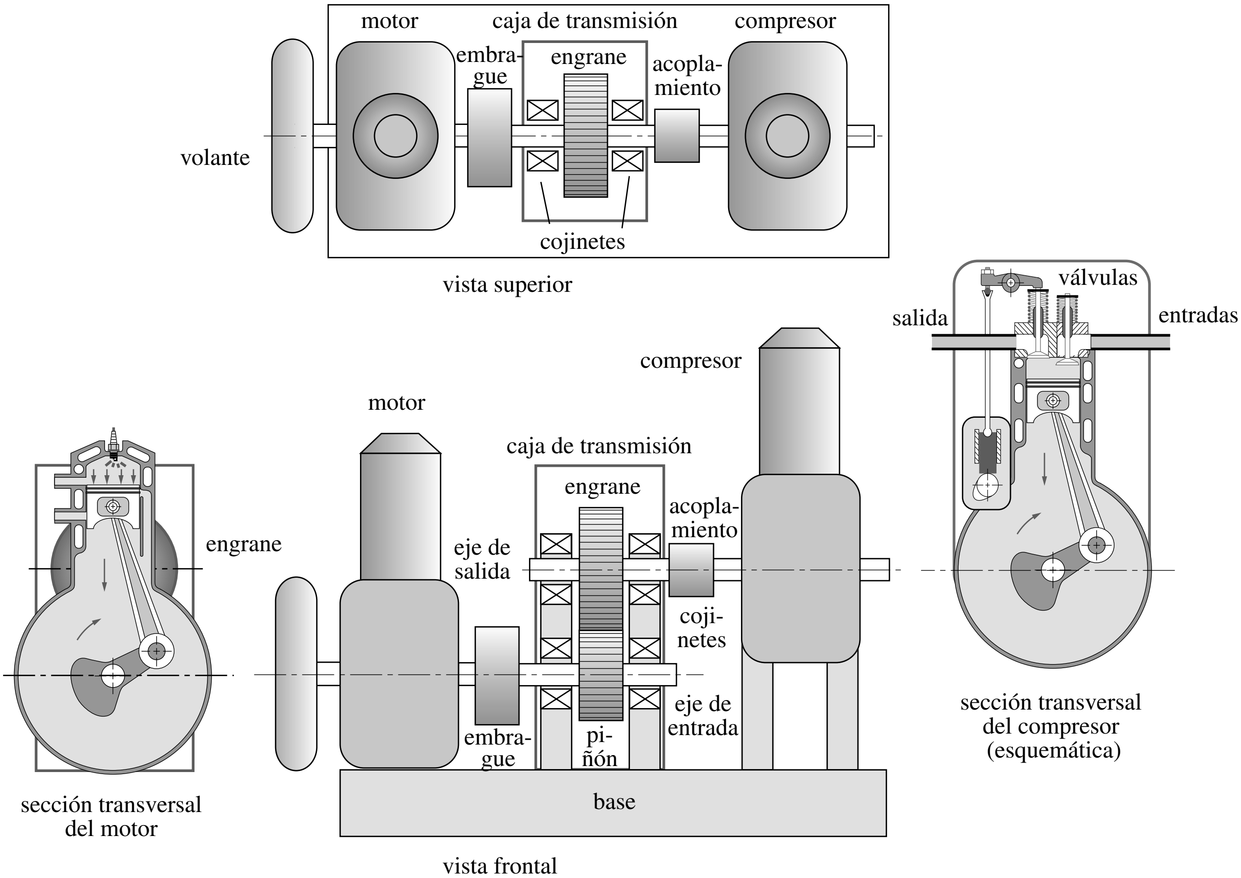


FIGURA D-1

Diseño esquemático preliminar de un compresor portátil de aire con motor de gasolina, caja de engranes, acoplamientos, ejes, y cojinetes

efectiva media de 26 psig se obtiene con el volumen de 25 in^3 de una carrera del compresor que funciona a 1500 rpm.

La figura D-1 presenta el motor montado sobre una base (la cual podría estar sobre ruedas), con su eje de salida conectado mediante el embrague al eje de entrada de la caja de transmisión, la cual contiene un solo conjunto de engranes para reducir la alta rapidez del motor a una más baja, adecuada para el compresor. La razón de cambio requerida por los engranes es de 1500:3800 o bien 0.39:1. El eje de salida de la caja de transmisión está conectado vía un acoplamiento al cigüeñal del compresor. Los ejes alojados en la caja de transmisión tienen cojinetes apropiados. La sección transversal del compresor muestra la válvula de escape activa impulsada por una varilla de empuje operada por una leva y el brazo del balancín del tren. La válvula de admisión es pasiva, es decir, se abre y se cierra por los diferenciales de presión y su resorte ligero. El resorte de la válvula sobre la válvula de escape debe ser lo suficientemente fuerte para mantener al seguidor en contacto con la leva.

Hay varios aspectos del dispositivo que se investigarán. Suponga que el motor de gasolina se compra como una unidad. El compresor determinará las cargas sobre los elementos entre el motor y él mismo, de manera que se requiere alguna información sobre las características carga-tiempo del compresor. Los ejes, los acoplamientos, los cojinetes y los engranes, que transmiten la potencia del motor al compresor, son los principales elementos por diseñarse en este estudio de caso . También se verán a unos cuantos elementos dentro del compresor, como los pernos de la cabeza y el resorte de la válvula, ya

D

que brindan excelentes ejemplos de diseño a la fatiga. Por sus complicadas geometrías es más adecuado realizar el diseño de otras piezas del compresor, como el pistón, la biela y el cigüeñal, utilizando el *análisis del elemento finito* (FEA), por lo que no se tratarán en este estudio de caso (véase el apéndice C).

ESTUDIO DE CASO 8A

Diseño preliminar de un tren impulsor de un compresor

Problema **Determine la función fuerza-tiempo dentro del cilindro de un compresor y la función torque-tiempo que actúa sobre el eje de entrada del compresor durante un ciclo.**

Se proporciona **La rapidez del compresor es de 1 500 rpm. El compresor tiene un diámetro de cilindro del cilindro de 3.125 in, una carrera de 3.26 in, y una razón biela a cigüeñal de 3.5. La presión de admisión es la atmosférica (14.7 psia), la presión pico del cilindro es de 132 psig y la presión efectiva media (mep) es de 26 psig. El flujo es de 8.9 pies cúbicos por minuto a la presión efectiva media, lo cual da 1.6 hp.**

Supuestos **El pistón pesa 1 lb, y la biela pesa 2 lb con su centro de masa a 1/3 del extremo mayor. El cigüeñal pesa 5.4 lb, incluyendo un contrapeso que lo desequilibra óptimamente para minimizar la fuerza de las sacudidas. El exponente de la ecuación de la ley de los gases es k = 1.13.**

Solución **Véase las figuras D-1 a D-3 y los archivos CASE8-A.**

1. La función fuerza-tiempo en el cilindro depende de la presión del gas comprimido, la cual a la vez depende de la geometría del mecanismo manivela-corredera y la ley de los gases:

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k \tag{a}$$

donde p_1 es la presión atmosférica (en psia), v_1 es el volumen expandido del cilindro en el punto muerto inferior (BDC) mientras p_2 y v_2 son la presión y el volumen del gas comprimido en el punto muerto superior (TDC) o en cualquiera otra posición. El exponente k de la ley de los gases se supone de 1.13, ya que el proceso no es isotérmico ($k = 1$) ni adiabático ($k = 1.4$). La razón de compresión de 10.9:1 también se supone como típica. La expresión del desplazamiento y del pistón, referenciada como BDC (con ω constante para el cigüeñal), es

$$y = \left(r\cos\theta + l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\theta\right)^2} \right) - l + r \tag{b}$$

donde r = radio de la manivela, l = longitud de la biela y θ = ángulo del cigüeñal. Véase la referencia 1 para una deducción de la expresión entre paréntesis.

2. La combinación de tales funciones, con los rangos de presión asumidos y la constante de la ley de los gases, da la función aproximada de la presión p del cilindro como una función del ángulo de la manivela para los datos de este problema específico:

$$\text{Si } \pi \le \theta \le 2\pi \text{ entonces } p \cong 924\left(\frac{\theta-\pi}{\pi}\right)^6 - 792\left(\frac{\theta-\pi}{\pi}\right)^7 \text{ caso contrario } p \cong 0 \tag{c}$$

La función se ilustra en la figura D-2.* La fuerza F_g sobre el pistón y la cabeza del cilindro, debida a la presión del gas, es, entonces,

$$F_g = pA_p = \frac{\pi}{4} p d_p^2 \tag{d}$$

donde A_p es el área del pistón y d_p es el diámetro del pistón. Es la misma función mostrada en la figura D-2, multiplicada por una constante. Se muestra una segunda escala sobre la ordenada de la fuerza F_g dada del gas, además de la presión p del gas para el problema.

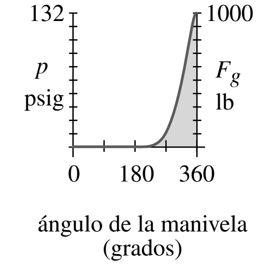


FIGURA D-2

Presión y fuerza dentro del cilindro durante un ciclo

3. El torque requerido para impulsar el cigüeñal del compresor tiene dos componentes, una por la fuerza del gas F_g y otra por las fuerzas inerciales F_i debidas a las aceleraciones.[1]

$$T = T_g + T_i$$

donde
$$T_g \cong F_g r \operatorname{sen}\theta\left(1 + \frac{r}{l}\cos\theta\right) \tag{e}$$

y
$$T_i \cong \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \left(\frac{r}{2l}\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta - \frac{3r}{2l}\operatorname{sen}3\theta\right)$$

La masa m se toma como la del pistón y el buje, más una porción de la biela (aproximadamente 1/3) que se considera que actúa sobre el pistón.[1] Cuando los datos del problema se sustituyen en (e), la función torque-tiempo es la que se indica en la figura D-3.*

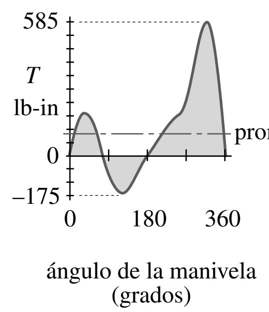


FIGURA D-3

Función total torque-tiempo de la manivela con ω constante

Las funciones fuerza-tiempo y torque-tiempo mostradas en las figuras D-2 y D-3, suponen que la rapidez del eje es esencialmente constante, lo cual es un supuesto razonable para la condición de estado constante, pues la rapidez del motor está regulada y tiene un volante para suavizar las oscilaciones por la rapidez. Tales funciones de fuerza y torque definen la carga que varía con el tiempo a la que estarán sometidos ejes, acoplamientos y engranes; son, por lo tanto, el punto inicial del diseño. Debido a la variación con el tiempo de las cargas, todas las piezas son sometidas a cargas de fatiga y hay que diseñarlas, considerando estas últimas, de acuerdo con las teorías estudiadas en los capítulos 4 y 5.

D.2 ESTUDIO DE CASO 9: MALACATE PARA PACAS DE PAJA

En Bellows Falls, Vermont, un granjero necesita un pequeño malacate para colocar pacas de heno en el desván de su establo. En la figura D-4 se ilustra un diseño conceptual preliminar. Un motor eléctrico está acoplado al tornillo sin fin, de un conjunto de engranes para reducir su rapidez y aumentar el torque adecuadamente. Se debe determinar la mejor razón de este conjunto de engranes. El eje de salida del conjunto de engranes fue acoplado al eje del tambor del malacate; además, ambas giran en cojinetes que también deben seleccionarse. El tambor sirve como malacate alrededor del cual se enreda un cable con un gancho forjado en su extremo. El montaje completo del malacate está suspendido de las vigas del techo del granero arriba de una ventanilla. Las pacas de paja se atan manualmente abajo y se retiran manualmente arriba. El motor eléctrico es reversible, mientras el conjunto sin fin y el engrane helicoidal se habrán de diseñar para que cierre en forma automática sosteniendo la carga cuando el motor está apagado.

El planteamiento del problema anterior no está estructurado, pues no brinda información acerca del tamaño y peso del malacate, ni el número de pacas de paja que se deberían levantar al mismo tiempo, para mayor eficiencia. Dichas consideraciones, combinadas con la elección del diámetro del tambor del malacate, determinarán los requerimientos del torque que el tren de transmisión tendrá que satisfacer. La carga de arranque puede ser significativamente más grande que la carga de levantamiento de esta-

* Las funciones de las figuras D-2 y D-3 se generaron con el programa ENGINE de la referencia 1.

D

do constante porque a la carga de choque, cuando se toma la paca de la línea y se levanta. La carga dinámica en el arranque se modelará mediante un resolvedor de ecuaciones diferenciales.

ESTUDIO DE CASO 9A

Diseño preliminar de un malacate

Problema — **Determine la función fuerza-tiempo en el cable del malacate, el diámetro del tambor y la función torque-tiempo que actúa sobre el eje del tambor del malacate durante 1 ciclo. Defina la razón del engrane, así como los requisitos de potencia y torque para el motor.**

Se proporciona — **El peso de las pacas de heno varía, lo que depende de la humedad que contengan, pero se supondrá un promedio de 60 lb. El malacate debe elevar 100 pacas, que al granjero le gustaría descargar en 30 minutos. La altura de levantamiento es de 24 ft.**

Supuestos — **La cuerda de nylon de 3/4 in de diámetro tiene una resistencia a la rotura mínima de 8 000 lb, aproximadamente, y una constante de resorte de aproximadamente 50 000 lb/in por pie de longitud a tensión axial.**

Solución — **Véase las figuras D-4 a D-6, así como los archivos CASE9-A**

1. La carga nominal depende del número de pacas que se levantarán al mismo tiempo, así como del peso de la estructura usada para soportar las pacas. Para descargar 100 pacas del malacate, una a la vez, en 30 minutos, se requiere una razón promedio por paca de 100/30 = 3.3 pacas/min, o bien, 18 segundos promedio por paca. En vista de que algo del tiempo se utilizará para regresar el malacate vacío al suelo, no se podrán usar los 18 segundos completos para elevar la carga. También hay que considerar un tiempo para la carga y la descarga manuales de las pacas en las partes superior e inferior. La porción del periodo total durante el cual trabaja el mecanismo se conoce como *ciclo de trabajo*. Suponga que se necesita 1/3 del periodo para la carga/descarga, 1/3 para el levantamiento,y 1/3 para el descenso. Esto da 6 segundos

D

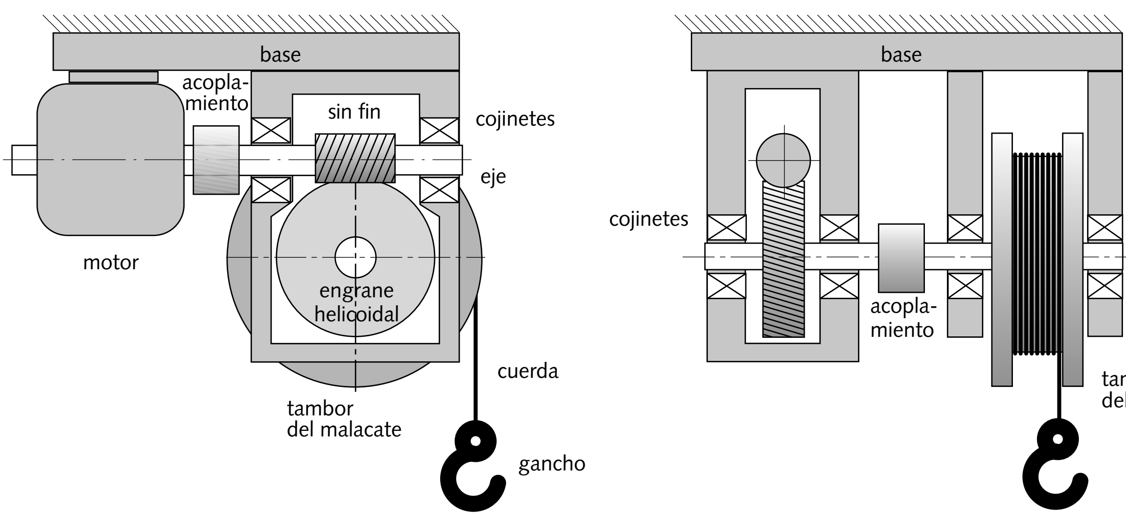


FIGURA D-4

Motor impulsor del cabrestante con conjunto de engranes, flechas, cojinetes y acoplamientos

por paca si sólo se levanta una a la vez. Entonces, la rapidez media del levantamiento debería ser de 24 ft/6 seg = 4 ft/seg. Parece que un mejor esquema sería levantar dos pacas a la vez. Esto duplica el periodo a 36 segundos, duplica el tiempo disponible para la elevación a 12 segundos, y disminuye a la mitad la rapidez media a 2 ft/seg, manteniendo aún el mismo ciclo de trabajo.

2. La carga útil con dos pacas sobre el malacate es de 120 lb. El peso muerto es el peso de la cuerda, el gancho y cualquier plataforma o estructura que se utilice para cargar las pacas. Como aún debe diseñarse la estructura, se desconoce su peso. Suponga que es posible mantener este peso muerto por debajo de 50 lb. La carga nominal total será entonces de 170 lb para la fase de levantamiento y de 50 lb para la fase de descenso.

3. Para estado estable, la carga sobre la cuerda debería ser el número anterior. Sin embargo, en el arranque, la carga puede ser significativamente mayor debido a la aceleración necesaria de la carga para alcanzar su velocidad de estado estable y también porque en el sistema hay tanto un resorte como una masa. La combinación de resorte y masa, en un sistema dinámico, causa oscilaciones conforme la energía cinética de la masa en movimiento se convierte en energía potencial en el resorte elástico y viceversa. El cable es un resorte. Cuando el cable estirado se levanta repentinamente contra la masa de la carga, la cuerda se estira, con lo que almacena energía potencial. Cuando la fuerza en la cuerda estirada es suficiente para mover la carga, acelerará la masa hacia arriba, incrementando su velocidad y transfiriendo la energía potencial del resorte a la energía cinética de la masa. Si la masa acelera lo suficiente, aflojará la cuerda nuevamente. Cuando la masa cae debido al aflojamiento, el ciclo se repite, de modo que, conforme arranca, la fuerza en la cuerda puede oscilar de cero a algún valor significativamente mayor que el de la carga nominal de estado constante. Para calcular la carga dinámica, se requiere resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento para el sistema.

4. La figura D-5*a* muestra un esquema simplificado de la porción del sistema dinámico que contiene la masa a levantar y el resorte del cable. La figura D-5*b* presenta el sistema modelado como el bulto de la masa soportada por un resorte y un amortiguador. La figura D-5*c* presenta un diagrama de cuerpo libre (FBD) de la masa sometida a su peso W, la fuerza del resorte F_s y la fuerza del amortiguador F_d. Si se aplica la segunda ley de Newton a este diagrama de cuerpo libre, da

$$\sum F = ma$$

$$F_s + F_d - W = \frac{W}{g}\ddot{y}_2 \qquad (a)$$

donde

$$F_s = k(y_1 - y_2)$$
$$F_d = c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \qquad (b)$$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

cuando $t = 0$ $\quad y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = v_0, \quad y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 0 \qquad (c)$

por lo que $\quad F_s(0) = 0, \quad F_d(0) = 0 \qquad (d)$

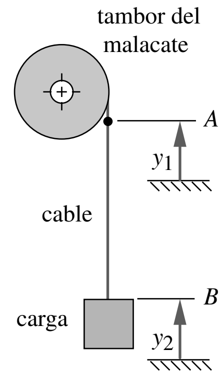
$$m\ddot{y}_2 = k(y_1 - y_2) + c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - W$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{1}{m}\left[k(y_1 - y_2) + c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - W\right]$$

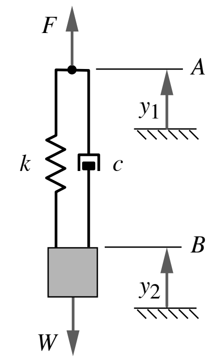
Haciendo $\dot{y}_1 = v$, $y_1 = vt$

entonces

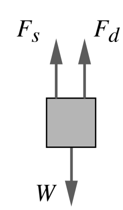
$$\ddot{y}_2 = \left[\frac{k}{m}(vt - y_2) + \frac{c}{m}(v - \dot{y}_2) - g\right] \qquad (e)$$



(*a*) Sistema dinámico



(*b*) Modelo con masa



(*c*) Diagrama de cuerpo libre

FIGURA D-5

Sistema dinámico, modelo con masa y diagrama de cuerpo libre de la cuerda del cabrestante

5. Las constantes de la ecuación se definen como sigue:

$$v = 24\,\frac{\text{in}}{\text{seg}}$$

$$W = 170\text{ lb}, \qquad m = \frac{W}{g} = \frac{170}{386} = 0.44\ \frac{\text{lb - seg}^2}{\text{in}} \tag{f}$$

$$k = 50\,000\ \frac{\text{lb/in}}{\text{ft}}\Big/ 24\text{ ft} = 2\,083\ \frac{\text{lb}}{\text{in}}$$

El amortiguamiento crítico c_c se calcula fácilmente a partir de los valores conocidos de la masa y la constante del resorte. El sistema sólo está ligeramente amortiguado por la fricción interna del cable. Se supondrá que su razón, entre amortiguamiento real y amortiguamiento crítico, *z*, es de alrededor del 10% (0.1), lo cual se utiliza para determinar el valor de amortiguamiento de la ecuación (*e*).

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2(0.44)\sqrt{\frac{2\,083}{0.44}} = 61\ \frac{\text{lb - seg}}{\text{in}}$$

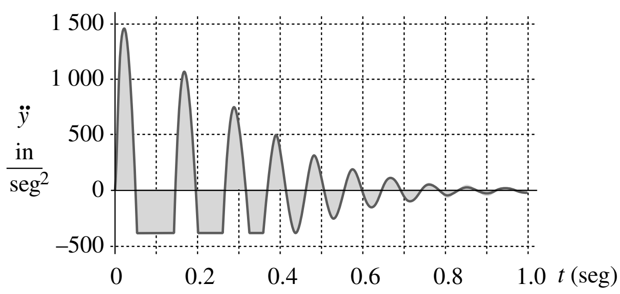
$$c = \zeta c_c = 0.10(61) = 6.1\ \frac{\text{lb - seg}}{\text{in}} \tag{g}$$

$$\frac{c}{m} = \frac{6.1}{0.44} = 14$$

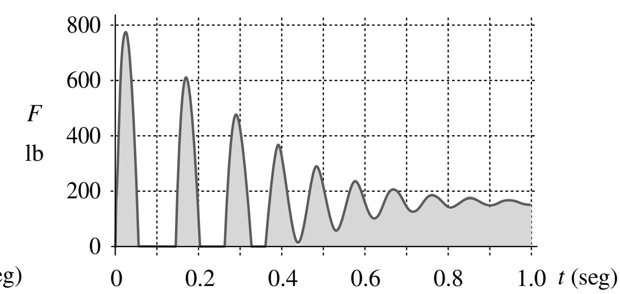
6. La ecuación (*e*) se resolvió con el paquete de simulación ASDEQ.* La aceleración de la carga durante el primer segundo de operación se muestra en la figura D-6*a*. La aceleración hacia abajo (por la gravedad) se toma como negativa. Observe los periodos de aceleraciones negativas (con un valor límite de $-g$), durante los cuales la carga cae libremente y el cable se afloja sin tensión. En la figura D-6*b* se indica la fuerza en el cable durante el primer segundo de operación. Observe que la fuerza de tensión se eleva arriba de cuatro veces la carga nominal en la primera oscilación y, después, cae hasta cero conforme el cable se afloja, pues no puede soportar la fuerza de compresión. El patrón se repite durante tres ciclos y, en ese punto, el amortiguamiento ha reducido la oscilación hasta el punto en que el cable se encuentra siempre en tensión. Tras aproximadamente 10 ciclos, toma el valor de la carga nominal.

7. El torque requerido para impulsar el eje del tambor depende justamente de las cargas dinámicas calculadas y del diámetro del tambor seleccionado. Un diámetro muy pequeño causará esfuerzos y desgaste altos sobre el cable. Un diámetro grande del tambor incrementará tanto el torque requerido como el tamaño del paquete. Un cable de 3/4 de pulgada de diámetro puede envolver haces de alrededor de 20 in de diámetro. Como $T = Fr$, el torque necesario sobre el eje será 10 veces la tensión en la cuerda (usando in-lb) y tendrá las mismas variaciones en el tiempo, como se muestra en la figura D-6*b*.

* *Automatic Solution of Differential Equations*, de Mayor Abram Jack y Mayor James D. Brown, U.S. Military Academy West Point, N.Y. Observe que el paquete está disponible en la U.S.M.A. y se incluye en este texto.



(*a*) Aceleración de la carga



(*b*) Fuerza dinámica en el cable

FIGURA D-6

Aceleración y fuerza del cable en el levantamiento de la carga

8. La potencia promedio necesaria se obtiene fácilmente a partir del cambio de energía potencial durante el tiempo deseado. Para elevar 24 pies una carga de 170 lb en 12 seg, se requiere

$$P = \frac{170 \text{ lb } (24 \text{ ft})}{12 \text{ seg}} = 340 \frac{\text{ft - lb}}{\text{seg}} = 0.62 \text{ hp} \tag{h}$$

   Como hay pérdidas en el tren de engranes y en el malacate, se necesitará una potencia de entrada más grande que ésta; digamos, un hp para el primer intento. Es deseable mantenerla en este nivel o por debajo de él, pues los motores con más caballos de potencia requieren un voltaje mayor de 110 V.

   Esta potencia promedio se basa en la carga nominal. La carga pico del arranque requiere más potencia. En vez de definir el motor de acuerdo con la carga de arranque transitoria, otro procedimiento es dar suficiente efecto al volante del sistema para obtener el pulso transitorio de energía y pasar a la fase de arranque. Es posible que la inercia giratoria del tambor y el engrane helicoidal proporcionen el efecto al volante suficiente, suponiendo que el malacate tiene la rapidez adecuada antes de que el cable se tense.

9. La velocidad angular promedio del tambor se determina a partir de la velocidad lineal promedio requerida en el cable, la cual es de 2 ft/seg. En un tambor de 10 in de radio esto da

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{24 \text{ in/seg}}{10 \text{ in}} = 2.4 \text{ rad/seg} \cong 23 \text{ rpm} \tag{i}$$

10. Los motores eléctricos de corriente alterna de 60 Hz se fabrican con sólo unas cuantas velocidades de rotación estándar, las más comunes de las cuales son de 1 725 rpm y 3 450 rpm. Tales velocidades se deben a las velocidades síncronas de frecuencia de línea de 1 800 rpm y 3 600 rpm, menos un deslizamiento en los motores asíncronos. Para minimizar la razón de engrane en el conjunto sin fin, hay que elegir la menor de las dos rapideces estándar, es decir, 1 725 rpm. Lo anterior da la razón de engrane deseada de 23:1 725 o 1:75. Dicha razón se obtiene con un estado de combinación sin fin-volante, y así es posible.

11. Para resumir los parámetros determinados en el estudio de diseño preliminar, se intenta elaborar un sistema con un motor eléctrico de 110 V AC, 1 hp y 1 725 rpm que impulse un conjunto de engranes sin fin con una reducción de 1:75 que, a la vez, impulse el tambor de 20 in de diámetro del malacate a 23 rpm. Una cuerda de 3/4 in enredada en el malacate alrededor del tambor, un gancho forjado sujeto a la plataforma que no pesen más de 50 lb y soportes estables para dos pacas de heno de hasta 60 lb cada una, lo que constituye un conjunto de especificaciones para las tareas para nuestro diseño.

El problema, sin estructura inicial, ahora tiene algo de estructura que sirve como un punto de inicio para el diseño más detallado de varios componentes. Algunos componentes del estudio de caso se examinarán en capítulos subsiguientes, cuando se presenten temas relevantes como ejes, engranes, cojinetes, etcétera. Observe que aunque la carga es relativamente estable con el tiempo en este dispositivo, las oscilaciones en el arranque y en ciclos de uso repetido hacen un problema de diseño contra la fatiga, como sucede prácticamente con cualquier máquina. Las piezas son sometidas a cargas de fatiga y se deben diseñar de acuerdo con ello, mediante las teorías estudiadas en los capítulos 4 y 5.

D.3 ESTUDIO DE CASO 10: MÁQUINA DE PRUEBA DE LEVAS

Se necesita una máquina que mida las características dinámicas de las levas. La máquina debe ser dinámicamente silenciosa, tener deflexiones mínimas y dar una velocidad de rotación prácticamente constante, pero ajustable frente a las variaciones de la carga del torque

en las levas. Hay que incluir los instrumentos necesarios para medir las fuerzas dinámicas y las aceleraciones del sistema leva-seguidor. El ensamble de 1 in de elevación del probador de levas se pacta con el cliente para ajustar adecuadamente la máquina de pruebas. Los perfiles de las levas están definidos. La velocidad de rotación debe ser tan alta como sea posible, pero sin provocar saltos del seguidor. Las levas se tienen que sustituir rápida y fácilmente en la máquina. Las levas funcionarán en un baño de aceite que debe estar contenido dentro de la máquina.

El anterior también es un planteamiento sin estructura del problema que deja al diseñador gran libertad respecto de la solución. Además, se intentará vincular el problema con hipótesis y cálculos preliminares, con la finalidad de alcanzar un diseño más detallado.

ESTUDIO DE CASO 10A

Diseño preliminar de un dispositivo para pruebas dinámicas de una leva (CDTF)

Problema **Defina un diseño conceptual preliminar que satisfaga las restricciones generales del problema mencionado arriba. Determine la función fuerza-tiempo que actúa sobre el seguidor y la función torque-tiempo sobre el eje de la leva, durante un ciclo cualquiera. Defina la razón de transmisión, así como los requisitos de potencia y torque para el motor.**

Se proporciona **Las levas de cuatro intervalos de reposo tienen un diámetro mínimo de 6 in y máximo de 8 in. La elevación es de 1 in. El rodillo seguidor mide 2 in de diámetro. Las levas operan a 180 rpm. En la figura D-7 se muestra la forma de la leva.**

Supuestos **Se deben utilizar cojinetes planos en todas partes, en vista de que los cojinetes con elementos rodantes introducen mucho ruido. Se usará un motor de corriente directa de velocidad controlada.**

Solución **Véase las figuras D-7 a D-13.**

1. En la figura D-8 se ilustra el diseño preliminar. El eje de la leva fue acuñada para recibir un cono para ajustar la leva. Esto elimina el empleo de cuñeros, los cuales suelen causar vibración y ruido al invertir el torque. La leva está sujeta axialmente al eje para una ubicación concéntrica. Un pasador de espiga con un radio grande asegura la leva al cubo para iniciar en una posición de cero. Dicho arreglo permite la remoción e instalación rápidas de la leva cuando se cambia.
2. Se sujeta un volante al eje de la leva para modular las oscilaciones de la rapidez durante las variaciones del torque. El volante también sirve como polea para una banda plana, que viene desde una polea impulsora más pequeña del motor, con la finalidad de reducir adecuadamente la velocidad del eje de la leva.
3. El brazo del seguidor se pivota a 12 in desde el eje de la leva y transporta un seguidor comercial de rodillo, que corre sobre un cojinete plano. Un resorte espiral de tensión carga el rodillo del brazo del seguidor contra la leva. El resorte se debe comprimir y remover al reemplazar una leva y luego retensarse para la nueva leva. La cubierta, que se pivota en el brazo del seguidor, aplica tensión al resorte cuando se cierra y la libera cuando se abre.
4. Se instalan acelerómetros y transductores de fuerza sobre y entre el pivote del rodillo y el brazo del seguidor, para medir los parámetros deseados.
5. Todo el montaje se encuentra sobre una base con estructura de caja que lo soporta, le proporciona rigidez y también contiene una cámara de aceite de libre acceso alrededor de la leva. La base puede estar soportada por ruedas, para efectos de movilidad,

D

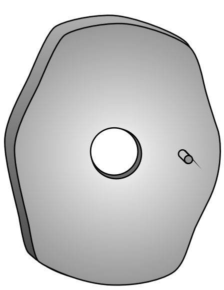


FIGURA D-7

Leva de cuatro intervalos de reposo

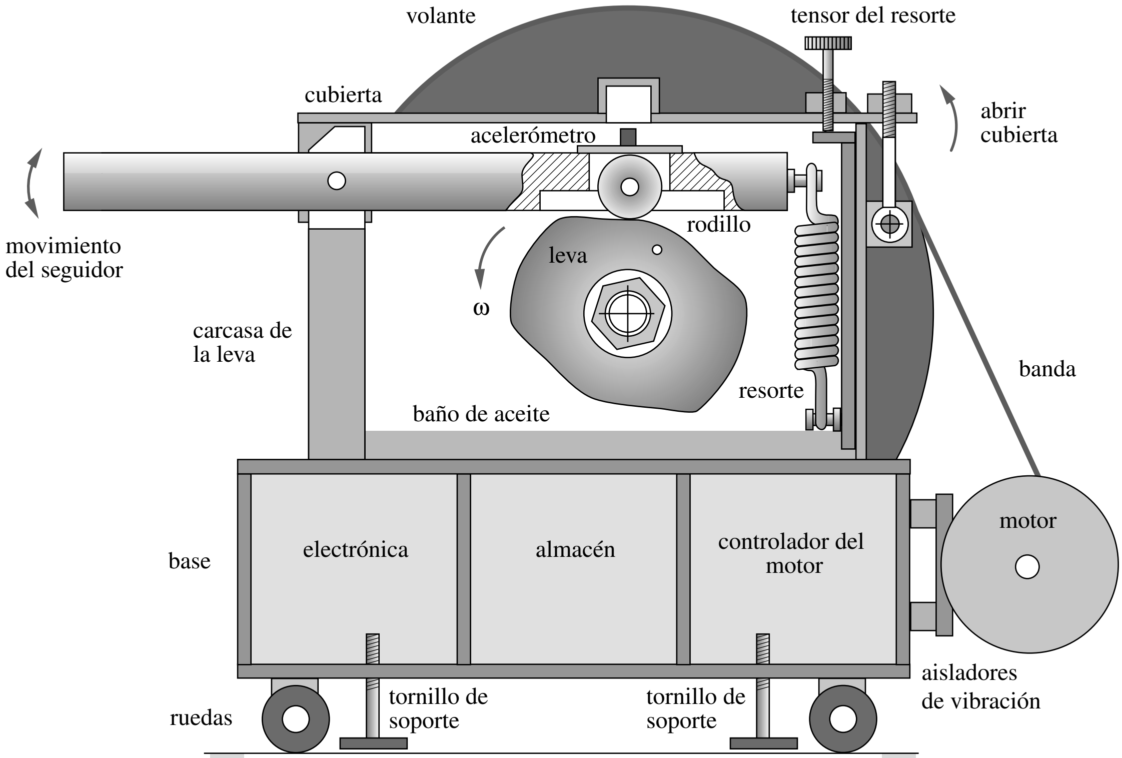


FIGURA D-8

Dispositivo de prueba de la dinámica de una leva; esquema de diseño general

o sobre soportes fijos, para efectos de estabilidad. El motor se montó a la base sobre aisladores de hule contra vibración. La electrónica para el control y la instrumentación del motor se encuentra dentro de la base.

6. El diseño de la leva, junto con su velocidad de giro, determinan las dimensiones y formas de aceleración del brazo del seguidor. En la figura D-9 se muestra la función seguidor-aceleración, generada con el programa DYNACAM.[2] La función de aceleración, multiplicada por la masa efectiva del seguidor, es una componente de la fuerza dinámica necesaria para los cálculos de esfuerzo. El sistema dinámico de la leva y el seguidor se pueden modelar como un sistema lineal, de un solo grado de libertad, con parámetro concentrado, como se ilustra en la figura D-10. El movimiento de la línea central del rodillo sobre el brazo giratorio del seguidor es realmente un arco, pero el arco es bastante plano en este diseño debido a la longitud del radio del brazo. El error es mínimo al asumir que el movimiento del rodillo es lineal en su corta trayectoria. Una porción de la masa en movimiento del seguidor se considera integrada al rodillo, de modo que son dinámicamente equivalentes. A partir de la segunda ley de Newton, la ecuación diferencial del sistema integrado de la figura D-10 es[3]

$$\sum F = ma$$

$$F(t) - F_d - F_s = m\ddot{y}$$

donde $F_d = c\dot{y}, \quad F_s = ky + F_{pl}$

y
$$F(t) = m\ddot{y} + c\dot{y} + \left(ky + F_{pl}\right) \tag{a}$$

D

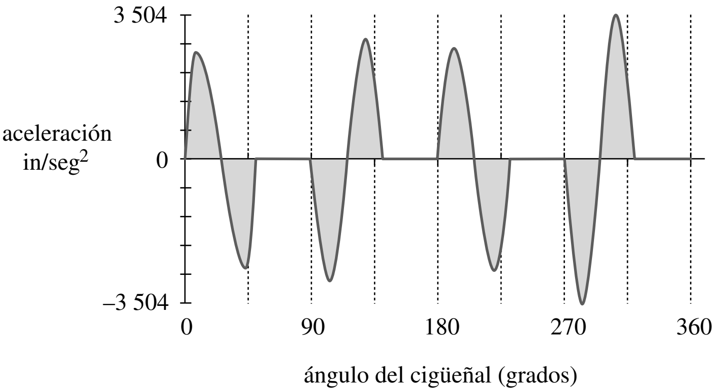


FIGURA D-9

Función de aceleración de la leva durante 1 ciclo

La fuerza del resorte F_s tiene dos componentes. La constante del resorte k, multiplicada por la deflexión y, se suma a cualquier fuerza inicial F_{pl}, creada por precarga del resorte en la instalación. La fuerza de amortiguamiento F_d es proporcional a la velocidad por el coeficiente de amortiguamiento c.

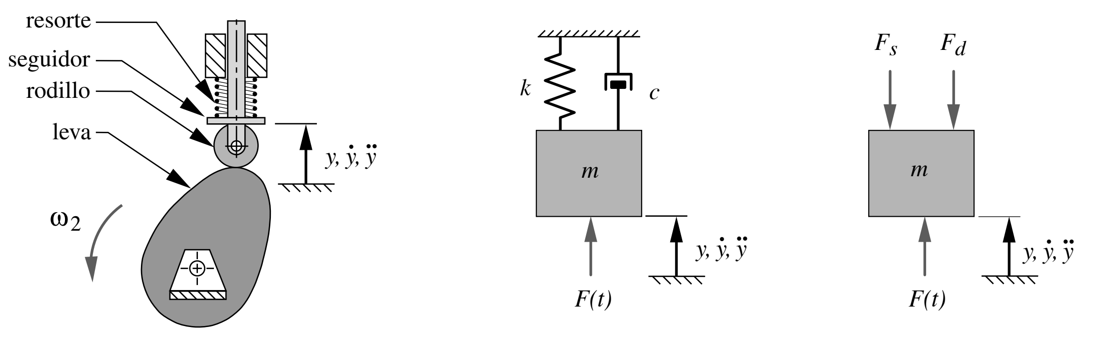
7. La ecuación (a) se resuelve cinético-estáticamente en este caso, ya que hay una velocidad angular constante y el desplazamiento (y), la velocidad ($\dot{y}$) y la aceleración ($\ddot{y}$) son funciones definidas por el tiempo. El valor de m dependerá del diseño del brazo del seguidor y cualquier cosa sujeta a él al moverse, como el rodillo. Algunas veces, el valor del factor c de amortiguamiento es difícil de pronosticar, en tanto que el modo usual para estimar su valor consiste en definir una razón de amortiguamiento ξ esperada para el tipo de sistema y calcular el amortiguamiento a partir de

$$c = 2\zeta m \omega_n$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (b)$$

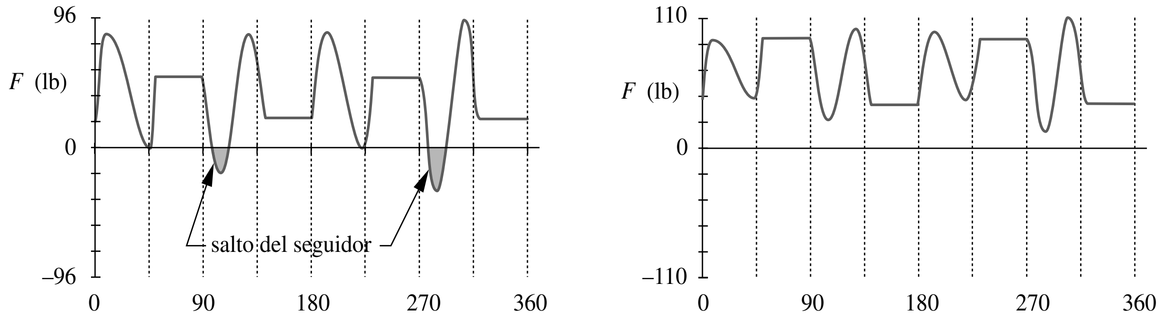
Koster[4] descubrió que el valor típico de ξ para los sistemas leva-seguidor es de aproximadamente 0.06. El término ω_n es la frecuencia natural no amortiguada del sistema.



(*a*) Sistema físico (*b*) Modelo concentrado (*c*) Diagrama de cuerpo libre

FIGURA D-10

Sistema linealizado leva-seguidor



(*a*) La fuerza insuficiente del resorte hace saltar el seguidor

(*b*) La fuerza suficiente del resorte mantiene positiva la fuerza dinámica

FIGURA D-11

Fuerza dinámica entre la leva y el seguidor de la leva

El valor de la constante *k* del resorte está bajo el control del diseñador, al igual que la cantidad de precarga del resorte F_{pl}. Más adelante se diseñará un resorte adecuado para el sistema que dé los valores adecuados de tales variables. Observe que no se podrá calcular numéricamente la carga dinámica sobre el sistema, sino hasta que haya diseños preliminares de las partes en movimiento para definir sus masas. En ese punto, se definieron una *k* y una F_{pl} del resorte deseadas, luego se intentará diseñar un resorte viable que proporcione dichos valores.

8. Para una masa dada, la razón de amortiguamiento y la función de aceleración, así como la elección de *k* y F_{pl} determinarán si el seguidor saltará por fuera de la leva durante la caída. La figura D-11*a* muestra el efecto sobre la fuerza dinámica $F(t)$ de una combinación demasiado pequeña de *k* y F_{pl}. El área sombreada resalta las porciones donde la fuerza dinámica es negativa. Una junta leva-seguidor no puede entregar una fuerza (de tensión) negativa, como la cuerda del estudio de caso anterior que soporta una fuerza de compresión. Por lo tanto, la constante del resorte y la precarga deben incrementarse en alguna combinación, hasta que la función de fuerza dinámica sea positiva a lo largo del ciclo, como se indica en la figura D-11*b*.

9. Para este estudio de caso se definirá la geometría del seguidor-brazo, como se muestra en la figura D-12. Es un sólido de aluminio de 2 × 2.5 in de sección transversal rectangular, extendido internamente alrededor del seguidor por causa del espacio.

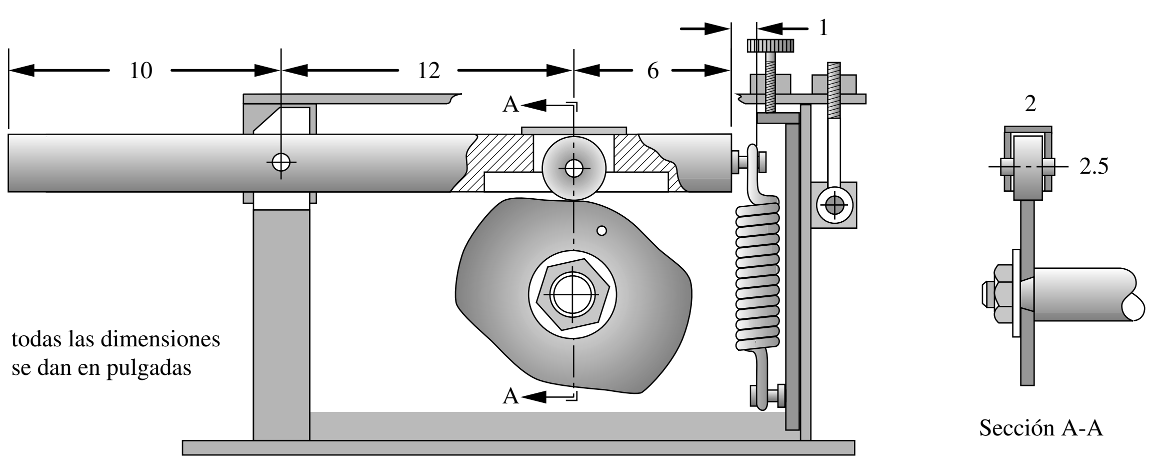


FIGURA D-12

Dimensiones del brazo del seguidor de la leva

La distancia del pivote al rodillo seguidor es de 12 in con una extensión de 10 in más allá del pivote para efectos de equilibrio. Se extiende 6 in más allá del rodillo seguidor para sujetar el resorte. La masa efectiva del brazo del seguidor reflejada en la línea central del rodillo, más la masa del rodillo y su pivote, es de 0.02 lb-seg^2/in. Con este valor de masa efectiva, la aplicación de una constante de resorte en el extremo del brazo de k = 25 lb/in y una precarga del resorte F_{pl} = 25 lb (lo cual se traduce a valores efectivos de k = 56.25 y F_{pl} = 37.5 lb en el seguidor), se logra la función de fuerza dinámica mostrada en la figura D-11*b*. La fuerza dinámica pico es de 110 lb y la fuerza mínima es de 13 lb **en el seguidor de la leva**. La deflexión en el resorte es de 1.5 in.

10. El torque en el eje de la leva se obtiene a partir de[5]

$$T(t) = \frac{F(t)\dot{y}}{\omega} \qquad (c)$$

En la figura D-13 se muestra tal función de torque para los valores supuestos. El torque máximo es de 176 in-lb y el mínimo es de -204 in-lb. El torque promedio es de 7 lb-in.

11. El volante de acero sólido tiene 24 in de diámetro y 1.88 in de espesor. Su momento de inercia de masa es I = 44 blob-in^2. El coeficiente de fluctuación C_f del volante se determina integrando la función torque-tiempo de la figura D-13, pulso por pulso, para obtener la oscilación máxima de energía E durante un ciclo. Dicha integración se hizo numéricamente con el programa DYNACAM[2] y dio E = 3 980 in-lb de energía durante un ciclo. Entonces, el coeficiente de fluctuación es[6]

$$C_f = \frac{E}{I\,\omega^2} = \frac{3\,980}{44(18.85)^2} = 0.25 \qquad (d)$$

A pesar del tamaño y el peso relativamente grandes (220 lb) del volante, sólo reduce un 75% el torque pico debido a que su velocidad angular es demasiado baja. Para ser efectivo, el volante necesita más velocidad, o bien, una masa muy grande. El torque máximo con el volante se reduce a 47 in-lb y el torque mínimo es ahora de −48 in-lb. El torque promedio permanece sin cambio en 7 lb-in. La forma de la función del torque es la misma de la figura D-13, con dicha reducción de los valores pico.

12. La potencia promedio requerida es muy baja (aproximadamente 0.02 hp); no obstante, es necesario especificar el tamaño del motor al manejar el torque pico para mantener la rapidez constante requerida. Con el valor pico del torque con el volante

D

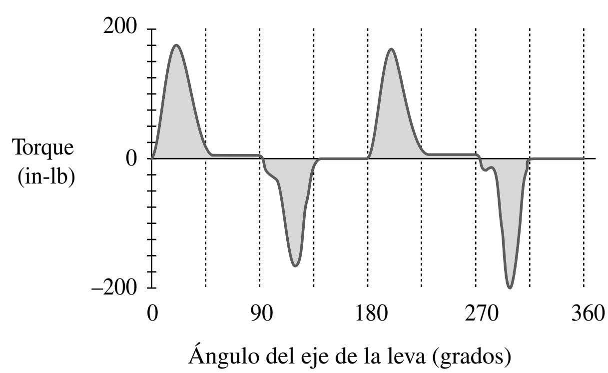


FIGURA D-13

Torque del eje de la leva sin volante

y el eje de la leva a la velocidad de operación da como resultado un nivel de potencia mínima de

$$P_{pico} = T_{pico}\,\omega = 47 \text{ lb - in}\left(18.9\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right) = 888\frac{\text{in - lb}}{\text{seg}} = 74\frac{\text{ft - lb}}{\text{seg}} = 0.14 \text{ hp} \qquad (e)$$

Como las pérdidas por fricción fueron burdamente estimadas en este caso y otras levas operarán a mayores rapideces, se eligió un motor de corriente directa de velocidad controlada de 1/2 hp para impulsar el eje de la leva. Lo anterior requiere una potencia de 110 V de corriente alterna para el controlador del rectificador de rapidez del motor.

13. Se necesita seleccionar una razón de velocidad para el impulsor de banda desde el motor al volante. Como el motor tiene una rapidez controlada en un intervalo de operación de 0 a 1 800 rpm, se permitirá un intervalo de rapideces de operación mayor que el común por dicha leva en particular, la cual requiere 180 rpm. Un intervalo de 0 a 400 rpm es razonable, pues esto pondrá al motor a la mitad de su intervalo de velocidad para la leva y facilitará a otras levas correr más rápido o más lento. El diámetro de la polea impulsora es, entonces, de

$$d_{int} = d_{ext}\,\frac{\omega_{ext}}{\omega_{int}} = 24\frac{400}{1\,800} = 5.33 \text{ in} \qquad (f)$$

14. Los archivos del estudio de caso se encuentran en el CD-ROM y se designan como CASE10.

Quedan muchos detalles pendientes para lograr un diseño final, pero tales cálculos preliminares indican que el diseño propuesto es factible. Para una información más detallada sobre el modelado de la dinámica de la leva en este estudio de caso, consulte el apéndice C y el capítulo 11 de la referencia 1. En los capítulos posteriores de este texto se continuará el estudio de varios aspectos del caso, conforme se relacione con temas subsecuentes como el diseño de los cojinetes y del resorte.

D.4 RESUMEN

El apéndice presentó cálculos del diseño preliminar de algunos estudios de caso de máquinas relativamente sencillas. La intención es incorporar estudios adicionales de dichos casos en capítulos subsiguientes, que tratarán el diseño de elementos comunes a una amplia gama de maquinaria. El espacio no permite un tratamiento completo de todos los detalles de diseño que hay en cualquiera de los estudios de caso, pero se espera que su presentación brinde alguna comprensión de la manera en que el diseño debe integrar una amplia variedad de requerimientos –que con frecuencia son conflictivos– para obtener un producto funcional.

Al final del apéndice se listan varios proyectos de diseño abierto, los cuales se pueden utilizar como proyectos de tarea a largo plazo de un estudiante o de un equipo de trabajo. Incluso, subconjuntos de los proyectos de diseño sugeridos servirían como tareas de diseño para varias semanas.

D.5 REFERENCIAS

1. **R.L. Norton**, *Design of Machinery,* 3a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, pp. 645-661, 2004.
2. ***Ibid.***, pp. 794-808.
3. ***Ibid.***, pp. 742-743.
4. **M.P. Koster**, *Vibrations of Cam Mechanisms*. McMillan: Londres, 1974.

5. **R.L. Norton**, *Design of Machinery,* 3a. ed., McGraw-Hill: Nueva York, p. 750, 2004.
6. ***Ibid.***, p. 591.

D.6 PROYECTOS DE DISEÑO

Estos problemas a gran escala no tienen estructura de manera deliberada, pero son problemas reales frecuentes de ingeniería. De hecho, la mayoría de ellos son problemas reales. Pueden tener muchas soluciones válidas. Mientras que algunos de esos problemas fueron "inventados" para el apéndice, la mayoría provienen de la experiencia como consultor del autor o de proyectos importantes asignados a sus estudiantes en el Instituto Politécnico de Worcester y completados por ellos. En los últimos casos, los proyectos se ejecutaron normalmente por equipos de 2 a 4 estudiantes durante tres o cuatro periodos de estudio (de 21 a 28 semanas), los que a menudo dieron como resultado un prototipo funcional de la solución. Las versiones de tales proyectos definidas aquí se simplificaron o redujeron, con la intención de hacerlas factibles de solucionar por un equipo de alumnos durante un solo curso de estudio. Los problemas de consultoría, asimismo, se abreviaron para adaptar la estructura y el tiempo disponibles de un curso típico de diseño introductorio o avanzado. Algunos de los proyectos enunciados aquí han sido utilizados exitosamente por el autor como proyectos de largo plazo en el curso para el que se propone este texto.

D-1. Complete el diseño del compresor portátil de aire del estudio de caso 8-A. Observe que algunas piezas del diseño se analizan en capítulos posteriores.

D-2. Complete el diseño del malacate en el estudio de caso 9-A. Advierta que algunas piezas del diseño se analizan en capítulos subsiguientes.

D-3. Complete el diseño de la máquina de pruebas de levas en el estudio de caso 10-A. Observe que algunas piezas del diseño se analizan en capítulos posteriores.

D-4. Los estudios de caso 5A y 5B del capítulo 1 describen el diseño de una máquina demostradora de cuatro barras. Complete el diseño detallado con base en la información dada en esos estudios de caso. Algunos aspectos que no se tratan ahí son el tamaño del tren de engranes para reducir la rapidez del motor, los cojinetes, el torque de acoplamiento, el volante y los esfuerzos.

D-5. Diseñe la cortadora de troncos más segura con las siguientes características:

- Capaz de remolcarse a altas velocidades detrás de una camioneta *pick up* de tamaño estándar.
- Un motor de gasolina de 8 hp impulsa una bomba hidráulica de dos etapas que, a la vez, presuriza un cilindro hidráulico para cortar el tronco.
- Que aloje un tronco de 2 pies de longitud.
- Que genere 15 ton de fuerza sobre el tronco contra una cuña estacionaria de corte.
- Que tenga una jaula de seguridad que cubra el área tronco/cuña/cilindro durante el corte para prevenir lesiones al operador. La jaula se desliza (manualmente) hacia afuera de la trayectoria de carga/descarga de los troncos y está interconectada de tal manera que debe ubicarse en el sitio antes de que se mueva el cilindro hidráulico.

D-6. Diseñe una cápsula de inspección que bajará por un pozo petrolero a una profundidad de 5 000 pies. La cápsula debe ajustarse a un orificio de 6 in de diámetro con, al menos, 10% de tolerancia diametral; debe tener un sujetador adecuado para bajarla por cable y un portalentes de cuarzo de 1.5 in de diámetro en la pared lateral. Un cable para potencia y comunicación de 0.5 in de diámetro pasa a través del extremo superior del cilindro. Algunas preocupaciones del diseño son la presión hidrostática a esa profundidad y la naturaleza abrasiva de las paredes rocosas del orificio del pozo, así como la integridad hidráulica de los sellos alrededor del portalentes y del cable de potencia. La cápsula tiene en su interior una atmósfera de nitrógeno seco a 800 psig. Diseñe para una vida finita de por lo menos 1*E*4 inserciones/extracciones en el pozo.

D-7. Diseñe un carrito de compras motorizado, impulsado por baterías, capaz de transportar a una persona de 200 lb más 50 libras de abarrotes por los pasillos de un supermercado. Debe transportar, por lo menos, la mitad del volumen de artículos comestibles de un carrito manual convencional, tener una rapidez limitada, estar seguro contra volcaduras y requerir presión constante sobre su control para caminar (es decir, un interruptor para "hombre muerto"). Cuando la corriente se corte, un freno automático debería detenerlo dentro del siguiente 1 ft de distancia. Los posibles usuarios son compradores mayores o enfermos. Tiene que funcionar durante 1 hora entre recargas.

D-8. La figura PD-1 muestra la geometría y las dimensiones de un sistema de suspensión trasero para una conocida motocicleta todo-terreno. La rueda es transportada al final del eslabón 4, el cual forma parte de un mecanismo de cuatro barras 1-2-3-4, donde 1 es la estructura de la moto, 2 es el balancín triangular y 3 es un acoplador binario que conecta 2 a 4. La riostra de choque 5 se pivota en el eslabón 2 y se desliza hacia el cilindro de choque 6. El cilindro de choque 6 se pivota en la estructura 1. El viaje vertical total del eje trasero es de 12 in aproximadamente.

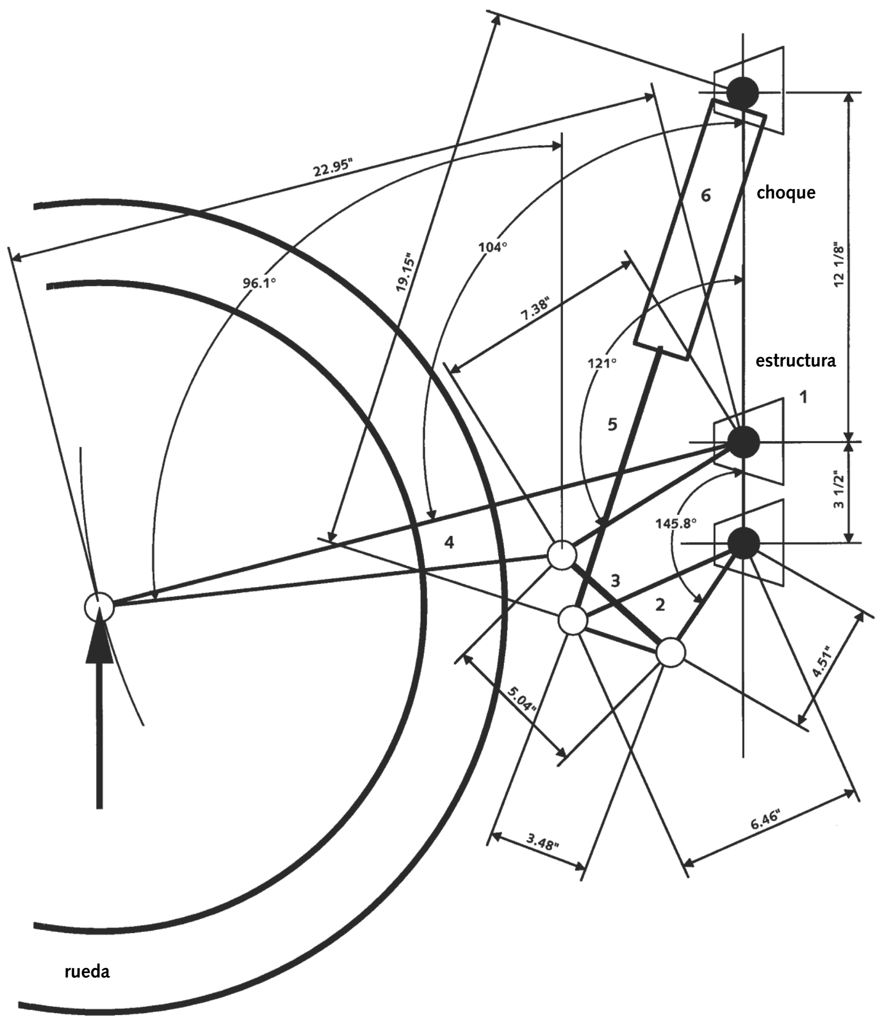


FIGURA PD-1

Geometría del sistema de suspensión de la rueda trasera de una motocicleta todo-terreno

D

La figura PD-2 muestra el resultado de una simulación dinámica de una motocicleta de 250 lb con un conductor de 200 lb que viaja a 18 mph, salta 3 ft verticalmente y aterriza sobre la rueda trasera.* Las gráficas de la figura PD-2 indican la fuerza dinámica resultante en el eje trasero y en el pivote del eslabón 4. Diseñe el sistema de suspensión trasero con base en los datos de carga y geometría proporcionados. Algunas preocupaciones de diseño son la riostra de choque como columna, los pernos del pivote sometidos a corte y los pernos en flexión más compresión o tensión en algunos momentos. Es valioso revisar un sistema de suspensión de una motocicleta similar para obtener información adicional sobre el diseño general.

D-9. Las motocicletas todo-terreno tienen normalmente impulsores de cadena-catarina dentada del eje de salida de la transmisión a la rueda trasera. Algunas motos de campo traviesa utilizan ejes de transmisión encerradas y engranes impulsores, en

* Tal simulación se realizó con el paquete de software *Working Model* de *Knowledge Revolution*.

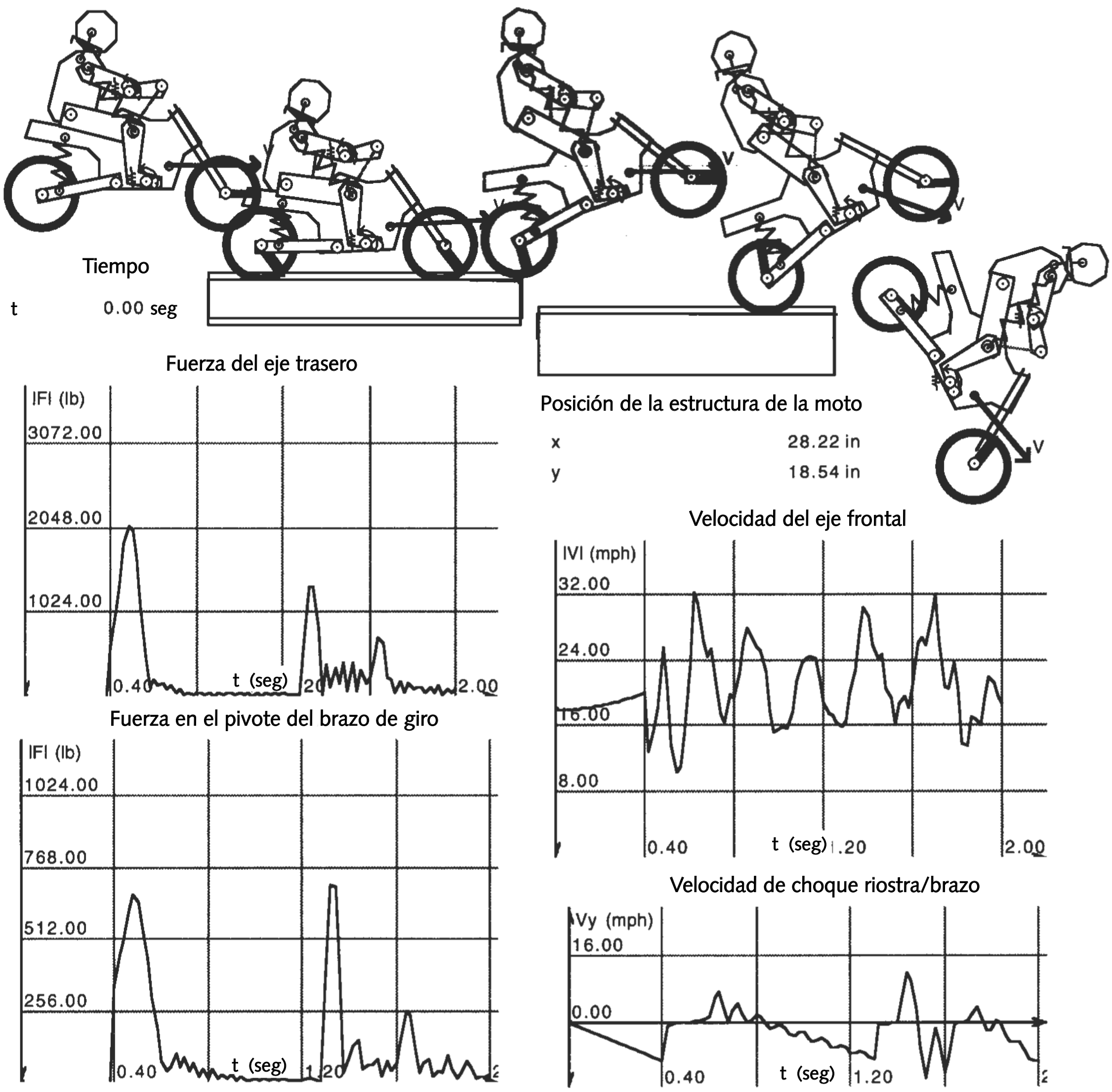


FIGURA PD-2

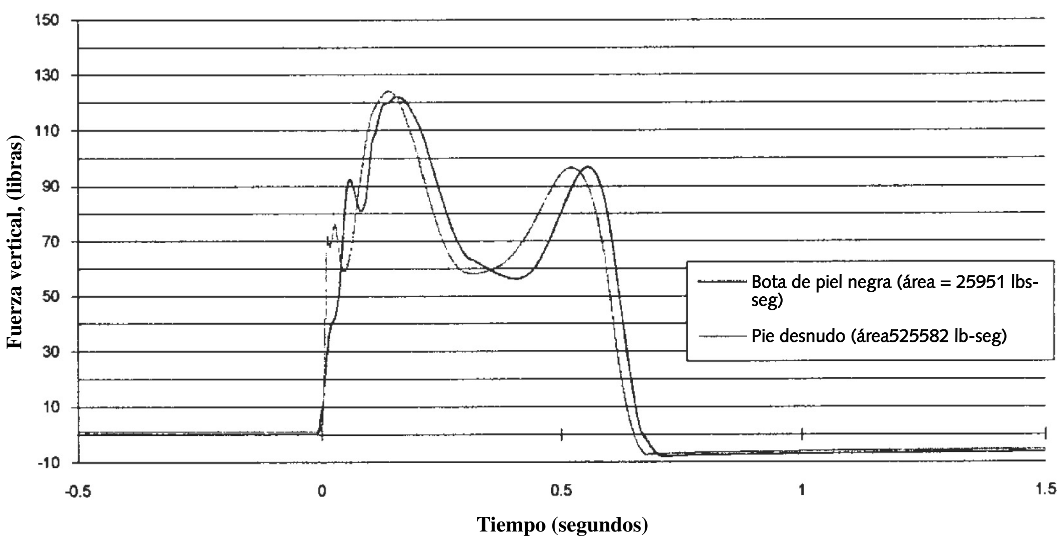
Simulación de fuerzas generadas por una motocicleta que salta y aterriza sobre su rueda trasera

D

vez de cadenas y catarinas. La ventaja del impulso con una cadena es su peso ligero; sin embargo, la exposición al polvo y al barro de la conducción a campo traviesa reduce su confiabilidad. Los ejes conductores encerrados fueron protegidos contra los elementos. Diseñe un sistema eje-impulsor ligero para la motocicleta todo-terreno de las figuras PD-1 y PD-2. Suponga un motor de 60 hp a 9 000 rpm. El engrane pequeño de la transmisión tiene una razón de 1:4, mientras la razón de impulso final del eje de salida de la transmisión a la rueda trasera debería ser aproximadamente de 1:3.5. Se necesita por lo menos una junta universal en el eje de impulso para tomar en cuenta el movimiento de la suspensión. Se requiere una combinación de engranes rectos (o helicoidales) y engranes cónicos. Habrá que especificar los cojinetes, las carcasas y los sellos adecuados. Será valioso revisar un sistema de suspensión de una motocicleta similar para obtener información adicional sobre su diseño general.

D-10. El ejército desea una máquina para probar la durabilidad de las botas de combate. Dicha máquina debe imitar, lo más cercanamente posible, la geometría y las fuerzas generadas de un soldado típico que camina con las botas de combate, como se indica en la figura PD-3. Debe repetir tal movimiento un número ilimitado de ciclos, hasta que la piel de las botas se rompa. La bota se ajustará a una prótesis del pie sujeta a la máquina de pruebas. Diseñe la máquina para vida infinita.

(*a*)



(*b*)

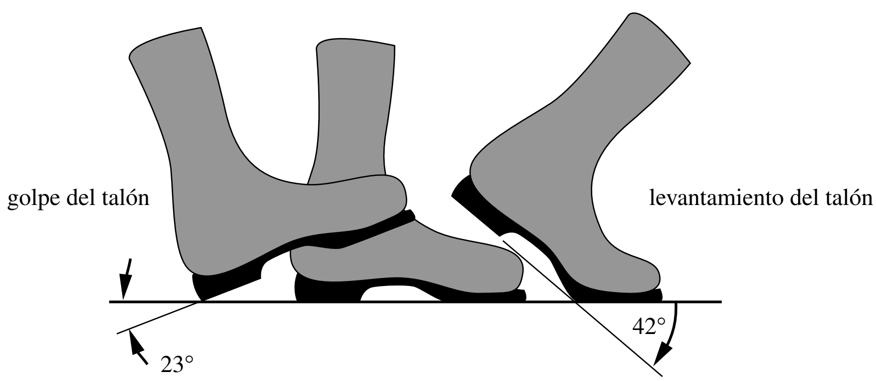


FIGURA PD-3

Fuerzas (*a*) y geometría (*b*) de la caminata normal



FIGURA PD-4

Dos parachoques de uretano contra sacudidas que se usan en los sistemas de suspensión automotriz

D-11. Una compañía que fabrica parachoques moldeados de uretano contra sacudidas, como los mostrados en la figura PD-4, requiere una máquina de pruebas que impacte repetidamente estos parachoques para determinar su durabilidad. En la figura PD-5 se muestra la fuerza-deflexión estática característica de un parachoques unitalla. El concepto sugerido es una maza que impacte el parachoques. Se necesita un mecanismo de reinicio para izar y dejar caer repetidamente el peso. Se debe hacer un análisis dinámico para determinar el tamaño y el peso del mazo para comprimir completamente el parachoques especificado.

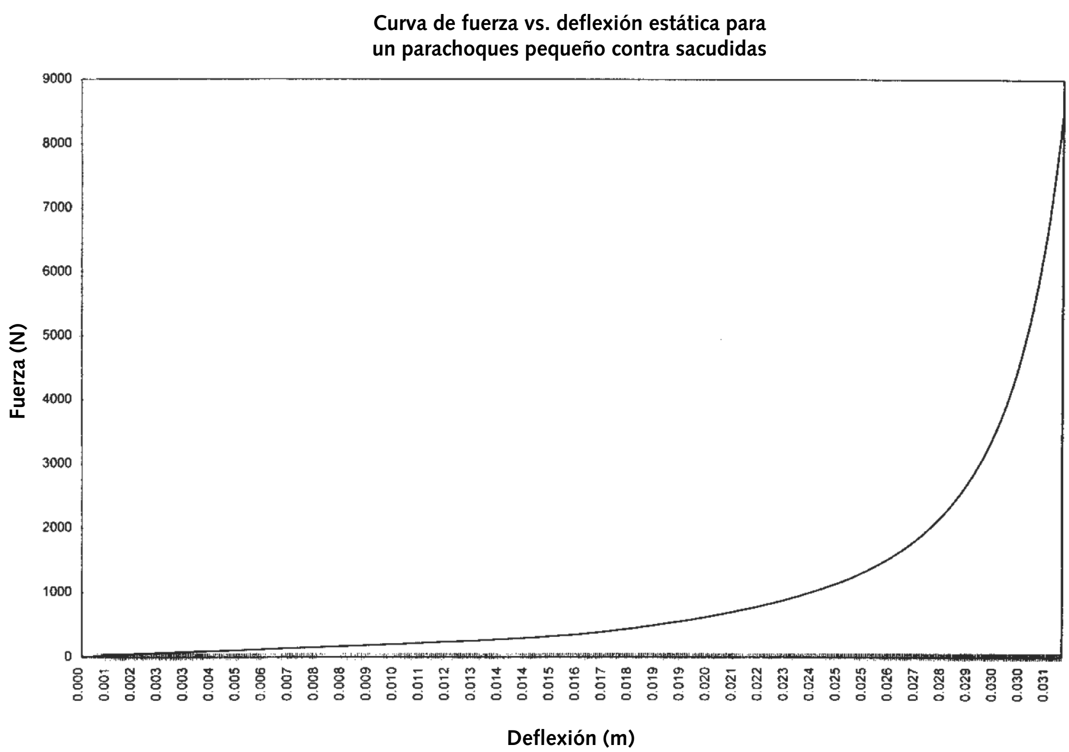


FIGURA PD-5

Curva de fuerza-deflexión estática de un parachoques de uretano, de talla única, contra sacudidas

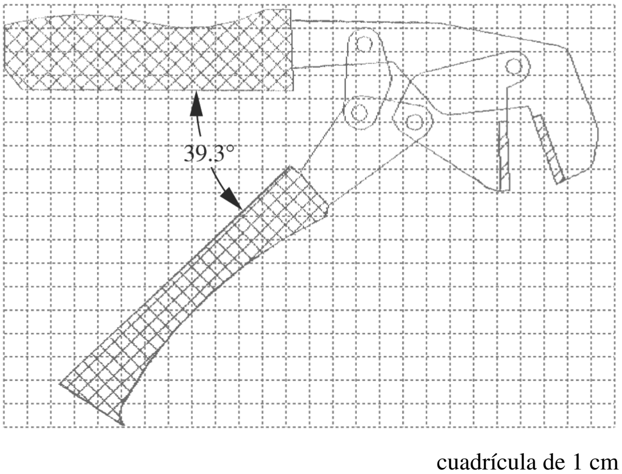


FIGURA PD-6

Geometría de las pinzas de presión

D-12. Las pinzas de presión mostradas en la figura PD-6 se utilizan para doblar (ceder) conectores en un alambre. El alambre se inserta en el conector (que no se muestra); después, los dos se ponen dentro de las mandíbulas de las pinzas de presión y se aprietan los mangos. En el estudio de caso 2, se analizaron las fuerzas, los esfuerzos y los factores de seguridad de una herramienta similar con un diseño ligeramente diferente. La figura PD-7 muestra los datos de las medidas de la herramienta en la figura PD-6, mientras dobla el alambre más grande. Las fuerzas que se requieren en los mangos son bastante grandes. La medida de las distancias entre los mangos se

Ángulo entre los mangos (grad)	Torque, lb_f-in	Distancia entre mangos, in	Fuerza, lb
39.3	0	2.89	0
24.4	49.17	1.89	11.84
22.3	73.27	1.74	17.36
20.9	97.53	1.63	22.89
19.7	122.01	1.54	28.42
18.7	146.62	1.46	33.95
17.8	171.38	1.40	39.47
16.5	220.91	1.30	50.52
15.1	271.10	1.19	61.57
13.7	321.77	1.08	72.63
12.6	372.41	1.00	83.68
11.2	423.77	0.89	94.73
9.5	475.78	0.75	105.79
8.0	502.66	0.64	111.32
7.6	528.12	0.60	116.84
5.5	580.52	0.43	127.89
4.8	606.27	0.39	133.42
0.8	653.34	0.06	143.29

FIGURA PD-7

Datos de la fuerza y torque-desplazamiento de unas pinzas de presión

hace en un radio de 4.56 in. El uso manual repetido de tal herramienta a estos niveles de fuerza trae consigo problemas físicos, como el síndrome del túnel carpiano. Al fabricante le gustaría un dispositivo que cree mecánicamente la fuerza requerida sobre los mangos de la herramienta actual para eliminar el uso manual y evitar tales lesiones. Algunas de las restricciones definidas para dicho dispositivo son las siguientes:

a) No debe ser mayor que 12 in × 4 × 6 in.
b) Autosuficiente, incluyendo un cargador de energía portátil.
c) Que pese menos de 10 lb.
d) Que requiera sólo el uso de una o las dos manos de una persona.
e) Que ejecute una conexión en menos de 10 seg.
f) Tener capacidad para manejar un ángulo máximo de 40° y una separación entre mangos de 7 in.

D-13. Se necesita una base rodante, motorizada, para una máquina de rayos X portátil, como la mostrada en la figura PD-8. La cabeza de rayos X pesa 65 lb y tiene 10 in × 8 in × 16 in de alto. La cabeza debe ajustarse con un motor en un intervalo vertical de 41 a 82 in medido a partir del piso, hasta el brazo en voladizo de 18 in de largo, del cual está suspendida la cabeza de rayos X. La cabeza tiene que atravesar su desplazamiento vertical máximo en 20 segundos o menos y detenerse cuando mucho a 0.5 in de la ubicación deseada. Interruptores restrictivos tienen que apagar automáticamente el motor en cada extremo del viaje vertical de la cabeza. La base debe pasar a través de una puerta interior estándar de un hospital de 3 ft × 7 ft y operar en un circuito de 15-A, 110-V de corriente alterna. También es necesario cumplir ciertas especificaciones de Underwriters Laboratories (UL) como:

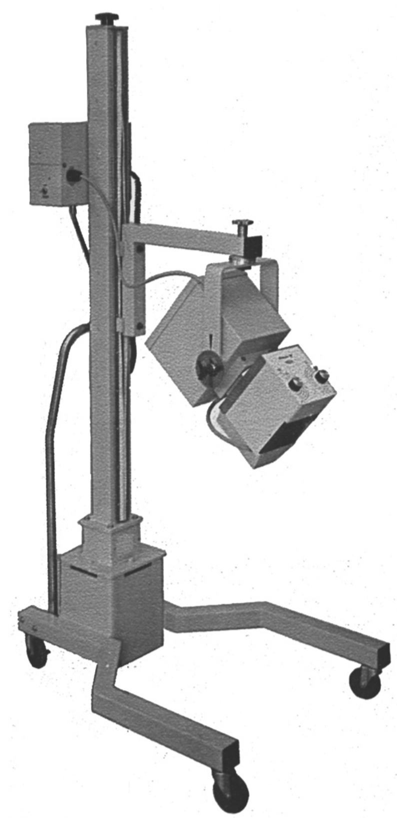


FIGURA PD-8
Soporte de rayos X motorizado, portátil, rodante

- UL27.4-A 3/4 no debe ladearse a más de 10° de inclinación con la cabeza en su posición inferior.
- UL27.4-B 3/4 no debe ladearse a más de 5° de inclinación con la cabeza en su posición superior.
- UL27.4-C 3/4 no debe ladearse a más de 0° de inclinación cuando una fuerza horizontal del 25% de su peso se aplica en la manija de transporte.

D-14. Diseñe una caja de volteo para modernizar una camioneta *pick up* de tamaño estándar. El dispositivo debería exigir modificaciones mínimas de la camioneta y tener capacidad de activación remota desde la cabina. Debe levantar y vaciar hasta 3/4 de toneladas de carga. Obtendrá su energía del motor de la camioneta y podrá impulsarse eléctrica, mecánica o hidráulicamente, o cualquier combinación.

D-15. Diseñe un dispositivo elevador de sillas de ruedas para operar en un garaje residencial. El piso del garaje está 1 m por debajo del piso principal de la casa. El dispositivo debería bajar o subir con seguridad la silla de ruedas y su ocupante de 100 kg a través de esa distancia vertical.

D-16. Diseñe un dispositivo para transferir con seguridad un paciente parapléjico de 100 kg de la cama a una silla de ruedas, y viceversa. El paciente tiene buena resistencia en la parte superior del cuerpo, pero no controla las extremidades inferiores. Su diseño debería ser operable por el paciente con asistencia mínima. La seguridad es la preocupación fundamental.

D-17. Diseñe una bicicleta de ejercicio para uso en interiores, similar en concepto al dispositivo de entrenamiento para un corredor en silla de ruedas del problema 4-48. La idea es suministrar rodillos gemelos para soportar la rueda trasera y un solo rodillo para la rueda delantera. Los rodillos traseros estarán sujetos de manera cinemática (por diseñarse) a un generador de corriente directa, cuya salida se puede maniobrar a través de una corriente eléctrica que se modifica al gusto del conductor para dar resistencia dinamométrica. Diseñe todas las piezas con las geometrías y los materiales adecuados para vida infinita.

D-18. Diseñe un soporte para dar servicio a una motocicleta todo-terreno que le permita quedar suspendida a una altura de trabajo conveniente, así como girar para facilitar el acceso a todos los sistemas duraderos. La estabilidad en todas las posiciones de giro y la consideración de varios estados parciales de desarmado, son las preocupaciones fundamentales.

D-19. Los extremos de las lámparas de luz fluorescente se deben recubrir con óxido de estaño mientras está caliente. Los tubos rectos de vidrio de 46 in de largo son transportados a través de un horno muy caliente por una cadena metálica transportadora, que viaja a una velocidad constante de 5 500 bulbos por hora. Las lámparas están separadas 2 in sobre la cadena. Conforme salen del horno a 550°C, un mecanismo que lleva dos cabezas rociadoras sigue un par de bulbos, acelera para igualar su velocidad constante, viaja con ellas una corta distancia y rocía el óxido de estaño hacia las lámparas calientes durante 3/4 de segundo. Las dos cabezas rociadoras están montadas sobre una mesa rectangular de 6 in $\times$ 10 in que es transportada sobre cojinetes lineales. El equipo rociador atornillado a la mesa pesa 10 lb. Todos los elementos expuestos al óxido de estaño deben ser de acero inoxidable para resistir el ataque químico del ácido clorhídrico derivado del rocío.

Una leva impulsa la mesa para igualar la velocidad de la banda transportadora y la regresa a tiempo para alcanzar los siguientes dos bulbos. Se ha diseñado una leva a partir de una placa para realizar dicha acción y está definida en el archivo SPRAY.CAM incluido en el disco que viene con este texto. El archivo se trabaja con el programa DYNACAM (también incluido en el disco), con la finalidad de obtener los datos necesarios de dinámica para el diseño requerido. La leva es impulsada por la rueda dentada de la banda transportadora que tiene un diámetro de paso de 8.931 in.

Lo que se solicita es el diseño detallado de la mesa de los rociadores, sus cojinetes y el soporte de montaje para vida infinita. Las cargas dinámicas sobre la leva y el seguidor dependen en gran medida de la masa del montaje móvil. Una vez que se obtiene un estimado de la masa móvil de su diseño preliminar, se utiliza el programa DYNACAM para calcular rápidamente las fuerzas dinámicas en el punto de contacto leva-seguidor. Los esfuerzos de las diferentes partes del montaje se estiman entonces con base en el nivel de las fuerzas dinámicas presentes. Para información sobre el uso del programa DYNACAM, consulte la referencia 2.

D-20. En una maquinaria de producción en línea impulsada por una flecha, las deflexiones por torsión y las vibraciones del cigüeñal, debidas al torque variable en el tiempo sobre las diferentes levas, pueden causar problemas de sincronización entre las diferentes estaciones de la máquina. Se necesita diseñar una máquina de pruebas que mida los efectos de la vibración por torsión de la carga dinámica del torque sobre el árbol de levas. La máquina dará cabida a dos levas, cada una de las cuales conducirá su propio rodillo seguidor, que traslada la carga del resorte a un mecanismo de deslizamiento a rapideces de hasta 300 rpm.

Las levas se diseñarán para darse entre sí funciones aproximadamente opuestas de torque-tiempo. De tal manera se pueden utilizar individualmente, o en pareja, para indagar la conveniencia de agregar a la máquina de producción una leva con una carga de pantalla para equilibrar el torque. Las levas serán abiertas para permitir su remoción e instalación, sin desarmar el árbol. Las funciones torque-tiempo y seguidor-fuerza-tiempo de la leva principal se incluyen en el archivo de Excel P09-20 en el CD-ROM. La leva secundaria será una imagen de espejo de la leva principal, con la finalidad de equilibrar aproximadamente el torque.

El árbol de levas en esta máquina de pruebas se debe diseñar para tener deflexiones por torsión lo suficientemente grandes para ser medidas por un codificador giratorio óptico, de 5 000 conteos por revolución, sujeto en cada extremo del árbol de levas, aunque no tan grandes como para que el árbol falle a la fatiga. Al mismo tiempo, se quiere que el árbol de levas sea rígido a la flexión y tenga una frecuencia natural de flexión de, por lo menos, 10 veces su frecuencia natural a la torsión para minimizar los efectos de acoplamiento entre los modos de flexión y de torsión. Dicho de otra manera: ¿qué diámetro del árbol dará las deflexiones suficientes a la torsión para medirlas bajo las condiciones de carga diseñadas sin crear desviaciones de flexión o vibración indeseables?

Se deben usar cojinetes planos para evitar las vibraciones que se generarían por los cojinetes de los elementos rodantes. La máquina de pruebas será impulsada por un motor de magnetos permanentes de corriente directa de velocidad controlada, a través de un conjunto de engranes de reducción de su propio diseño. La selección del motor también es su responsabilidad.

Lo que se necesita es un diseño detallado de una máquina de pruebas de vibración, por torsión del árbol de levas, que incluya árbol de levas, cuñas, trenes del seguidor, cojinetes, acoplamientos, transmisiones, estructura y montaje. Se desea una vida infinita.

D-21. Nuestro cliente (una compañía de *Fortune 500*) fabrica productos pare el consumidor en cantidades muy altas. Tales productos contienen piezas y ensambles de plástico moldeado, algunos de los cuales se hacen en máquinas de inyección de "dos disparos". Una pieza de dos disparos requiere un dado giratorio y dos conjuntos de cavidades por cada pieza en el dado. La primera porción de la pieza terminada se moldea con el material A con el dado en la posición 1. Luego se abre el dado y una mitad se gira 180° a la posición 2, con la parte moldeada todavía en su cavidad. El dado se cierra de nuevo, colocando la porción I de la parte contra la segunda cavidad. Entonces se inyecta el material B a la porción I, creando la porción II de la parte. El dado se abre otra vez y se expulsa el ensamble terminado.

Nuestra tarea es diseñar el mecanismo giratorio del dado sujeto a la máquina de moldeo y a la cual se le pueden fijar cualquier número de dados diferentes. El dado más grande que habrá de alojarse es de 910 mm de alto por 700 mm de ancho por 326 mm de largo, a lo largo de su eje de rotación horizontal. Suponga que el dado es un bloque de acero sólido. El dado se atornillará a una placa giratoria del diseño (de usted) que es impulsada por un servomotor para llevar a cabo el giro requerido. Debe girar 180° en 0.8 segundo. Luego la placa permanecerá estacionaria una cantidad variable de tiempo (0.5 a 2 seg, dependiendo del ciclo de moldeo de la pieza), después de lo cual otra vez girará 180° en 0.8 segundo. Entonces el ciclo se repite. La máquina de moldeo operará 24 horas diarias, siete días a la semana, 50 semanas al año. No se permiten fallas del mecanismo por un periodo de por lo menos 10 años.

Cuando el dado está colgado sobre la placa giratoria, ésta no debe flexionarse más de 0.001 pulgadas (0.025 mm), ya sea en dirección vertical o en dirección axial en ningún punto de la cara del dado. Las vibraciones del dado se deberían minimizar al detenerse para evitar retrasos en el cierre del molde. La longitud del montaje en dirección axial se debería mantener tan pequeña como sea práctica. El movimiento de apertura/cierre del dado será máximo de 25 mm. Un cilindro hidráulico dará el movimiento axial.

La rotación estará impulsada por un servomotor a través de un conjunto de reducción de engranes de su diseño. Se pueden utilizar cojinetes planos o con elementos rodantes. La especificación de torque/potencia del motor es también su responsabilidad, así como la especificación del tamaño y la potencia requeridos del cilindro hidráulico, con la finalidad de obtener el movimiento axial en el tiempo especificado. El torque dinámico dependerá del momento de inercia de masa del sistema y del perfil supuesto de la aceleración aplicada al servomotor por su controlador. Suponga un perfil de aceleración razonable con base en una buena práctica de diseño de la leva.

Lo que se requiere es un diseño detallado de una máquina giratoria de moldeo que incluya placa giratoria, ejes, cuñas, tren de engranes, cojinetes, acoplamientos, estructura y elementos del montaje (sujetadores).

D-22. Se necesita un banco de pruebas de trenes de engranes motorizado e instrumentado, para usarlo en demostraciones y experimentación. El dispositivo visualizado consiste en un motor eléctrico impulsado por un conjunto de engranes, el cual a la vez es cargado por un freno. Se introducen deliberadamente defectos en los dientes de los engranes para generar vibraciones que se logren medir. El dispositivo estará instrumentado y hecho para detectar y diagnosticar los defectos a partir de los datos de vibración medidos.

Diseñe un dispositivo que no requiera más de 1 hp de potencia de entrada y no sea más grande que un cubo de 3 ft. Un conjunto de engranes simple de razón 1:2 debería estar soportado en cojinetes enfundados e impulsados por un motor eléctrico de rapidez controlada, cuyas vibraciones están aisladas del conjunto de engranes.

D-23. Se necesita un banco de pruebas con instrumentos y motorizado, con cojinetes (de bolas) de elementos rodantes, para usarse en demostraciones y experimentos. El dispositivo visualizado consiste en un eje impulsado por un motor eléctrico, la cual se carga a la vez con un freno. Se introducen defectos deliberadamente en los cojinetes de bolas para producir vibraciones que se puedan medir. El dispositivo estará instrumentado, así como hecho para detectar y diagnosticar los defectos a partir de los datos medidos.

Diseñe un dispositivo que no requiera más de 1 hp de potencia de entrada y no más grande que un cubo de 3 ft. Se utilizará un solo cojinete de bolas de tamaño conveniente. Todos los demás cojinetes tienen que estar enfundados para evitar la introducción de ruidos falsos. El dispositivo será impulsado por un motor eléctrico de rapidez controlada, cuya vibración está aislada del eje del cojinete.

D-24. Una compañía que fabrica maquinillas para afeitar necesita probarlas contra daños al caer desde una altura de 1.5 m en superficies duras, como el piso de azulejos de un baño. La maquinilla, que incluye la cabeza y el mango, pesa 20 g. Cuando la maquinilla cae golpea el piso en una orientación aleatoria. Algunas orientaciones causan más daños que otras. Es difícil repetir el experimento cuando las maquinillas se dejan caer manualmente sobre el piso. A la empresa le gustaría una máquina que simule la caída de la maquinilla para afeitar real sobre una superficie dura de una altura de 1.5 m, pero que permita que la orientación del rastrillo en el momento de impacto sea la misma durante cada prueba. Lo anterior se debe llevar a cabo sin restringir la maquinilla excesivamente para recrear lo más que sea posible las condiciones limitantes de impacto "libre-libre" de la maquinilla que cae. Sin embargo, la orientación del impacto tiene que ser ajustable para permitir la simulación de diferentes orientaciones de impacto. Ajustes de ±40 grados alrededor de cada eje son suficientes. Diseñe un aparato que imparta la misma energía de impacto a la maquinilla mientras se encuentra en una caída real, el cual le permita rebotar en la superficie de impacto, pero golpear sólo una vez. El aparato debe permitir que el evento sea filmado con una cámara de video de alta rapidez.

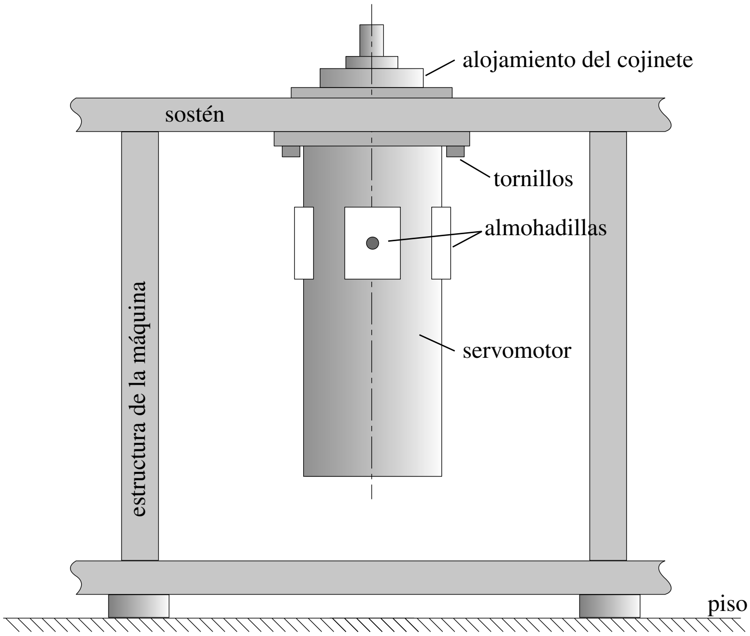


FIGURA PD-9

Instalación de un servomotor

D-25. Una máquina utiliza varios servomotores grandes que están atornillados debajo del sostén de la máquina, como se ilustra en la figura PD-9. El lado de abajo del sostén está a 30 pulgadas del piso y los motores tienen 24 in de largo con una protuberancia del eje de 2 in desde la parte superior. Los motores pesan 300 lb y tienen 12 in de diámetro. Diseñe un mecanismo que pueda transportar un motor del almacén a la máquina a través del piso plano de la fábrica, colocarlo bajo el sostén de la máquina, levantarlo a su lugar y sostenerlo en posición mientras un mecánico lo atornilla. El motor tiene una cabeza piloto de 6 in de diámetro que debe entrar en un orificio del sostén y un pasador de espiga que también entra en un orificio del sostén. Hay una tolerancia de 0.002 in entre la cabeza piloto y el orificio, así como de 0.001 in entre el pasador de espiga y el orificio, de manera que el motor se alinee exactamente con los orificios cuando es elevado a su posición por el mecanismo. El motor tiene cuatro almohadillas con orificios roscados en su centro de gravedad que se utilizan para sujetar el motor a su mecanismo.

Apéndice E

PROPIEDADES DE MATERIALES

Las siguientes tablas contienen valores aproximados para resistencias y otras especificaciones de varios materiales de ingeniería recopilados de varias fuentes. En algunos casos, los datos son los valores mínimos recomendados; en otros, corresponden a un espécimen de prueba individual. Estos datos son adecuados para usarlos en los ejercicios de ingeniería contenidos en este texto; sin embargo, no se deberían considerar representaciones estadísticas válidas de especificaciones para cualquier aleación o material en particular. El diseñador tendría que consultar a los fabricantes de materiales para obtener información, más precisa y actualizada, acerca de las resistencias de los materiales utilizados en aplicaciones de ingeniería, o bien, realizar pruebas independientes con los materiales seleccionados para determinar su idoneidad en alguna aplicación.

Existe mucha más información sobre propiedades de materiales en la Web. Algunos sitios son:

http://www.matweb.com
http://metals.about.com

Núm. de tabla	Descripción
E-1	Propiedades físicas de algunos materiales de ingeniería
E-2	Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de aluminio forjado
E-3	Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de aluminio fundido
E-4	Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de cobre forjado y fundido
E-5	Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de titanio
E-6	Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de magnesio
E-7	Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de hierro fundido
E-8	Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de acero inoxidable
E-9	Propiedades mecánicas de algunos aceros al carbono
E-10	Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de acero y acero para herramientas
E-11	Propiedades mecánicas de algunos plásticos de ingeniería

Tabla E-1 Propiedades físicas de algunos materiales de ingeniería

Datos de varias fuentes.* Estas propiedades son básicamente similares para todas las aleaciones del material específico

Material	Módulo de elasticidad E		Módulo de rigidez G		Razón de Poisson ν	Densidad de peso γ	Densidad de masa ρ	Gravedad específica
	Mpsi	GPa	Mpsi	GPa		lb/in^3	Mg/m^3	
Aleaciones de aluminio	10.4	71.7	3.9	26.8	0.34	0.10	2.8	2.8
Cobre al berilio	18.5	127.6	7.2	49.4	0.29	0.30	8.3	8.3
Latón, bronce	16.0	110.3	6.0	41.5	0.33	0.31	8.6	8.6
Cobre	17.5	120.7	6.5	44.7	0.35	0.32	8.9	8.9
Hierro, fundido, gris	15.0	103.4	5.9	40.4	0.28	0.26	7.2	7.2
Hierro, fundido, dúctil	24.5	168.9	9.4	65.0	0.30	0.25	6.9	6.9
Hierro, fundido, maleable	25.0	172.4	9.6	66.3	0.30	0.26	7.3	7.3
Aleaciones de magnesio	6.5	44.8	2.4	16.8	0.33	0.07	1.8	1.8
Aleaciones de níquel	30.0	206.8	11.5	79.6	0.30	0.30	8.3	8.3
Acero, carbono	30.0	206.8	11.7	80.8	0.28	0.28	7.8	7.8
Acero, aleaciones	30.0	206.8	11.7	80.8	0.28	0.28	7.8	7.8
Acero, inoxidable	27.5	189.6	10.7	74.1	0.28	0.28	7.8	7.8
Aleaciones de titanio	16.5	113.8	6.2	42.4	0.34	0.16	4.4	4.4
Aleaciones de zinc	12.0	82.7	4.5	31.1	0.33	0.24	6.6	6.6

* *Propiedades de algunos metales y aleaciones*, International Nickel Co., Inc., N.Y.; *Metals Handbook*, American Society for Metals, Materials Park, Ohio.

Tabla E-2 Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de aluminio forjado

Datos de varias fuentes.* Valores aproximados. Consulte a los fabricantes del material para mayor información

Aleación de aluminio forjado	Condición	Resistencia a la fluencia por tensión (0.2% de deformación remanente)		Resistencia última a la tensión		Resistencia a la fatiga en 5E8 ciclos		Elongación en 2 in	Dureza Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	-HB
1100	lámina recocida	5	34	13	90			35	23
	rolada en frío	22	152	24	165			5	44
2024	lámina recocida	11	76	26	179			20	-
	con tratamiento térmico	42	290	64	441	20	138	19	-
3003	lámina recocida	6	41	16	110			30	28
	rolada en frío	27	186	29	200			4	55
5052	lámina recocida	13	90	28	193			25	47
	rolada en frío	37	255	42	290			7	77
6061	lámina recocida	8	55	18	124			25	30
	con tratamiento térmico	40	276	45	310	14	97	12	95
7075	barra recocida	15	103	33	228			16	60
	con tratamiento térmico	73	503	83	572	14	97	11	150

* *Propiedades de algunos metales y aleaciones*, International Nickel Co., Inc., N.Y.; *Metals Handbook*, American Society for Metals, Materials Park, Ohio.

E

Tabla E-3 Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de aluminio fundido

Datos de INCO.* Valores aproximados. Consulte a los fabricantes del material para mayor información

Aleación de aluminio fundido	Condición	Resistencia a la fluencia por tensión (0.2% de deformación remanente)		Resistencia última a la tensión		Elongación en 2 in	Dureza Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	-HB
43	fundido en molde permanente—fundido	9	62	23	159	10	45
195	fundido en arena—fundido	24	165	36	248	5	-
220	fundido en arena—tratamiento térmico en solución	26	179	48	331	16	75
380	fundido a presión—fundido	24	165	48	331	3	-
A132	fundido en molde permanente—tratamiento térmico a más de 340 °F	43	296	47	324	0.5	125
A142	fundido en arena—tratamiento térmico a más de 650 °F	30	207	32	221	0.5	85

* *Propiedades de algunos metales y aleaciones*, International Nickel Co., Inc., Nueva York.

Tabla E-4 Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de cobre fundido y aleaciones de cobre forjado

Datos de INCO.* Valores aproximados. Consulte a los fabricantes del material para mayor información

Aleación de cobre	Condición	Resistencia de fluencia a la tensión (0.2% de deformación remanente)		Resistencia última a la tensión		Elongación en 2 in	Dureza Rockwell o Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	
CA110—Cobre puro	tira recocida	10	69	32	221	45	40HRF
	resorte revenido	50	345	55	379	4	60HRB
CA170—Cobre al berilio	tira recocida y madurada	145	1 000	165	1 138	7	35HRC
	duro y madurado	170	1 172	190	1 310	3	40HRC
CA220—Bronce comercial	tira recocida	10	69	37	255	45	53HRF
	resorte revenido	62	427	72	496	3	78HRB
CA230—Latón rojo	tira recocida	15	103	40	276	50	50HB
	duro y revenido	60	414	75	517	7	135HB
CA260—Latón de fontanería	tira recocida	11	76	44	303	66	54HRF
	resorte revenido	65	448	94	648	3	91HRB
CA270—Latón amarillo	tira recocida	14	97	46	317	65	58HRF
	resorte revenido	62	427	91	627	30	90HRB
CA510—Bronce al fósforo	recocido	19	131	47	324	64	73HRF
	resorte revenido	80	552	100	689	4	95HRB
CA614—Bronce al aluminio	blando	45	310	82	565	40	84HRB
	duro	60	414	89	614	32	87HRB
CA655—Bronce de alto silicio	recocido	21	145	56	386	63	76HRF
	resorte revenido	62	427	110	758	4	97HRB
CA675—Bronce al manganeso	blando	30	207	65	448	33	65HRB
	medio duro	60	414	84	579	19	90HRB
Bronce al plomo-estaño	fundido	19	131	34	234	18	60HB
Bronce al níquel-estaño	fundido	20	138	50	345	40	85HB
	fundido y tratamiento térmico	55	379	85	586	10	180HB

* *Propiedades de algunos metales y aleaciones*, Internacional Nickel Co., Inc., Nueva York.

Tabla E-5 Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de titanio

Datos de INCO.* Valores aproximados. Consulte a los fabricantes de material para mayor información

Aleación de titanio	Condición	Resistencia a la fluencia por tensión (0.2% de deformación remanente)		Resistencia última a la tensión		Elongación en 2 in	Dureza Rockwell o Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	
Ti-35A	recocida en lámina	30	207	40	276	30	135HB
Ti-50A	recocida en lámina	45	310	55	379	25	215HB
Ti-75A	recocida en lámina	75	517	85	586	18	245HB
Ti-0.2Pd Aleación	recocida en lámina	45	310	55	379	25	215HB
Ti-5 Al-2.5 Sn Aleación	recocida	125	862	135	931	13	39HRC
Ti-8 Al-1 Mo-1 V Aleación	recocida en lámina	130	896	140	965	13	39HRC
Ti-8 Al-2 Sn-4 Zr-2 Mo Aleación	recocida en barra	130	896	140	965	15	39HRC
Ti-8 Al-6 V-2 Sn Aleación	recocida en lámina	155	1 069	165	1 138	12	41HRC
Ti-6 Al-4 V Aleación	recocida en lámina	130	896	140	13	2.5	39HRC
Ti-6 Al-4 V Aleación	tratamiento térmico	165	1 138	175	1 207	12	–
T1-13 V-11 Cr-3 Al Aleación	recocida en lámina	130	896	135	931	13	37HRC
T1-13 V-11 Cr-3 Al Aleación	tratamiento térmico	170	1 172	180	1 241	6	–

* *Propiedades de algunos metales y aleaciones*, Internacional Nickel Co., Inc., Nueva York.

Tabla E-6 Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de magnesio

Datos de INCO.* Valores aproximados. Consulte a los fabricantes de material para mayor información

Aleaciones de magnesio	Condición	Resistencia a la fluencia por tensión (0.2% de deformación remanente)		Resistencia última a la tensión		Elongación en 2 in	Dureza Rockwell o Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	
AZ 31B	recocida en lámina	22	152	37	255	21	56HB
	lámina dura	32	221	42	290	15	73HB
AZ 80A	forjada	33	228	48	331	11	69HB
	forjada y madurada	36	248	50	345	6	72HB
AZ91A & AZ91B	fundida a presión	22	152	33	228	3	63HB
AZ91C	fundido	14	97	24	165	2.5	60HB
	fundido, tratada con solución y madurada	19	131	40	276	5	70HB
AZ92A	fundido	14	97	25	172	2	65HB
	fundido, tratada con solución	14	97	40	276	10	63HB
	fundido, tratada con solución y madurada	22	152	40	276	3	81HB
EZ33A	fundido y madurada	16	110	23	159	3	50HB
HK31A	endurecida a presión	29	200	37	255	8	68HB
	fundido y con tratamiento térmico	15	103	32	221	8	66HRB
HZ32A	fundido, tratada con solución y madurada	13	90	27	186	4	55HB
ZK60A	de extrusión	38	262	49	338	14	75HB
	extrusión y madurada	44	303	53	365	11	82HB

* *Propiedades de algunos metales y aleaciones*, Internacional Nickel Co., Inc., Nueva York.

E

Tabla E-7 Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de hierro fundido

Datos de varias fuentes.* Valores aproximados. Consulte a los fabricantes de material para mayor información

Aleaciones de hierro fundido	Condición	Resistencia a la fluencia por tensión (0.2% de deformación remanente)		Resistencia última a la tensión		Elongación en 2 in		Dureza Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	kpsi	MPa	-HB
Hierro fundido gris, clase 20	fundido	–	–	22	152	83	572	156
Hierro fundido gris, clase 30	fundido	–	–	32	221	109	752	210
Hierro fundido gris, clase 40	fundido	–	–	42	290	140	965	235
Hierro fundido gris, clase 50	fundido	–	–	52	359	164	1 131	262
Hierro fundido gris, clase 60	fundido	–	–	62	427	187	1 289	302
Hierro dúctil 60-40-18	recocido	47	324	65	448	52	359	160
Hierro dúctil 65-45-12	recocido	48	331	67	462	53	365	174
Hierro dúctil 80-55-06	recocido	53	365	82	565	56	386	228
Hierro dúctil 120-90-02	Templado y revenido	120	827	140	965	134	924	325

* *Propiedades de algunos metales y aleaciones*, International Nickel Co., Inc., N.Y.; *Metals Handbook*, American Society for Metals, Materials Park, Ohio.

Tabla E-8 Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de acero inoxidable

Datos de INCO.* Valores aproximados. Consulte a los fabricantes de material para mayor información

Aleaciones de acero inoxidable	Condición	Resistencia a la fluencia por tensión (0.2% de deformación remanente)		Resistencia última a la tensión		Elongación en 2 in	Dureza Rockwell o Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	
Tipo 301	recocido en tiras	40	276	110	758	60	85HRB
	rolado en frío	165	1 138	200	1 379	8	41HRC
Tipo 302	recocido en láminas	40	276	90	621	50	85HRB
	rolado en frío	165	1 138	190	1 310	5	40HRC
Tipo 304	recocido en láminas	35	241	85	586	50	80HRB
	rolado en frío	160	1 103	185	1 276	4	40HRC
Tipo 314	recocido en barras	50	345	100	689	45	180HB
Tipo 316	recocido en láminas	40	276	90	621	50	85HRB
Tipo 330	rolado en caliente	55	379	100	689	35	200HB
	recocido	35	241	80	552	50	150HB
Tipo 410	recocido en láminas	45	310	70	483	25	80HRB
	tratamiento térmico	140	965	180	1 241	15	39HRC
Tipo 420	recocido en barras	50	345	95	655	25	92HRB
	tratamiento térmico	195	1 344	230	1 586	8	500HB
Tipo 431	recocido en barras	95	655	125	862	25	260HB
	tratamiento térmico	150	1 034	195	1 344	15	400HB
Tipo 440C	recocido en barras	65	448	110	758	14	230HB
	T y R @ 600 °F	275	1 896	285	1 965	2	57HRC
17-4 PH (AISI 630)	endurecido	185	1 276	200	1 379	14	44HRC
17-7 PH (AISI 631)	endurecido	220	1 517	235	1 620	6	48HRC

* *Propiedades de algunos metales y aleaciones*, International Nickel Co., Inc., Nueva York.

Tabla E-9 Propiedades mecánicas de algunos aceros al carbono

Datos de varias fuentes.* Valores aproximados. Consulte a los fabricantes de material para mayor información

Número SAE/AISI	Condición	Resistencia a la fluencia por tensión (0.2% de deformación remanente)		Resistencia última a la tensión		Elongación en 2 in	Dureza Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	-HB
1010	rolado en caliente	26	179	47	324	28	95
	rolado en frío	44	303	53	365	20	105
1020	rolado en caliente	30	207	55	379	25	111
	rolado en frío	57	393	68	469	15	131
1030	rolado en caliente	38	259	68	469	20	137
	normalizado @ 1 650 °F	50	345	75	517	32	149
	rolado en frío	64	441	76	524	12	149
	templado y revenido @ 1 000 °F	75	517	97	669	28	255
	templado y revenido @ 800 °F	84	579	106	731	23	302
	templado y revenido @ 400 °F	94	648	123	848	17	495
1035	rolado en caliente	40	276	72	496	18	143
	rolado en frío	67	462	80	552	12	163
1040	rolado en caliente	42	290	76	524	18	149
	normalizado @ 1 650 °F	54	372	86	593	28	170
	rolado en frío	71	490	85	586	12	170
	templado y revenido @ 1 200 °F	63	434	92	634	29	192
	templado y revenido @ 800 °F	80	552	110	758	21	241
	templado y revenido @ 400 °F	86	593	113	779	19	262
1045	rolado en caliente	45	310	82	565	16	163
	rolado en frío	77	531	91	627	12	179
1050	rolado en caliente	50	345	90	621	15	179
	normalizado @ 1 650 °F	62	427	108	745	20	217
	rolado en frío	84	579	100	689	10	197
	templado y revenido @ 1 200 °F	78	538	104	717	28	235
	templado y revenido @ 800 °F	115	793	158	1 089	13	444
	templado y revenido @ 400 °F	117	807	163	1 124	9	514
1060	rolado en caliente	54	372	98	676	12	200
	normalizado @ 1 650 °F	61	421	112	772	18	229
	templado y revenido @ 1 200 °F	76	524	116	800	23	229
	templado y revenido @ 1 000 °F	97	669	140	965	17	277
	templado y revenido @ 800 °F	111	765	156	1 076	14	311
1095	rolado en caliente	66	455	120	827	10	248
	normalizado @ 1 650 °F	72	496	147	1 014	9	13
	templado y revenido @ 1 200 °F	80	552	130	896	21	269
	templado y revenido @ 800 °F	112	772	176	1 213	12	363
	templado y revenido @ 600 °F	118	814	183	1 262	10	375

* *SAE Handbook*, Society of Automotive Engineers, Warrendale, Pa.; *Metals Handbook*, American Society for Metals, Materials Park, Ohio.

E

Tabla E-10 Propiedades mecánicas de algunas aleaciones y herramientas de acero

Datos de varias fuentes.* Valores aproximados. Consulte a los fabricantes de material para mayor información

Número SAE/AISI	Condición	Resistencia a la fluencia por tensión (0.2% de deformación remanente)		Resistencia última a la tensión		Elongación en 2 in	Dureza Rockwell o Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	
1340	recocido	63	434	102	703	25	204HB
	templado y revenido	109	752	125	862	21	250HB
4027	recocido	47	324	75	517	30	150HB
	templado y revenido	113	779	132	910	12	264HB
4130	recocido @ 1 450 °F	52	359	81	558	28	156HB
	normalizado @ 1 650 °F	63	434	97	669	25	197HB
	templado y revenido @ 1 200 °F	102	703	118	814	22	245HB
	templado y revenido @ 800 °F	173	1 193	186	1 282	13	380HB
	templado y revenido @ 400 °F	212	1 462	236	1 627	10	41HB
4140	recocido @ 1 450 °F	61	421	95	655	26	197HB
	normalizado @ 1 650 °F	95	655	148	1 020	18	302HB
	templado y revenido @ 1 200 °F	95	655	110	758	22	230HB
	templado y revenido @ 800 °F	165	1 138	181	1 248	13	370HB
	templado y revenido @ 400 °F	238	1 641	257	1 772	8	510HB
4340	templado y revenido @ 1 200 °F	124	855	140	965	19	280HB
	templado y revenido @ 1 000 °F	156	1 076	170	1 172	13	360HB
	templado y revenido @ 800 °F	198	1 365	213	1 469	10	430HB
	templado y revenido @ 600 °F	230	1 586	250	1 724	10	486HB
6150	recocido	59	407	96	662	23	192HB
	templado y revenido	148	1 020	157	1 082	16	314HB
8740	recocido	60	414	95	655	25	190HB
	templado y revenido	133	917	144	993	18	288HB
H-11	recocido @ 1 600 °F	53	365	100	689	25	96HRB
	templado y revenido @ 1 000 °F	250	1 724	295	2 034	9	55HRC
L-2	recocido @ 1 425 °F	74	510	103	710	25	96HRB
	templado y revenido @ 400 °F	260	1 793	290	1 999	5	54HRC
L-6	recocido @ 1 425 °F	55	379	95	655	25	93HRB
	templado y revenido @ 600 °F	260	1 793	290	1 999	4	54HRC
P-20	recocido @ 1 425 °F	75	517	100	689	17	97HRB
	templado y revenido @ 400 °F	205	1 413	270	1 862	10	52HRC
S-1	recocido @ 1 475 °F	60	414	100	689	24	96HRB
	templado y revenido @ 400 °F	275	1 896	300	2 068	4	57HRC
S-5	recocido @ 1 450 °F	64	441	105	724	25	96HRB
	templado y revenido @ 400 °F	280	1 931	340	2 344	5	59HRC
S-7	recocido @ 1 525 °F	55	379	93	641	25	95HRB
	templado y revenido @ 400 °F	210	1 448	315	2 172	7	58HRC
A-8	recocido @ 1 550 °F	65	448	103	710	24	97HRB
	templado y revenido @ 1 050 °F	225	1 551	265	1 827	9	52HRC

* *Machine Design Materials Reference Issue*, Penton Publishing Cleveland Ohio: *Metals Handbook*, ASM, Materials Park, Ohio.

Tabla E-11 Propiedades mecánicas de algunos plásticos de ingeniería

Datos de varias fuentes.* Valores aproximados. Consulte a los fabricantes de material para mayor información

Material	Módulo de elasticidad E aproximado		Resistencia última a la tensión		Resistencia última a la compresión		Elongación en 2 in	Temp. máx.	Gravedad específica
	Mpsi	GPa	kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	°F	
ABS	0.3	2.1	6.0	41.4	10.0	68.9	5 a 25	160–200	1.05
20–40% relleno de vidrio	0.6	4.1	10.0	68.9	12.0	82.7	3	200–230	1.30
Acetal	0.5	3.4	8.8	60.7	18.0	124.1	60	220	1.41
20–30% relleno de vidrio	1.0	6.9	10.0	68.9	18.0	124.1	7	185–220	1.56
Acrílico	0.4	2.8	10.0	68.9	15.0	103.4	5	140–190	1.18
Fluoroplástico (PTFE)	0.2	1.4	5.0	34.5	6.0	41.4	100	350–330	2.10
Nylon 6/6	0.2	1.4	10.0	68.9	10.0	68.9	60	180–300	1.14
Nylon 11	0.2	1.3	8.0	55.2	8.0	55.2	300	180–300	1.04
20–30% relleno de vidrio	0.4	2.5	12.8	88.3	12.8	88.3	4	250–340	1.26
Policarbonato	0.4	2.4	9.0	62.1	12.0	82.7	100	250	1.20
10–40% relleno de vidrio	1.0	6.9	17.0	117.2	17.0	117.2	2	275	1.35
Polietileno HMW	0.1	0.7	2.5	17.2	–	–	525	–	0.94
Óxido de polifenileno	0.4	2.4	9.6	66.2	16.4	113.1	20	212	1.06
20–30% relleno de vidrio	1.1	7.8	15.5	106.9	17.5	120.7	5	260	1.23
Polipropileno	0.2	1.4	5.0	34.5	7.0	48.3	500	250–320	0.90
20–30% relleno de vidrio	0.7	4.8	7.5	51.7	6.2	42.7	2	300–320	1.10
Poliestireno de impacto	0.3	2.1	4.0	27.6	6.0	41.4	2 a 80	140–175	1.07
20–30% relleno de vidrio	0.1	0.7	12.0	82.7	16.0	110.3	1	180–200	1.25
Polisulfuro	0.4	2.5	10.2	70.3	13.9	95.8	50	300–345	1.24

* *Modern Plastics Encyclopedia*, McGraw-Hill, Nueva, York, *Machine Design Materials Reference Issue*, Penton Publishing Cleveland Ohio.

E

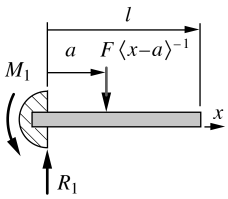
Apéndice F

TABLAS DE VIGAS

En estas tablas se presentan las funciones de carga, cortante, momento, pendiente y deflexión para un grupo de configuraciones comunes de vigas. También se definen las vigas como **en voladizo**, **simplemente apoyadas** y **suspendida,** ya sea con **carga concentrada** en cualquier punto o **carga uniformemente distribuida** a través de una parte de su extensión. Para cada viga se deriva un tipo general de ecuaciones. Los casos especiales, como los de carga en una extensión central, se adaptan seleccionando las dimensiones adecuadas en las fórmulas generales. En todos los casos, se usan funciones de singularidad para escribir las ecuaciones de las vigas, lo cual nos da una expresión única para la extensión total de cada función. Véase la sección 1.9 (p. 42) para el estudio de las funciones de singularidad. Las ecuaciones de los casos de este apéndice se han codificado en archivos de computadora, que se encuentran en el CD incluido con este texto. En algunos casos, los archivos permiten que se apliquen cargas múltiples a las vigas en diferentes lugares; no obstante, las deducciones en este apéndice tan sólo tienen cabida para una carga por viga. *Use superposición para combinar varios casos de vigas cuando se presenta más de un tipo de carga sobre la viga*. Para un grupo más completo de fórmulas para vigas, consulte *Formulas for Stress and Strain*, de Roark y Young, 6a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1989. En seguida se presentan las claves de las figuras de este apéndice y los archivos relacionados.

Núm. de figura	Caso	Nombre de archivo
F-1*a*	Viga en voladizo con carga concentrada	CANTCONC
F-1*b*	Viga en voladizo con carga uniformemente distribuida	CANTUNIF
F-2*a*	Viga simplemente apoyada con carga concentrada	SIMPCONC
F-2*b*	Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida	SIMPUNIF
F-3*a*	Viga suspendida con carga concentrada	OVHGCONC
F-3*b*	Viga suspendida con carga uniformemente distribuida	OVHGUNIF

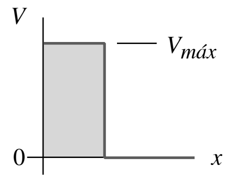
(*a*) Viga en voladizo con carga concentrada



$$R_1 = F$$

$$M_1 = Fa$$

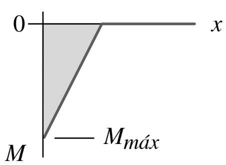
Carga $$q = M_1\langle x\rangle^{-2} + R_1\langle x\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1}$$



$$V_{máx} = R_1 = F$$

$$V = M_1\langle x\rangle^{-1} + R_1 - F\langle x-a\rangle^{0} = F\left(1-\langle x-a\rangle^{0}\right)$$

Cortante

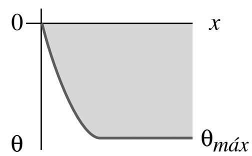


$$M_{máx} = -Fa$$

cuando $a = l$: $M_{máx} = -Fl$

$$M = -M_1 + R_1 x - F\langle x-a\rangle^{1} = F\left(-a + x - \langle x-a\rangle^{1}\right)$$

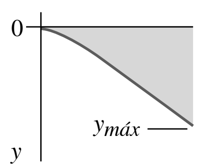
Momento



$$\theta = \frac{1}{EI}\begin{pmatrix} -M_1 x + \dfrac{R_1}{2}x^2 \\ -\dfrac{F}{2}\langle x-a\rangle^2 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{F}{2EI}\left(-2ax + x^2 - \langle x-a\rangle^2\right)$$

Pendiente



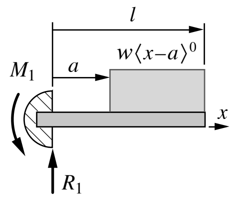
$$y_{máx} = \frac{Fa^2}{6EI}(a-3l)$$

cuando $a = l$: $y_{máx} = -\dfrac{Fl^3}{3EI}$

$$y = \frac{1}{EI}\left(-\frac{M_1}{2}x^2 + \frac{R_1}{6}x^3 - \frac{F}{6}\langle x-a\rangle^3\right) = \frac{F}{6EI}\left(x^3 - 3ax^2 - \langle x-a\rangle^3\right)$$

Deflexión

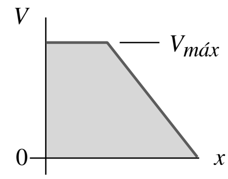
(*b*) Viga en voladizo con carga uniformemente distribuida



$$R_1 = w(l-a)$$

$$M_1 = \frac{w}{2}\left(l^2 - a^2\right)$$

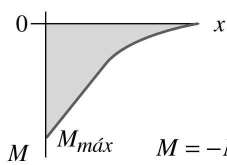
Carga $$q = M_1\langle x\rangle^{-2} + R_1\langle x\rangle^{-1} - w\langle x-a\rangle^{0}$$



$$V_{máx} = R_1 = w(l-a)$$

$$V = M_1\langle x\rangle^{-1} + R_1 - w\langle x-a\rangle^{1} = w\left[(l-a) - \langle x-a\rangle^{1}\right]$$

Cortante

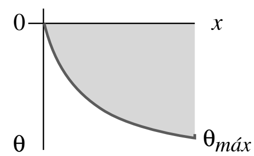


$$M_{máx} = M_1 = \frac{w}{2}\left(l^2 - a^2\right)$$

cuando $a = 0$: $M_{máx} = \dfrac{wl^2}{2}$

$$M = -M_1 + R_1 x - w\langle x-a\rangle^{2} = \frac{w}{2}\left[2(l-a)x - \left(l^2 - a^2\right) - 2\langle x-a\rangle^2\right]$$

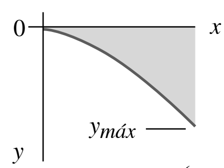
Momento



$$\theta = \frac{1}{EI}\begin{pmatrix} -M_1 x + \dfrac{R_1}{2}x^2 \\ -\dfrac{w}{6}\langle x-a\rangle^3 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{w}{6EI}\left(3(l-a)x^2 - 3\left(l^2 - a^2\right)x - \langle x-a\rangle^3\right)$$

Pendiente



$$y_{máx} = \frac{w}{24EI}\left(-3l^4 + 4a^3 l - a^4\right)$$

cuando $a = 0$: $y_{máx} = -\dfrac{wl^4}{8EI}$

$$y = \frac{1}{EI}\left(-\frac{M_1}{2}x^2 + \frac{R_1}{6}x^3 - \frac{w}{24}\langle x-a\rangle^4\right) = \frac{w}{24EI}\left(4(l-a)x^3 - 6\left(l^2 - a^2\right)x^2 - \langle x-a\rangle^4\right)$$

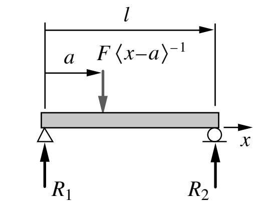
Deflexión

FIGURA F-1

Vigas en voladizo con carga concentrada o distribuida. Observe que <   > Denota una función de singularidad

F

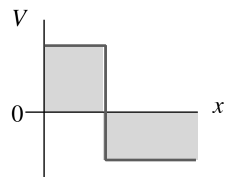
(*a*) Viga simplemente apoyada con carga concentrada



$$R_1 = F\left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

$$R_2 = F\left(\frac{a}{l}\right)$$

Carga $\quad q = R_1\langle x\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1} + R_2\langle x-l\rangle^{-1}$

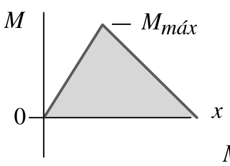


$$V_{máx} = \mathrm{MAX}(R_1, R_2)$$

$$V = R_1 - F\langle x-a\rangle^0 + R_2\langle x-l\rangle^0$$

$$= F\left(1 - \frac{a}{l} - \langle x-a\rangle^0\right)$$

Cortante



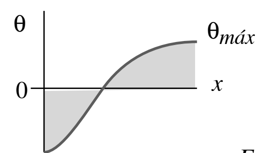
$$M_{máx} = Fa\left(1 - \frac{a}{l}\right)$$

$$\text{cuando } a = \frac{l}{2}: \quad M_{máx} = \frac{Fl}{4}$$

$$M = R_1 x - F\langle x-a\rangle^1 + R_2\langle x-l\rangle^1$$

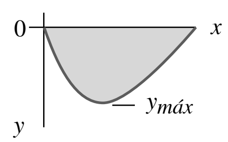
$$= F\left[\left(1 - \frac{a}{l}\right)x - \langle x-a\rangle^1\right]$$

Momento



$$\theta = \frac{F}{2EI}\left\{\begin{aligned}&\left(1-\frac{a}{l}\right)x^2 - \langle x-a\rangle^2 \\ &+\frac{a}{3l}\left(-a^2 + 3al - 2l^2\right)\end{aligned}\right\}$$

Pendiente

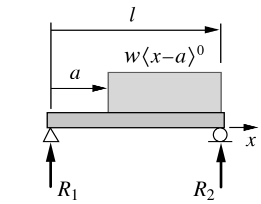


$$y_{máx} = \frac{F}{3EI}\left(2a^3 - \frac{a^4}{l} - la^2\right)$$

$$y = \frac{F}{6EI}\left\{\begin{aligned}&\left(1-\frac{a}{l}\right)x^3 - \langle x-a\rangle^3 \\ &+\frac{a}{l}\left(-a^2 + 3al - 2l^2\right)x\end{aligned}\right\}$$

Deflexión

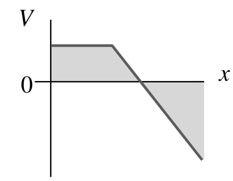
(*b*) Viga simplemente soportada con carga uniformemente distribuida



$$R_1 = \frac{w}{2l}(l-a)^2$$

$$R_2 = \frac{w}{2l}\left(l^2 - a^2\right)$$

Carga $\quad q = R_1\langle x\rangle^{-1} - w\langle x-a\rangle^0 + R_2\langle x-l\rangle^{-1}$

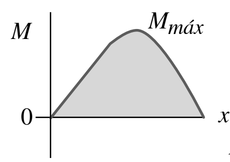


$$V_{máx} = \mathrm{MAX}(R_1, R_2)$$

$$V = R_1 - w\langle x-a\rangle^1 + R_2\langle x-l\rangle^0$$

$$= w\left[\frac{1}{2l}(l-a)^2 - \langle x-a\rangle^1\right]$$

Cortante

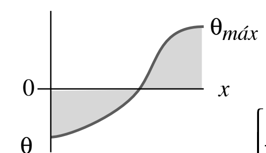


$$\text{cuando } a = 0: \quad M = \frac{wx}{2}(l-x)$$

$$M = R_1 x - \frac{w}{2}\langle x-a\rangle^2 + R_2\langle x-l\rangle^1$$

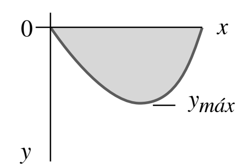
$$= \frac{w}{2}\left[\frac{x}{l}(l-a)^2 - \langle x-a\rangle^2\right]$$

Momento



$$\theta = \frac{w}{24EI}\left\{\begin{aligned}&\frac{6x^2}{l}(l-a)^2 - 4\langle x-a\rangle^3 \\ &+\frac{1}{l}\left[(l-a)^4 - 2l^2(l-a)^2\right]\end{aligned}\right\}$$

Pendiente



$$\text{cuando } a = 0: \quad y = \frac{wx}{24EI}\left(2lx^2 - x^3 - l^3\right)$$

$$y = \frac{w}{24EI}\left\{\begin{aligned}&\frac{2x^3}{l}(l-a)^2 - \langle x-a\rangle^4 \\ &+\frac{x}{l}\left[(l-a)^4 - 2l^2(l-a)^2\right]\end{aligned}\right\}$$

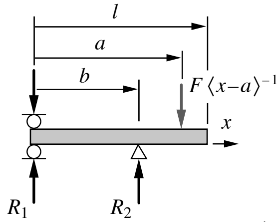
Deflexión

FIGURA F-2

Vigas simplemente apoyadas con carga concentrada o distribuida. Observe que < > denota una función de singularidad

F

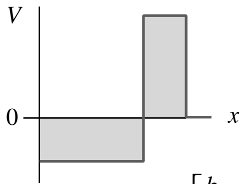
(a) Viga suspendida con carga concentrada



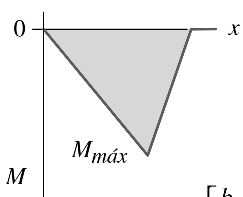
$$R_1 = F\left(\frac{b-a}{b}\right)$$

$$R_2 = F\left(\frac{a}{b}\right)$$

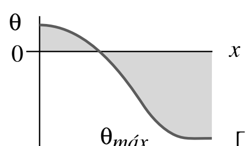
Carga $\quad q = R_1\langle x\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1} + R_2\langle x-b\rangle^{-1}$



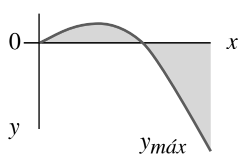
Cortante $\quad V = F\left[\frac{b-a}{b}\langle x\rangle^{0} + \frac{a}{b}\langle x-b\rangle^{0} - \langle x-a\rangle^{0}\right]$



Momento $\quad M = F\left[\frac{b-a}{b}\langle x\rangle^{1} + \frac{a}{b}\langle x-b\rangle^{1} - \langle x-a\rangle^{1}\right]$

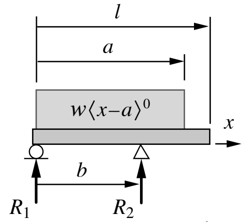


Pendiente $\quad \theta = \frac{F}{2EI}\left[\frac{b-a}{b}\langle x\rangle^{2} + \frac{a}{b}\langle x-b\rangle^{2} - \langle x-a\rangle^{2} + \frac{b}{3}(a-b)\right]$



Deflexión $\quad y = \frac{F}{6EI}\left[\frac{b-a}{b}\langle x\rangle^{3} + \frac{a}{b}\langle x-b\rangle^{3} - \langle x-a\rangle^{3} + b(a-b)x\right]$

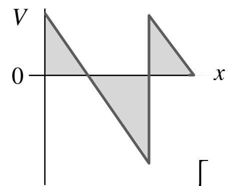
(b) Viga suspendida con carga uniformemente distribuida



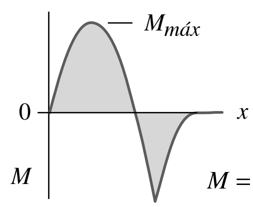
$$R_1 = wa\left(1-\frac{a}{2b}\right)$$

$$R_2 = \frac{wa^2}{2b}$$

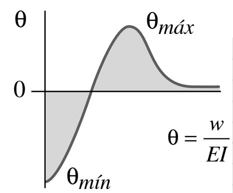
Carga $\quad q = R_1\langle x\rangle^{-1} - w\langle x\rangle^{0} + w\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-b\rangle^{-1}$



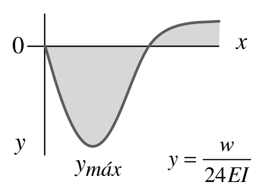
Cortante $\quad V = w\left[a - x + \langle x-a\rangle^{1} + \frac{a^2}{2b}\left(\langle x-b\rangle^{0} - 1\right)\right]$



Momento $\quad M = \frac{w}{2}\left[\left(2a - \frac{a^2}{b}\right)x - x^2 + \langle x-a\rangle^{2} + \frac{a^2}{b}\langle x-b\rangle^{1}\right]$



Pendiente $\quad \theta = \frac{w}{EI}\left[\frac{1}{24}\left(2a^2b - 4ab^2 + b^3 - \frac{1}{b}\langle b-a\rangle^{4}\right) + \left(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4b}\right)x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{a^2}{4b}\langle x-b\rangle^{2} + \frac{1}{6}\langle x-a\rangle^{3}\right]$



Deflexión $\quad y = \frac{w}{24EI}\left[\left(2a^2b - 4ab^2 + b^3 - \frac{1}{b}\langle b-a\rangle^{4}\right)x + \left(4a - \frac{2a^2}{b}\right)x^3 - x^4 + \langle x-a\rangle^{4} + \frac{2a^2}{b}\langle x-b\rangle^{3}\right]$

FIGURA F-3

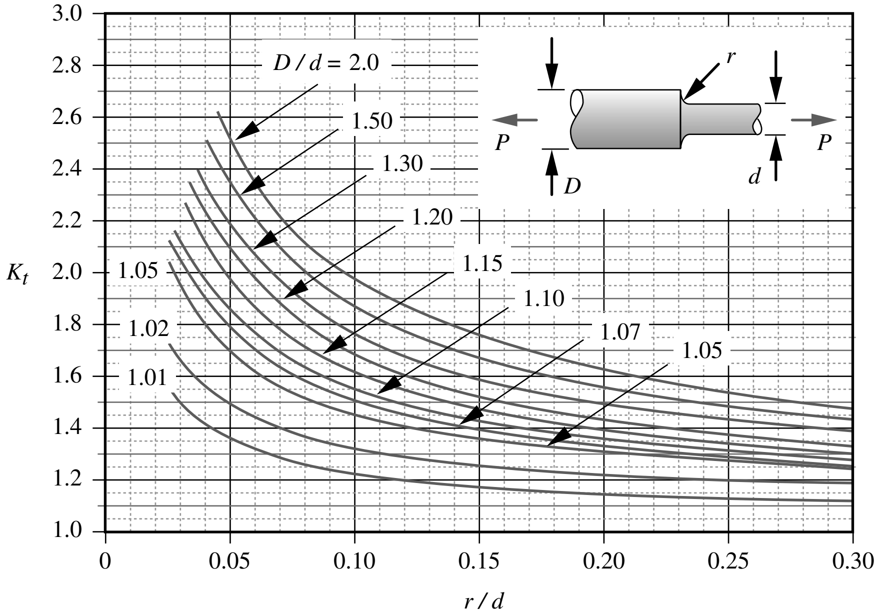
Vigas suspendidas con carga concentrada o distribuida. Observe que < > denota una función de singularidad

Apéndice G

FACTORES DE CONCENTRACIÓN DE ESFUERZO

En este apéndice se presentan, listados, 14 casos comunes de factores de concentración de esfuerzos. Todas las curvas se tomaron de “Design Factors for Stress Concentration, parts 1 to 5”, *Machine Design*, de R. E. Peterson, febrero-julio de 1951, Penton Publishing, Cleveland, Ohio, con autorización. Se han ajustado ecuaciones aproximadas para estas curvas y están definidas en cada figura. Las ecuaciones fueron codificadas como funciones computarizadas (anotadas abajo), de modo que se pueden incorporar a modelos por computadora y permitir así la generación automática de los factores aproximados de concentración de esfuerzos durante los cálculos.

Figura	**Caso**	**Nombre de archivo**
G-1	Eje con filete de hombro en tensión axial	APP_C-01
G-2	Eje con filete de hombro en flexión	APP_C-02
G-3	Eje con filete de hombro en torsión	APP_C-03
G-4	Eje con ranura en tensión axial	APP_C-04
G-5	Eje con ranura en flexión	APP_C-05
G-6	Eje con ranura en torsión	APP_C-06
G-7	Eje con orificio transversal en flexión	APP_C-07
G-8	Eje con orificio transversal en torsión	APP_C-08
G-9	Barra plana con filete en tensión axial	APP_C-09
G-10	Barra plana con filete en flexión	APP_C-10
G-11	Barra plana con muesca en tensión axial	APP_C-11
G-12	Barra plana con muesca en flexión	APP_C-12
G-13	Barra plana con orificio transversal en tensión axial	APP_C-13
G-14	Barra plana con orificio transversal en flexión	APP_C-14



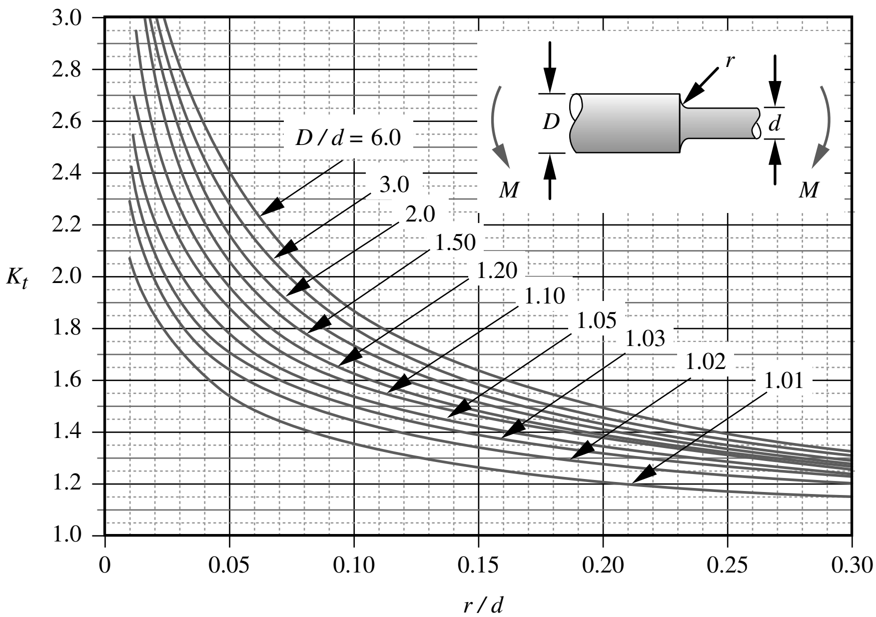
$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

donde:

D/d	A	b
2.00	1.014 70	–0.300 35
1.50	0.999 57	–0.282 21
1.30	0.996 82	–0.257 51
1.20	0.962 72	–0.255 27
1.15	0.980 84	–0.224 85
1.10	0.984 50	–0.208 18
1.07	0.984 98	–0.195 48
1.05	1.004 80	–0.170 76
1.02	1.012 20	–0.124 74
1.01	0.984 13	–0.104 74

FIGURA G-1

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para un eje con filete de hombro en tensión axial



$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

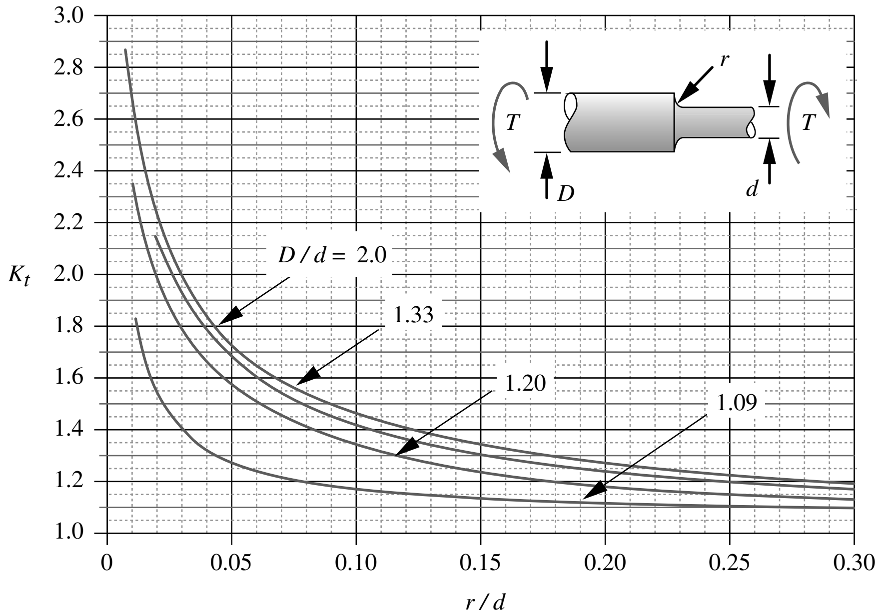
donde:

D/d	A	b
6.00	0.878 68	–0.332 43
3.00	0.893 34	–0.308 60
2.00	0.908 79	–0.285 98
1.50	0.938 36	–0.257 59
1.20	0.970 98	–0.217 96
1.10	0.951 20	–0.237 57
1.07	0.975 27	–0.209 58
1.05	0.981 37	–0.196 53
1.03	0.980 61	–0.183 81
1.02	0.960 48	–0.177 11
1.01	0.919 38	–0.170 32

FIGURA G-2

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para un eje con filete de hombro en flexión

G



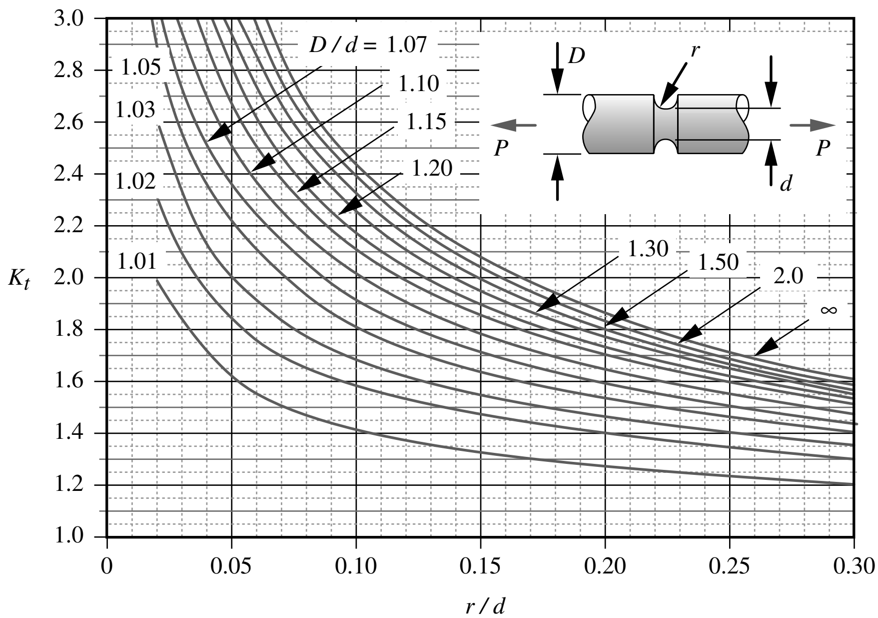
$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

donde:

D/d	A	b
2.00	0.863 31	–0.238 65
1.33	0.848 97	–0.231 61
1.20	0.834 25	–0.216 49
1.09	0.903 37	–0.126 92

FIGURA G-3

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para un eje con filete de hombro en torsión



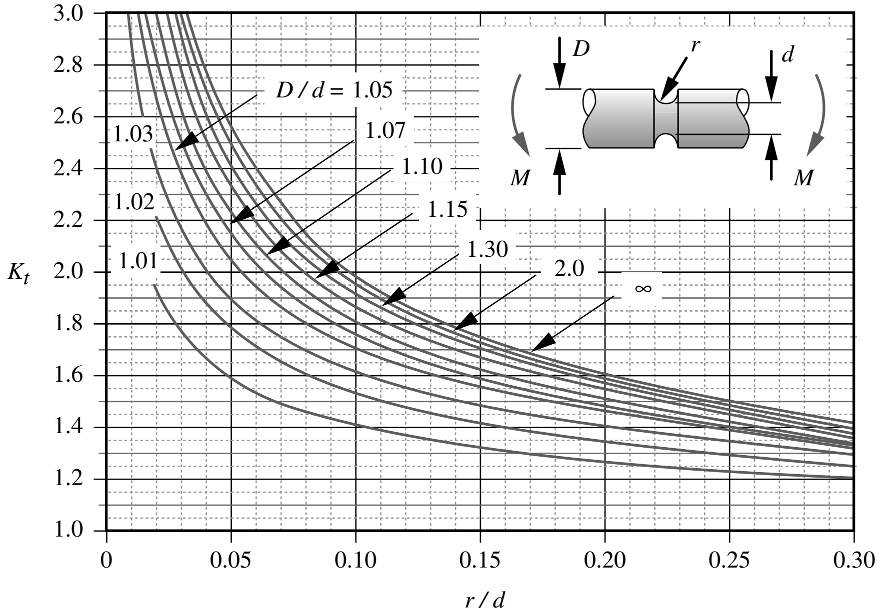
$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

donde:

D/d	A	b
∞	0.993 72	–0.393 52
2.00	0.993 83	–0.382 31
1.50	0.998 08	–0.369 55
1.30	1.004 90	–0.355 45
1.20	1.010 70	–0.337 65
1.15	1.026 30	–0.316 73
1.10	1.027 20	–0.294 84
1.07	1.023 80	–0.276 18
1.05	1.027 20	–0.252 56
1.03	1.036 70	–0.216 03
1.02	1.037 90	–0.187 55
1.01	1.000 30	–0.156 09

FIGURA G-4

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para un eje con ranura en tensión axial



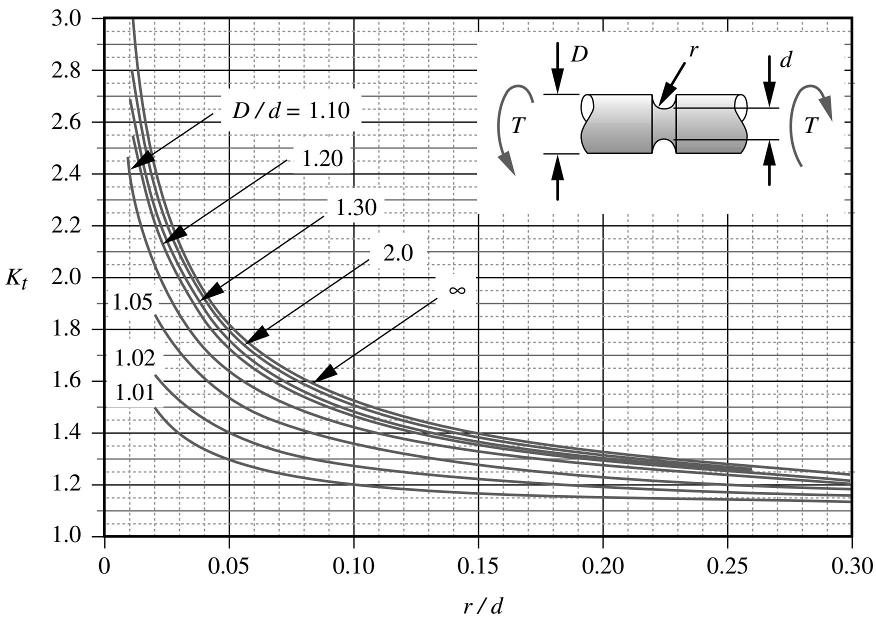
$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

donde:

D / d	A	b
∞	0.948 01	–0.333 02
2.00	0.936 19	–0.330 66
1.50	0.938 94	–0.323 80
1.30	0.942 99	–0.315 04
1.20	0.946 81	–0.305 82
1.15	0.953 11	–0.297 39
1.12	0.955 73	–0.288 86
1.10	0.954 54	–0.282 68
1.07	0.967 74	–0.264 52
1.05	0.987 55	–0.241 34
1.03	0.990 33	–0.215 17
1.02	0.977 53	–0.197 93
1.01	0.993 93	–0.152 38

FIGURA G-5

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para un eje con ranura en flexión



$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

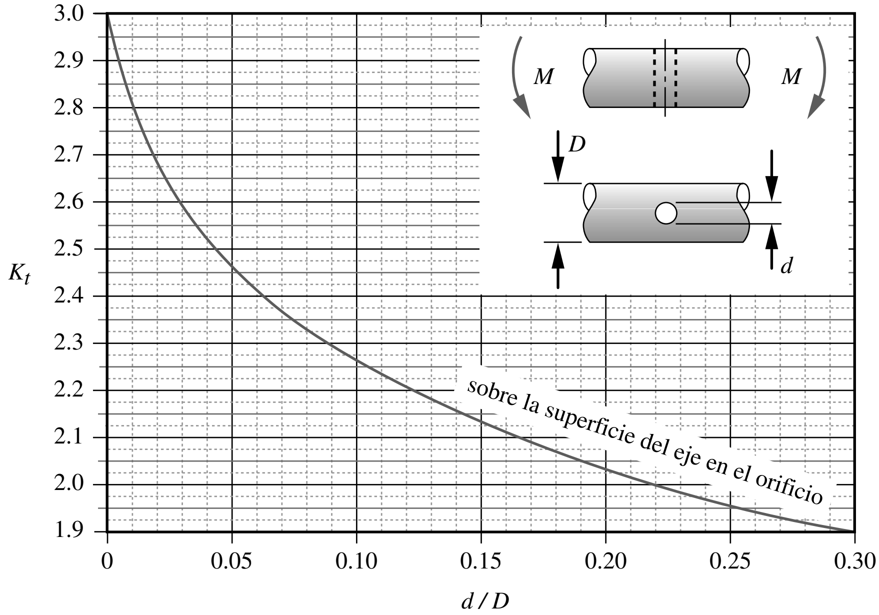
donde:

D / d	A	b
∞	0.881 26	–0.252 04
2.00	0.890 35	–0.240 75
1.30	0.894 60	–0.232 67
1.20	0.901 82	–0.223 34
1.10	0.923 11	–0.197 40
1.05	0.938 53	–0.169 41
1.02	0.968 77	–0.126 05
1.01	0.972 45	–0.101 62

FIGURE G-6

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para un eje con ranura en torsión

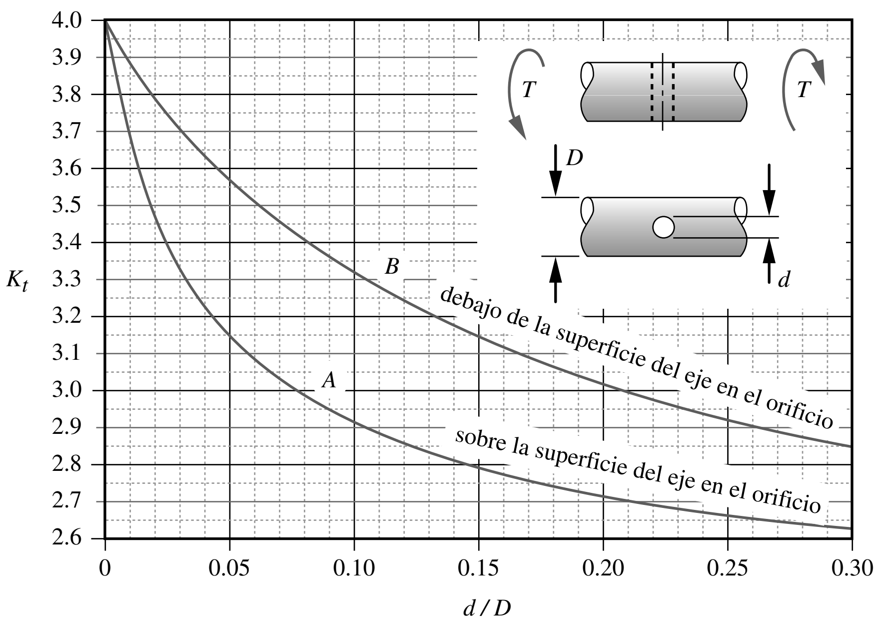
G



$$K_t \cong 1.589\,90 - 0.635\,50 \log\left(\frac{d}{D}\right)$$

FIGURA G-7

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para un eje con orificio transversal en flexión

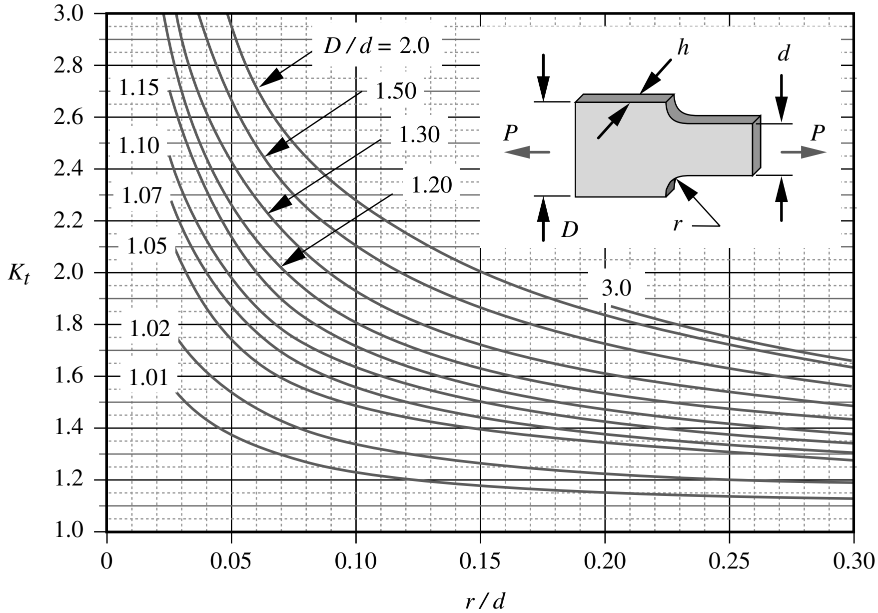


$$K_{t_B} \cong 3.9702 - 9.292\,\frac{d}{D} + 27.159\left(\frac{d}{D}\right)^2 + 30.231\left(\frac{d}{D}\right)^3 - 393.19\left(\frac{d}{D}\right)^4 + 650.39\left(\frac{d}{D}\right)^5 + 15.451\left(\frac{d}{D}\right)^6$$

$$K_{t_A} \cong 3.921\,50 - 24.435\,\frac{d}{D} + 234.06\left(\frac{d}{D}\right)^2 - 1\,200.5\left(\frac{d}{D}\right)^3 + 3\,059.5\left(\frac{d}{D}\right)^4 - 3042.4\left(\frac{d}{D}\right)^5$$

FIGURA G-8

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para un eje con orificio transversal en torsión



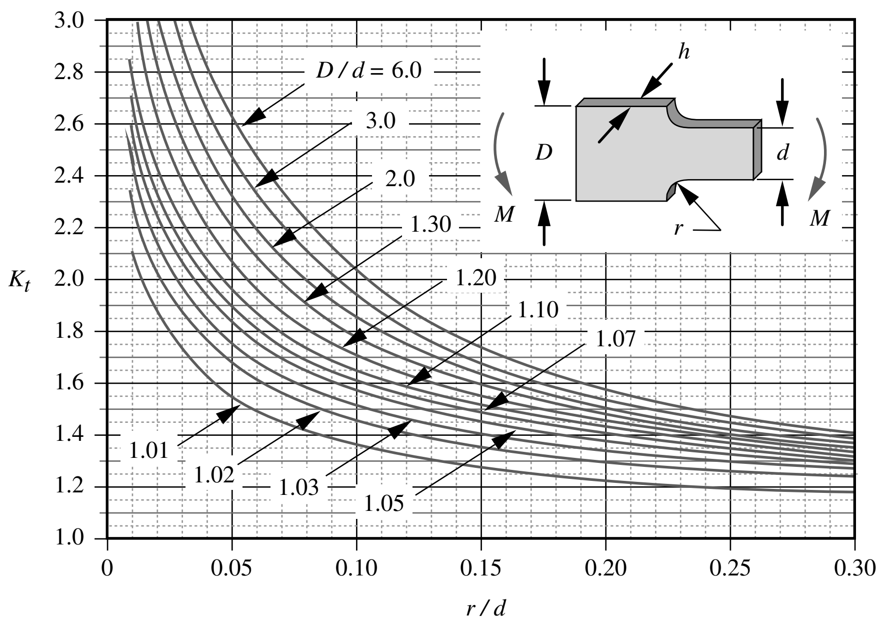
$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

donde:

D/d	A	b
2.00	1.099 60	–0.320 77
1.50	1.076 90	–0.295 58
1.30	1.054 40	–0.270 21
1.20	1.035 10	–0.250 84
1.15	1.014 20	–0.239 35
1.10	1.013 00	–0.215 35
1.07	1.014 50	–0.193 66
1.05	0.987 97	–0.138 48
1.02	1.025 90	–0.169 78
1.01	0.976 62	–0.106 56

FIGURA G-9

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para una barra plana con filete en tensión axial



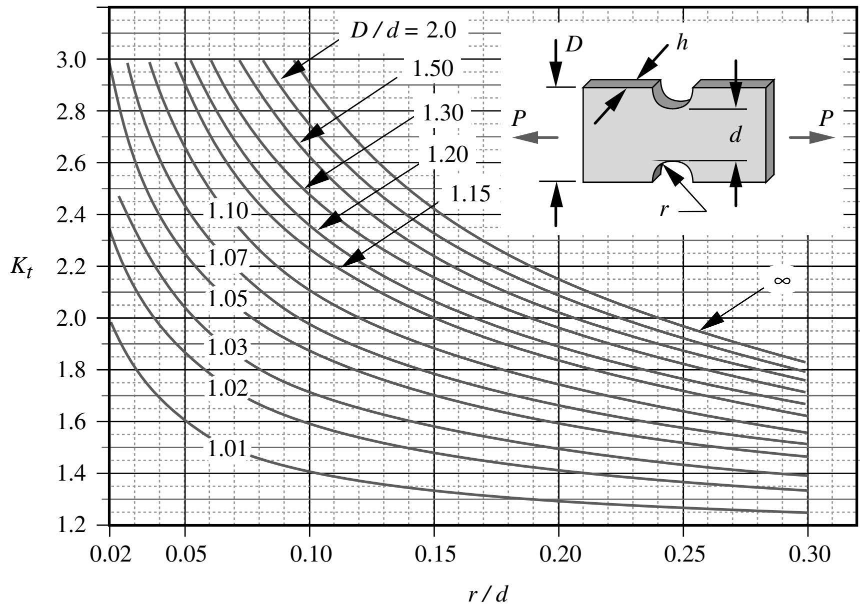
$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

donde:

D/d	A	b
6.00	0.895 79	–0.358 47
3.00	0.907 20	–0.333 33
2.00	0.932 32	–0.303 04
1.30	0.958 80	–0.272 69
1.20	0.995 90	–0.238 29
1.10	1.016 50	–0.215 48
1.07	1.019 90	–0.203 33
1.05	1.022 60	–0.191 56
1.03	1.016 60	–0.178 02
1.02	0.995 28	–0.170 13
1.01	0.966 89	–0.154 17

FIGURA G-10

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para una barra plana con filete en flexión



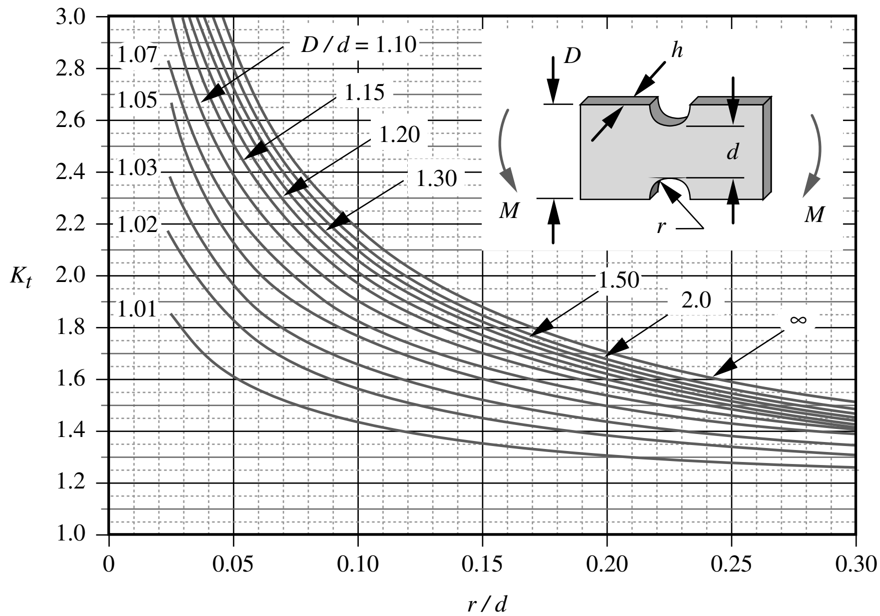
$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

donde:

D/d	A	b
∞	1.109 50	–0.417 12
3.00	1.113 90	–0.409 23
2.00	1.133 90	–0.385 86
1.50	1.132 60	–0.365 92
1.30	1.158 60	–0.332 60
1.20	1.147 50	–0.315 07
1.15	1.095 20	–0.325 17
1.10	1.085 10	–0.299 97
1.07	1.091 20	–0.268 57
1.05	1.090 60	–0.241 63
1.03	1.051 80	–0.222 16
1.02	1.054 00	–0.188 79
1.01	1.042 60	–0.141 45

FIGURA G-11

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para una barra plana con muesca en tensión axial



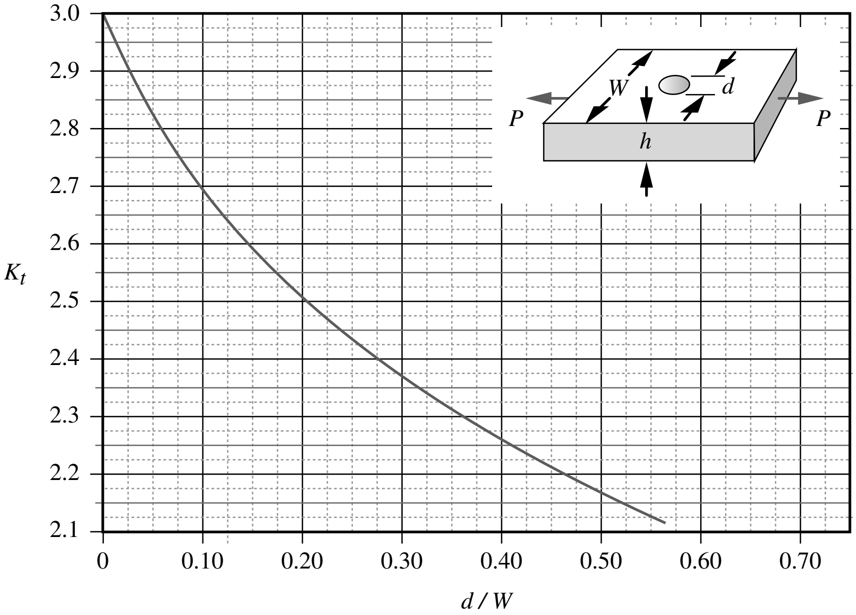
$$K_t \cong A\left(\frac{r}{d}\right)^b$$

donde:

D/d	A	b
∞	0.970 79	–0.356 72
3.00	0.971 94	–0.350 47
2.00	0.968 01	–0.349 15
1.50	0.983 15	–0.333 95
1.30	0.982 88	–0.326 06
1.20	0.990 55	–0.313 19
1.15	0.993 04	–0.302 63
1.10	1.007 10	–0.283 79
1.07	1.014 70	–0.261 45
1.05	1.025 00	–0.240 08
1.03	1.029 40	–0.211 61
1.02	1.037 40	–0.184 28
1.01	1.060 50	–0.133 69

FIGURA G-12

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para una barra plana con muesca en flexión

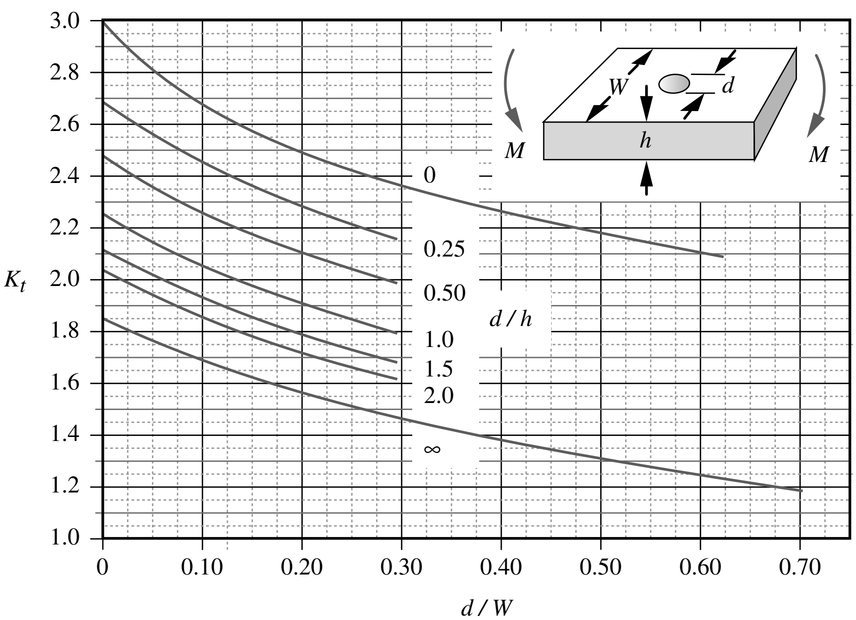


para $\frac{d}{W} \leq 0.65$:

$$K_t \cong 3.003\,9 - 3.753\frac{d}{W} + 7.973\,5\left(\frac{d}{W}\right)^2 - 9.265\,9\left(\frac{d}{W}\right)^3 + 1.814\,5\left(\frac{d}{W}\right)^4 + 2.968\,4\left(\frac{d}{W}\right)^5$$

FIGURA G-13

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para una barra plana con orificio transversal en tensión axial



para $\frac{d}{h} \Rightarrow 0$ y $\frac{d}{W} \leq 0.65$:

$$K_t \cong 2.994\,7 - 3.483\,3\frac{d}{W} + 5.826\,8\left(\frac{d}{W}\right)^2 - 4.198\,6\left(\frac{d}{W}\right)^3$$

para $\frac{d}{h} \geq 0.25$: $K_t \cong A e^{[b(d/W)]}$

donde:

d/h	A	b
0.25	2.687 50	–0.751 28
0.50	2.466 20	–0.772 15
1.00	2.240 00	–0.787 39
1.50	2.024 30	–0.808 21
2.00	2.105 60	–0.798 78
∞	1.808 20	–0.667 02

FIGURA G-14

Factor geométrico de concentración de esfuerzos K_t para una barra plana con orificio transversal en flexión

G

Apéndice H

RESPUESTAS A PROBLEMAS SELECCIONADOS

El manual de soluciones (pdf) y el conjunto completo de archivos *Mathcad* de soluciones a los problemas se pueden descargar de *http://www.prenhall.com/,* con la opción de **Instructor Support**. Las soluciones, tanto de *Mathcad* como de *TKSolver*, también están disponibles para los profesores en el sitio del autor en *http://www.designofmachinery.com/registered/professor.html*. El árbol de la familia de problemas relacionados en varios capítulos se muestra en el manual de soluciones.

APÉNDICE A   INTRODUCCIÓN AL DISEÑO

A-4. 1 000 lb_f, 31.081 slug, 2.59 blob, 453.592 kg, 4 448.2 N.

A-5. 25.9 lb_f.

A-6. 220.5 lb_f, 220.5 lb_m, 6.85 slug, 0.571 blob, 980.7 N.

APÉNDICE B   MATERIALES Y PROCESOS

B-6. E = 207 GPa, U = 2.7 N-m, acero.

B-8. E = 207 GPa, U = 1.3 N-m, magnesio.

B-9. E = 16.7 Mpsi, U_{el} = 300 psi, titanio.

B-12. U_T = 82.7 MPa, U_R = 0.41 MPa.

B-14. S_{ut} = 170 kpsi, 359HV, 36.5HRC.

B-16. Hierro y carbono; puede haber 0.95% de carbono durante el endurecimiento o en la superficie endurecida sin carburación.

B-27. S_y = 88.1 kpsi, S_y = 607 MPa.

B-34. El metal más comúnmente usado es el zinc. Al proceso se le llama “galvanización” y se lleva a cabo con electrólisis o recubrimiento por inmersión.

CAPÍTULO 1 DETERMINACIÓN DE LA CARGA

1-3. T = 255 N-m sobre la catarina, T = 90 N-m sobre el brazo, M = 255 N-m sobre el brazo.

1-6. 55 114 N.

1-7. 12 258 N.

1-8. ω_n = 31.6 rad/seg, ω_d = 30.1 rad/seg.

1-10. $R_1 = V = -1$ 821 N @ 0 a 0.7 m, R_1 = 2 802 N, $M = -1$ 275 N-m @ 0.7 m.

1-11. Fuerza dinámica de 3 056 N y 408 mm de deflexión. $V = -5$ 677 @ 0 a 0.7 m, $M = -3$ 973 N-m @ 0.7 m, R_1 = 5 676 N, R_2 = 8 733 N.

1-15. $\mu = 0.025$.

1-18. El vuelco inicia a 18.7 mph, la carga se desliza en los 14.8 a 18.3 mph.

1-22. (*a*) 897 N, (b) 3 592 N.

1-23. (*a*) R_1 = 264 N, R_2 = 316 N, $V = -316$ N, M = 126 N-m.

1-24. (*a*) R_1 = 620 N, M_1 = 584 N-m, V = 620 N, $M = -584$ N-m.

1-25. (*a*) $R_1 = -353$ N, R_2 = 973 N, V = 580 N, $M = -216$ N-m.

1-27. (*a*) R_1 = 53 895 N, V = 53 895 N, $M = -87$ 040 N-m.

1-34. Fila (*a*) $V_{máx}$ = 1 000 lb a x = 16 a 18 in, $M_{máx}$ = 2 000 lb a x = 16 in.

1-48. ω_n = 10.1 Hz.

CAPÍTULO 2 ESFUERZO, DEFORMACIÓN UNITARIA Y DEFLEXIÓN

2-1. σ_1 = 1 207 psi, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -207$ psi, $\tau_{máx}$ = 707 psi.

2-4. (*a*) σ_1 = 114 MPa, $\sigma_2 = 0$, σ_3 = 0 MPa, $\tau_{máx}$ = 57 MPa.

(*b*) 9.93 MPa.

(*c*) 4.41 MPa.

(*d*) σ = 53.6 MPa, τ = 1.73 MPa.

(*e*) σ_1 = 72.8 MPa, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, $\tau_{máx}$ = 36.4 MPa.

2-6. (*a*) σ_1 = 1 277.8 MPa, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, $\tau_{máx}$ = 639 MPa.

(*b*) 111.6 MPa.

(*c*) 49.6 MPa.

(*d*) σ = 540 MPa, τ = 1.7 MPa.

(*e*) σ_1 = 636 MPa, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, $\tau_{máx}$ = 318 MPa.

2-7. OD = 0.375 in, ID = 0.230 in.

2-8. 199 mm.

2-10. esfuerzo principal, 24.5 MPa; deflexión, −128 mm

2-11. esfuerzo, 76 MPa; deflexión, −400 mm

2-15. diámetro del perno, 4.5 mm.

2-18. fuerza por varilla, 13 254 lb; fuerza total, 132 536 lb; deflexión, 0.36 in.

2-19. diámetro del perno, 2.125 in; radio exterior, 2.375 in.

2-22. (a) 5.72 MPa (b) 22.87 MPa.

2-23. Fila (*a*) $R_1 = 264$ N, $R_2 = 316$ N, $V = -316$ N para $b \leq x \leq l$, $M = 126$ N-m @ $x = b$, $\theta = 0.33$ grados, $y = -1.82$ mm, $\sigma_{máx} = 88.7$ MPa.

2-24. Fila (*a*) $R_1 = 620$ N, $M_1 = 584$ N-m, $V = 620$ N @ $x = 0$, $M = -584$ N-m @ $x = 0$, $\theta = -2.73$ grados, $y = -32.2$ mm, $\sigma_{máx} = 410$ MPa.

2-25. Fila (*a*) $R_1 = -353$ N, $R_2 = 973$ N, $V = 578$ N @ $x = b$, $M = -216$ N-m @ $x = b$, $\theta = -0.82$ grados, $y = -4.81$ mm, $\sigma_{máx} = 152$ MPa.

2-26. Fila (*a*) $R_1 = 112$ N, $R_2 = 559$ N, $R_3 = -52$ N, $V = -428$ N @ $x = b$, $M = 45$ N-m, @ $x = a$, $\theta = 0.06$ grados, $y = -0.02$ mm, $\sigma_{máx} = 31.5$ MPa.

2-29. Fila (*a*) 307.2 N/mm.

2-30. Fila (*a*) 17.7 N/mm.

2-31. Fila (*a*) 110.6 N/mm.

2-32. Fila (*a*) 2 844 N/mm.

2-33. Fila (*a*) $\sigma_1 = 21.5$ MPa @ A, $\sigma_1 = 16.1$ MPa @ B.

2-34. Fila (*a*) $y = -1.62$ mm.

2-35. Fila (*a*) $k = 31$ N/mm.

2-37. $e = 0.84$ mm, $\sigma_i = 410$ MPa, $\sigma_o = -273$ MPa.

2-41. (*a*) 38.8 MPa, (*b*) 11.7 MPa.

2-49. Fila (*a*) Johnson: incisos (*a*) 1.73 kN, (*b*) 1.86 kN, (*c*) 1.94 kN, (*d*) Euler 676 N.

2-50. Fila (*a*) Euler: incisos (*a*) 5.42 kN, (*b*) 8.47 kN, (*c*) 12.8 kN, (*d*) 1.23 kN.

2-51. Fila (*a*) Johnson: incisos (*a*) 57.4 kN, (*b*) 58.3 kN, (*c*) 58.9 kN, (*d*) 48.3 kN.

2-52. Fila (*a*) incisos (*a*) 18.6 kN, (*b*) 18.7 kN, (*c*) 18.8 kN, (*d*) 17.9 kN.

2-69. $\sigma_i = 132$ MPa, $\sigma_o = -204$ MPa.

2-75. Fila (*a*) $\sigma_{nom} = 40$ MPa, $K_t = 1.838$, $\sigma_{máx} = 73.5$ MPa.

CAPÍTULO 3 TEORÍAS DE FALLA ESTÁTICA

3.1. Fila (*a*) $\sigma_1 = 1\,207$ psi, $\sigma_2 = 0$ psi, $\sigma_3 = -207$ psi, $\tau_{13} = 707$ psi, $\sigma' = 1\,323$ psi.

Fila (*h*) $\sigma_1 = 1\,140$ psi, $\sigma_2 = 250$ psi, $\sigma_3 = 110$ psi, $\tau_{13} = 515$ psi, $\sigma' = 968$ psi.

H

3.4. (*a*) $N = 2.6$, (*b*) $N = 30.2$, (*c*) $N = 39.3$, (*d*) $N = 5.6$, (*e*) $N = 4.1$.

3.6. (*a*) $N = 0.23$, (*b*) $N = 2.7$, (*c*) $N = 3.5$, (*d*) $N = 0.56$, (*e*) $N = 0.47$.

3-7. para $N = 3.5$, $OD = 0.375$ in, $ID = 0.281$ in.

3.8. $ID = 198$ mm.

3.10. $N = 5.3$

3.11. $N = 1.7$.

3-15. por definición, si el esfuerzo = resistencia $N = 1.0$

3-17. $N = 3.5$.

3-19. 2.250 in, diámetro del perno; y 2.250 in radio exterior.

3-22. (*a*) $N = 40.4$ (*b*) $N = 10.1$.

3-23. Fila (*a*): inciso (*a*) $N = 3.4$, (*b*) $N = 1.7$.

3-24. Fila (*a*): inciso (*a*) $N = 0.73$, (*b*) $N = 0.37$.

3-25. Fila (*a*): inciso (*a*) $N = 2$ (*b*) $N = 1$.

3-26. Fila (*a*): inciso (*a*) $N = 9.5$, (*b*) $N = 4.8$.

3-27. (*a*) $a = 166$ mm, $b = 94$ mm, $N = 1.5$, (*b*) $a = 208$ mm, $b = 70$ mm, $N = 1.5$.

3-32. Mohr-Modificado, $N = 1.6$.

3-33. Fila (*a*) $\sigma' = 30.2$ MPa en el punto *A*, $\sigma' = 27.9$ MPa en el punto *B*.

3-34. Fila (*a*) Teoría de energía de distorsión: $N = 13.2$ en el punto *A*, $N = 14.3$ en el punto *B*, teoría del corte máximo: $N = 11.6$ en el punto *A*, $N = 12.4$ en el punto *B*, teoría del esfuerzo normal máximo: $N = 18.6$ en el punto *A*, $N = 24.8$ en el punto *B*.

3-35. Fila (*a*) teoría de Coulomb-Mohr: $N = 13.4$ en el punto *A*, $N = 16.1$ en el punto *B*, teoría de Mohr modificada: $N = 16.3$ en el punto *A*, $N = 21.7$ en el punto *B*.

3-37. (*a*) $N = 1.7$ en la fibra interior; $N = 2.6$ en la fibra exterior; (*b*) $N = 1.0$ en la fibra interior; $N = 4.4$ en la fibra exterior.

3-38. $N = 1.5$.

3-39. Mitad del ancho de la grieta = 0.216 in.

3-41. (*a*) $N = 9.4$, (*b*) $N = 24.5$.

3-65. (*a*) $N_a = 1.8$, (*b*) $N_b = 2.6$.

3-68. $d = 1.500$ in.

CAPÍTULO 4 TEORÍAS DE FALLA POR FATIGA

4-1. Fila (*a*) $\Delta\sigma = 1\,000$, $\sigma_a = 500$, $\sigma_m = 500$, $R = 0$, $A = 1.0$.

Fila (*c*) $\Delta\sigma = 1\,000$, $\sigma_a = 500$, $\sigma_m = 1\,000$, $R = 0.33$, $A = 0.50$.

Fila (*e*) $\Delta\sigma = 1\,500$, $\sigma_a = 750$, $\sigma_m = -250$, $R = -2.0$, $A = -3.0$.

4-3. $N_f = 0.31$.

H

4-6. (*a*) 0.14, (*b*) 1.17, (*c*) 1.6, (*d*) 0.24, (*e*) 0.25.

4-7. para $N_f = 1.5$, $OD = 0.375$ in; $ID = 0.299$ in. Se redondea $ID = 0.281$ in para $N_f = 1.8$.

4-8. $ID = 190$ mm, suponiendo maquinado, 99.9% de confiabilidad, y temperatura ambiente.

4-10. $N_f = 2.4$.

4-11. $N_f = 0.79$.

4-15. Fila (*a*) $a = 0.062$ $\text{in}^{0.5}$, $q = 0.89$, $K_f = 3.05$.

4-17. $N_f = 2.7$ suponiendo forjado, 99.99% de confiabilidad, y temperatura ambiente.

4-19. 2.750 in de diámetro del perno, y 2.625 in de radio exterior (maquinado, 90% de confiabilidad, y 100 °F).

4-22. (*a*) $N_f = 21.3$, (*b*) $N_f = 5.3$ suponiendo maquinado, 99.999% de confiabilidad, y 37 °C.

4-23. Fila (*a*) Se usa material con $S_{ut} = 468$ MPa (suponiendo $C_{temp} = C_{sup} = C_{conf} = 1$).

4-24. Fila (*a*) Se usa material con $S_{ut} = 676$ MPa (suponiendo $C_{temp} = C_{sup} = C_{conf} = 1$).

4-25. Fila (*a*) Se usa material con $S_{ut} = 550$ MPa (suponiendo $C_{temp} = C_{sup} = C_{conf} = 1$).

4-26. Fila (*a*) Se usa material con $S_{ut} = 447$ MPa ($C_{temp} = C_{conf} = 1$, $C_{sup} = 0.895$).

4-27. (*a*) $a = 190$ mm, $b = 100$ mm, $N = 2.1$; (*b*) $a = 252$ mm, $b = 100$ mm, $N = 2$ (suponiendo maquinado en ambos, 90% de confiabilidad y 40 °C).

4-29. $N_f = 2.6$, suponiendo maquinado, 99.999% de confiabilidad y 37 °C.

4-31. $N_f = 1.8$, suponiendo maquinado, 99.999% de confiabilidad y 37 °C.

4-33. Fila (*a*) Se usa material con $S_{ut} = 362$ MPa (maquinado, 50% de confiabilidad y 37 °C).

4-34. Fila (*a*) Se usa material con $S_{ut} = 291$, para $N_f = 1.5$ MPa (maquinado, 50% de confiabilidad y 37 °C).

4-37. (*a*) $N_f = 1.8$, (*b*) $N_f = 0.92$ suponiendo maquinado, 90% de confiabilidad y 37 °C.

4-39. $N_f = 1.9$ usando el método SEQA y suponiendo un eje rectificado, 50% de confiabilidad y 37 °C.

4-41. (*a*) $N_f = 3.3$, (*b*) $N_f = 8.6$ suponiendo maquinado, 99.999% de confiabilidad y 37 °C.

4-47. $N_f = 1.5$ suponiendo maquinado, 90% de confiabilidad y 60 °C.

4-52. $t_{mín} = 3.2$ mm.

4-64. Fila (*a*) $\sigma_m = 0.0$ MPa, $\sigma_a = 251.9$ MPa.

CAPÍTULO 5 FALLA SUPERFICIAL

5-1. $A_r = 0.333$ mm^2.

5-2. $\mu = 0.4$.

5-3. N = 4.6E6.

5-4. $\sigma_1 = -61$ kpsi, $\sigma_2 = -61$ kpsi, $\sigma_3 = -78$ kpsi

5.8. ancho total, 64.4 mm

5-10. ancho total, 0.15 mm

5-13. (*a*) 19.6 min seco, (*b*) 9.8 min lubricado.

5-16. huella de contacto de 1 m de diám., $\sigma_{zbola} = -1\,900$ MPa, $\sigma_{zplaca} = -1\,900$ MPa.

5-18. ancho de contacto total 0.166 mm, $\sigma_{zcilindro} = \sigma_{xcilindro} = -123$ MPa, $\sigma_{zplaca} = \sigma_{xplaca} = -123$ MPa.

5-20. mitad de las dimensiones de la huella de contacto: 0.933 × 0.713 mm, $\sigma_1 = -5.39$ GPa, $\sigma_2 = -5.81$ GPa, $\sigma_3 = -7.18$ GPa.

5-22. (*a*) $\sigma_1 = -66.9$ MPa, $\sigma_2 = -75.2$ MPa, $\sigma_3 = -79.0$ MPa, (*b*) $\sigma_1 = -106$ MPa, $\sigma_2 = -119$ MPa, $\sigma_3 = -125$ MPa.

5-23. $\sigma_1 = -24\,503$ psi, $\sigma_2 = -30\,043$ psi, $\sigma_3 = -57\,470$ psi.

5-39. $t = 4.7$ min.

5-42 Los esfuerzos principales son máximos en la superficie. Son: $\sigma_1 = -276.7$ MPa, $\sigma_2 = -393.3$ MPa, $\sigma_3 = -649.0$ MPa. El esfuerzo cortante máximo es $\tau_{13} = 186.1$ MPa.

H

CAPÍTULO 6 EJES, CUÑAS Y ACOPLAMIENTOS

6-1. Fila (*a*) d = 1.188 in, suponiendo maquinado, 99% de confiabilidad y 100 °F.

6-2. Fila (*a*) d = 48.6 mm, suponiendo maquinado, 99% de confiabilidad y 30 °F.

6-4. Fila (*a*) y = 0.003 6 in, θ = 0.216 grados.

6-5. Fila (*a*) $y = -5.7$ µm, θ = 1.267 grados.

6-6. Fila (*a*) cuña cuadrada de 3/8 in, 0.500 in de largo, $N_f = 2.1$, $N_{cojinete} = 2.1$.

6-8. Eje con ID = 191 mm, suponiendo maquinado, 99.9% de confiabilidad y 30 °C.

6-9. Fila (*a*) d = 1.188 in, suponiendo un radio de la muesca de 0.015 in, maquinado, 99% de confiabilidad y 100 °F.

6-11. Fila (*a*) 0.0007 a 0.0021 in de interferencia en el intervalo de tolerancia.

6-13. Fila (*a*) 2 102 rad/seg o 20 075 rpm, o 334.5 Hz.

6-15. Fila (*a*) mín = 0, prom = 11.9 hp, máx = 23.8 hp.

6-16. Fila (*a*) mín = 0, prom = 5.2 kW, máx = 10.5 kW.

6-17. Fila (*a*) N = 0.61 en la cuña del extremo derecho del rodillo, θ = 0.20 grados, f_n = 1 928 Hz.

6-18. Fila (*a*) $y = -30.0$ µm a 22.9 µm.

6-19. Fila (*a*) d = 1.337 in, $N_A = 2.0$, $N_B = 3.1$.

6-37. $\delta_{mín}$ = 0.06 mm, $\delta_{máx}$ = 0.12 mm.

6-38. r_i = 1.00 in, r_o = 14.66 in, t = 0.800 in.

CAPÍTULO 7 COJINETES Y LUBRICACIÓN

7-1. Fila (*a*): inciso (*a*) d = 1.188 in, l = 1.485 in, C_d = 1.8*E*-3 in, R_L = 125 lb, R_R = 1125 lb, η_L = 0.204 µreyn, η_R = 1.84 µreyn, p_{promL} = 71 psi, p_{promR} = 638 psi, T_{rL} = 0.15 lb-in, T_{rR} = 1.38 lb-in, Φ_L = 0.004 hp, Φ_R = 0.033 hp.

Inciso (*b*) cojinete #6300 en el extremo izquierdo da 1.4*E*9 ciclos de vida L_{10} a la izquierda del cojinete y da 8.8*E*7 ciclos de vida L_{10} a la derecha del cojinete.

7-3. 267 cP.

7-5. 0.355 in-lb.

7-6. 10.125 µm.

7-7. T_r = 3.74 N-m, T_0 = 2.17 N-m, T_s = 2.59 N-m, Φ = 979 W.

7-8. d = 220 mm, l = 165 mm, C_d = 0.44 mm, $R_L = R_R$ = 26.95 kN, η = 181 cP, p_{prom} = 743 kPa, T_r = 12.9 N-m, Φ = 67.7 W.

7-10. $h_{mín}$ = 4.94 µ.

7-14. η = 13 cP, T_s = 519 N-mm, T_0 =325 N-mm, T_r = 699 N-mm, Φ = 183 W, P =19.222 kN.

7-17. Fila (*a*): inciso (*a*) d = 40 mm, l = 30 mm, C_d = 0.04 mm, R_L = 6 275 N, R_R = 7 525 N, η_L = 20.7 cP, η_R = 24.8 cP, p_{promL} = 5 229 kPa, p_{promR} = 6 271 kPa, T_{rL} = 468 N-m, T_{rR} = 561 N-m, Φ_L = 88.2 W, Φ_R = 106 W.

Inciso (*b*) cojinete #6308 en el extremo izquierdo da 1.41*E*8 ciclos de vida L_{10} a la izquierda del cojinete y cojinete #6309 en el extremo izquierdo da 1.58*E*8 ciclos de vida L_{10} a la derecha del cojinete.

7-20. Espesor específico de la película = 0.53, lubricación límite.

7-33. Fila (*a*) izquierda, #6300, derecha, #6314.

7-36. Fila (*a*) izquierda, #6300, derecha, #6320.

CAPÍTULO 8 ENGRANES RECTOS

8-1. $d_p = 5.4$ in, adéndum = 0.2 in, dedéndum = 0.25 in, $OD = 5.8$ in, $p_c = 0.628$ in.

8-3. 1.491.

8-5. 30.33 grados.

8-7. 7.159:1.

8-9. 96:14 y 96:14 compuesto da 47.02:1.

8-11. $N_{anillo} = 75\ t$, razón entre el brazo y el engrane solar = 1:3.273.

8-14. 7 878 in-lb sobre el eje del piñón, 19 524 in-lb sobre el eje del engrane.

8-16. $p_d = 3$ y $F = 4.25$ in da $N_{piñón} = 5.4$ y $N_{engrane} = 2.0$.

8-18. $p_d = 4$, $F = 4.125$ in da $N_{piñón} = 3.5$ y $N_{engrane} = 2.0$.

8-20. 202 N-m (1 786 in-lb) sobre el eje solar, 660 N-m (5 846 in-lb) sobre el brazo.

8-23. $p_d = 3$, $F = 3.500$ in da $N_{piñón} = 7.7$ y $N_{engrane} = 2.8$.

8-25. $p_d = 4$, $F = 4.000$ in da $N_{piñón} = 4.8$ y $N_{engrane} = 1.8$.

8-27. $T_1 = 1\ 008$ N-m, $T_2 = 9\ 184$ N-m, $T_3 = 73\ 471$ N-m, $T_4 = 661\ 236$ N-m.

8-28. $p_d = 3$, $F = 4.500$ in.

8-29. $p_d = 1.5$, $F = 9.375$ in.

8-30. $p_d = 0.75$, $F = 17$ in.

8-31. 104:12 y 144:16 compuesto da exactamente 78:1.

8-52. $T_1 = 40.9$ N-m, $T_2 = 295$ N-m, $T_3 = 2\ 172$ N-m.

8-53. $F = 1.250$ in, $p_d = 8$.

CAPÍTULO 9 ENGRANES HELICOIDALES, BISELADOS Y SIN FIN

9-1. $d_p = 5.4$ in, adéndum = 0.200 in, dedéndum = 0.250 in, $OD = 5.8$ in, $p_t = 0.628$ in, $p_n = 0.544$ in, $pa = 1.088$.

9-3. $m_p = 1.491$, $m_F = 0.561$.

9-5. $\alpha_g = 83.66°$, $\alpha_p = 6.34°$, $d_g = 21$ in, $d_p = 2.33$ in, $W_{ag} = W_{rp} = 25$ lb, $W_{rg} = W_{ap} = 2.8$ lb.

9-7. $\alpha_g = 78.69°$, $\alpha_p = 11.31°$, $d_g = 11.429$ in, $d_p = 2.286$ in, $W_{ag} = 60.5$ lb, $W_{ap} = -169.64$ lb, $W_{rp} = 136.28$ lb, $W_{rg} = 209.01$ lb.

9-9. $l = 20$ mm, $\lambda = 7.26°$, λ por diente = 3.63°, $d_g = 140$ mm, $c = 95$ mm, autobloqueo.

9-11. $l = 5$ mm, $\lambda = 2.28°$, λ por diente = 2.28°, $d_g = 130.5$ mm, $c = 85.3$ mm, autobloqueo.

9-12. $T_w = 22.4$ N-m, $T_g = 492$ N-m calibrado, $W_t = 7\ 028$ N, fricción = 215 N, potencia de salida disponible = 2.34 kW, potencia de entrada calibrada = 2.91 kW.

9-14. 7 878 in-lb sobre el piñón, 19 524 in-lb sobre el engrane.

9-16. $p_d = 3$ y $F = 3.25$ in da $N_{piñón} = 5.6$ y $N_{engrane} = 2.0$.

9-18. $p_d = 4$ y $F = 2.75$ in da $N_{piñón} = 2.8$ y $N_{engrane} = 1.6$.

9-20. $p_d = 18$ y $F = 1$ in da $N_{piñón} = 2.0$, flexión, con $N_{engrane} = 13.6$, flexión.

9-23. $p_d = 16$ y $F = 1$ in da $N_{piñón} = 1.4$, falla superficial que limita el diseño.

9.27. Potencia calibrada de entrada = 2.11 hp, potencia de salida disponible = 1.69 hp, torque calibrado de salida = 1 290 lb-in.

9.49. $F = 1.375$ in, $p_d = 10$.

CAPÍTULO 10 DISEÑO DE RESORTES

10.1. $k = 1.6$ N/mm.

10.3. $S_{ys} = 110\ 931$ psi, $S_{us} = 148\ 648$ psi.

10.4. $S_{fs'} = 85.6$ kpsi.

10.6. $C = 10$, $k = 1.01$ N/mm.

10.7. $f_n = 363.4$ Hz.

10.10. $k = 7\ 614$ N/m, $f_n = 1.39$ Hz.

10-11. $d = 0.125$ in, $D = 0.94$ in, $L_f = 3.16$ in, $k = 36$ lb/in, 13.75 espiras RH, alambre musical, cuadrado y extremos esmerilados, sin granallado, con asentamiento.

10-13. $N_a = 19.75$, $D = 1.37$ in, $L_f = 7.84$, $L_{sólida} = 6.79$ in, $k = 266.6$ lb/in, $y_{inicial} = 0.19$ in, orificio 1.75 in.

10-17. $d = 3.5$ mm, $D = 28$ mm, $L_f = 93.63$ mm, $k = 5876$ N/m, 12.75 espiras, alambre musical, ganchos estándar, $N_y = 2.2$ fatiga por torsión en el gancho, $N_f = 1.7$ fatiga por flexión en el gancho, $N_{oscilación} = 5.5$.

10-19. $d = 6.5$ mm, $D_o = 65$ mm, $L_f = 171$ mm, $N_{tot} = 10.75$ espiras, $N_y = 1.6$ sólida, $N_f = 1.3$, $N_{oscilación} = 9.3$.

10-21. $d = 5$ mm, $D = 40$ mm, $L_f = 116.75$ mm, $k = 8\ 967$ N/m, 13 espiras RH, alambre musical, extremos estándar esmerilados, sin granallado, asentado.

10-22. $d = 16$ mm, $D = 176$ mm, $k = 1\ 600$ N-m/rev, 4.5 espiras RH, extremos rectos de 40 mm, alambre A229 revenido en aceite, sin granallado, mitigado.

10-24. $d = 15$ mm, $D = 124.5$ mm, $k = 248$ N-m/rev, 31 espiras RH, extremos rectos de 40 mm, alambre A229 revenido en aceite, sin granallado, mitigado.

H

10-26. $d_o = 39.55$ mm, $d_i = 19.77$ mm, $t = 0.76$ mm, $h = 1.075$ mm, $h/t = 1.414$, 1 mm de deflexión de trabajo, $S_{ut} = 1\ 700$ MPa, $N_s = 1.11$.

10.42. $D_o = 3.000$ in, $D_i = 1.500$ in, $t = 0.125$ in, $h = 0.050$ in.

10-44. Alambre A228, $d = 0.125$ in, $D_o = 1.000$ in, $N_t = 15$, $L_f = 3.600$ in.

CAPÍTULO 11 TORNILLOS Y SUJETADORES

11-2. Torque de elevación = 42.68 lb-in, torque de descenso = 18.25 lb-in, eficiencia de elevación = 27.95%, eficiencia de descenso = 65.36%, el tornillo es de autobloqueo.

11-4. Dos pernos M12 × 1.75, clase ISO 8.8, $F_{precarga} = 59\%$ de la resistencia de prueba, $N_y = 1.7$, $N_{sep} = 2.5$.

11-6. Dos pernos M24 × 3, clase ISO 12.9, $F_{precarga}$ = 55% de la resistencia de prueba, $N_y = 1.7$, $N_{sep} = 1.6$.

11.7. $N_y = 1.4$, $N_{sep} = 13.7$.

11.9. $N_f = 1.3$, $N_y = 1.5$, $N_{sep} = 8.9$.

11.11. 1 252 in-lb.

11.13. 718 in-lb.

11-17. (*a*) $K_{ef} = 5.04E9$ N-m, domina el aluminio.

(*b*) $K_{ef} = 9.52E9$ N-m, domina el acero.

(*c*) $K_{ef} = 2.73E8$ N-m, domina el caucho.

(*d*) $K_{ef} = 2.66E8$ N-m, domina el caucho.

(*e*) $K_{ef} = 9.04E9$ N-m, ningún material domina.

11-18. (*a*) $K_{ef} = 2.74E7$ N-m, domina el aluminio.

(*b*) $K_{ef} = 5.18E7$ N-m, domina el acero.

(*c*) $K_{ef} = 3.73E5$ N-m, domina el caucho.

(*d*) $K_{ef} = 3.70E5$ N-m, domina el caucho.

(*e*) $K_{ef} = 4.92E7$ N-m, ningún material domina.

11-20. Se usan 10 tornillos de cabeza M12 × 1.75, clase ISO 8.8, con un torque del 90% de la resistencia de prueba sobre un círculo de perno de 107.5 mm de diám. $N_f = 1.3$, $N_{sep} = 34$, $N_y = 1.2$ dinámica y 1.2 estática.

11-23. Fila (*a*): Cuatro tornillos de cabezaM5 × 0.8 × 20 mm de largo, clase 4.6, $F_{precarga}$ = 1.72 kN (54% de la resistencia de prueba), cargado en la parte superior del tornillo: 1.73 kN, $N_{sep} = 58$, $N_y = 2.0$.

11.24. Fila (*a*): Cuatro tornillos de cabeza M4 × 0.7 × 20 mm de largo, clase 4.8, $F_{precarga}$ = 2.04 kN (75% de la resistencia de prueba), carga en la parte superior de los tornillos cuando la fuerza es máxima y en la parte inferior cuando la fuerza es mínima: 2.05 kN, carga en la parte superior de los tornillos cuando la fuerza es mínima y en la parte inferior de los tornillos cuando la fuerza es máxima: 2.05 kN, $N_y = 1.5$, $N_{sep} = 69$, $N_f = 10$.

11-25. Fila (*a*): Cuatro tornillos de cabeza M4 × 0.7 × 20 mm de largo, clase 4.8, $F_{precarga}$ = 2.04 kN (75% de la resistencia de prueba), carga arriba de los tornillos cuando la fuerza es máxima y en la parte inferior cuando la fuerza es mínima: 2.05 kN, carga en la parte superior de los tornillos cuando la fuerza es mínima y en la parte inferior de los tornillos cuando la fuerza es máxima: 2.05 kN, $N_y = 1.5$, $N_{sep} = 69$, $N_f = 10$.

11-39. d = 8 mm: número de cuerdas = 4.6.

11-41. Clase 4.6: F_{ut} = 98 kN.

H

CAPÍTULO 12 SOLDADURA

12-1. Una soldadura CJP de culata en tensión desarrolla la resistencia completa de la sección: $P_{máx}$ = 180 000 lb.

12-3. Longitud del soporte (soldadura) = 3.592 in.

12-5. Carga máxima dinámica = 525 lb.

12-6*a*. Tamaño requerido de la soldadura = 3/16 in.

12-7*a*. Tamaño requerido de la soldadura = 1/4 in.

12-9. Tamaño requerido de la soldadura = 10 mm.

CAPÍTULO 13 EMBRAGUES Y FRENOS

13-1. T = 380 N-m, $p_{máx}$ = 1.819 MPa, funcionará un recubrimiento de metal moldeado o aglomerado.

13-3. d_o = 140 mm, d_i = 80 mm, Φ = 7.85 kW.

13-5. N = 7, d_o = 104 mm, d_i = 60 mm, Φ = 12.6 kW.

13-7. (*a*) T = 10.7 N-m, F_a = 798 N,
(*b*) Se bloqueará cuando c = 233 mm.

13-11. (*a*) T = 30.5 N-m (15.7 zapata superior, 14.8 zapata inferior), F_a = 1 353 N,
(*b*) Se bloqueará cuando c = 320 mm.

13-13. T = 26 N-m, F_a = 1 689 N.

13.15. T = 56.5 N-m (32.5 zapata superior, 24 zapata inferior), F_a = 2 194 N.

13-7.	(*a*)	zapata corta:	T = 11.3 N-m,	F_a = 806 N,
		zapata larga:	T = 11.2 N-m,	F_a = 750 N,
	(*b*)	zapata corta:	T = 15.1 N-m,	F_a = 1 075 N,
		zapata larga:	T = 14.8 N-m,	F_a = 982 N,
	(*c*)	zapata corta:	T = 18.8 N-m,	F_a = 1 344 N,
		zapata larga:	T = 18.3 N-m,	F_a = 1 197 N,
13-8.	(*a*)	zapata corta:	T = 21.8 N-m,	F_a = 806 N,
		zapata larga:	T = 19.6 N-m,	F_a = 750 N,
	(*b*)	zapata corta:	T = 29.1 N-m,	F_a = 1 075 N,
		zapata larga:	T = 25.8 N-m,	F_a = 982 N,
	(*c*)	zapata corta:	T = 36.3 N-m,	F_a = 1 344 N,
		zapata larga:	T = 31.9 N-m,	F_a = 1 197 N.

13-21.	Pivote superior:	R_x = −392.7 N,	R_y = −218.2 N,
	Pivote inferior:	R_x = −368.9 N,	R_y = −123.0 N.

13-23. R_x = 1 005 N, R_y = −808 N.

13-25.	Pivote superior:	R_x = 1 694 N,	R_y = −45.3 N,
	Pivote inferior:	R_x = 325 N,	R_y = −147.7 N.

13-29. T = 131 N-m/

13-31. Metal aglomerado, m = 0.30, r_i = 40 mm, r_o = 70 mm, q = 90 grados, F = 2.83 kN.

H

ÍNDICE

D

I

E

I

F

G

H

I

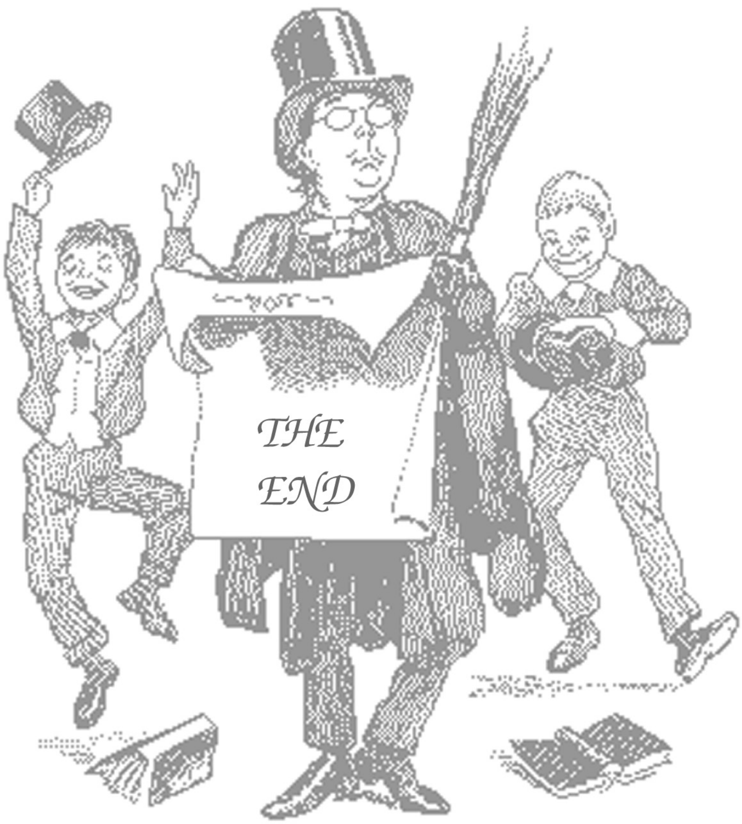
J

L

M

I

I


THE
END